



MOTORE SINCRONO A MAGNETI PERMANENTI

L. SALVATORE

1.1 Il motore sincrono a magneti permanenti

In passato il motore sincrono era considerato un motore a velocità costante (la velocità di sincronismo), dipendente dalla frequenza di alimentazione e dal numero di coppie polari. Per tale motivo esso era considerato inadatto alla realizzazione di azionamenti elettrici a velocità variabile e la sua applicazione era limitata a quei settori in cui non era richiesto un controllo di velocità e/o posizione. Le macchine sincrone trovarono largo impiego come generatori piuttosto che come motori; ancor oggi quasi tutti i generatori elettrici in c.a. sono sincroni e quasi tutta la potenza elettrica impegnata negli impianti di potenza è generata dai sincroni.

Il notevole sviluppo che si è avuto negli ultimi decenni nel campo dell'elettronica di potenza ha consentito la realizzazione pratica ed economica di sorgenti di alimentazione in c.a. a frequenza e tensione variabili. Di conseguenza è divenuto possibile l'impiego di motori in c.a., sia sincroni che asincroni, nel campo degli azionamenti elettrici a velocità variabile.

Negli ultimi anni è andato continuamente crescendo l'interesse nei confronti del motore sincrono a magneti permanenti, a causa dei numerosi vantaggi che esso presenta rispetto ad altre macchine, sia in c.c. che in c.a., convenzionalmente usate negli azionamenti.

Nei motori ad induzione, infatti, il vettore rotante della corrente statorica è composto da due componenti ortogonali, una di magnetizzazione che genera il flusso di rotore ed una di coppia che genera la coppia elettromagnetica al traferro. Nei motori sincroni a magneti permanenti l'uso dei magneti, che sostituiscono l'avvolgimento di eccitazione delle macchine sincrone convenzionali, rende non necessaria (nel PMSM a magneti superficiali) la componente magnetizzante del vettore della corrente statorica nel funzionamento a flusso al traferro costante. Di conseguenza, a parità di condizioni di carico, il PMSM funziona a un più elevato fattore di potenza e con un rendimento maggiore rispetto ad un motore ad induzione.

La macchina sincrona convenzionale necessita di una alimentazione in continua dell'avvolgimento di campo, fornita mediante un sistema di spazzole ed anelli. Ciò causa perdite nel rame di rotore e richiede una continua manutenzione delle spazzole e degli anelli. L'impiego di magneti permanenti in sostituzione dell'avvolgimento di

campo, dell'alimentazione in continua e del collettore consente di eliminare tutti gli svantaggi menzionati in precedenza.

Le macchine sincrone a magneti permanenti si possono suddividere in due principali categorie:

- brushless DC, a magneti superficiali aventi distribuzione trapezoidale dell'induzione al traferro;
- brushless AC aventi distribuzione sinusoidale dell'induzione al traferro.

Le principali caratteristiche possedute dai PMSM possono infine essere così riassunte:

- elevata densità di flusso al traferro;
- elevato rapporto potenza/peso;
- ampio rapporto coppia/inerzia, che garantisce elevate accelerazioni;
- piccole oscillazioni di coppia anche a velocità molto basse, il che consente di ottenere notevole accuratezza nel posizionamento;
- ampio campo di variazione della velocità;
- possibilità di funzionamento a coppie elevate, che permette di ottenere rapide accelerazioni e decelerazioni;
- alto rendimento ed alto fattore di potenza;
- struttura compatta.

Lo sviluppo di nuove tecnologie e materiali per la produzione di magneti permanenti con elevate caratteristiche magnetiche, ha contribuito notevolmente all'affermazione dei PMSM nel campo degli azionamenti elettrici a velocità variabile. Attualmente sono disponibili sul mercato, a costi non proibitivi, magneti permanenti composti da leghe di elementi delle terre rare, quali per esempio samario-cobalto e neodimio-ferro-boro, aventi elevata forza coercitiva e induzione residua e, quindi, di difficile smagnetizzazione.

I motori sincroni a magneti permanenti sono realizzati in due configurazioni base: i motori *a magneti superficiali*, nei quali i magneti sono montati sulla superficie del rotore, e i motori *a magneti annegati* o interni, nei quali i magneti sono allocati all'interno della struttura del rotore (Fig. 1.1).

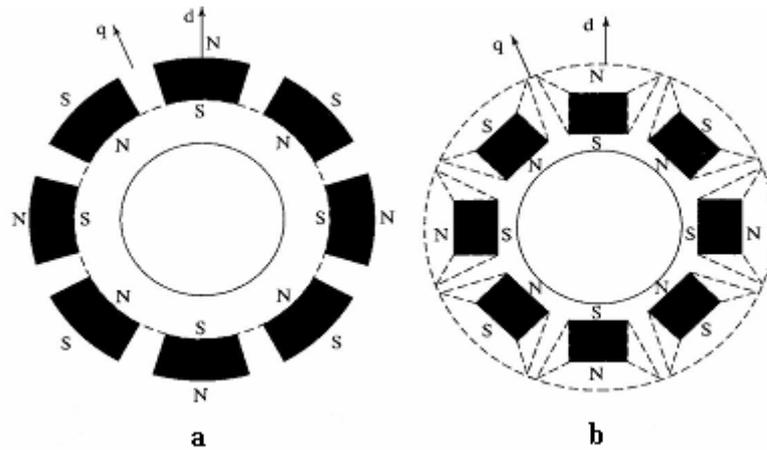


Fig. 1.1. Sezioni trasversali dei rotori di motori sincroni a magneti permanenti superficiali (a), detti SPMSM, e interni (b), detti IPMSM

I motori a magneti superficiali possono essere considerati, da un punto di vista magnetico, dei motori isotropi con un elevato spessore di traferro, in quanto i magneti hanno una permeabilità relativa prossima ad 1 ($1.02 \div 1.2$). Le induttanze di magnetizzazione secondo gli assi diretto (l'asse diretto coincide con l'asse di un polo nord) ed in quadratura di rotore (l'asse in quadratura o interpolare è a 90 gradi elettrici, essendo i gradi elettrici uguali ai gradi meccanici per il numero di paia di poli al traferro n_p) sono di conseguenza uguali (vedi Fig. 1.2). Inoltre, a causa dell'elevato traferro, l'induttanza di magnetizzazione è piccola e quindi gli effetti della reazione di armatura sono trascurabili e la costante di tempo elettrica di statore risulta anch'essa piccola.

