11. ESTÁTICA DEL PUNTO Y DEL CUERPO RÍGIDO

La Estática es el capítulo de la Mecánica que estudia el equilibrio de los cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. Además de tener interés para la técnica, son numerosas las aplicaciones de la Estática a problemas de interés geofísico, por ejemplo el equilibrio y estabilidad en la corteza terrestre tanto a gran escala (isostasia) como a pequeña escala (equilibrio y estabilidad de taludes y pendientes, deslizamientos, avalanchas, etc.) y de las capas fluidas de la Tierra (Océanos, Atmósfera). Para la Biología, aparte de sus implicancias respecto de la estructura y organización de los seres vivientes, interesan las aplicaciones a la dinámica de la biosfera, y por ende a la ecología. En este Capítulo estudiaremos la estática del punto y del cuerpo rígido, y dejaremos para más adelante la estática de sistemas más complejos como sólidos deformables, fluidos o medios heterogéneos (como suelos), que presentan problemas más difíciles aunque lógicamente más interesantes del punto de vista de sus aplicaciones.

Estática del punto

En ausencia de movimiento la aceleración de un punto material es nula y la Segunda Ley de Newton establece entonces que la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un punto material es:

$$\boldsymbol{F} = 0 \tag{11.1}$$

siendo $\boldsymbol{F}$ la resultante de las fuerzas que actúan sobre el punto. La aplicación de la condición (11.1) se complica a veces porque no se conocen de antemano todas las fuerzas que están actuando. Este es el caso cuando existen *vínculos*, es decir condiciones materiales que limitan el movimiento. Los vínculos ejercen *reacciones*, que obligan al móvil a respetar las condiciones que imponen.

Consideremos por ejemplo un objeto apoyado sobre un plano inclinado (Fig. 11.1). En este caso el vínculo es la condición de que el cuerpo no puede penetrar el plano. Siendo así el plano debe ejercer una reacción que compense exactamente a la componente normal del peso:

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}_n = mg\cos\alpha\ \hat{\boldsymbol{n}} \tag{11.2}$$

siendo $\hat{\boldsymbol{n}}$ la dirección normal del plano.

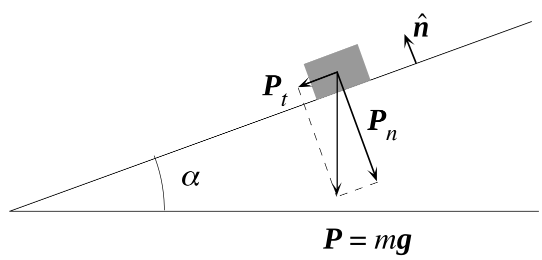


Fig. 11.1. Objeto puntiforme sobre un plano inclinado.

Si llamamos $\boldsymbol{F}$ a las fuerzas conocidas de antemano (llamadas fuerzas *activas*) y $\boldsymbol{f}$ a las reacciones de los vínculos, la condición de equilibrio se expresa

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{11.3}$$

y determina ***f***. En el plano inclinado de la figura,

$$P_n + f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = -P_n \tag{11.4}$$

Por lo tanto para equilibrar el cuerpo es necesario introducir una fuerza adicional que compense la componente de ***P*** tangencial al plano:

$$P_t = P \operatorname{sen} \alpha \tag{11.5}$$

que no está siendo equilibrada por el vínculo. Corresponde aclarar que todo vínculo es un objeto material y su capacidad de reaccionar tiene límites. Si el plano inclinado de la figura es un tablón, está claro que la carga que se le ponga encima no debe superar la resistencia del mismo, de lo contrario se doblará y finalmente se romperá. Si fuese una rampa de tierra, un objeto demasiado pesado se hundiría, etc. Debe quedar claro que en toda aplicación de los principios de la estática hay que controlar que las reacciones requeridas no superen los límites de resistencia de los vínculos, que habrá que conocer en cada caso.
Al discutir vínculos es preciso distinguir:

- Vínculos sin rozamiento (también llamados vínculos *lisos*). En este caso el vínculo no opone reacción a las fuerzas transversales (esto es, tangentes al vínculo) y por lo tanto ***f*** es siempre normal al vínculo:

$$\boldsymbol{f} = f_n \hat{\boldsymbol{n}} \tag{11.6}$$

  siendo $\hat{\boldsymbol{n}}$ la normal al vínculo.
- Vínculos con rozamiento (llamados también vínculos *rugosos*). Aquí debido al rozamiento el vínculo opone una reacción a fuerzas tangenciales, de modo que

$$\boldsymbol{f} = f_n \hat{\boldsymbol{n}} + f_t \hat{\boldsymbol{t}} \tag{11.7}$$

  donde f_t es la componente tangencial de ***f***. Para la reacción normal vale lo dicho antes: es la necesaria para compensar la componente normal de la resultante de las fuerzas activas. En cuanto a la componente tangencial de la reacción, se debe como se ha dicho al rozamiento.

Estática con rozamiento

La fuerza de rozamiento estática tiene las siguientes características:

- es igual y opuesta a la fuerza activa tangencial, siempre y cuando esta última no supere el límite de rozamiento estático;
- si la fuerza activa tangencial supera el límite de rozamiento estático, la fuerza de rozamiento no alcanza a equilibrarlo;
- el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático es proporcional a la *componente normal* de la fuerza activa.

Resumiendo, la componente tangencial de la reacción está dada por las dos condiciones siguientes:

$$f_t \le \mu F_n \quad , \quad f_t = -F_t \tag{11.8}$$

es decir

$$|f_t| = \mathrm{Min}(F_t, \mu F_n) \tag{11.9}$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento *estático* (omitimos el suscrito pues no puede haber confusión). Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad F_t \le \mu F_n \quad \Rightarrow \quad |f_t| = F_t \\ &\text{Si} \quad F_t > \mu F_n \quad \Rightarrow \quad |f_t| = \mu F_n < F_t \end{aligned} \tag{11.10}$$

En el primer caso la fuerza de rozamiento alcanza para establecer el equilibrio (Fig. 11.2). En el segundo caso la fuerza de rozamiento es insuficiente para el equilibrio y para lograr éste es necesario agregar una fuerza externa. Estamos en el primer caso cuando $F_t \le \mu F_n$, o sea si

$$\frac{F_t}{F_n} = \tan\alpha \le \mu \tag{11.11}$$

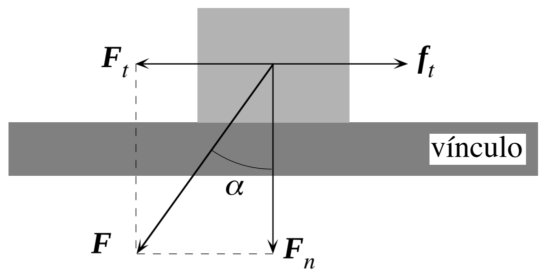


Fig. 11.2. Equilibrio en presencia de rozamiento.

Habrá pues un ángulo máximo α_m dado por

$$\tan\alpha_m = \mu \tag{11.12}$$

tal que si $\boldsymbol{F}$ forma con la normal al vínculo un ángulo α tal que

$$\begin{aligned} &\alpha < \alpha_m \quad \text{hay equilibrio debido al rozamiento} \\ &\alpha > \alpha_m \quad \text{el rozamiento no es suficiente para establecer el equilibrio} \end{aligned} \tag{11.13}$$

