Università del Salento

Dipartimento di Matematica

Il Problema del

Commesso Viaggiatore

Chefi TRIKI

Dal Rompicapo … alla Teoria dei Grafi

Kalinigrad

Fiume Pregel

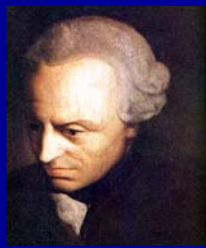
Ex-città Prussiana

Dal Rompicapo … alla Teoria dei Grafi

Königsberg

Mappa di Königsberg del 1613

(di Joachim Bering)



KANT

7 PONTI

Dal Rompicapo … alla Teoria dei Grafi

Rompicapo:

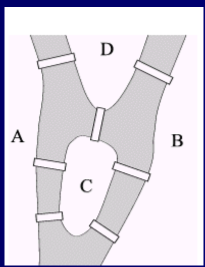
E' possibile fare una passeggiata che:

- partendo e tornando allo stesso punto
- attraversi tutti i ponti
- una ed una sola volta

Dal Rompicapo … alla Teoria dei Grafi

Leonhard Euler (1707—1783)

risolse il problema nel 1735



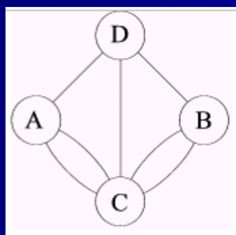


Figura 2

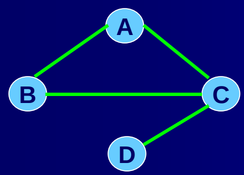
Dal Rompicapo … alla Teoria dei Grafi

Mostrare Filmato su Eulero e la sua soluzione al problema (~ 2′ e 40″)

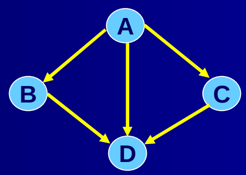
Teoria dei Grafi: Definizioni

Grafo G=(V,E): rappresenta le interazioni tra coppie di oggetti

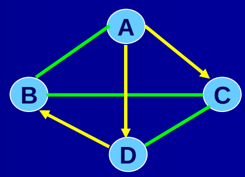
- V: insieme di nodi/vertici ={A, B, C, D}
- E: insieme di archi = { (A,B), (A,C), (C,B), (C,D) }