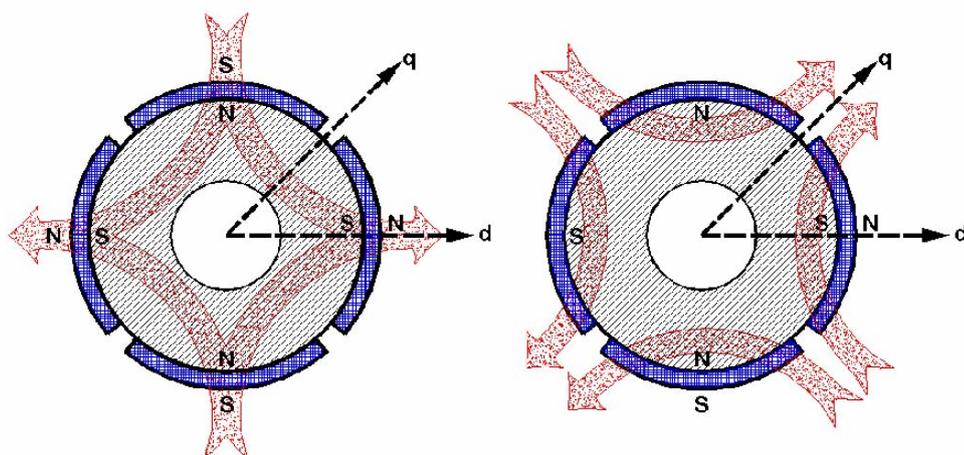


Fig. 1.2. Percorsi del flusso magnetico secondo gli assi diretto ed in quadratura di rotore in una macchina sincrona a magneti permanenti superficiali

I motori a magneti interni presentano una struttura meccanica più robusta, il che li rende particolarmente adatti ad applicazioni ad alta velocità, poiché i magneti sono fisicamente contenuti all'interno del rotore e protetti. Benché tali motori abbiano un rotore con una struttura geometrica isotropa, non possono essere considerati isotropi da un punto di vista del circuito magnetico. Infatti, poiché la permeabilità dei materiali magnetici ceramici o delle terre rare è prossima a quella dello spazio vuoto, lo spessore del magnete costituisce un ampio traferro lungo il percorso del flusso magnetico secondo l'asse diretto. Il percorso del flusso magnetico secondo l'asse in quadratura, invece, non subisce apprezzabili variazioni di permeanza, in quanto ciascun magnete è ricoperto da una scarpa polare di acciaio dolce ad alta permeabilità (Fig. 1.3).

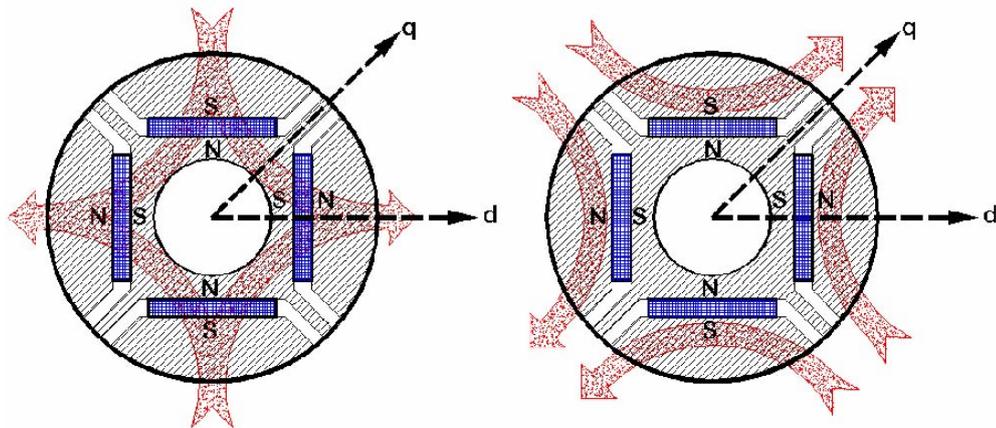


Fig. 1.3. Percorsi del flusso magnetico secondo gli assi diretto ed in quadratura di rotore in una macchina sincrona a magneti permanenti interni o annegati

La salienza magnetica degli assi diretto e in quadratura di rotore altera quindi sensibilmente il meccanismo di generazione della coppia elettromagnetica nella macchina; oltre alla coppia generata dall'interazione tra il flusso del magnete, orientato secondo l'asse d di rotore, e la componente in quadratura della corrente di statore (coppia magnetica o di allineamento di campo), esiste anche una componente di coppia di riluttanza, dovuta alla salienza rotorica, che risulta essere proporzionale alla differenza tra le induttanze di magnetizzazione secondo gli assi diretto ed in quadratura. È importante sottolineare come in un PMSM a magneti annegati l'induttanza di magnetizzazione secondo l'asse in quadratura sia maggiore rispetto a quella secondo

l'asse diretto, al contrario di quanto avviene in una macchina sincrona convenzionale a poli salienti.

1.2 Modello matematico di un PMSM in coordinate di fase

Il motore sincrono a magneti permanenti è costituito fondamentalmente da uno statore, nelle cui cave sono disposti avvolgimenti trifasi, costituiti da matasse aventi assi a 120 gradi elettrici tra loro e alimentati da tensioni sinusoidali, e da un rotore nel quale i magneti permanenti producono un campo diretto lungo l'asse degli stessi. Il flusso di rotore si può ritenere costante e pari a Ψ_{PM} .

Applicando la seconda legge di Kirchhoff agli avvolgimenti di statore connessi a stella, si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} v_{s,1N} = R_{s,1}i_{s,1} + \frac{d\lambda_{s,1}}{dt} \\ v_{s,2N} = R_{s,2}i_{s,2} + \frac{d\lambda_{s,2}}{dt} \\ v_{s,3N} = R_{s,3}i_{s,3} + \frac{d\lambda_{s,3}}{dt} \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $R_{s,1}$, $R_{s,2}$ e $R_{s,3}$ sono le resistenze di ciascun avvolgimento di statore. Data la simmetria costruttiva del motore, le tre resistenze sono generalmente uguali ($R_{s,1} = R_{s,2} = R_{s,3} = R_s$).

Le tre tensioni e le tre correnti di fase hanno le seguenti espressioni

$$\begin{cases} v_{s,1N} = \sqrt{2}V_s \cos(\theta) \\ v_{s,2N} = \sqrt{2}V_s \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ v_{s,3N} = \sqrt{2}V_s \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} i_{s,1} = \sqrt{2}I_s \cos(\theta - \Phi_1) \\ i_{s,2} = \sqrt{2}I_s \cos(\theta - \Phi_1 + \frac{4\pi}{3}) \\ i_{s,3} = \sqrt{2}I_s \cos(\theta - \Phi_1 + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (1.2)$$

dove :

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_s(\tau) d\tau + \theta(0) \quad (1.3)$$

e ω_s è la pulsazione delle tensioni di fase.