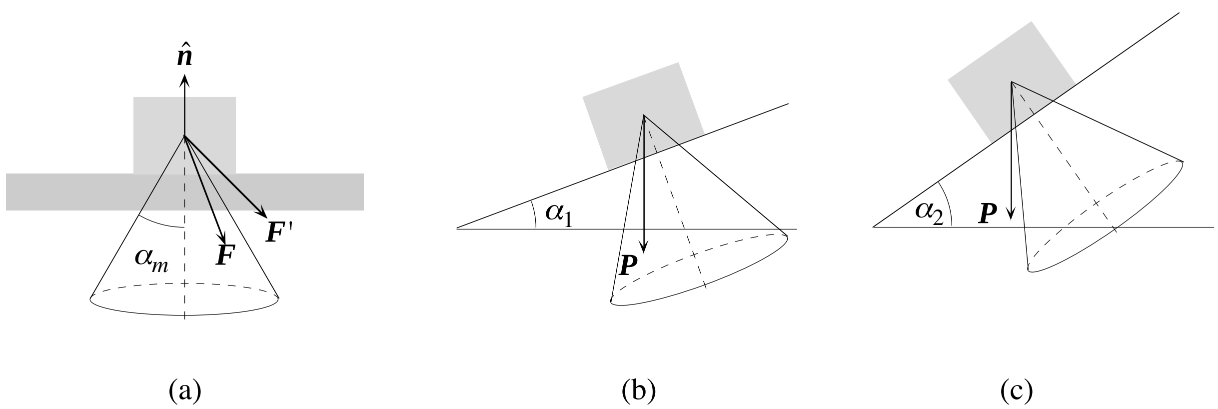


Fig. 11.3. El cono de rozamiento: (a) definición; (b) equilibrio; (c) no hay equilibrio.

Las condiciones que estamos discutiendo se visualizan cómodamente introduciendo el concepto de *cono de rozamiento*: dibujamos un cono cuyo vértice es el punto de aplicación de la fuerza, cuyo eje es la normal al vínculo y cuya abertura es α_m (Fig. 11.3a). Si $\boldsymbol{F}$ está *dentro del cono* el rozamiento permite el equilibrio. Si en cambio $\boldsymbol{F}$ cae *fuera del cono* el rozamiento no es suficiente para el equilibrio. Podemos aplicar estas ideas para discutir el equilibrio de un objeto situado sobre un plano inclinado *con rozamiento*. Observando la Fig. 11.3 vemos que en el caso (b) hay equilibrio y en el caso (c) no hay equilibrio.

Estática del cuerpo rígido

La estática de cuerpos extensos es mucho más complicada que la del punto, dado que bajo la acción de fuerzas el cuerpo no sólo se puede trasladar sino también puede *rotar* y *deformarse*. Consideraremos aquí la estática de cuerpos *rígidos*, es decir *indeformables*. En este caso para que haya equilibrio debemos pedir, tomando como referencia un punto P cualquiera del cuerpo, que P no se traslade y que no haya rotaciones. Por lo tanto en el equilibrio se deben cumplir las condiciones

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad (11.14)$$

y

$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad (11.15)$$

es decir que la resultante de todas las fuerzas aplicadas sea nula y que el momento resultante (la suma de los momentos de todas las fuerzas) se anule. Por lo tanto es necesario tomar en cuenta el punto de aplicación de cada fuerza. Supondremos ahora que se conocen $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{M}$ y dejamos para más adelante el problema de cómo calcularlos.

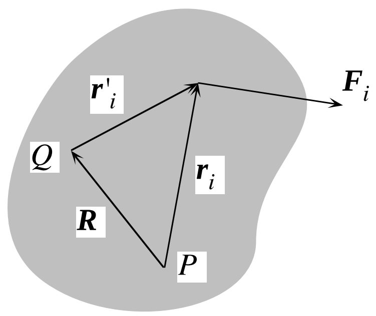


Fig. 11.4. Equilibrio de un cuerpo rígido.

En primer lugar veremos que las condiciones (11.14) y (11.15) se pueden pedir para un punto cualquiera, porque si valen para P valen también para todo otro punto Q del cuerpo. En efecto, consideremos el punto Q situado en $\boldsymbol{R}$ respecto de P (Fig. 11.4). La condición (11.14) no depende de que punto se está considerando, luego vale para cualquier punto. Por otra parte si la (11.15) se cumple para P, también se cumple para Q, porque como $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i'$ entonces

$$0 = \sum \boldsymbol{r}_i \times F_i = \boldsymbol{R} \times \sum \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{r}_i' \times F_i = \sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i \qquad (11.16)$$

En consecuencia la (11.15) se cumple también para Q.

