Educación

Sección a cargo de

María Luz Callejo

Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación[1]

por

Raymond Duval

Desde los años 70 las investigaciones en didáctica de las matemáticas han tenido un desarrollo importante, debido a la masificación de la enseñanza secundaria y a la reforma de los contenidos. Las cuestiones relativas a los contenidos, tanto en el aula como a escala más amplia, y la elaboración de los programas han abierto campos de investigación específicos. Cuestiones como: ¿qué tipos de problemas seleccionar para desarrollar el interés de los alumnos y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos?, ¿cómo organizar la secuencia de actividades en clase?, o ¿cómo organizar una progresión de los aprendizajes en el currículo?, han llevado a priorizar los problemas con que los profesores se encuentran en sus clases, tendencia que se ha visto reforzada por el desafío institucional de la formación del profesorado.

Paralelamente el interés por los alumnos ha seguido sobre todo dos direcciones. Por una parte se ha tratado de explicar sus dificultades de comprensión invocando sus concepciones, esto es los "errores conceptuales", relativos a cada uno de los conceptos introducidos –y sólo en la etapa de enseñanza obligatoria su lista es ya muy larga–. Por otra parte ha crecido también el interés por las "producciones" de los alumnos en situaciones de colaboración o de intercambio para resolver problemas, con objeto de explorar escenarios de aprendizaje que sean reproducibles en las clases. Existe una tercera línea de investigación que se interroga sobre el tipo de funcionamiento cognitivo que requiere la actividad

[1]Una versión más breve de este trabajo fue presentada por el autor en el ICME 10 celebrado en Copenhague en 2004.

Traducción del artículo: Humberto Quesada, alumno de Doctorado de la Universidad de Alicante. Revisión de la traducción: Germán Torregrosa, profesor de la Universidad de Alicante.

y el pensamiento matemático y que se plantea dos cuestiones esenciales: ¿el funcionamiento del pensamiento matemático, es independiente del lenguaje y de otros sistemas de representación semióticos utilizados?, ¿el pensamiento funciona en matemáticas de la misma manera que en otros dominios de conocimiento?

Las respuestas implícitas o explícitas a estas dos cuestiones son las mismas, tanto en las investigaciones centradas en los profesores como en los alumnos, y se basan directamente en los modelos piagetianos, que han sido durante mucho tiempo los marcos teóricos de la didáctica, y que la referencia más tardía a Vygoski no ha puesto en causa. Así, en respuesta a la primera cuestión, se afirma la independencia de la conceptualización con relación a toda actividad semiótica, la cual no sería más que externa y por tanto secundaria (Vergnaud, 1990:166). La respuesta a la segunda cuestión parece evidente: por una parte Piaget ha elaborado un modelo de construcción intelectual que es el mismo, ¡cualquiera que sea la naturaleza de los conceptos!; por otra parte se insiste siempre en lo que es común a las matemáticas y a otros dominios de conocimiento científico y en la aplicación de las matemáticas a la realidad, motivando esta insistencia. Debido al alto grado de consenso de estas respuestas, no se ha planteado la forma en que funciona el pensamiento que se requiere en matemáticas, en el que el profesor debería introducir a los alumnos. Sin embargo, observaciones sistemáticas y recurrentes muestran que estas dos cuestiones están en el centro de las dificultades que los alumnos encuentran en su aprendizaje de las matemáticas, y llevan a conclusiones opuestas a las respuestas comúnmente postuladas en la mayoría de las investigaciones en didáctica de las matemáticas.

Con frecuencia muchos estudiantes, en todos los niveles del currículo, perciben el distanciamiento entre las formas del pensamiento matemático y las formas de pensar fuera de las matemáticas, aunque el conocimiento matemático se pueda usar en la vida real. ¿Se equivocan? En cualquier caso los profesores observan a menudo que la adquisición del conocimiento matemático no introduce a la mayoría de estudiantes en las formas del pensamiento matemático, como por ejemplo en la habilidad para cambiar el registro de representación. Para comprender lo que ocurre en el aprendizaje de las matemáticas necesitamos extensivas y detalladas investigaciones sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático.

Introduciré el marco teórico de dicha investigación con dos observaciones comunes acerca de la gran variedad de "contextos de representación" en los que aparecen los objetos de conocimiento matemático.

- La actividad matemática se realiza necesariamente en un "contexto de representación". Por ejemplo los números naturales se pueden representar con material como cerillas (IIIII IIIII), con puntos, con una representación poligonal, y también con el sistema de notación decimal, que tiene un signo algo extraño, el cero.

- Pero los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Nos preguntamos: ¿cuál es el papel jugado por estos ineludibles y heterogéneos contextos de representación en la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas? A menudo se interpretan como productos, ya sea en el nivel superficial de la actividad matemática o en el estado final del proceso de pensamiento. En otras palabras, serían solamente representaciones externas y más alejadas de la comprensión matemática.

De hecho debemos ser más precisos al hacer estas observaciones comunes. Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran.

(1) Lo que importa es su propiedad de **transformación** porque *el procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. En matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo. Además esta transformación **depende del sistema semiótico** de representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una "mediación semiótica" sino "mediaciones semióticas" bastante diferentes.

(2) La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras la actividad matemática requiere una *coordinación interna*, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto.

Éstas son las dos caras de la actividad matemática, que no se pueden considerar separadamente la una de la otra, sobre todo para comprender los problemas de aprendizaje, y que proporcionan la idea clave para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático. Es obvio que se deben distinguir dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la **conversión** y el **tratamiento** (Duval, 1995a). Se puede examinar la complejidad cognitiva del tratamiento, la clase específica de transformación que requiere cambiar el sistema semiótico usado mientras una actividad matemática se comienza o está en proceso. Por eso surge la cuestión: ¿por qué tanto problema recurrente acerca de la conversión de representación y cómo lograr que los estudiantes comprendan y realicen adecuadamente la conversión de representaciones en matemáticas?

1 Dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas

Cuando analizamos cualquier actividad matemática tenemos que distinguir en primer lugar dos clases de transformación. Para introducirlas comencemos con tres ejemplos.

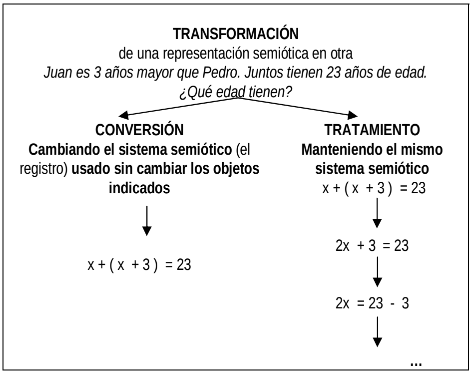


Figura 1. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento

En este ejemplo sencillo (figura 1), hay un único cambio de representación en la conversión, mientras que en el tratamiento hay una secuencia de varias transformaciones. Pero muy a menudo la conversión y el tratamiento están totalmente entrelazados en el mismo proceso matemático de resolución. En el primer ejemplo, la conversión parece fácil porque se reduce a una simple codificación. Pero si cambiamos el problema entonces el proceso de conversión se hace mucho más complejo (figura 2).

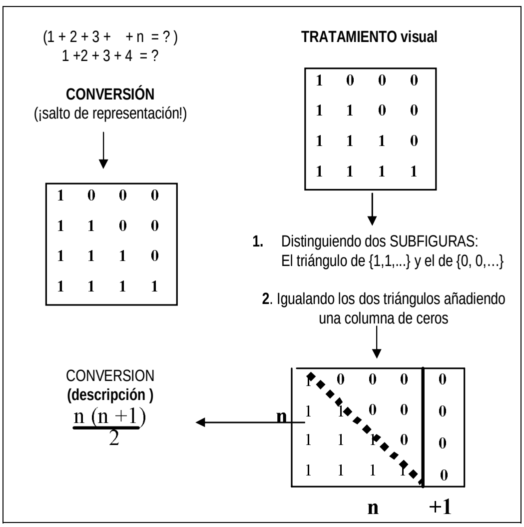


Figura 2: Alternancia de la conversión y el tratamiento en la resolución de un problema

La transformación de una expresión lingüística en una ecuación esconde dos requisitos específicos. En primer lugar usar menos símbolos que objetos para referirse a ellos. Para eso se debe escribir una nueva expresión usando una operación aritmética y explicitar una relación para traducir el significado de la frase mediante una ecuación. Así no obtenemos la misma segmentación semántica de datos problemáticos en la expresión lingüística y en la expresión algebraica; es un primer salto. Pero hay también un segundo salto: en el tratamiento algebraico los símbolos de operaciones prevalecen sobre los símbolos que representan a los números. Las expresiones que representan los números se "rompen".