Le tre tensioni di fase e le tre correnti di fase possono essere rappresentate mediante vettori rotanti o fasori di tempo in un sistema di riferimento stazionario α - β con l'asse reale α solidale con l'asse della fase 1. I vettori rotanti sono definiti come segue:

$$\bar{v}_{s\alpha\beta} = v_{s\alpha} + jv_{s\beta} = \frac{2}{3}(v_{s,1N} + v_{s,2N}e^{j\frac{2\pi}{3}} + v_{s,3N}e^{j\frac{4\pi}{3}}) = \quad (1.4)$$

$$= \frac{2v_{s,12} + v_{s,23}}{3} + j\frac{v_{s,23}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}V_s e^{j\theta}$$

$$\bar{i}_{s\alpha\beta} = i_{s\alpha} + ji_{s\beta} = \frac{2}{3}(i_{s,1} + i_{s,2}e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_{s,3}e^{j\frac{4\pi}{3}}) = \quad (1.5)$$

$$= i_{s,1} + j\frac{i_{s,1} + 2i_{s,2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}I_s e^{j(\theta - \Phi_1)}$$

Le proiezioni dei vettori rotanti di tensione e di corrente sugli assi orientati delle tre fasi (1,2,3) rappresentano istante per istante le tre tensioni di fase ($v_{s,1N}, v_{s,2N}, v_{s,3N}$) e le tre correnti di fase ($i_{s,1}, i_{s,2}, i_{s,3}$) come mostrato in figura 1.4. Le proiezioni dei vettori rotanti di tensione e di corrente sugli assi del sistema di riferimento stazionario α - β rappresentano, ovviamente, le componenti α - β applicate ad una macchina equivalente bifase, come mostrato in figura 1.5.

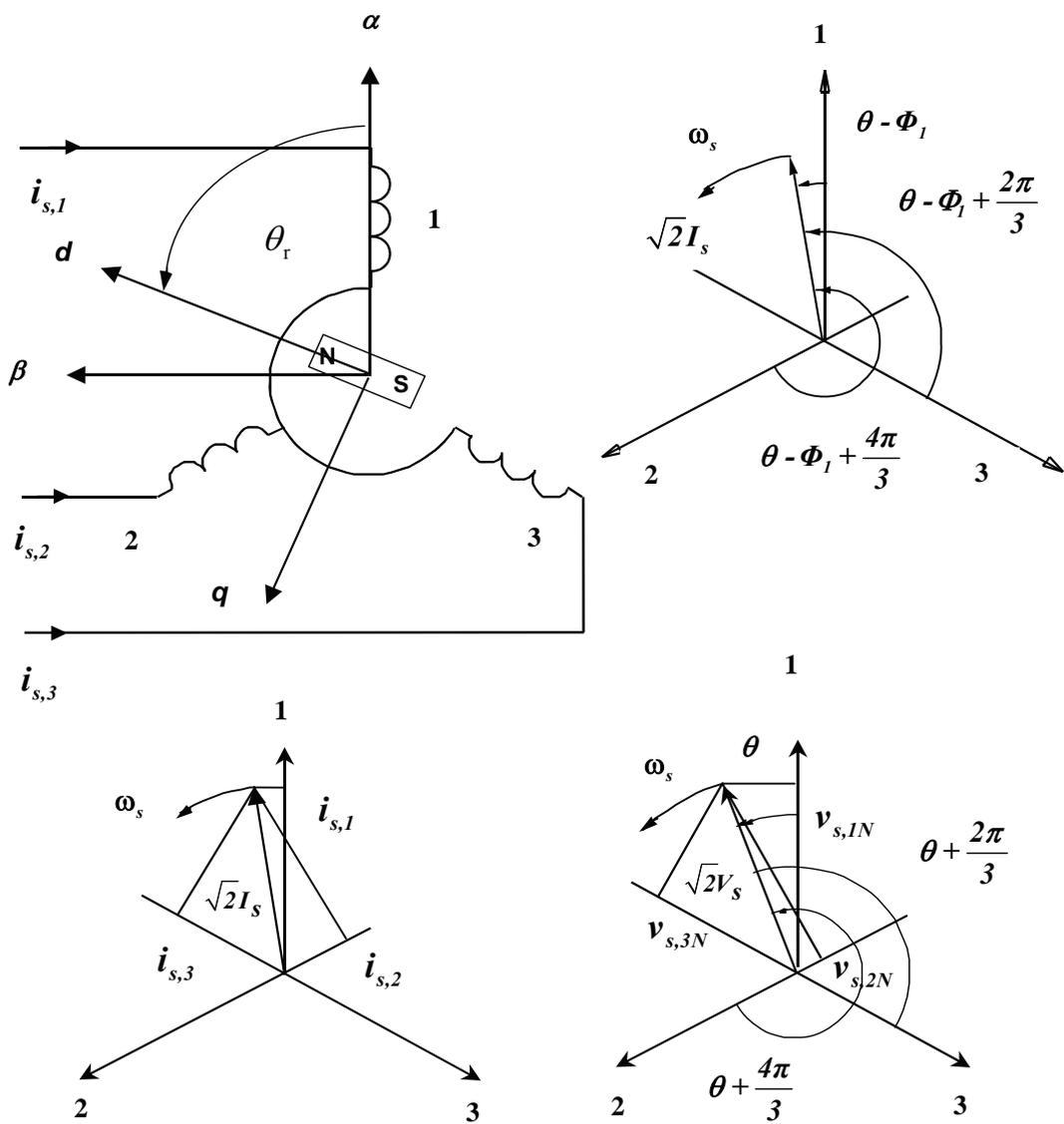


Fig. 1.4. Rappresentazione schematica del motore e delle tensioni e correnti di fase tramite fasori di tempo o vettori rotanti

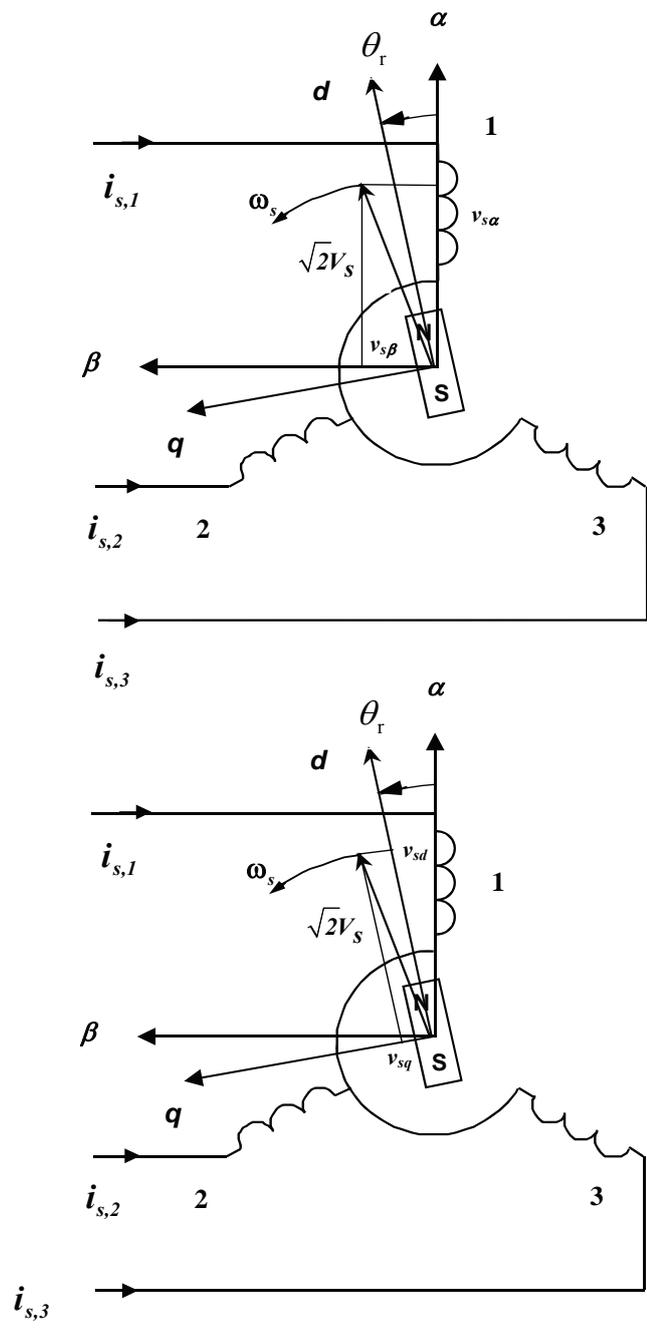


Fig. 1.5. Rappresentazione delle componenti α - β e d-q del vettore delle tensioni