Grafo non orientato



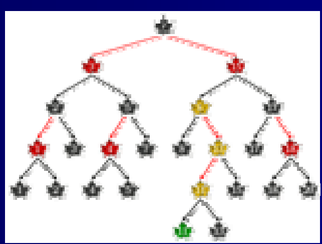
Grafo orientato



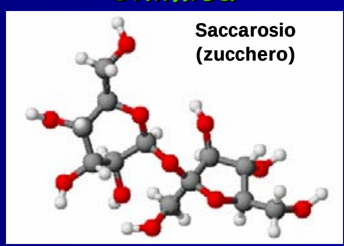
Grafo misto

Esempi di Grafi

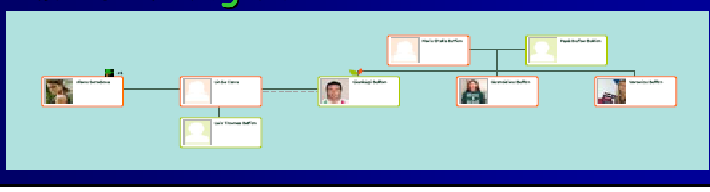
Scienze delle Decisioni



Chimica



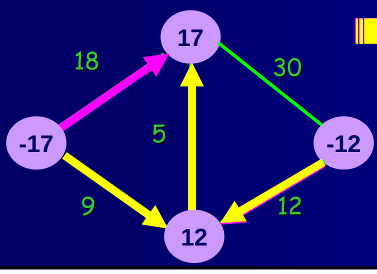
Scienze Genealogiche



Dai Grafi … alle Reti

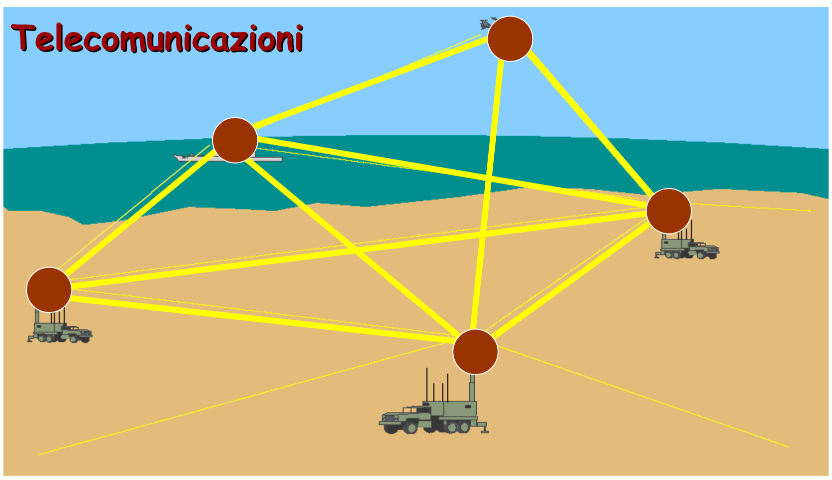
Rete: associare al grafo dei parametri

- Nodi: domanda, offerta, …
- Archi: capacità, costo, tempo …



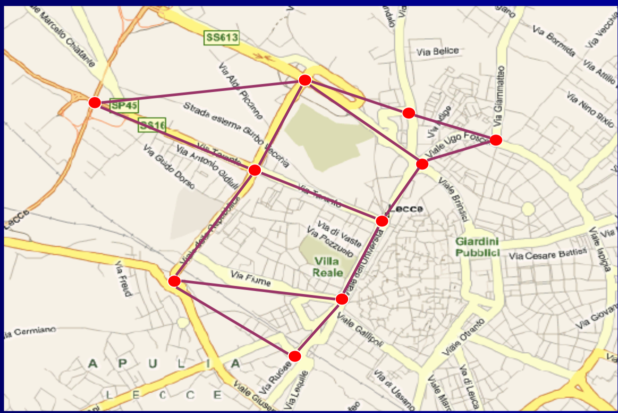
➡ Ottimizzare il flusso

Esempi di Reti



Esempi di Reti

Traffico Urbano

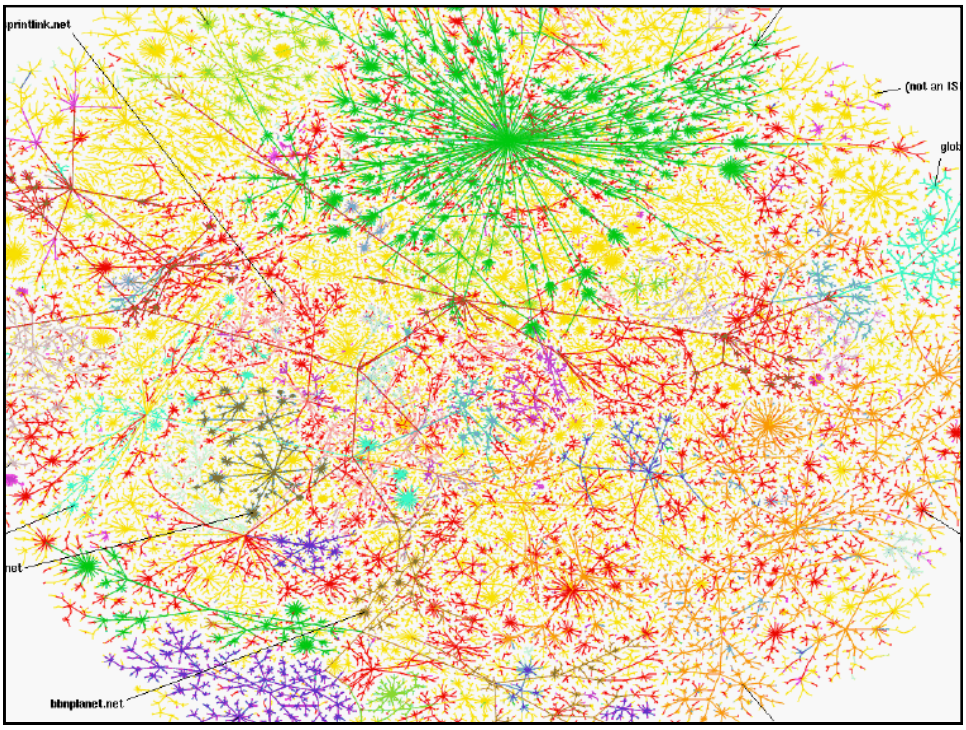


Altre Reti ?

Elettrica

Idrica

Sociale



Reti di Trasporto

Reti di Trasporto

Problemi:

- Commesso Viaggiatore
- Instradamento dei Veicoli

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Decidere in quale ordine visitare *N* città (una e una sola volta) minimizzando la distanza percorsa e tornando alla città di partenza

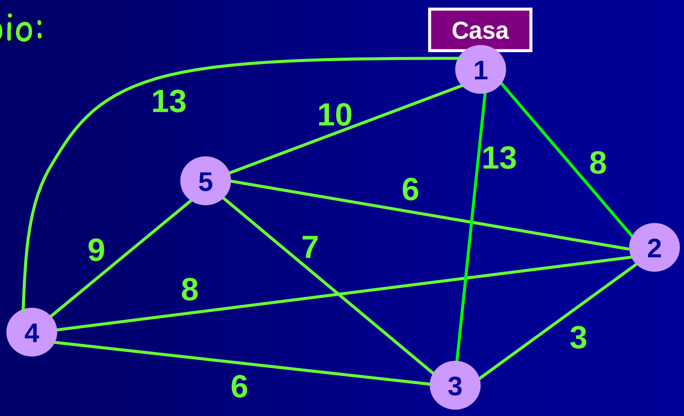
In altri termini: determinare in un grafo un ciclo Hamiltoniano a costo (distanza) minimo