En conclusión las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido son que la resultante de todas las fuerzas aplicadas sea nula y que el momento resultante (suma de los momentos de todas las fuerzas) tomado respecto de un punto cualquiera sea nulo.

Cuerpo rígido vinculado

Un cuerpo rígido puede estar sometido a varias clases de vínculos. Por ejemplo puede tener un punto fijo, un eje fijo, puede estar apoyado sobre una superficie, etc. Los vínculos reaccionan con fuerzas, que tienen una resultante $\boldsymbol{f}$ y un momento $\boldsymbol{m}$. Para el equilibrio se debe cumplir entonces que

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{11.17}$$

y

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{m} = 0 \tag{11.18}$$

donde $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{m}$ se deben tomar respecto del mismo punto.

Equilibrio de un cuerpo rígido con un punto fijo

Si hay un punto fijo está claro que la reacción debe equilibrar a la resultante, o sea $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}$. Esta reacción está aplicada en el punto fijo (el vínculo). Pero entonces, tomando momentos respecto del punto fijo, $\boldsymbol{m} = 0$. Luego la condición (11.17) se cumple siempre y determina $\boldsymbol{f}$. En cuanto a la condición (11.18) se reduce a

$$\boldsymbol{M} = 0 \tag{11.19}$$

donde $\boldsymbol{M}$ se debe tomar respecto del punto fijo.

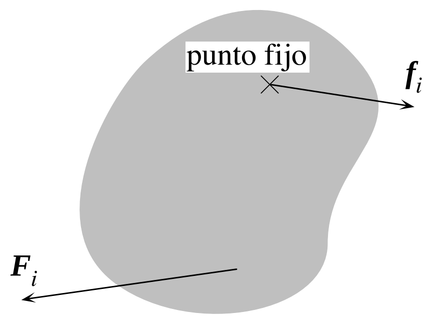


Fig. 11.5. Equilibrio de un cuerpo rígido con un eje fijo.

Equilibrio de un cuerpo rígido con un eje fijo

Esta claro que en este caso la condición (11.17) se cumple y determina las reacciones. Estas reacciones están aplicadas *sobre el eje*. Tomando momentos respecto de un punto P cualquiera del eje $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i$ y vemos que $\boldsymbol{m}_\perp = \sum \boldsymbol{m}_i$ es siempre *perpendicular al eje*. En cuanto al momento de las fuerzas activas, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_\perp + \hat{\boldsymbol{n}} M_\parallel$ donde $\boldsymbol{M}_\perp$ es la componente de $\boldsymbol{M}$ perpendicular al eje y $\hat{\boldsymbol{n}}$ la dirección del eje. Ahora bien, $\boldsymbol{M}_\perp$ tiende a girar el eje y como éste está fijo, se cumple siempre que

$$\boldsymbol{M}_\perp + \boldsymbol{m}_\perp = 0 \tag{11.20}$$

Luego la condición de equilibrio (11.18) se reduce a

$$M_{\parallel} = 0 \tag{11.21}$$

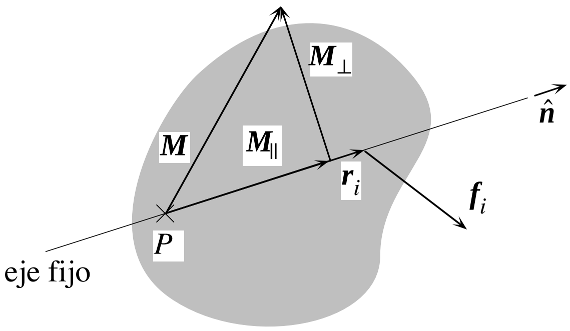


Fig. 11.6. Equilibrio de un cuerpo rígido con un eje fijo.