Nel sistema di riferimento rotante d-q, con l'asse d coincidente con l'asse del magnete e formante l'angolo elettrico θ_r con l'asse della fase 1 dello statore, i vettori di tensione e corrente hanno le seguenti espressioni:

$$\bar{v}_{sdq} = v_{sd} + jv_{sq} = \bar{v}_{s\alpha\beta} e^{-j\theta_r} = \sqrt{2}V_s e^{j(\theta-\theta_r)} \quad (1.6)$$

$$\bar{i}_{sdq} = i_{sd} + ji_{sq} = \bar{i}_{s\alpha\beta} e^{-j\theta_r} = \sqrt{2}I_s e^{j(\theta-\Phi_1-\theta_r)} \quad (1.7)$$

con

$$\theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\tau) d\tau + \theta_r(0) \quad (1.8)$$

$\lambda_{s,1}$, $\lambda_{s,2}$ e $\lambda_{s,3}$ sono i flussi concatenati con le fasi di statore ed hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \lambda_{s,1} = L_{s,11}i_{s,1} + L_{s,12}i_{s,2} + L_{s,13}i_{s,3} + \lambda_{s,1PM} \\ \lambda_{s,2} = L_{s,21}i_{s,1} + L_{s,22}i_{s,2} + L_{s,23}i_{s,3} + \lambda_{s,2PM} \\ \lambda_{s,3} = L_{s,31}i_{s,1} + L_{s,32}i_{s,2} + L_{s,33}i_{s,3} + \lambda_{s,3PM} \end{cases} \quad (1.9)$$

dove $L_{s,kk}$ ($k = 1, 2, 3$) e $L_{s,kj}$ ($k, j = 1, 2, 3$ e $k \neq j$) sono, rispettivamente, le auto e le mutue induttanze degli avvolgimenti di fase di statore.

Indicando con L_{sl} l'induttanza di dispersione di una fase di statore, con $L_{sl} + L_{s,mav} + L_{s,m\Delta}$ l'induttanza massima e con $L_{sl} + L_{s,mav} - L_{s,m\Delta}$ l'induttanza minima di una fase di statore, le auto e mutue induttanze di statore possono essere così espresse:

$$L_{s,kk} = L_{sl} + L_{s,mav} + L_{s,m\Delta} \cos\left(2\theta_r - \frac{4(k-1)}{3}\pi\right) \quad \text{con } k=1, 2, 3 \quad (1.10)$$

$$L_{s,kj} = -\frac{1}{2}L_{s,mav} + L_{s,m\Delta} \cos\left(2\theta_r - \frac{2(1-2k-2j)}{3}\pi\right) \quad \text{con } k, j=1, 2, 3 \text{ e } k \neq j$$

Particolarizzando le (1.10) per ogni k e ogni j , si ottiene la matrice delle induttanze $L_{s,123}$:

$$\begin{aligned}
L_{s,123} &= \\
&= \begin{bmatrix} L_{sl} + L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos 2\theta_r & -\frac{1}{2}L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos\left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos\left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\frac{1}{2}L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos\left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sl} + L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos 2\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos 2\theta_r \\ -\frac{1}{2}L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos\left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos 2\theta_r & L_{sl} + L_{s,mkv} + L_{s,m\Delta} \cos 2\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \\
& \hspace{20em} (1.11)
\end{aligned}$$

Si assume che i flussi concatenati dovuti al magnete permanente (funzioni periodiche dell'angolo elettrico θ_r tra l'asse d del magnete e l'asse della fase 1 dello statore) obbediscano a una legge di tipo sinusoidale:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{s,1PM} &= \Psi_{PM} \cos \theta_r \\ \lambda_{s,2PM} &= \Psi_{PM} \cos\left(\theta_r - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \lambda_{s,3PM} &= \Psi_{PM} \cos\left(\theta_r - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned} \right. \quad (1.12)$$

In forma più compatta:

$$\lambda_{s,kPM} = \Psi_{PM} \cos\left(\theta_r - \frac{2(k-1)}{3}\pi\right) \quad \text{con } k = 1, 2, 3 \quad (1.13)$$

La (1.9) può essere ora scritta in forma matriciale:

$$\bar{\lambda}_{s,123} = L_{s,123} \bar{i}_{s,123} + \bar{\lambda}_{s,123PM} \quad (1.14)$$

Sostituendo la (1.14) nella (1.1) ed esprimendo quest'ultima in forma matriciale, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{s,123} &= R_{s,123} \bar{i}_{s,123} + \frac{d\bar{\lambda}_{s,123}}{dt} = \\
&= R_{s,123} \bar{i}_{s,123} + \frac{d(L_{s,123} \bar{i}_{s,123} + \bar{\lambda}_{s,123PM})}{dt} = \\
&= \left(R_{s,123} + \frac{dL_{s,123}}{dt} \right) \bar{i}_{s,123} + L_{s,123} \frac{d\bar{i}_{s,123}}{dt} + \frac{d\bar{\lambda}_{s,123PM}}{dt}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

con

$$R_{s,123} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

$$\frac{dL_{s,123}}{dt} = -2L_{s,m\Delta} \frac{d\theta_r}{dt} \begin{bmatrix} \sin 2\theta_r & \sin\left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin 2\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin 2\theta_r \\ \sin\left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin 2\theta_r & \sin 2\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

$$\frac{d\bar{\lambda}_{s,123PM}}{dt} = -\Psi_{PM} \begin{bmatrix} \sin \theta_r \\ \sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \frac{d\theta_r}{dt} \tag{1.18}$$

Si vuole costruire un modello del motore in cui le variabili di stato siano le tre correnti di fase, la velocità e la posizione di rotore. A tal proposito, sono necessarie altre due equazioni oltre alla (1.15). Si consideri, perciò, l'equazione di equilibrio meccanico all'albero del motore:

$$C_e - C_r - B \frac{\omega_r}{n_p} = \frac{J}{n_p} \frac{d\omega_r}{dt} \quad (1.19)$$

dove si sono indicati con C_e e C_r la coppia elettromagnetica e la coppia di carico rispettivamente, con B il coefficiente di attrito viscoso, con J il momento di inerzia delle masse rotanti e con ω_r la velocità elettrica di rotore.