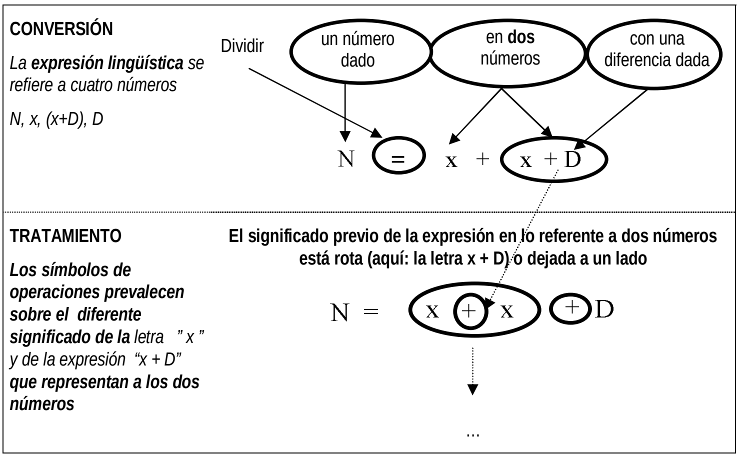


Figura 3: No congruencia entre las expresiones del texto lingüístico y de la ecuación en la que se convierte

Este doble salto a menudo no se comprende por su complejidad. Así podemos leer en una declaración nacional sobre la enseñanza de las matemáticas comentarios como éste: "Es esencial que los estudiantes comprendan que las letras significan números, no objetos". Sí, ¿pero qué números? En relación a la expresión lingüística, las letras dentro de las ecuaciones ya se refieren a números (fila superior de flechas de la figura 3), pero este primer significado de las letras debe romperse para iniciar el tratamiento (flechas de trazo discontinuo en la figura 3). De cualquier manera esto es sólo una parte de la complejidad de la conversión, y no la más importante (Duval, 2002).

En estos ejemplos la conversión y el tratamiento aparecen en dos clases de transformaciones de representaciones semióticas, que se pueden identificar claramente, y se dan en distintas etapas del proceso de resolución de los problemas. Pero hay también situaciones en las que se requiere la conversión implícita y continuamente, cada vez que hay que movilizar conjuntamente y en paralelo dos registros de representación. Los ejemplos más típicos se dan en geometría en que a menudo son necesarios estos dos tipos de tratamiento: uno se produce de forma discursiva, por deducción válida de propiedades de los datos y de teoremas que implica el uso del lenguaje; el otro se produce de una manera visual a través de las diversas reorganizaciones de las formas. Ambos procesos tienen lugar de manera separada porque no movilizan los mismos sistemas cognitivos, sin embargo la actividad matemática en geometría depende de su interacción cognitiva. El tratamiento dentro de un registro se puede fijar o controlar por lo que se pregunta en el otro registro. Esta interacción cognitiva exige explicitar las conexiones locales. Codificar las representaciones visuales con letras o marcas ayuda a explicitar los puntos de anclaje del discurso matemático entre varias posibles organizaciones de formas. El uso común en matemáticas de la palabra "figura", hace confundir a veces la visualización con su codificación, induce a entender mal la especificidad de estas dos clases de transformaciones independientes, así como el papel complejo de la conversión que subyace a cualquier actividad geométrica. Esto se puede ilustrar mediante la siguiente situación que muestra seis textos posibles de un mismo problema.

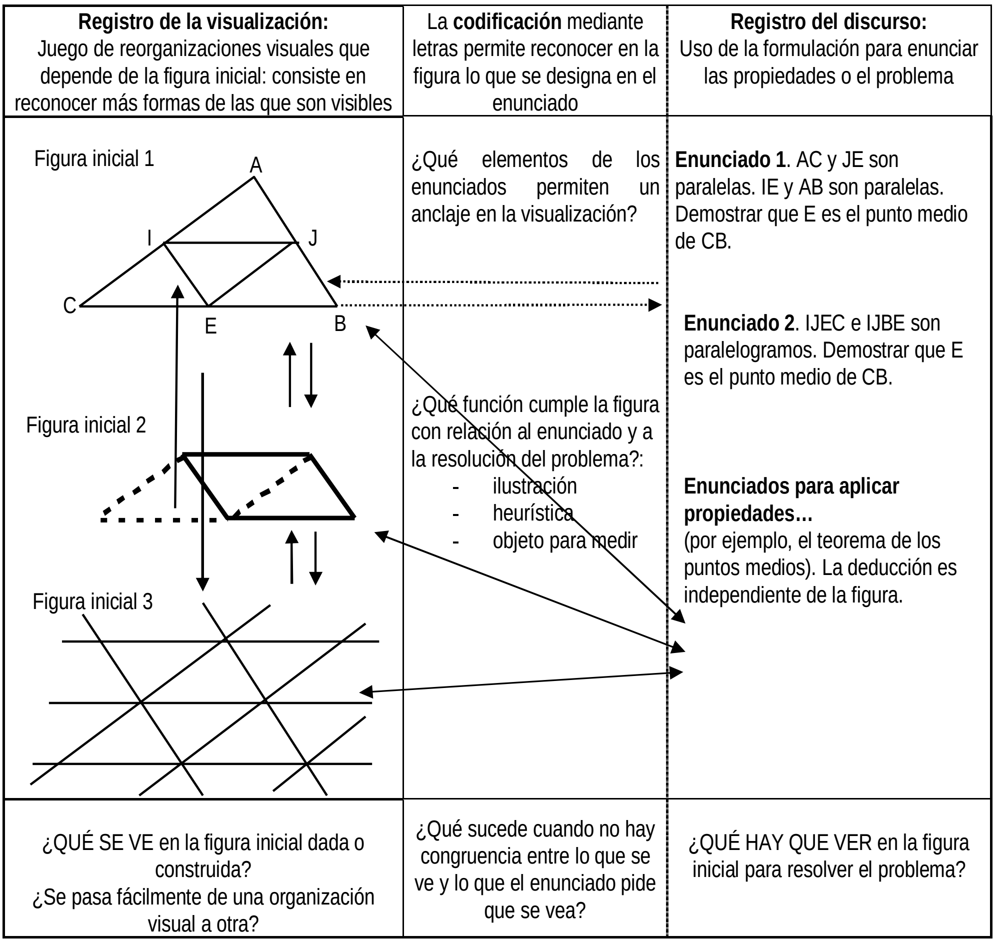


Figura 4. Los dos tipos de tratamiento, visual y discursivo, en relación a la actividad geométrica y el problema de su articulación.