Cuerpo rígido con vínculos rugosos

Cuando hay fuerzas de rozamiento entre el cuerpo y los vínculos las reacciones tienen una componente tangencial que debe ser tenida en cuenta. Veamos esto por medio de un ejemplo. Sea una escalera que está apoyada a una pared, mientras un hombre sube por la misma (Fig. 11.7). Sea ℓ la longitud de la escalera, m la masa de la escalera más la del hombre y x la posición del centro de masa del hombre más la escalera. Evidentemente el rozamiento contra el piso es lo que impide que la escalera se venga abajo. Sea α_{Am} el ángulo de roce en A, dado por

$$\tan\alpha_{Am} = \mu_A \tag{11.22}$$

siendo μ_A el coeficiente de roce estático entre la escalera y el piso. La reacción $\boldsymbol{f}_A$ está contenida en el cono de roce y formará un ángulo α_A con la vertical (normal al piso). La reacción f_{Bh} en B la supondremos horizontal, lo que equivale a suponer que en B no hay roce[1].

Las condiciones de equilibrio son $m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_A + f_{Bh} = 0$ cuyas componentes horizontal y vertical son

$$f_A \operatorname{sen}\alpha_A - f_{Bh} = 0 \tag{11.23}$$

y

$$f_A \cos\alpha_A - mg = 0 \tag{11.24}$$

Tomando momentos respecto de A obtenemos

$$x\,m\,g \operatorname{sen}\alpha - \ell f_{Bh} \cos\alpha = 0 \tag{11.25}$$

[1] Esto no es cierto pero está claro que el roce en B en todo caso ayuda a sostener la escalera, de modo que despreciar ese efecto dará como resultado que nuestra estimación del equilibrio del sistema es pesimista (en estos casos es siempre conveniente pecar por pesimismo antes que por optimismo). El tratamiento del equilibrio de la escalera considerando el rozamiento en B se encuentra en el artículo *Reaction forces on a ladder leaning on a rough wall*, A.G. González, J. Gratton, Am. J. Phys. 64, 1001-1005, 1996.

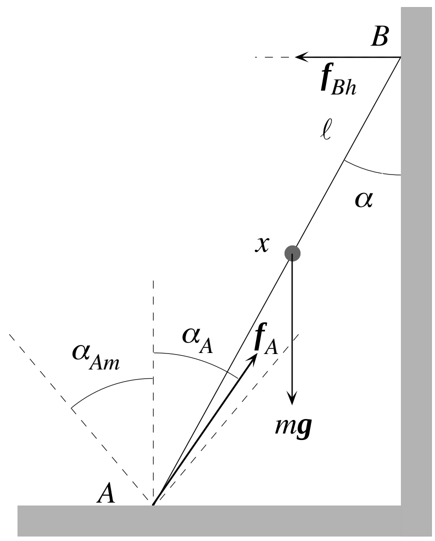


Fig. 11.7. Equilibrio de una escalera apoyada contra un pared.

La ecuación (11.24) determina f_A:

$$f_A = \frac{mg}{\cos\alpha_A} \tag{11.26}$$

Sustituyendo en (11.23) encontramos f_{Bh}:

$$f_{Bh} = mg\tan\alpha_A \tag{11.27}$$

Sustituyendo f_{Bh} en (11.25), obtenemos α_A

$$\tan\alpha_A = \frac{x}{\ell}\tan\alpha \tag{11.28}$$

Con esto queda resuelto el problema. Para el equilibrio se debe verificar que $\tan\alpha_A \le \tan\alpha_{Am}$, lo que implica que se debe cumplir la condición

$$\frac{x}{\ell} \le \frac{\tan\alpha_{Am}}{\tan\alpha} \tag{11.29}$$

¿Qué nos dice esta condición? Está claro que x, la posición del centro de masa de la escalera con el hombre encima, crece a medida que éste sube y alcanza su valor máximo cuando el hombre llega al tope. Luego $x \le \ell$ (el signo = vale si la masa de la escalera es despreciable). Entonces:

- Si $\alpha \le \alpha_{Am}$, la (11.29) se cumple *siempre*: el hombre puede subir con confianza.
- Si $\alpha > \alpha_{Am}$, la (11.29) *no se cumple* para $x > x_m$ dado por

$$x_m = \ell\frac{\tan\alpha_{Am}}{\tan\alpha} < \ell \tag{11.30}$$

En este caso el hombre no debe subir pues se vendrá abajo con escalera y todo.

Sistemas de fuerzas equivalentes

Como vimos, el equilibrio de un cuerpo rígido está determinado solamente por la resultante de las fuerzas y la suma de los momentos respecto de un punto cualquiera. Vamos a ocuparnos ahora del problema de calcular la resultante $\boldsymbol{F}$ y el momento total $\boldsymbol{M}$ de un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido, que había quedado pendiente.

Cuando dos sistemas de fuerzas tienen igual resultante e igual momento total son *equivalentes* en lo que hace a sus efectos sobre el equilibrio. Entonces cuando se tiene un cuerpo rígido sometido a un sistema complicado de fuerzas, conviene reemplazarlo por un sistema equivalente más simple. Hay varias reglas prácticas para este fin y las presentamos a continuación.

Deslizamiento de las fuerzas

Toda fuerza se puede trasladar a lo largo de su recta de acción sin cambiar sus efectos[2]. Efectivamente, este traslado no afecta el valor de la resultantes. Tampoco afecta el momento respecto de un punto cualquiera, pues $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{F}$ depende sólo de la distancia $\boldsymbol{r}_\perp$ desde el punto a la recta de acción (Fig. 11.8).

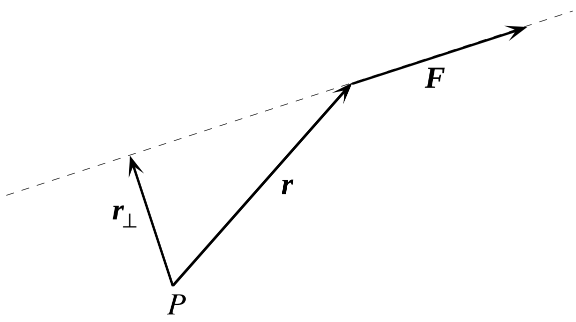


Fig. 11.8. El momento depende solamente de la distancia entre la recta de acción de la fuerza y el punto respecto del cual se lo calcula.

Fuerzas concurrentes

Se llaman así aquellas cuyas rectas de acción se cruzan. Por lo dicho se les puede trasladar hasta el punto de cruce y reemplazar por su resultante, cuya recta de acción pasa por el punto de cruce (Fig. 11.9).

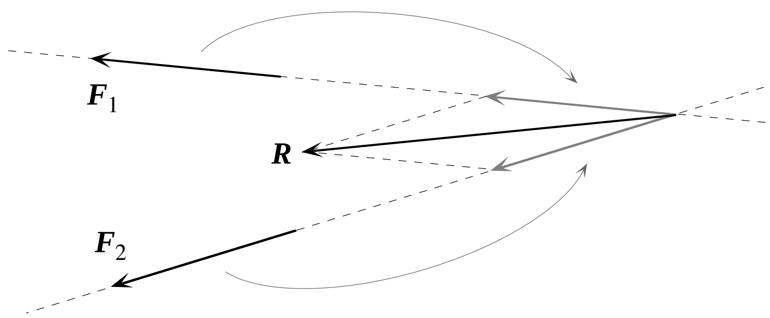


Fig. 11.9. Resultante de fuerzas concurrentes.

[2] Debe quedar claro que las reglas que presentaremos aquí valen solamente para la estática de un cuerpo *rígido*. No se puede trasladar una fuerza si el cuerpo es deformable.