A questo punto, considerando anche che la velocità si ottiene derivando la posizione, si possono scrivere tutte le equazioni del modello:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{i}_{s,123}}{dt} = -L_{s,123}^{-1} \left[\left(R_{s,123} + \frac{dL_{s,123}}{dt} \right) \bar{i}_{s,123} + \frac{d\bar{\lambda}_{s,123PM}}{dt} - \bar{v}_{s,123} \right] \\ \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{n_p}{J} \left(C_e - C_r - B \frac{\omega_r}{n_p} \right) \\ \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r \end{cases} \quad (1.20)$$

La coppia elettromagnetica è ottenuta derivando l'espressione della coenergia rispetto alla posizione meccanica del rotore:

$$C_e = n_p \frac{\partial W_c}{\partial \theta_r} \quad (1.21)$$

dove

$$W_c = \frac{1}{2} \bar{i}_{s,123}^T L_{s,123} \bar{i}_{s,123} + \bar{i}_{s,123}^T \bar{\lambda}_{s,123PM} + W_{PM} \quad (1.22)$$

W_{PM} è l'energia immagazzinata nel magnete permanente ed è indipendente da θ_r .

Sostituendo la (1.22) nella (1.21), si ottiene:

$$\begin{aligned} C_e = n_p \left\{ L_{s,m\Delta} \left[-i_{s,1}^2 \sin 2\theta_r - i_{s,2}^2 \sin \left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) - i_{s,3}^2 \sin \left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2i_{s,1}i_{s,2} \sin \left(2\theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) - 2i_{s,2}i_{s,3} \sin 2\theta_r - 2i_{s,3}i_{s,1} \sin \left(2\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \right. \\ \left. - \Psi_{PM} i_{s,1} \sin \theta_r - \Psi_{PM} i_{s,2} \sin \left(\theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) - \Psi_{PM} i_{s,3} \sin \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.3 Modello matematico di un PMSM in coordinate d,q

Ai fini del progetto del sistema di controllo e della stima dei parametri di macchina, è più utile un modello matematico nel sistema di riferimento (d,q) di rotore. Questo riferimento è rotante alla velocità elettrica ω_r rispetto allo statore. Le equazioni di macchina in componenti di fase possono essere trasformate in equazioni in componenti d-q-0 utilizzando la matrice di trasformazione di Park

$$K = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_r) & -\sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

e la sua inversa

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & -\sin(\theta_r) & 1 \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Considerando che

$$\begin{aligned} \bar{v}_{s,dq0} &= K\bar{v}_{s,123} \\ \bar{i}_{s,dq0} &= K\bar{i}_{s,123} \end{aligned} \quad (1.26)$$

a partire dalla (1.15) si ottiene

$$\bar{v}_{s,dq0} = KR_{s,123}K^{-1}\bar{i}_{s,dq0} + K\frac{dL_{s,123}}{dt}K^{-1}\bar{i}_{s,dq0} + KL_{s,123}\frac{d}{dt}(K^{-1}\bar{i}_{s,dq0}) + K\frac{d}{dt}(K^{-1}\bar{\lambda}_{s,dq0PM}) =$$

$$\begin{aligned}
&= R_{s,123} \bar{i}_{s,dq0} + K \frac{dL_{s,123}}{dt} K^{-1} \bar{i}_{s,dq0} + KL_{s,123} K^{-1} \frac{d}{dt} (\bar{i}_{s,dq0}) + KL_{s,123} \frac{dK^{-1}}{dt} \bar{i}_{s,dq0} + \\
&+ \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_{s,dq0PM} + K \frac{dK^{-1}}{dt} \bar{\lambda}_{s,dq0PM}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Dopo alcuni passaggi si ha:

$$\left\{ \begin{aligned}
v_{sd} &= R_s i_{sd} + \frac{d\lambda_{sd}}{dt} - \omega_r \lambda_{sq} \\
v_{sq} &= R_s i_{sq} + \frac{d\lambda_{sq}}{dt} + \omega_r \lambda_{sd} \\
v_{s0} &= R_s i_{s0} + L_{sl} \frac{di_{s0}}{dt}
\end{aligned} \right. \tag{1.28}$$

dove i flussi secondo l'asse d e q hanno le seguenti espressioni:

$$\left\{ \begin{aligned}
\lambda_{sd} &= L_{sd} i_{sd} + \Psi_{PM} \\
\lambda_{sq} &= L_{sq} i_{sq}
\end{aligned} \right. \tag{1.29}$$

L_{sd} e L_{sq} sono le induttanze sincrone secondo gli assi d e q rispettivamente:

$$\begin{aligned}
L_{sd} &= L_{sl} + L_{md} & L_{sq} &= L_{sl} + L_{mq} \\
L_{md} &= \frac{3}{2} (L_{s,mav} + L_{s,m\Delta}) & L_{mq} &= \frac{3}{2} (L_{s,mav} - L_{s,m\Delta})
\end{aligned} \tag{1.30}$$

essendo L_{md} e L_{mq} le induttanze di magnetizzazione secondo gli assi d e q rispettivamente.

Nelle precedenti equazioni v_{sd} e v_{sq} , i_{sd} e i_{sq} , λ_{sd} e λ_{sq} , rappresentano le componenti (d,q) rispettivamente delle tensioni statoriche, delle correnti statoriche e del flusso concatenato con lo statore. La terza delle equazioni (1.28) ha significato solo nell'ipotesi di centro stella delle tre fasi aterrato. Altrimenti si ha $i_{s0} = \frac{1}{3}(i_{s,1} + i_{s,2} + i_{s,3}) = 0$ per il primo principio di Kirchhoff. Combinando la prima e la seconda delle equazioni (1.28) mediante l'operatore immaginario j , si ottiene l'equazione complessa nel sistema di riferimento rotante d-q:

$$\bar{v}_{sdq} = v_{sd} + jv_{sq} = R_s \bar{i}_{sdq} + \frac{d\bar{\lambda}_{sdq}}{dt} + j\omega_r \bar{\lambda}_{sdq} \quad (1.31)$$

L'espressione della coppia elettromagnetica risulta invece data dalla relazione:

$$C_e = \frac{m_s n_p}{2} (\lambda_{sd} i_{sq} - \lambda_{sq} i_{sd}) \quad (1.32)$$

nella quale $m_s=3$ indica il numero di fasi del sistema di alimentazione.