Cada una de las tres figuras iniciales (figura 4) se puede reconocer visualmente en las otras dos u obtenerse directamente a partir de ellas con independencia de toda propiedad (flechas verticales en la columna de la izquierda). Igualmente los dos enunciados son dos descripciones análogas que se pueden hacer de cada una de las tres figuras iniciales, porque encierran las mismas hipótesis requeridas para responder a la cuestión. La asociación de un enunciado con una representación visual puede desarrollar dos funciones: bien como economía de memoria para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan, bien como heurística para encontrar el teorema. Se puede elaborar pues un conjunto de problemas equivalentes combinando los dos enunciados con las tres figuras iniciales. Las investigaciones han mostrado que alumnos de 14-15 años, tras haberles enseñado las propiedades de los paralelogramos y el teorema de Thales, no reconocían el mismo problema presentado con dos combinaciones diferentes, porque para ellos no tenían absolutamente nada en común las figuras iniciales 1 y 2 (Dupuis, Pluvinage y Duval, 1978: 75-79). La única situación accesible era la asociación congruente del enunciado 2 con la figura inicial 2. No hay de hecho ninguna articulación cognitiva entre el funcionamiento visual y el funcionamiento discursivo en los procedimientos de geometría, de modo que cada uno de ellos pone de relieve procesos diferentes. Investigaciones posteriores han puesto de relieve que los tratamientos visuales exigidos en geometría no tienen nada en común con los movilizados fuera de la geometría y, sobre todo, que los tratamientos visuales son independientes de los conceptos movilizados (Duval, 1995b, 2005). La toma de conciencia de la especificidad de estos tratamientos visuales por parte de los alumnos es una condición previa y necesaria para la resolución de problemas. Pero la importancia y la complejidad cognitiva de estos tratamientos visuales específicos, ¿se tiene en cuenta en la enseñanza de la geometría?

Todos estos ejemplos subrayan que estas dos clases de transformaciones de representaciones yacen en el corazón de la actividad matemática. Por ello el primer requisito metodológico para analizar los problemas de la comprensión matemática de los estudiantes es diferenciar por completo estas dos clases de transformación.

Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del “mejor” cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado. Además, la comprensión o no de los conceptos, ¿no será anterior a las representaciones semióticas? Pero desde un punto de vista cognitivo, las cosas son de otra manera. La conversión y el tratamiento son fuentes totalmente independientes de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, y parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento. El problema que la mayoría de estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el **umbral** de la comprensión. ¡La conversión de representación semiótica aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado!

2 La complejidad cognitiva de la conversión

Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representación. La conversión no se reduce pues a una codificación. Veamos un contraejemplo: la regla cartesiana de codificación para trazar cualquier representación gráfica cartesiana a partir de una ecuación o inecuación. Esta regla asocia puntos y pares de números, lo que permite sólo una percepción numérica selectiva, y permite "leer" una representación gráfica. Sin embargo usar esta regla para trazar cualquier representación gráfica no puede llevar a notar las características visuales que corresponde a las características de la ecuación algebraica convertida, porque estas características visuales son cualitativas y globales y no numéricas y locales. Para poner en evidencia esta laguna cognitiva basta con proponer una tarea de elección en la cual la habitual dirección de conversión, que se enfoca sobre los aspectos numéricos mediante el trazo y la lectura, se invierte (figura 5) (Duval, 1996).

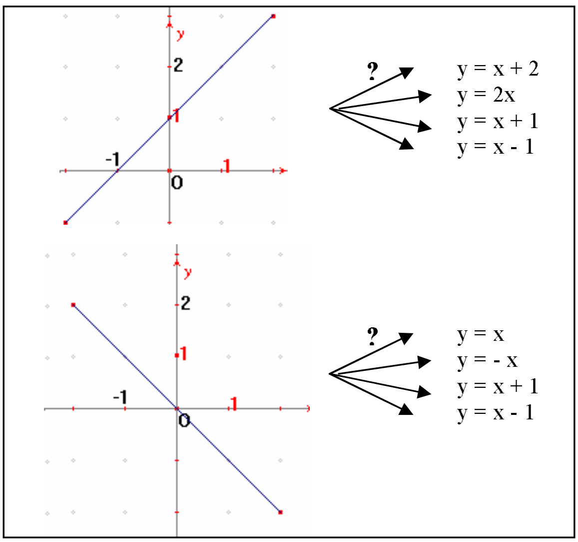


Figura 5. Un ítem de reconocimiento cualitativo para la conversión entre la representación gráfica y la notación algebraica.

Cuando los estudiantes se enfrentan con este tipo de tarea de reconocimiento cualitativo, para la mayoría resulta obvio que no pueden responder a la discriminación que se les pide mediante la práctica habitual del trazado y lectura de los valores numéricos de las gráficas, lo que se puede comprobar una vez que se han enseñado las funciones. En estas condiciones, ¿qué poder de visualización o qué soporte intuitivo tienen las gráficas para la mayoría de estudiantes? Estas representaciones no sirven absolutamente de nada si no se reconocen las características visuales de las curvas notables en matemáticas, más allá de la lectura de pares ordenados de números e identificación de puntos. Por eso la pregunta básica para cualquier estudiante es: ¿cómo discriminar las características visuales de la gráfica que son matemáticamente importantes para la conversión? En otras palabras, ¿cómo ver las características semánticas de una ecuación a través de las características visuales cualitativas de una gráfica dibujada y viceversa?

Para solucionar este problema debemos tener en cuenta la forma que el sistema semiótico de representación cartesiana puede representar objetos matemáticos (las relaciones y no sólo las funciones...). La ley básica de funcionamiento semiótico es la siguiente: nada puede funcionar como una representación fuera del sistema semiótico **en el cual su significado toma valor en oposición a otra representación dentro del sistema**. Aplicando esto obtenemos esta red para las características visuales que son matemáticamente relevantes dentro de este tipo de representación (figura 6).

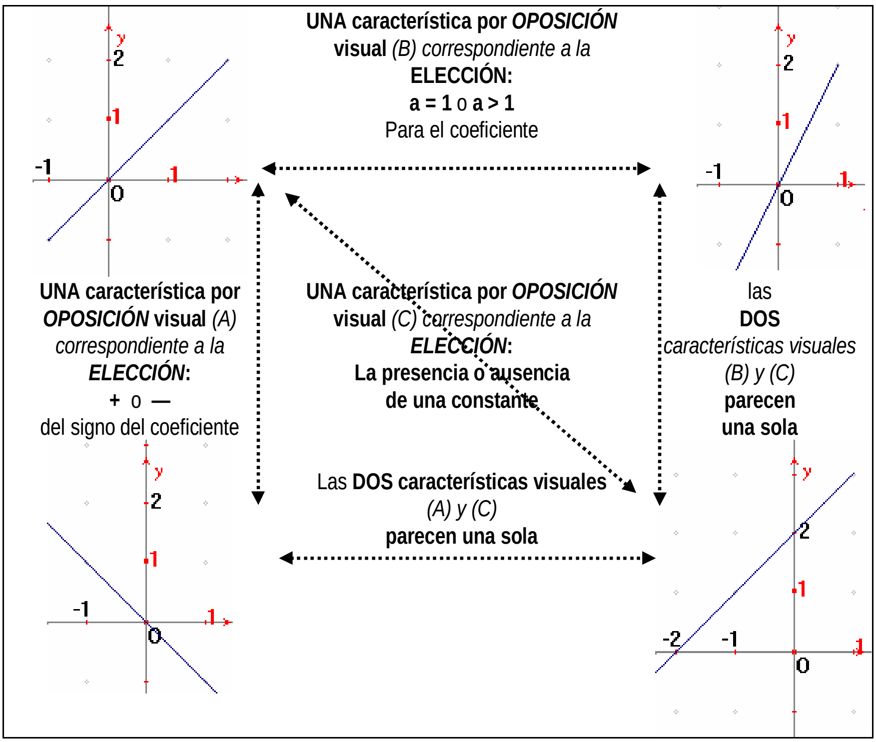


Figura 6. Red de discriminaciones cognitivas requeridas para una conversión entre gráficas y ecuaciones

Podemos hacer cuatro comentarios cuyas consecuencias son importantes para el aprendizaje de las matemáticas:

(1) Cada característica visual particular puede ser distinguida **solamente a través de la oposición de dos gráficas.**

(2) Cada característica visual particular se **combina con una característica semántica de la ecuación y no con la función representada.**

(3) Es a través de esta red de características visuales distintivas mediante la cual los estudiantes logran convertir fácil y significativamente gráficas y ecuaciones.

(4) Tal red puede ser extendida a todos los tipos de representaciones de funciones y también a las representaciones de relaciones y a las curvas que no son funciones (Duval, 1993: 46). Eso quiere decir que **tal red no depende de algún contenido o "concepto" matemático específico.**

Pero, *¿podemos asumir que los estudiantes perciben de manera natural todas estas discriminaciones cualitativas* sólo mediante el trazado y la lectura de las gráficas y adquiriendo el "concepto" de función lineal? Es fácil valorarlo con tareas de reconocimiento (figura 7).