Definizione: un ciclo è detto Hamiltoniano se visita tutti i nodi del grafo una e una sola volta

⇨ Semplice da enunciare ma difficile da risolvere

Il Problema del Commesso Viaggiatore

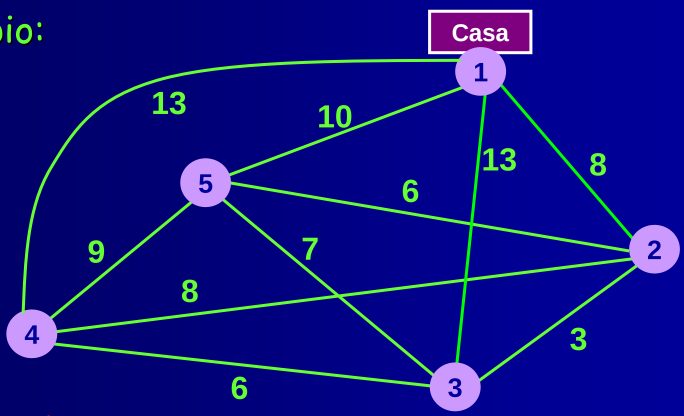
Esempio:



- Quante soluzioni (cicli Hamiltoniani) ci sono?
- Qual è quella migliore (minima distanza)?

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio:



- Qual è la soluzione migliore?

Volete Provare?

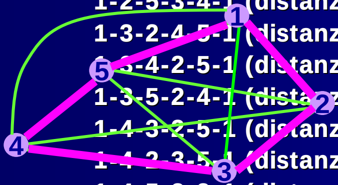
Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio:

- Quante soluzioni (cicli Hamiltoniani) ci sono?
- Qual è la soluzione migliore?

Le soluzioni sono 24 (?)

Ciclo 1-2-3-4-5-1 (percorrendo 36 km)



1-2-3-4-5-1 (distanza 36),	1-2-3-5-4-1 (distanza 38),
1-2-4-3-5-1 (distanza 42),	1-2-4-5-3-1 (distanza 40),
1-2-5-3-4-1 (distanza 40),	1-2-5-4-3-1 (distanza 44),
1-3-2-4-5-1 (distanza 48),	1-3-2-5-4-1 (distanza 46),
1-3-4-2-5-1 (distanza 48),	1-3-4-5-2-1 (distanza 44),
1-3-5-2-4-1 (distanza 44),	1-3-5-4-2-1 (distanza 40),
1-4-3-2-5-1 (distanza 38),	1-4-3-5-2-1 (distanza 40),
1-4-2-3-5-1 (distanza 44),	1-4-2-5-3-1 (distanza 44),
1-4-5-3-2-1 (distanza 38),	1-4-5-2-3-1 (distanza 46),
1-5-3-4-2-1 (distanza 42),	1-5-3-2-4-1 (distanza 44),
1-5-4-3-2-1 (distanza 36),	1-5-4-2-3-1 (distanza 48),
1-5-2-3-4-1 (distanza 38),	1-5-2-4-3-1 (distanza 48).

ma è ...

... unica?

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Numero delle soluzioni:

- Cresce rapidamente con il numero di città da visitare

Numero delle soluzioni:

5 città	120	soluzioni
10 città	362880	soluzioni
12 città	19958400	soluzioni
20 città	$24 * 10^{17}$	soluzioni

- **Ci arrendiamo????**

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Non per questo si deve esagerare…

E. Hofmann, *La Repubblica*, 24 settembre 2001

"Le farò allora un esempio elementare. **Supponga di avere alle sue dipendenze un rappresentante di commercio che debba visitare quattro città**. Naturalmente vorrà calcolare il percorso che questo signore deve fare nel modo più efficiente possibile, in modo da rendere minimi gli spostamenti e quindi il costo.
Ebbene, con i computer normali, di oggi,
il problema non è risolvibile. Ci si può impazzire sopra notti intere. Non è risolvibile. Non le dico cosa succede se poi le città invece di quattro diventano venti.
Le conviene non cominciare nemmeno".