Sostituendo le equazioni (1.29) nella (1.32) si ottiene ancora:

$$\begin{aligned} C_e &= \frac{m_s n_p}{2} ((L_{sd} i_{sd} + \Psi_{PM}) i_{sq} - L_{sq} i_{sq} i_{sd}) = \\ &= \frac{m_s n_p}{2} (\Psi_{PM} i_{sq} + (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq}) = \\ &= \frac{m_s n_p}{2} (\Psi_{PM} \sqrt{2} I_s \sin(\delta) + (L_{sd} - L_{sq}) I_s^2 \sin(2\delta)) \end{aligned} \quad (1.33)$$

essendo

$$\delta = \theta - \Phi_1 - \theta_r = \int_0^t (\omega_s(\tau) - \omega_r(\tau)) d\tau + \theta(0) - \Phi_1 - \theta_r(0) \quad (1.34)$$

l'angolo tra il vettore rotante della corrente di statore e l'asse d del magnete, e

$$i_{sd} = \sqrt{2} I_s \cos(\delta) \quad i_{sq} = \sqrt{2} I_s \sin(\delta). \quad (1.35)$$

Per avere una coppia elettromagnetica mediamente non nulla a qualsiasi velocità di rotore, occorre alimentare le fasi di statore con tensioni di pulsazione $\omega_s(t) = \omega_r(t)$ in modo che l'angolo di coppia sia costante. Le componenti di corrente secondo gli assi d e q risultano costanti, così come le componenti di tensione:

$$v_{sd} = \sqrt{2} V_s \cos(\delta + \Phi_1) \quad v_{sq} = \sqrt{2} V_s \sin(\delta + \Phi_1). \quad (1.36)$$

Una macchina sincrona trifase alimentata con tensioni aventi pulsazione pari alla velocità angolare elettrica di rotore si dice **autosincrona**.

L'espressione (1.33) evidenzia in maniera semplice la dipendenza della coppia elettromagnetica dalle componenti della corrente di armatura lungo gli assi diretto ed in quadratura. In particolare mostra che la coppia elettromagnetica in un PMSM è

composta da due termini: il primo di essi rappresenta il contributo generato dall'interazione tra il flusso dei magneti permanenti e la componente secondo l'asse q della corrente statorica; esso è prodotto dalla tendenza dei magneti ad allinearsi con l'asse della forza magneto-motrice di statore e, per questo motivo, prende il nome di "coppia di allineamento di campo"; il secondo termine è legato alla salienza del circuito magnetico percorso dal flusso ed è denominato "coppia di riluttanza".

Nei SPMSM il termine di riluttanza è praticamente assente ($L_{sd} \cong L_{sq}$) e l'espressione (1.33) si semplifica ulteriormente nella:

$$C_e = \frac{m_s n_p}{2} \Psi_{PM} i_{sq} = K_c i_{sq} = K_c \sqrt{2} I_s \sin(\delta) \quad (1.37)$$

dove K_c è detta costante di coppia.

La (1.37) mostra come sia possibile controllare la coppia elettromagnetica agendo esclusivamente sulla componente in quadratura i_{sq} della corrente statorica, dato che il flusso prodotto dai magneti si può considerare costante. Inoltre si può osservare che, a parità di corrente statorica efficace I_s , la coppia massima si ottiene per un angolo di coppia $\delta=90^\circ$, cioè quando la componente i_{sd} è nulla.

Le equazioni (1.19), (1.28) ed (1.33) della macchina sincrona a magneti permanenti possono essere scritte anche nella seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{L_{sd}} i_{sd} + \frac{\omega_r L_{sq} i_{sq}}{L_{sd}} + \frac{v_{sd}}{L_{sd}} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{R_s}{L_{sq}} i_{sq} - \frac{\omega_r L_{sd} i_{sd}}{L_{sq}} - \frac{\omega_r \Psi_{PM}}{L_{sq}} + \frac{v_{sq}}{L_{sq}} \\ C_e = K_c i_{sq} + \frac{3}{2} n_p (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq} \\ \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{n_p}{J} \left(C_e - C_r - B \frac{\omega_r}{n_p} \right) = \frac{n_p}{J} K_c i_{sq} + \frac{3}{2} \frac{n_p^2}{J} (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq} - \frac{n_p}{J} C_r - \frac{B}{J} \omega_r \\ \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r \end{array} \right. \quad (1.38)$$

Sostituendo all'operatore derivata l'operatore di Laplace, si ottiene:

$$\begin{cases}
 i_{sd} = \frac{v_{sd} + \omega_r L_{sq} i_{sq}}{L_{sd} s + R_s} \\
 i_{sq} = \frac{v_{sq} - \omega_r L_{sd} i_{sd} - \omega_r \Psi_{PM}}{L_{sq} s + R_s} \\
 C_e = K_c i_{sq} + \frac{3}{2} n_p (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq} \\
 \omega_r = \frac{n_p}{J s + B} (C_e - C_r) \\
 \theta_r = \frac{\omega_r}{s}
 \end{cases} \quad (1.39)$$

Dalle (1.39) deriva il diagramma a blocchi del motore, in un sistema di coordinate (d,q), rappresentato in figura 1.6. Nel diagramma a blocchi, come nelle equazioni, l'attrito Coloumbiano è stato trascurato.

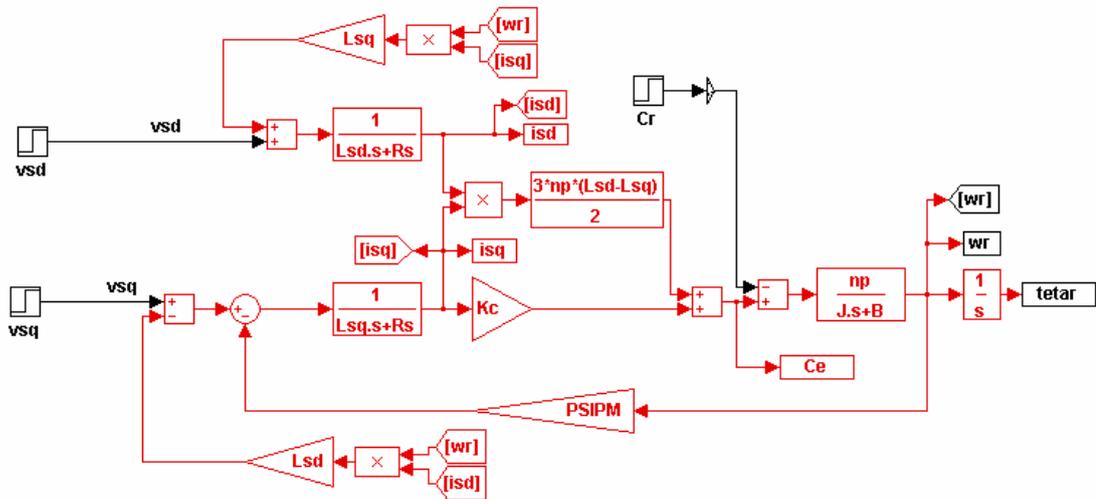


Figura 1.6. Diagramma a blocchi di un motore sincrono a magneti permanenti in un sistema di riferimento d-q

Disaccoppiando gli assi d e q, e cioè ponendo

$$v_{sd} = v_{sd}^* - \omega_r L_{sq} i_{sq} \quad (1.40)$$

$$v_{sq} = v_{sq}^* + \omega_r L_{sd} i_{sd} \quad (1.41)$$

le prime tre equazioni del sistema (1.39) diventano:

$$\left\{ \begin{aligned} i_{sd} &= \frac{v_{sd}^*}{L_{sd}s + R_s} \\ i_{sq} &= \frac{v_{sq}^* - \omega_r \Psi_{PM}}{L_{sq}s + R_s} \\ C_e &= K_c i_{sq} + \frac{3}{2} n_p (L_{sd} - L_{sq}) i_{sd} i_{sq} \end{aligned} \right. \quad (1.42)$$

Sulla base delle equazioni (1.42) il diagramma a blocchi di figura 1.6 può essere trasformato in quello di fig. 1.7.