Tras enseñar las funciones durante tres meses en una clase buena de segundo [2], obtuvimos mejores resultados que los que hemos presentado si considerábamos los ítems separadamente. Pero cuando hemos tenido en cuenta la discriminación visual de los grafos presentados dos a dos, los resultados han bajado de manera espectacular (Duval, 1988). Se advertirá que ciertas oposiciones visuales son más difíciles de reconocer que otras: por ejemplo, la oposición entre $a > 1$ o $a < 1$, la cual a menudo se confunde visualmente con otro contraste, es más difícil que la oposición $a > 0$ o $a < 0$. Estos fenómenos no se ponen en evidencia en la enseñanza por dos razones: En primer lugar porque la tarea más frecuente es la conversión inversa, construir un grafo, y si se da el grafo se trata solamente de leer valores sobre el mismo; en los dos casos basta con un procedimiento local que se limita a la asociación entre un punto y un par ordenado de números, que no exige ninguna articulación entre los dos registros de representación y tampoco crea ningún puente entre ambos. Por el contrario, una tarea cualitativa de reconocimiento exige un procedimiento global: hay que discriminar los valores de diferentes trazos visuales de la representación gráfica para identificar los que corresponden a una característica semántica de la ecuación (o de la inecuación si se trata de una región del plano). En segundo lugar, las representaciones gráficas se presentan en el contexto de un problema o de un ejercicio particular, por ello los alumnos no se enfrentan a tareas en las que tengan que comparar gráficos que pueden parecer visualmente semejantes, pero que sin embargo representen funciones muy diferentes.

[2] Equivalente a 4º de ESO en España.

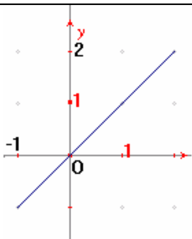
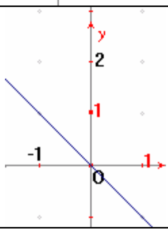
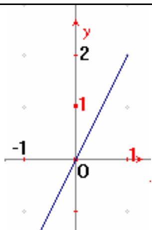
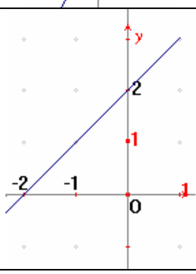
Tarea de reconocimiento cualitativo	Trazos visuales de contraste[1] a tomar en cuenta para reconocer la característica semántica que corresponde en la escritura simbólica	360 alumnos de 15-16 años repartidos en 12 clases (el porcentaje entre paréntesis es de la clase que ha obtenido los mejores resultados)
	Sentido de inclinación: *ascendente* (respecto al sentido de la escritura)	39% (60%)
	Sentido de inclinación: *descendente*	49% (70%)
Discriminación visual de dos grafos	El contraste entre ascendente y descendente corresponde a la *elección entre* ***(+) y (-) para el coeficiente*** *(**a>0** y **a<0**)*	**33% (46%)**
	Ángulo con el eje de abscisas: *Más grande* o *más pequeño* que el formado por la recta bisectriz del primer cuadrante [2]	16% (25%)
	Intersección con el eje de ordenadas: Pasa por *el origen*, pasa por *encima del origen* o pasa por *debajo del origen* de coordenadas	26% (28%)
Discriminación visual de dos grafos	**Dos contrastes visuales y por tanto dos elecciones:** - **a > 1** o **a <1** - presencia o ausencia de una constante y valor (+) o (-)	**8% (11%)**

Figura 7: Tareas de reconocimiento que implican la distinción de aspectos visuales relevantes

Volvamos al primer ejemplo (figuras 1 y 3). El enunciado de estos problemas remite a dos tipos de objetos: cantidades desconocidas y relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. La traducción de un enunciado a una ecuación o a un sistema de ecuaciones requiere dos tipos de operaciones discursivas que no se sitúan al mismo nivel:

1. Volver a designar las cantidades desconocidas en el enunciado como "la edad de Juan" y "la edad de Pedro", pero utilizando una sola letra (una sola palabra) para referirse a estos dos objetos. Este primer tipo de operación discursiva introduce pues la designación funcional que no existe en lenguaje natural, ya que es necesario una frase para describirla. Lo que se llama "elección de la incógnita" corresponde de hecho a una operación de reducción del léxico utilizable y a un renombramiento funcional de los otros objetos.
2. Formular una ecuación. Pero para formular una ecuación es necesario según expresó Lacroix (1820) "igualar dos cantidades entre sí", es decir, establecer una relación de equivalencia entre las cantidades desconocidas designadas y la cantidad conocida. Pero la expresión de esta relación varía considerablemente de un enunciado a otro. Puede estar indicada por una frase ("juntos tienen 23 años"; figura 1) o por un verbo ("dividir" en el segundo enunciado; figura 3). A veces no hay ninguna formulación explícita que indique esta relación.

Este segundo tipo de operación discursiva es cognitivamente más complejo que el primero. Para ponerlo en evidencia basta proponer un problema con una cuestión para cada tipo de operación discursiva y en el que no hay que elegir la incógnita. Pero cuando se pide formular la ecuación, es decir, explicitar la relación entre las diferentes expresiones, disminuye de manera importante el porcentaje de respuestas correctas.

> "Un hombre tiene 23 años más que su hijo y 31 años menos que su padre. La suma de las edades de las tres personas es 119 años.
>
> 1. Si denotamos por x la edad de este hombre:
>
> | | SI | NO |
> |---|---|---|
> | $x + 23$ es la expresión que designa la edad de su hijo | ( ) | ( ) |
> | $x - 23$ es la expresión que designa la edad de su hijo | ( ) | ( ) |
> | $x + 31$ es la expresión que designa la edad de su padre | ( ) | ( ) |
> | $x - 31$ es la expresión que designa la edad de su padre | ( ) | ( ) |
>
> Señalar la respuesta correcta.
>
> 2. ¿Qué ecuación permite calcular la edad de este hombre?".

Estas cuestiones se le propusieron a 128 alumnos de tercero[3] y a 165 de segundo en dos modalidades diferentes: casi todos los alumnos (85%) han elegido correctamente las expresiones $(x-23)$ y $(x+31)$ pero solamente el 51% ha logrado relacionarlas para escribir la ecuación correcta (Damm, 1991:207). Esta disminución de respuestas correctas la han confirmado también otras observaciones. En el mismo cuestionario se propuso a los alumnos el siguiente problema:

> "La medida del perímetro de un rectángulo de largo a y ancho b es de 62 metros. Se ha modificado este rectángulo aumentando su longitud 2 metros y disminuyendo su ancho 1 metro, pero la medida de la superficie permanece constante.
>
> 1. ¿Cómo se puede escribir la medida de la superficie del rectángulo **antes** de esta modificación?
> 2. ¿Cómo se puede escribir la medida de la superficie del rectángulo **después** de esta modificación?
> 3. ¿Cuáles son las dos ecuaciones que permiten encontrar el largo y el ancho del rectángulo **antes** de su modificación?".