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Un po' di storia:

- 1853: Sir William Rowan Hamilton e l'ecosiano

Dal Rompicapo … alla Teoria dei Grafi

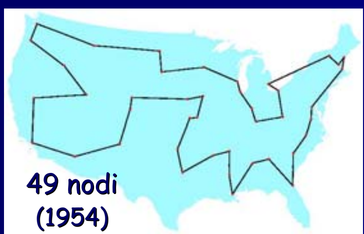
Mostrare Filmato su Hamilton
E il suo gioco

(pochi secondi)

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Un po' di storia:

- Anni 1920-30: Karl Menger studiò il problema
- Anno 1954: Dantzig-Fulkerson-Johnson risolsero il problema con 49 nodi (capitali statunitensi)



49 nodi
(1954)

532 nodi
(1987)

13509 nodi
(1998)

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Un po' di storia:

- Anno 1962:

  Procter & Gamble

  bandì un concorso

  per trovare il tour

  ottimo su 33 città

- Anno 1977

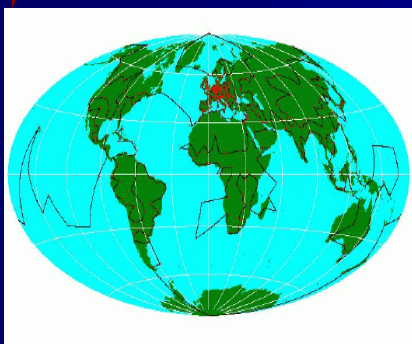
Concorso Procter & Gamble

120 città tedesche

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Un po' di storia:

- Anno 1987:



666 città turistiche

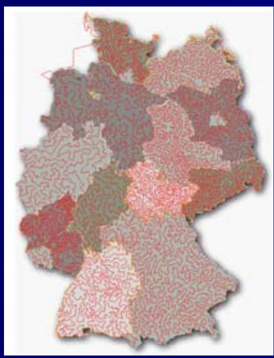
- Anno 1994

7397 nodi di un circuito elettronico

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Un po' di storia:

- Anno 2001



15112 città tedesche

- Anno 2004

24978 città svedesi

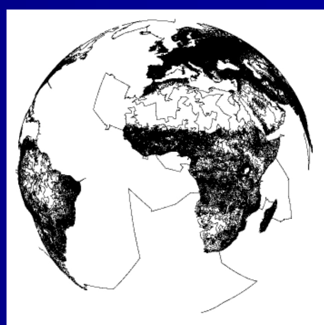
Il Problema del Commesso Viaggiatore

Curiosità:

- Anno 2007

Ron Schreck in 109 aeroporti della Nord Carolina in un solo giorno

- Anno ???



Giro del mondo
1,904,711 città

Esempio

L'AZIENDA SANITARIA di Lecce sta pianificando la realizzazione di un nuovo servizio di assistenza per i tossicodipendenti. Il servizio prevede l'allestimento di un laboratorio di analisi cliniche, ubicato presso il presidio ospedaliero "Vito Fazzi" di Lecce, da utilizzare per eseguire le analisi cliniche sui campioni di sangue prelevati agli utenti presso i presidi ospedalieri di Lecce, S. Cesario, Copertino, Martano, Galatina, Nardò e Campi Salentina.

Esempio

Esempio

In ogni giorno feriale, è previsto che un autista ritiri i campioni di sangue e, contemporaneamente, consegni i risultati degli esami clinici effettuati sui campioni di sangue prelevati il giorno feriale precedente. Per stabilire la rotta da seguire, si risolve un problema del commesso viaggiatore. In tabella sono riportate le distanze chilometriche tra i 7 presidi ospedalieri:

	Presidi Ospedalieri						
	Lecce	S. Cesario	Copertino	Martano	Galatina	Nardò	Campi S.
Lecce	0	6	14	24	23	28	17
S. Cesario		0	16	22	16	24	20
Copertino			0	26	15	12	15
Martano				0	13	28	40
Galatina					0	13	38
Nardò						0	26
Campi S.							0

Esempio

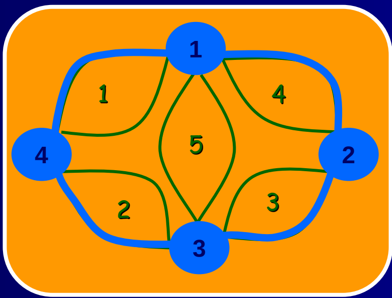
Risolviamo insieme il problema:

- Con l'intuito (a mano)
- usando il LINGO: da dove cominciare?

➔ Modello Matematico

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico:



E' sufficiente?