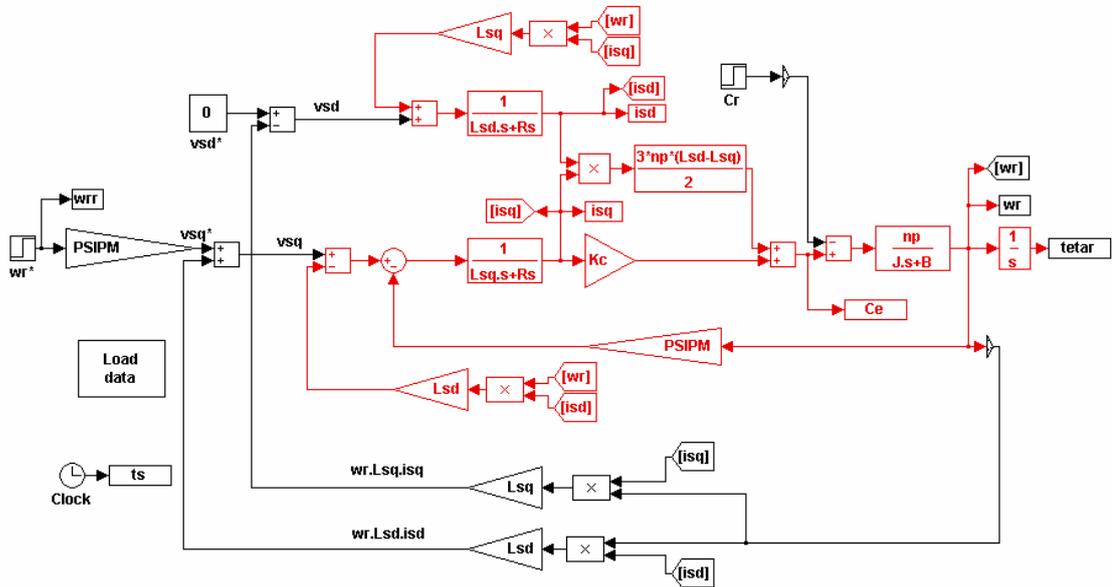


Figura 1.7. Diagramma a blocchi di un motore sincrono a magneti permanenti, con disaccoppiamento, in un sistema di riferimento d-q

Dalle equazioni (1.42) si vede che la tensione secondo l'asse q necessaria per il controllo della velocità di rotore, nell'ipotesi di funzionamento a vuoto ($C_r=0$) ed attrito $B=0$ (e quindi di $C_e=0$ e $i_{sq}=0$ in condizioni di regime), è

$$v_{sq}^* = \omega_r \Psi_{PM} \quad (1.43)$$

Inoltre, per avere $i_{sd}=0$, la tensione di comando secondo l'asse d è

$$v_{sd}^* = 0 \quad (1.44)$$

$$v_{sq}^* = \omega_r^* (\Psi_{PM} + L_{sd} i_{sd}^*) \quad (1.47)$$

Il diagramma a blocchi di un motore sincrono a magneti superficiali con indebolimento del flusso è riportato in figura 1.9.

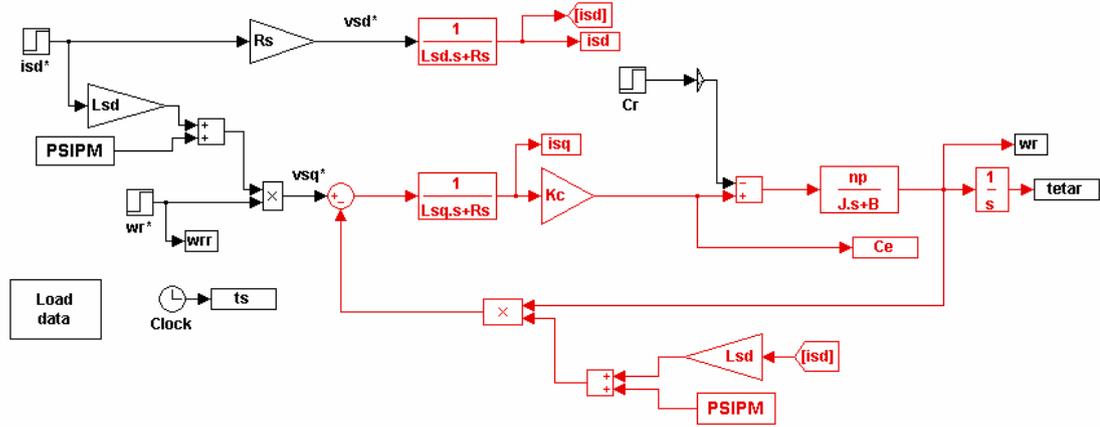


Figura 1.9. Diagramma a blocchi semplificato di un motore sincrono a magneti permanenti superficiali, con indebolimento del flusso, in un sistema di riferimento d-q

1.5 Modello matematico di un PMSM in coordinate d,q per il controllo di coppia

Disaccoppiando gli assi d e q e compensando anche la forza contro elettromotrice, e cioè ponendo

$$v_{sq} = v_{sq}^* + \omega_r L_{sd} i_{sd} + \omega_r \Psi_{PM} \quad (1.48)$$

e sostituendo (1.40) e (1.48) nelle prime tre equazioni del sistema (1.39) si ottiene

$$\begin{cases} i_{sd} = \frac{v_{sd}^*}{L_{sd}s + R_s} \\ i_{sq} = \frac{v_{sq}^*}{L_{sq}s + R_s} \\ C_e = K_c i_{sq} \end{cases} \quad (1.49)$$

Dalle (1.49) è evidente che un controllo di coppia può essere effettuato ponendo

$$v_{sq}^* = R_s i_{sq}^* = R_s \frac{C_e^*}{K_c} = \frac{2R_s}{3n_p \Psi_{PM}} C_e^* \quad (1.50)$$

Il diagramma a blocchi di un motore sincrono a magneti superficiali con controllo di coppia è riportato in figura 1.10.