ítems	respuestas	3º 66 alumnos	2º 88 alumnos	3º 62 alumnos	2º 76 alumnos
(1) y (2)	Las dos expresiones: a . b y (a+2)(b-1)	47%	45%	35%	34%
(3)	Solamente la ecuación del perímetro correcta	27%	18%	10%	30%
(3)	Solamente la ecuación de la superficie	0%	4%	8%	4%
(3)	Las dos ecuaciones correctas	12%	19%	15%	13%

Figura 8 : Respuestas al problema del perímetro de un rectángulo (Damm 1991, p. 208)

Se pueden comparar estos resultados (figura 8) con el del problema anterior para cada uno de los dos tipos de operación discursiva: la designación literal de las cantidades desconocidas que se pide en las cuestiones (1) y (2) y su organización en ecuaciones que se pide en la cuestión (3). Los porcentajes de respuestas correctas para la designación literal de la superficie del rectángulo antes y después de la modificación descrita en el enunciado son menores que los correspondientes a la elección de la expresión literal para designar la edad del hijo en el problema anterior. Se podría pensar que la dificultad se debe al hecho de que hay que combinar dos letras como incógnitas. Pero se debe tener en cuenta otro factor: las tareas de simple reconocimiento que consisten en elegir entre varias respuestas posibles son más fáciles que las de producción

[3]Equivalente a 3° de ESO en España.

que piden que se elabore la respuesta[4]. Este factor puede bastar para explicar la fuerte disminución de respuestas correctas del primer problema al segundo para la operación de designación literal de las cantidades desconocidas. Pero el punto más interesante es la disminución del porcentaje de respuestas correctas entre la designación literal de las superficies antes y después de la modificación, y la escritura de las ecuaciones: del 40% de todos los alumnos (115/292) al 21% (61/292) para la ecuación del perímetro y al 4% (11/292) para la ecuación de las superficies. No hay prácticamente diferencia entre los alumnos de segundo y de tercero[5] (18% y 22% respectivamente para la ecuación del perímetro).

Podemos preguntarnos por qué esta diferencia entre los porcentajes de respuestas correctas para la ecuación del perímetro y de las superficies. Ello nos muestra la importancia de la variable congruencia / no congruencia que interviene cada vez que es necesaria una conversión de representación. En efecto, los datos correspondientes a la ecuación del perímetro están todos contenidos en una sola frase, la primera. Además la organización sintáctica de esta frase se puede poner en correspondencia término a término con la ecuación que se debe escribir: la frase hace transparente la ecuación. Por el contrario, los datos correspondientes a la ecuación de la superficie están contenidos en dos frases diferentes. Además hay que parafrasear la proposición "pero la medida de la superficie permanece constante" en "la medida de la superficie antes es igual a la medida de la superficie después".

Así en los problemas de ecuaciones es esencial distinguir dos niveles de conversión diferentes: el relativo a la expresión literal de las cantidades desconocidas que se nombran o describen en el enunciado y el de su organización en una relación de igualdad. Es en este segundo nivel, semánticamente más complejo, donde radican las verdaderas dificultades de traducción en ecuación. Las dificultades de los alumnos para la designación literal de las cantidades desconocidas no son a menudo más que un reflejo. Por ello es esencial hacer trabajar más a los alumnos sobre esta organización que sobre lo que habitualmente se llama "elección de las incógnitas" (Didierjean et al., 1993).

Podríamos variar las situaciones. Sea cual sea el tipo de registro inicial y de registro buscado (lenguaje → notación simbólica, figura → lenguaje...) es muy fácil resaltar que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades cada vez que se requiere una conversión explícita o implícitamente en actividades matemáticas. Para evitarlo hemos de usar tareas que sean menos globales que los problemas matemáticos. También podemos investigar los diversos fac-

---

[4]Para analizar y poner en evidencia los factores que juegan en la complejidad de la actividad matemática, y en particular en la resolución de problemas en registros de representación diferentes, es esencial desde el punto de vista metodológico realizar tareas de reconocimiento. La resolución de problemas representa a menudo un bloque de tareas de producción que son difícilmente separables, lo que constituye un serio obstáculo para la interpretación de los datos obtenidos.

[5]N. del T. : En el sistema educativo francés los cursos se numeran en orden decreciente, y segundo es el curso siguiente a tercero.

tores que operan en favor o en contra del reconocimiento del mismo contenido matemático en una representación y la traducción de la representación en otro sistema semiótico.

En cualquier caso, el asunto importante no es ése. Se debe entender qué procesos cognitivos están involucrados en el pensamiento matemático y por qué el complejo proceso cognitivo de conversión es crucial para la comprensión del estudiante.

3 ¿Por qué la conversión es crucial en la comprensión de los estudiantes?

Los signos se asocian muy a menudo con notaciones convencionales como son el uso de letras en geometría y el uso de símbolos en álgebra. Desde este punto de vista restrictivo hacemos una aproximación dual a la actividad matemática: por un lado el contenido matemático conceptual y no semiótico, y por otro representaciones semióticas que se pueden elegir de acuerdo con las necesidades de comunicación o teniendo en cuenta el coste del tratamiento. Uno sería mental y el otro sería externo o material. Desde este punto de vista, la conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con la conversión sería indicativo de conceptos erróneos. ¿Encajan semejantes modelos de procesos cognitivos con lo que se puede observar de la actividad matemática?

La actividad matemática debe satisfacer dos requisitos que entran en conflicto:

I. Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente, incluso si se elige el tipo de representación semiótica.

II. Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas.

El primer requisito es especialmente importante por dos razones que resaltan el estatus epistemológico particular de las matemáticas, pues a diferencia de las otras áreas científicas (la astronomía, la geología, la química, la biología...) los objetos de conocimiento (los números, las funciones y sus propiedades...) no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas. Sin embargo, la necesidad de signos no se limita a esto, pues su principal papel no es representar objetos matemáticos sino trabajar en ellos y con ellos, sustituyendo unos signos por otros. Así el papel principal del sistema de representación de los números no es representarlos sino calcular, y los algoritmos son diferentes según el sistema y la notación utilizados, y de si el sistema tiene o no el signo “cero”. Los sistemas semióticos son principalmente usados para operar, es decir para el tratamiento. Podemos resumir esto diciendo: sin "mediaciones semióticas" no es posible la actividad matemática.

Puede parecer que el segundo requisito no es específico de las matemáticas, pero es con el que la mayoría de los estudiantes se encuentra con problemas. El contenido de cada representación semiótica no depende sólo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados. Por ello cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas. Entonces, ¿cómo el contenido matemático puede ser discriminado de lo que es específico del sistema semiótico usado y de lo que no tiene relevancia matemática? Fuera de las matemáticas este problema no surge, porque el acceso a los objetos del conocimiento no es semiótico, eso quiere decir que son independientes de cualquier "mediación semiótica". Pero no es este el caso en matemáticas, porque las representaciones semióticas siempre son necesarias según el primer requisito epistemológico.

En estos dos requisitos conflictivos yace la paradoja cognitiva con la que se tropieza la mayoría de estudiantes. Y eso suscita un profundo problema de comprensión que es específico del aprendizaje de las matemáticas. La mayor piedra de toque para la comprensión es la posibilidad de TRANSFERIR lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos, dentro y fuera de las matemáticas, y esto siempre implica la conversión de representación. Sea cual sea la orientación de la enseñanza que se enfatice –la aplicación de las matemáticas a los problemas de la vida real o la enseñanza de conceptos y procedimientos– la mayoría de estudiantes se detienen en este **umbral de conversión de representación**. Para ellos hay tantos objetos diferentes representados como contenidos de representación usados. El isomorfismo matemático entre dos representaciones nunca involucra su isomorfismo cognitivo, y *a fortiori* no puede ser reconocido por los estudiantes.

Frente a la aproximación dualista donde la necesaria mediación semiótica es externa y posterior a la comprensión conceptual, las representaciones semióticas se deben tomar en consideración en el análisis del pensamiento matemático. La comprensión no significa dar un salto desde el contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto. No existe una "mediación semiótica" homogénea sino varias que tienen poco o nada en común. Y como ya hemos visto (figura 6) los contenidos de representación dependen no sólo de lo que es representado sino también de los sistemas de representación usados. Por eso la comprensión matemática requiere una **coordinación interna** entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar (Duval, 2000). Sin desarrollar esta coordinación interna los estudiantes no pueden cruzar el umbral de la conversión de representación. La habilidad para movilizar diversas representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación sino que surge de su desarrollo. En otras palabras, lo que primero importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.

4 ¿Cómo hacer que los estudiantes entren en el complejo y amplio funcionamiento de la conversión de representación?

La mayoría de los profesores están de acuerdo en que es importante que los estudiantes usen tanto símbolos como figuras, representen modelos espaciales y numéricos, e identifiquen el mismo patrón en diferentes representaciones y contextos. Pero el tema principal es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades para lograr este propósito.