Proviamo con l'esempio

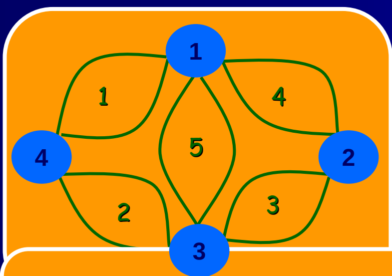
Minimizzare: costo di trasporto

Soggetto a: per ciascun nodo

di archi entranti = # di archi uscenti = 1

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico:



Soggetto a:

Minimizzare: costo di trasporto

Soggetto a: per ciascun nodo

di archi entranti = # di archi uscenti = 1

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico

Consideriamo il caso di un grafo **orientato**

➡ insieme degli Archi A

Sia:

- c_{ij} costo associato all'Arco $(i, j) \in A$
- x_{ij} variabile decisionale di tipo binario, avente valore 1 se l'Arco $(i, j) \in A$ fa parte del ciclo orientato hamiltoniano, 0 altrimenti

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico

$$Min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$s.a$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \; j \in V \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 1, \; i \in V \qquad \text{(b)}$$

Vincoli di Connettività (c)

$x_{ij} \in \{0, 1\}, (i, j) \in A$ (d)

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico

- Vincoli (a): stabiliscono che il ciclo orientato hamiltoniano deve essere caratterizzato da un solo arco entrante in ogni vertice $j \in V$
- Vincoli (b): garantiscono che il ciclo orientato hamiltoniano abbia un solo arco uscente da ogni vertice $i \in V$
- I vincoli (c) possono essere formulati in due modi alternativi, algebricamente equivalenti

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico

- *Connectivity Constraints*

  stabiliscono che il ciclo orientato hamiltoniano abbia almeno un arco uscente da ogni sottoinsieme non vuoto S di vertici in V

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1, \; S \subset V, \; |S| \geq 2 \qquad \text{(e)}$$

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico

- *Subtour Elimination Constraints*

  impongono l'assenza di cicli orientati contenenti meno di |*S*| vertici

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1,\ S \subset V,\ |S| \geq 2\ . \qquad \text{(f)}$$

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Modello Matematico

- Se *S* contenesse un solo vertice, il corrispondente vincolo (e) sarebbe ridondante, a causa della contemporanea presenza nel modello dei vincoli (b)
- Analogo discorso vale per il vincolo (f) nel caso in cui |*S*| fosse pari a 1
- Ciò spiega il motivo per cui nei vincoli (e) ed (f) si impone che i sottoinsiemi *S* di *V* siano di almeno due vertici

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Metodi di Soluzione

- La presenza dei vincoli di connettività rende il problema *NP*-difficile
- In alcune applicazioni è sufficiente trovare una soluzione approssimata
- E' necessario avere qualche garanzia sulla qualità della soluzione approssimata rispetto a quella ottima
- Metodo che produce una soluzione di buona qualità su un grafo orientato ⇒ Algoritmo delle "Toppe"

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Algoritmo delle Toppe (patching method)

Consente di generare una soluzione ammissibile per il problema del commesso viaggiatore tramite:

- L'eliminazione (o rilassamento) dei vincoli di connettività (si ottiene il *Problema di Assegnamento)*

  ⇒ Collezione di cicli orientati C_1, C_2, …, C_p che coprono tutti i vertici del grafo orientato
- Fusioni dei cicli orientati (con minimo incremento di costo) finché non si ottenga un ciclo Hamiltoniano

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Algoritmo delle Toppe

Problema di Assegnamento:

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \; j \in V \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 1, \; i \in V \qquad \text{(b)}$$

$$\boxed{x_{ij} \geq 0, \quad i, j \in V}$$

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

- ELLISSE è un laboratorio specializzato nella produzione artigianale di dolciumi con sede a Napoli nei pressi di Via Partenope
- Ogni giorno alle 6:30 un furgone trasporta i prodotti dolciari ai punti vendita che ne fanno richiesta
- Il numero di clienti e i corrispettivi quantitativi richiesti sono estremamente variabili, ma mai di entità tale da superare la capacità di un furgone

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

- Le consegne possono, pertanto, essere effettuate con un unico viaggio senza necessità di approvvigionamenti intermedi presso il laboratorio
- Il problema consiste nella determinazione della rotta giornaliera di costo minimo per il furgone, in modo tale da soddisfare tutte le richieste
- Si assume che i costi di trasporto siano proporzionali alle distanze coperte

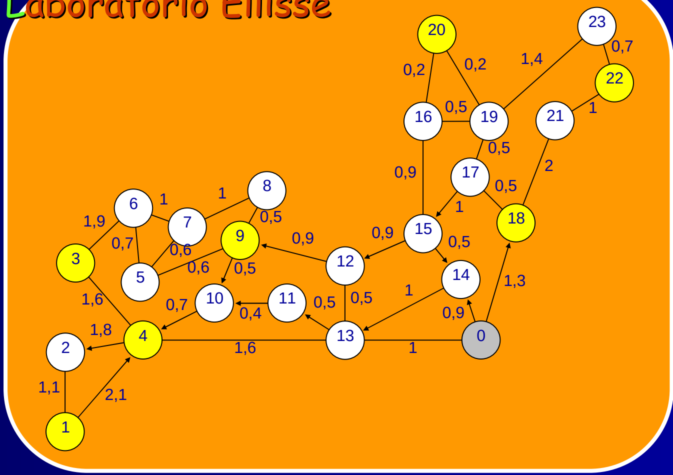
Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio