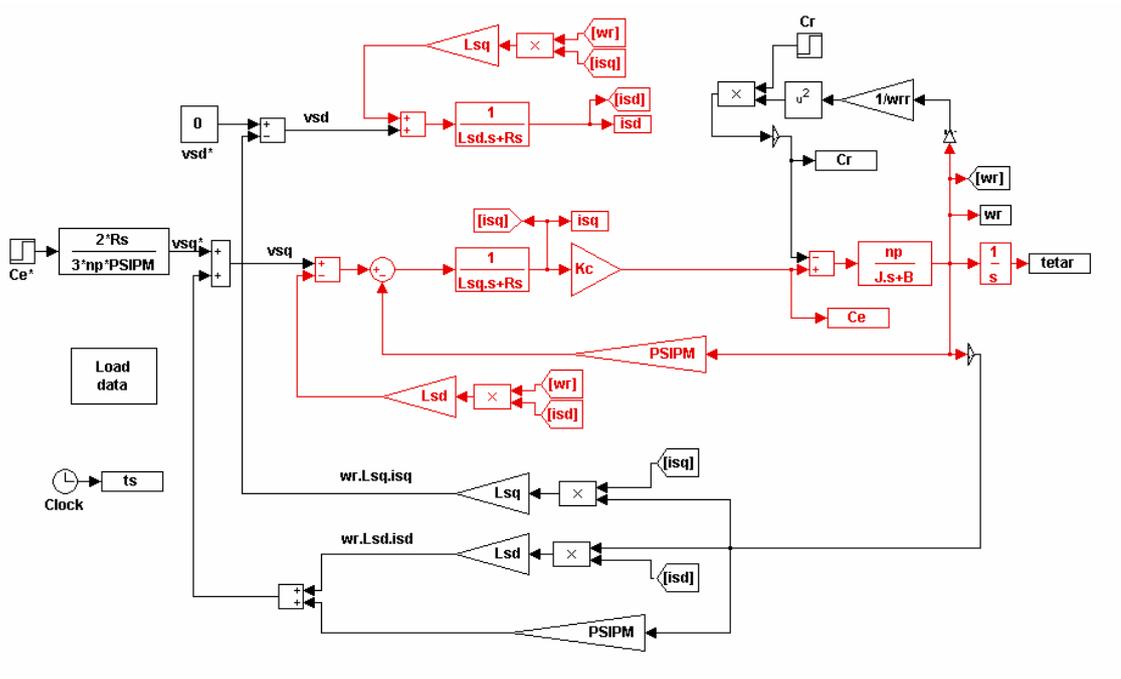


Figura 1.10. Diagramma a blocchi semplificato di un motore sincrono a magneti permanenti superficiali, con controllo di coppia, in un sistema di riferimento d-q

1.6 Modello matematico di un PMSM, collegato ad un carico attivo, in coordinate d-q

Un motore sincrono a magneti permanenti può essere caricato con una macchina sincrona a magneti permanenti controllata in coppia. In figura 1.11 è riportato lo schema a blocchi in coordinate (d,q) del sistema motore-freno. Nel calcolo della coppia trasmessa si è tenuto conto oltre che del coefficiente di elasticità k_{el} , che esprime il legame in condizioni stazionarie tra coppia trasmessa C_{tr} e scorrimento angolare $(\theta_r - \theta_{r1})$, di un termine di smorzamento D_{el} per modellare lo smorzamento naturale delle oscillazioni torsionali.

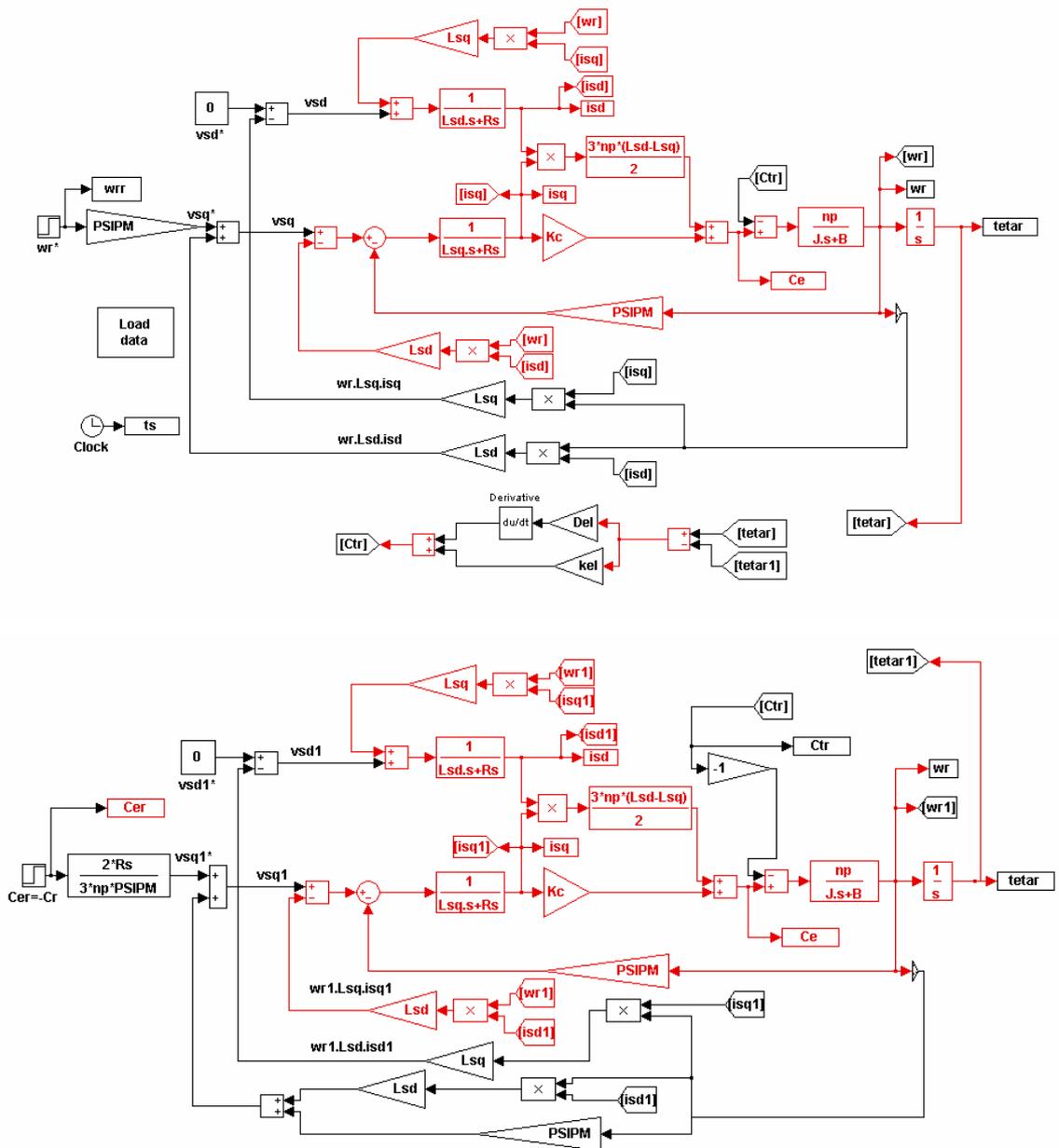


Figura 1.11. Diagramma a blocchi semplificato di un PMSM, collegato ad un carico attivo costituito da una macchina sincrona a magneti permanenti gemella del motore, in un sistema di riferimento d-q

La coppia trasmessa risulta essere:

$$C_{tr} = k_{el} (\theta_r - \theta_{r1}) + D_{el} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_{r1}) \quad (1.51)$$

considerando il rapporto di trasmissione uguale ad 1.

La coppia di riferimento per la macchina sincrona, che funge da carico attivo, deve essere pari alla coppia di carico, cambiata di segno, che si desidera applicare al motore.