La idea más obvia es exponer **varias posibles** representaciones al **mismo tiempo**. Así en el caso de los números no sólo notación decimal, sino también representaciones figurativas (p.e. números poligonales); en el de las funciones su expresión algebraica y su gráfica (exposición visual de las correspondientes líneas, curvas, superficies...) deberían presentarse como si se relacionasen palabras con imágenes. El software proporciona herramientas para mostrar "instantáneamente" tantas representaciones diferentes como sean necesarias. Por tanto, los estudiantes también pueden obtener el rango de posibles representaciones de los objetos con los que están trabajando o que están usando como herramientas. Además el software puede dar una percepción dinámica de la transformación de representación frente al soporte estático del papel. Tareas específicas como traducir o transferir también pueden servir para preparar a los estudiantes para que reaccionen ante una clase de representación dada (verbal, simbólica o visual) cambiándola por otra.

Pero desde un punto de vista didáctico tales actividades son ilusorias y no llevan a ninguna parte. Porque toda representación comporta dos dimensiones semánticas: la del contenido que representa, y que es intrínseca al registro movilizado, y la del objeto que representa y que es independiente del registro movilizado. Así el contenido de una representación gráfica puede ser una recta, una parábola, un círculo, etc. Son tres contenidos visualmente, es decir gestálticamente, muy diferentes. Representan tres objetos matemáticos: dos funciones de categorías diferentes (lineal y cuadrática respectivamente) y una relación que no es una función pero que caracteriza un objeto geométrico. Se puede ver entonces que la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto en dos registros diferentes no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados. Y entonces aparecen dos situaciones de reconocimiento en cierta manera opuestas:

1. Reconocer el mismo objeto en dos representaciones cuyos contenidos son muy diferentes porque corresponden a dos registros diferentes (una

ecuación de primer grado y el grafo de una recta; una ecuación de segundo grado y el grafo de una parábola, etc.). Aquí una simple asociación como la que relaciona palabras con imágenes puede ser suficiente, a condición de limitarse a casos simples y estandarizados.

2. Reconocer dos objetos diferentes en dos representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque corresponden al mismo registro, como por ejemplo dos grafos que son visualmente rectas o parábolas, o entre dos enunciados de problemas que utilizan las mismas palabras y describen la misma situación real (como por ejemplo los problemas aditivos o los problemas de proporcionalidad, etc.). En este caso para convertir una u otra de estas dos representaciones *es necesario hacer una doble discriminación.* Por una parte ser capaz de ver diferencias entre dos representaciones que parecen globalmente semejantes y, por otra, ser capaz de distinguir en las representaciones de un registro las características del significante que son matemáticamente pertinentes, para relacionarlas con una representación en otro registro, y las características significativas en un registro que no lo son para la conversión en el otro registro.

La capacidad para convertir en la situación de reconocimiento (1) depende totalmente de la capacidad para convertir en la situación (2), y no a la inversa. Las respuestas correctas basadas únicamente en el mecanismo de la asociación son ocasionales y no significativas para la comprensión y la adquisición. Porque este mecanismo no permite ninguna transferencia o, si se prefiere un término menos psicológico, ninguna aplicación, cuando las variaciones de contenido se alejan de las presentaciones estandarizadas. Se entiende entonces la limitación de todas las actividades didácticas que se apoyan en una yuxtaposición simultánea de varias representaciones de un mismo objeto: se limitan a un reconocimiento mediante asociaciones que son particulares en cada caso. La estructura de la tarea cognitiva que subyace en estas actividades no ofrece las condiciones que permiten tomar conciencia de esta doble discriminación necesaria para la conversión de las representaciones.

En este tipo de tarea, las variaciones de representación están consideradas según una de las dos dimensiones semánticas constitutivas de toda representación semiótica: la del objeto representado, ya que siempre se introducen o requieren en contextos de problemas en los que se quiere variar el contenido matemático. Se excluye por tanto el análisis de las variaciones de contenido entre varias representaciones de un mismo registro. Entonces, ¿cómo los alumnos, o su mayoría, podrían entender que *tres variaciones visuales diferentes distinguen matemáticamente las dos gráficas* (figura 9)? ¿Cómo pueden los alumnos a partir de ese tipo de tareas construir una red cognitiva de oposiciones que permitan diferenciar las gráficas entre si (figura 6)? Para que puedan comprender esto, haría falta proponerles tareas que tuvieran dos dimensiones semánticas tomando como variable independiente la variación del contenido visual del registro inicial.

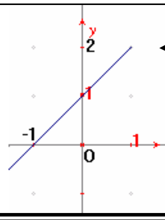
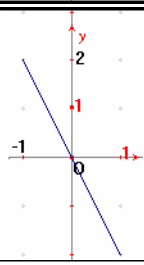
Variación según el objeto matemático representado	Representación inicial	Representación final
1. Contexto de un problema o ejercicio		y = x + 1 (dato) o y = ... (escribir la ecuación)
2. Contexto de otro problema o ejercicio		y = - 2x (dato) o y = ... (escribir la ecuación)

Figura 9: Estructura de una tarea de yuxtaposición, inmediata o no, y fundamentado en un mecanismo cognitivo de asociación.

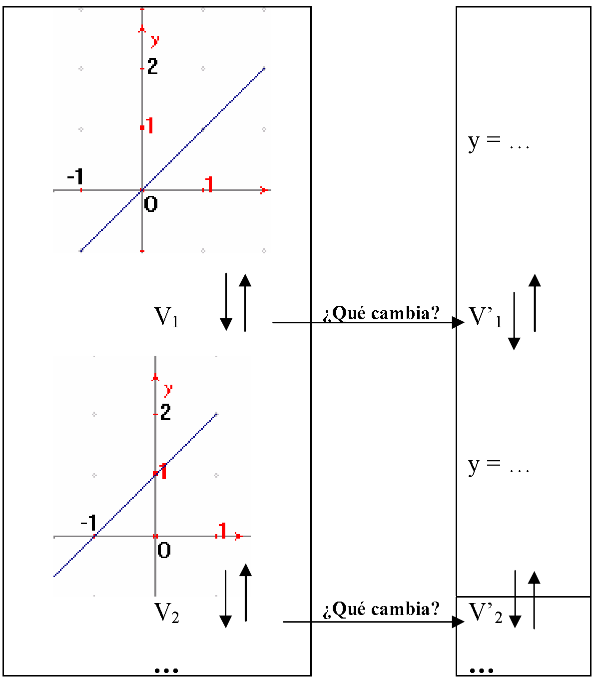


Figura 10: Estructura de una tarea de comparación para analizar los vínculos entre las posibles variaciones del contenido de la representación de dos registros puestos en correspondencia.

Este tipo de tarea (figura 10) es de comparación, se trata de determinar lo que podría cambiar en las representaciones del registro final cuando se modifica una representación del registro inicial, y cambia respecto a la anterior en tres puntos:

1. Las variaciones de contenido, aquí variación visual, se hacen de manera automática, lo que significa que de un gráfico a otro *sólo se ha de cambiar una variable visual* a la vez y no dos o tres, por otra parte *se explora el campo de las diferentes variaciones posible.*

2. La conversión no se realiza sobre la presentación aislada o aleatoria de los casos particulares sino *en la correspondencia entre los medios de representación de cada uno de los dos registros de representación semiótica.*

3. La conversión se convierte en un método para analizar lo que es matemáticamente significativo en el contenido de la representación dada. En otras palabras este método puede ser utilizado para el análisis de textos, empezando por el texto del problema (figura 12).

Este tipo de tarea es necesaria para aprender a diferenciar dos representaciones donde los contenidos presentan, a primera vista, poca diferencia pero representan dos objetos matemáticos distintos y da la posibilidad de una verdadera exploración experimental de las variaciones utilizadas a menudo en matemáticas, y por lo tanto permite a su vez una coordinación de los distintos registros que se construyen “en la cabeza” de los alumnos. Esta coordinación no solamente permite a los alumnos cambiar de registro y controlar ellos mismos su pertinencia, sino también acceder a una verdadera comprensión conceptual.