- In figura è schematizzato il grafo misto $G(V, A, E)$ relativo alla zona di Napoli interessata alle consegne effettuate l'8 luglio scorso
- Problema di commesso viaggiatore su un grafo orientato con 8 nodi (e 56 archi):
  - Clienti da servire: vertici 1, 3, 4, 9, 18, 20 e 22
  - Laboratorio ELLISSE: vertice 0

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse



Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

. . . dove:

- gli archi corrispondono a strade a senso unico
- gli spigoli corrispondono a strade a doppio senso di circolazione con uguale costo di percorrenza
- d_{ij} nel grafo viene riportata la distanza (in km) tra i vertici *i* e *j*

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

- Ad ogni arco (i, j) è associato un costo c_{ij} corrispondente alla lunghezza del percorso ottimo da i a j determinato sul grafo di partenza

	Vertice							
	0	1	3	4	9	18	20	22
Vertice 0	0	5,5	4,2	2,6	2,4	1,3	2,5	4,3
Vertice 1	4,7	0	3,7	2,1	5,1	6	7,2	9
Vertice 3	4,2	4,5	0	1,6	3,2	5,5	6,7	8,5
Vertice 4	2,6	2,9	1,6	0	3	3,9	5,1	6,9
Vertice 9	3,8	4,1	2,8	1,2	0	5,1	6,3	8,1
Vertice 18	3,9	7,4	6,1	4,5	3,3	0	1,2	3
Vertice 20	3,5	7	5,7	4,1	2,9	1,2	0	2,3
Vertice 22	5,9	9,4	8,1	6,5	5,3	3	2,3	0

Lunghezza (in km) del percorso ottimo tra ogni coppia di nodi

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

- Risolvendo il problema dell'assegnamento, si ottiene la soluzione ottima a cui corrispondono i seguenti tre cicli orientati:

$C_1 = \{(1,3), (3,4), (4,1)\}$, di costo pari a 8,2 km

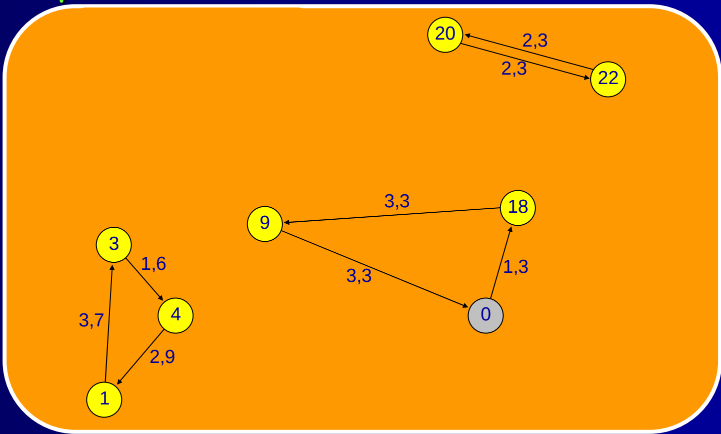
$C_2 = \{(0,18), (18,9), (9,0)\}$, di costo pari a 8,4 km

$C_3 = \{(20,22), (22,20)\}$, di costo pari a 4,6 km

➡ Costo totale della soluzione pari a 21.2 km

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse



Soluzione ottima del problema di assegnamento

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

Per determinare un ciclo Hamiltoniano sono necessarie due iterazioni

- Iterazione 1: si ottengono due cicli orientati:

C_1 = {(1,3), (3,4), (4,1)}

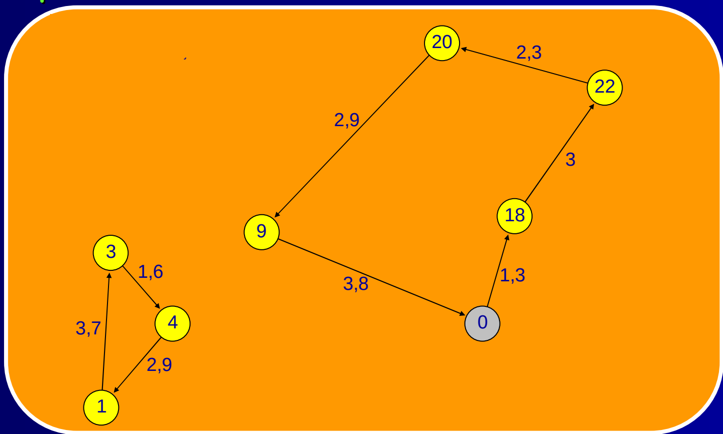
➡ costo pari a 8,2 km

C_4 = {(0,18), (18,22), (22,20), (20,9), (9,0)}

➡ costo pari a 12,8 km

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse



C_4 ottenuto dalla fusione di C_2 e C_3: incremento di costo 0,3 km

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

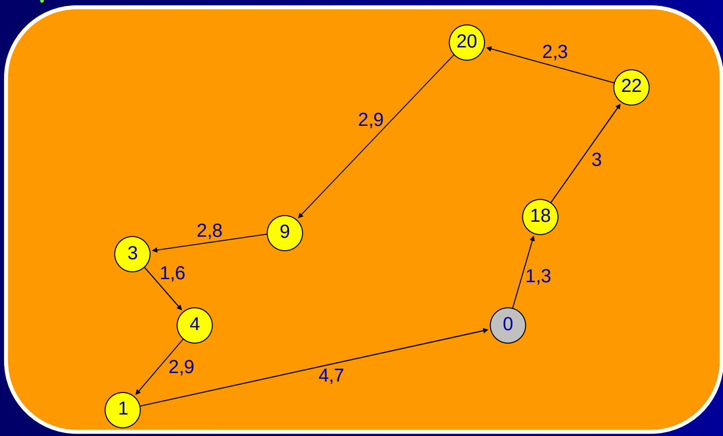
- Iterazione 2: i cicli orientati C_1 e C_4 sono fusi attraverso la rimozione degli archi (1,3) e (9,0) e l'inserimento degli archi (9,3) e (1,0)

➡ si ottiene un ciclo orientato hamiltoniano al quale corrisponde una soluzione ammissibile per il problema del commesso viaggiatore

➡ costo della soluzione pari a 21,5 km

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse



Ciclo orientato hamiltoniano generato dall'algoritmo delle "toppe"

Il Problema del Commesso Viaggiatore

Esempio: Laboratorio Ellisse

E' possibile valutare la qualità della soluzione ottenuta calcolando il rapporto:

$$(21{,}5 - 21{,}2)/21{,}2 = 1{,}4\%,$$

➡ è una valutazione (per eccesso) dello scostamento del valore di funzione obiettivo della soluzione euristica rispetto a quella ottima

Il Problema dell'Instradamento dei Veicoli

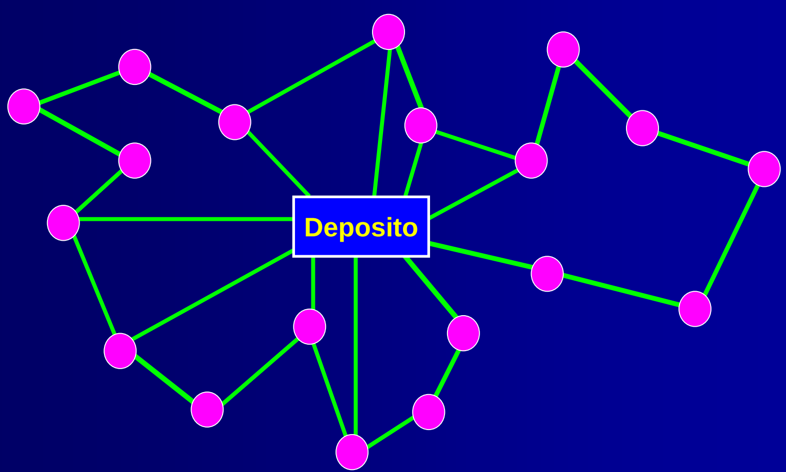
Una flotta di veicoli deve servire un certo numero di clienti

- Stabilire delle rotte che, a partire dal deposito, visitino tutte le città esattamente una volta per poi ritornare al punto di partenza

Obiettivo: Minimizzare la distanza percorsa

Vincoli: Capacità dei veicoli
Turni di lavoro
Finestre temporali per il servizio

Il Problema dell'Instradamento dei Veicoli



Il Problema dell'Instradamento dei Veicoli

Campi di applicazione:

- distribuzione e prelievo di merci
- trasporti aerei e ferroviari
- instradamento delle ambulanze
- servizi di scuolabus
- servizio di corriere
- ecc.

Università del Salento

Corso di Laurea in Matematica Applicata

Tesi di Laurea Triennale

Modelli per l'Ottimizzazione dell'instradamento dei Veicoli in un Caso Reale

Relatore

Prof. Chefi Triki

Dott.

Mauro Portone

Applicazione

Costruzione di un modello matematico per la soluzione del problema dell'instradamento dei veicoli, per la distribuzione dei carburanti di un'azienda della provincia di Lecce.

