Relazioni tra funzioni goniometriche e formule

Le relazioni fondamentali:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Conseguenza immediate:

$$sin^2x = 1 - cos^2x \rightarrow \sin(x) = \pm\sqrt{1 - cos^2x}$$

$$cos^2x = 1 - sin^2x \rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{1 - sin^2x}$$

Altre relazioni:

Se conosciamo	Vogliamo ricavare		
	sin	cos	tan
$sin(\alpha)$		$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$	$\tan(\alpha) = \pm\frac{sin(\alpha)}{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}$
$cos(\alpha)$	$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$		$\tan(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}{cos\alpha}$
$\tan(\alpha)$	$\sin(\alpha) = \pm\frac{tan(\alpha)}{\sqrt{1 + tan^2\alpha}}$	$\cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + tan^2\alpha}}$	

Formule

Formule di addizione e sottrazione

Funzione	Formula di addizione	Formula di sottrazione
seno	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
coseno	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
tangente	$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$

Formule di duplicazione e di bisezione

Funzione	Formula di duplicazione	Formula di bisezione
seno	$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
coseno	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\begin{cases}1-2\operatorname{sen}^2\alpha\\2\cos^2\alpha-1\end{cases}$	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
tangente	$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ solo se: $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\wedge\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ solo se $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$ solo se $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $=\dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ solo se $\alpha\neq\pi+k\pi$
		il segno del radicale dipende dal quadrante in cui si trova il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$

- Sono utili anche le formule: $\operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Formule parametriche

- $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, con $\alpha\neq\pi+2k\pi$;
- $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, con $\alpha\neq\pi+2k\pi$.

Formule di prostaferesi

- $\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$;
- $\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$;
- $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$;
- $\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$.

Formule di Werner

- $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;
- $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;
- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$.