Otro tipo de actividad se encierra en un círculo hermenéutico. Se produce un discurso para explicar otro discurso, y para mostrar el vínculo entre el discurso explicado y el otro tipo de discurso explicativo se requiere un tercer discurso. O bien, para justificar una conversión, es decir la referencia de un cambio de registro, nos referimos a conceptos que sólo pueden ser movilizados en las otras representaciones semióticas del tercer registro...

Hay tantas áreas para desarrollar la coordinación de sistemas semióticos como parejas de registros: lenguaje → notaciones simbólicas, lenguaje → diagramas, lenguaje → figura, representaciones gráficas → notaciones algebraicas de relaciones... La complejidad de este trabajo educativo depende obviamente de la fuente del registro y el objetivo del registro y por tanto de la separación entre dos diferentes maneras de representar y trabajar.

5 El problema de la “vida real” y las representaciones

Los problemas de la vida diaria se subrayan a menudo en la educación, especialmente en la enseñanza primaria, porque se piensa que la aplicación de procedimientos y operaciones matemáticas a problemas prácticos da significado al aprendizaje de las matemáticas. Pero hay también otra razón más interesante para nuestro propósito: resolver problemas "de la vida real" demanda que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales. Así se les podrían ahorrar a los estudiantes el problema que suscitan las representaciones semióticas y además podrían comprender los conceptos matemáticos y por tanto dar sentido a las representaciones semióticas empleadas. En otras palabras, ¿son nuestros análisis previos del pensamiento matemático relevantes para este aspecto de la actividad matemática cuya importancia es reclamada para la enseñanza o, por el contrario, cualquier aplicación de operaciones matemáticas para solucionar problemas de la vida real requiere una articulación preliminar de diversas representaciones, incluyendo representaciones semióticas?

Todas las situaciones en las que contar y cuantificar forma parte de una actividad real dan pie a problemas en los que se requiere un conocimiento numérico. La forma más común de plantearlo es hacer que los estudiantes descubran la operación aritmética correcta y llevarla a cabo. Los problemas aritméticos de un paso son bien conocidos para la elección entre la adición y la sustracción o entre la multiplicación o la división. Puede también servir para introducir conjuntos numéricos (los decimales, las fracciones...) o el razonamiento proporcional. También se usan problemas de la vida real para hacer la transición de la aritmética al álgebra. Así obtenemos un amplio rango de problemas reales que varían según las situaciones y los procedimientos matemáticos.

Desde un punto de vista educativo estos problemas dan la oportunidad de demandar un amplio rango de representaciones no verbales relacionadas con la experiencia concreta o con las operaciones matemáticas a realizar. Enfrentados con estos problemas, los estudiantes y los profesores podrían escoger las mejores representaciones para trabajar con el contenido matemático que encierran y para resolver los problemas.

Sin embargo, desde un punto de vista cognitivo, todos estos problemas conllevan los mismos procesos complejos y plantean el tema de la relevancia de las representaciones usadas. Sea cual sea el problema propuesto la completa situación cognitiva a la cual los estudiantes y los profesores se exponen es la siguiente (figura 11):

Incluso en el caso en que deban ser rápidamente olvidadas, las palabras son necesarias para describir o evocar una situación de la vida real y para hacer una pregunta (primera columna de la figura 11). Luego la conversión es necesaria y está intrínsecamente conectada con la discriminación de la información relevante para la elección de la operación aritmética correcta, o para la elección de la cantidad desconocida denotada con una letra... El tratamiento depende primero de esta discriminación y de las elecciones que se hacen o no, incluso si tras diferentes procedimientos se eligen de acuerdo con el conocimiento matemático.

Las diversas representaciones semióticas necesitadas para plantear el problema (sus condiciones, datos y pregunta) y resolverlo	Tres clases de representaciones auxiliares posibles para resolver el problema	El problema del aprendizaje con el que se enfrenta el profesor
FASE I Los problemas para aplicar los procedimientos matemáticos en los problemas de la vida real: (*problemas verbales con datos, pertinentes o no*)	A. Dibujos de una situación de la vida real	
FASE II **La conversión en expresiones simbólicas que encajen con el procedimiento matemático pertinente**	B. Bidimensional y organización semántica para discriminar lo que es relevante de lo que no lo es **en expresiones verbales describiendo la situación**	**¿Qué tipo de REPRESENTACIÓN AUXILIAR y para qué?**
FASE III Solución por tratamiento (La transformación de representaciones dentro del mismo registro)	C. La visualización matemática para comprender el procedimiento (Las líneas numéricas, los diagramas,..)	

Figura 11: El laberinto de representaciones en la resolución de un “problema real”

La ventaja educativa de los problemas de la vida real es que permiten trabajar libremente con aquellas representaciones que parezcan más accesibles que las que se usan en matemáticas (segunda columna de la figura 11). Son pues representaciones auxiliares que pueden ayudar al estudiante a comprender cada etapa del proceso de resolución. Pero ahí reside el punto crucial: una representación auxiliar sólo puede encajar en una de las tres fases del “proceso de resolución del problema de la vida real”, por lo tanto las representaciones icónicas solamente pueden encajar con la situación evocada y pueden ser perturbadoras en las fases II y III, las cuales requieren representaciones no icónicas necesariamente semióticas. Además las representaciones que pueden ayudar a los estudiantes a entender la forma de traducir la información dada son bastante diferentes de las que pueden ayudarles a comprender la manera de realizar las operaciones matemáticas. Las representaciones auxiliares pueden satisfacer solamente una función específica en la resolución de los problemas y ésta es relativa a pensar en la conversión o el tratamiento. De cualquier manera, lo que importa no es el averiguar la “buena” representación sino las diversas y adecuadas representaciones para coordinarlas.

Así, en el caso del prototipo de ejemplo de los problemas aditivos, hay que recurrir a representaciones de tipo unidimensional, como el esquema del cálculo relacional (Vergnaud 1976:41-42; 1990:150-157) al igual que se encuentra hoy en todos los manuales para profesores, en los cuales se representan tipos bidimensionales (Damm, 1992), pero ¿útiles a un estricto nivel matemático?

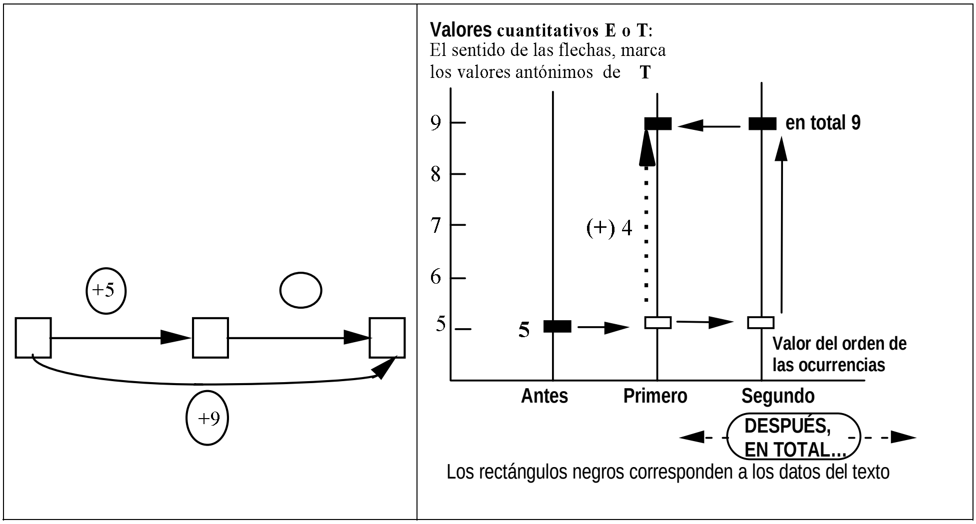


Figura 12

¿Cuál de estos dos tipos de representación puede hacer que los alumnos entiendan un problema aditivo (figura 12)? ¿El unidimensional de la izquierda o el bidimensional de la derecha? Los dos esquemas representan a textos del tipo: Pedro tiene ("ha ganado" o "ha perdido") 5 canicas. Juega una partida (o "juega una segunda partida"). En total tiene 9 canicas ("ha ganado" o "ha perdido")".