- Rifornire settimanalmente i propri clienti (distributori dettaglianti) della quantità di carburante richiesta
- Utilizzare al massimo 14 camion di varia portata
- Partire ogni giorno dal deposito centrale (a Racale) e tornarci dopo il servizio

Dati del Problema

- FLOTTA DEGLI AUTOMEZZI E RELATIVA PORTATA

1.	IVECO 190	LT. 19000	8.	FIAT 660	LT. **7000**
2.	IVECO 190	LT. 19000	9.	FIAT OM100	LT. 7000
3.	FIAT 650	LT. 7000	10.	FIAT 662	LT. 7000
4.	IVECO 130	LT. 9000	11.	FIAT 145	LT. 12000
5.	IVECO MAGIRUS	LT. 17000	12.	FIAT 190	LT. 18500
6.	IVECO MAGIRUS	LT. **21000**	13.	FIAT 650	LT. 7000
7.	FIAT 662	LT. 7000	14.	IVECO 175	LT. 13000

Dati del Problema

- ELENCO DEI CLIENTI E RELATIVA DOMANDA SETTIMANALE:

1.	ANDRANO	LT. 4000	18.	MONTESARDO	LT. 5300
2.	ALLISTE	LT. 11000	19.	NOVOLI	LT. 1500
3.	ALESSANO	LT. 10800	20.	PARABITA	**LT. 31500**
4.	CAPRARICA D. L.	LT. 7000	21.	RACALE	LT. 20300
5.	CARPIGNANO SAL.	LT. 6500	22.	SALVE	**LT. 23100**
6.	CASTRIGNANO D. C	LT. 11000	23.	SOLETO	LT. 8300
7.	CASTRIGNANO D. G.	LT. 7000	24.	SPECCHIA	LT. 4000
8.	DISO	LT. 11000	25.	SQUINZANO	LT. 10000
9.	FELLINE-DI ALLISTE	LT. 12000	26.	STERNATIA	LT. 4700
10.	GAGLIANO D. C.	LT. 20000	27.	TAVIANO	**LT. 25000**
11.	GALATONE	**LT. 24000**	28.	TORRE SUDA	LT. 9500
12.	GALLIPOLI	LT. 14500	29.	TORRE S. GIOV.	LT. 13000
13.	GUAGNANO	LT. 13000	30.	UGENTO	**LT. 44800**
14.	LECCE	LT. 13000	31.	CEGLIE MESS.	LT. 23800
15.	MANCAVERSA	LT. 9000	32.	ERCHIE	LT. 13400
16.	MELISSANO	LT. 13000	33.	FRANCAVILLA F.	LT. 5800
17.	MIGGIANO	LT. 8500			

- **DOMANDA TOTALE: 439.300 Litri**

Grafo della rete di distribuzione dell'azienda

- V: insieme dei nodi

  |V| = 33

- E: insieme degli archi

  |E| = 127

- NV: veicoli disponibili

  NV = 14

Modello Matematico

Min $\quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{v=1}^{NV} c_{ij} x_{ijv}$ (Funzione Obiettivo)

S.V.

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{v=1}^{NV} x_{ijv} = 1 \qquad j = 2,\dots,n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ipv} - \sum_{j=1}^{n} x_{pjv} = 0 \quad v = 1,\dots,NV \quad \mathrm{p} = 1,\dots,\mathrm{n} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ijv} \right) \le Q_v \quad v = 1,\dots,NV \qquad (4)$$

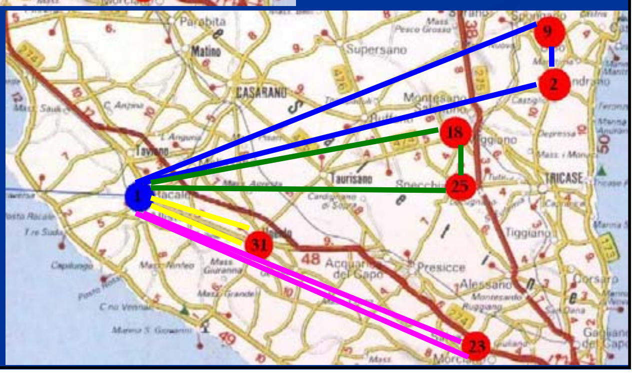
$$\sum_{j=2}^{n} x_{1jv} \le 1 \qquad v = 1,\dots,NV \qquad (5)$$

$$\sum_{i\in J}\sum_{u\in J} x_{ijv} \le |J| - 1 \quad \forall J \subseteq N, \ |J| \ge 2 \quad \mathrm{v} = 1,\dots,\mathrm{NV} \quad (7)$$

$$x_{ijv} \in \{0,1\} \qquad i, j = 1,\dots,n \ \ v = 1,\dots,NV \qquad (8)$$

Soluzione del Modello Matematico

Soluzione adottata dall'azienda



Confronto tra le soluzioni

- Soluzione adottata dall'azienda
  - Distanza settimanale percorsa: **1532 km**
  - Veicoli utilizzati in totale: **10 veicoli**
- Soluzione con il Modello Matematico
  - Distanza settimanale percorsa: **1158 km**
  - Veicoli utilizzati in totale: **7 veicoli**

⇨ **Conclusione**: riduzione nel costo di servizio **24%**

riduzione nei costi di gestione **30%**