Se ve en seguida que el esquema de cálculo de relaciones es congruente con una de las tres operaciones posibles para una adición dada ($5 + 4 = 9$). Sin embargo el esquema bidimensional *es congruente con la doble descripción del texto y permite distinguirlas.* Lo que llamamos "información pertinente" del texto es la que los alumnos deben "seleccionar" y corresponde a la INTERSECCIÓN DE DOS DETERMINACIONES SEMÁNTICAS DIFERENTES (marcada en el esquema con dos ejes diferentes). Tomar en cuenta la *intersección de las dos determinaciones semánticas* distintas ¡permite seleccionar *una información* y diferenciar directamente la lectura de un texto matemático de un texto ordinario! Se puede lógicamente cortar este aspecto en la resolución de algunos problemas particulares de ese tipo. Por lo tanto, ¿debemos sorprendernos que la mayoría de los alumnos tengan dificultades insuperables incluso hasta bachillerato (Delègue y Roussel, 2000)?

Sería fácil demostrar que en la mayoría de las investigaciones estas condiciones cognitivas para usar de manera útil las representaciones auxiliares son completamente ignoradas. Tanto las representaciones icónicas como la visualización matemática para entender el procedimiento se tienen en cuenta como si fueran suficientes para la fase de conversión. No hay ninguna evidencia que apoye esta hipótesis educativa. ¡Muy al contrario, incluso la mayoría de estudiantes de 20 años de edad, y algunas veces profesores en escuelas primarias, no pueden salir del laberinto de representaciones, incluso con problemas aditivos verbales de una sola operación!

6 Conclusión

Las dificultades recurrentes y sistemáticas encontradas por la mayoría de estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas llevan a preguntarse: ¿Son los procesos del pensamiento los mismos en matemáticas que en las otras áreas de conocimiento? Desde la teoría del desarrollo epistemológico de Piaget es más o menos asumido que los procesos cognitivos son básicamente comunes a todas las áreas de conocimiento. Y la investigación en educación matemática está principalmente preocupada por la forma en que cada concepto particular, cada bloque de contenidos se puede enseñar. Incluso si se reconoce la obvia necesidad de diversos sistemas semióticos, su papel básico en los procesos de pensamiento y los problemas específicos que suscitan en el aprendizaje de las matemáticas son sin embargo negados. Tal marco cognitivo que está en la base de la mayor parte de la investigación en educación matemática se topa con un tema crucial que resulta de la paradoja cognitiva de las matemáticas: La incapacidad de la mayoría de estudiantes para cambiar el registro de representación. De cualquier forma los signos y los sistemas semióticos son una parte importante del pensamiento matemático, y no es fácil aislarlos de los objetos implícitos y analizar su funcionando cognitivo porque toda representación semiótica es representación de algo. ¿Cómo podemos investigar el papel básico de las representaciones semióticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

He presentado tres ideas principales. En primer lugar, lo que importa en las representaciones semióticas no es su relación con algo más, el objeto implícito, sino su capacidad intrínseca para ser transformadas en otras representaciones semióticas. Esa es la parte básica que juegan en los procesos de aprendizaje. Cada sistema semiótico provee una capacidad específica de transformación. En segundo lugar, hay dos clases de transformaciones de cualquier representación semiótica: la conversión y el tratamiento. Son cognitivamente bastante independientes la una de la otra aunque matemáticamente la primera depende de la segunda. Es la razón por la cual la conversión de representación es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En tercer lugar, y éste es el punto más sensible, la conversión y el tratamiento debe ser separados para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan con el problema; esta separación metodológica y teórica va en contra de la práctica actual de considerar estos dos tipos de transformaciones como una unidad para la resolución de los problemas.

En este artículo he enfatizado la conversión porque es sólo en matemáticas donde se requiere un amplio y complejo juego de transformación de representaciones para pensar y también porque un enfoque dualista de la actividad matemática conduce a negar su importancia cognitiva. De hecho la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados, y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión. En cuanto a la conversión parece que las representaciones semióticas podrían no estar al mismo nivel que las representaciones auxiliares cuyo uso es principalmente para individuos o para propósitos educativos. Sin embargo algunos tratamientos también tienen una complejidad cognitiva específica, principalmente los que usan el lenguaje y la visualización. Así la forma de expresar y entender los comentarios lingüísticos no es la misma dentro y fuera de las matemáticas (Duval, 2003). Hay también formas bastantes diferentes y conflictivas de mirar las figuras en geometría, que dan lugar a formas de proceder que no tienen relación con los conceptos geométricos, y ésa es la razón de que puedan ser heurísticamente potentes. Sólo mediante la conversión y el tratamiento la complejidad cognitiva de todos los tratamientos discursivos y visuales que no pueden ser fijados en algoritmos se pueden describir e investigar.

Cuando el proceso más global de transformaciones de representaciones que es necesario para la actividad matemática se centra solamente en los contenidos matemáticos particulares que se enseñan, éste queda en la oscuridad. Y nadie podrá contestar la única pregunta que se hace la mayoría de las personas que no enseñan matemáticas: ¿Cómo puede contribuir el aprendizaje de las matemáticas a la educación general para formar la mente o para el desarrollo de las capacidades más globales de visualización, razonamiento, organización de información, y no solamente la obtención de algunos procedimientos técnicos de cálculo? Esta es la razón por la que analizar los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas requiere un cambio o una orientación en la forma que las tareas y los problemas se seleccionan para el aprendizaje de los estudiantes y también para la investigación sobre el aprendizaje. Las variables cognitivas relativas a las diversas maneras de representación deben ser tomadas en consideración. Se requieren también métodos que vayan más allá de lo que se deja constancia en la escala del trabajo diario en el aula.

Referencias

[1] W. Damm, Compréhension d'un énoncé de problème: le choix de la donnée de référence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **4** (1991) 197–225.

[2] H.P. Delègue y J. Roussel, *Introduction à la complexité des problèmes à énoncé, Spirale* **26** (2000) 119–138 (numéro spécial: Culture scientifique et culture technique à l'école. Revue de l'Université Lille 3 et de l'IUFM Nord Pas-de-Calais).

[3] G. Didierjean, R. Duval *et alt.* À propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues. *Petit x*, 44 (1993) 35–48.

[4] C. Dupuis, F. Pluvinage y R. Duval, *Etude sur la géométrie en fin de troisième. Géométrie au Premier Cycle, II*, Paris, A.P.M.E.P., 1978, 65–101.

[5] R. Duval, Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **1** (1988) 235–255.

[6] R. Duval, Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **5** (1993) 37–65.

[7] R. Duval, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Peter Lang, 1995a.

[8] R. Duval, *Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing.* En: R. Suttherland y J. Mason (Ed.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp.142-157). Berlin, Springer, 1995b.

[9] R. Duval, *Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage*. Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM, tomo 1, 3–15. Toulouse, Université Paul Sabatier, 1996.

[10] R. Duval, *Geometry from a cognitive point a view.* En: C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, (pp. 37–52). Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers. 1998.

[11] R. Duval, *Basic Issues for Research in Mathematics Education.* En: T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I*, (pp. 55–69), Hiroshima University, 2000.

[12] R. Duval, *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets*. En: J.Ph. Drouhard et M . Maurel (Eds.), *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*, Vol. IV 1901-2001 (pp. 67–94), IREM de Nice, 2002.

[13] R. Duval, Langages et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques: deux pratiques et une troisième. Proceedings 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics (pp. 13–33). University of Crete, Department of Education, 2003.

[14] R. Duval, Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10** (2005).

[15] G. Vergnaud y C. Durand,Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie* **36** (1976) 28–43.

[16] G. Vergnaud, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques* **10** (1990) 2.3, 133–170.

Raymond Duval
Universidad del Litoral Côte d'Opale