Fuerzas cuyas rectas de acción son paralelas son concurrentes en el infinito. Para hallar la resultante y su recta de acción podemos agregar dos fuerzas ficticias $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$ (Fig. 11.10). El sistema $\boldsymbol{F}_1'(=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{F}_2'(=\boldsymbol{F}_2-\boldsymbol{F})$ es equivalente al anterior pero ahora $\boldsymbol{F}_1'$ y $\boldsymbol{F}_2'$ se pueden sumar porque sus rectas de acción se cruzan a distancia finita. Por geometría $F_1 d_1 = F_2 d_2$.

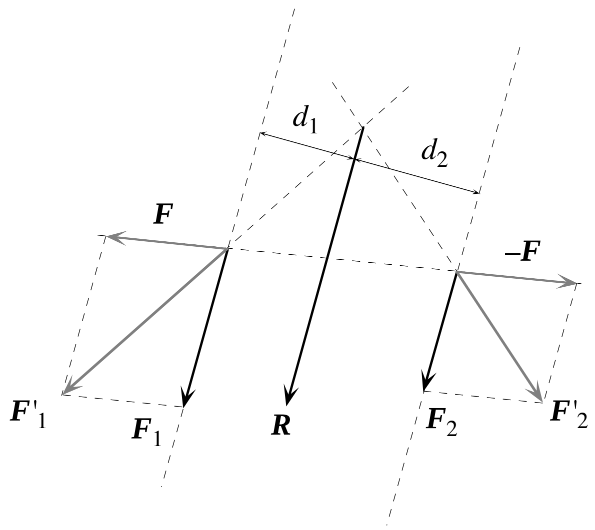


Fig. 11.10. Resultante de fuerzas cuyas rectas de acción son paralelas.

Cupla o par de fuerzas

Cuando dos fuerzas son iguales y opuestas y sus rectas de acción son paralelas forman una *cupla* (Fig. 11.11). Para toda cupla se cumple que

- la resultante es nula ($\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$) y
- el momento es independiente del punto respecto del cual se lo calcula:

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_+\times\boldsymbol{F}-\boldsymbol{r}_-\times\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{r}_+-\boldsymbol{r}_-)\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{d}_\perp\times\boldsymbol{F} \tag{11.31}$$

Luego el momento depende sólo de $\boldsymbol{F}$ y de la separación de las rectas de acción de las fuerzas:

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{d}_\perp\times\boldsymbol{F} \tag{11.32}$$

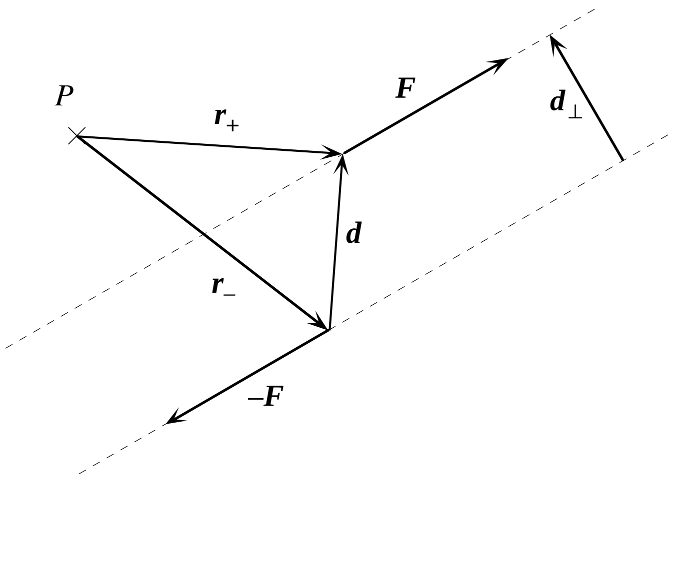


Fig. 11.11. Cupla.

Reducción del sistema de fuerzas y momentos

Todo sistema de fuerzas se puede reemplazar por un sistema equivalente constituido por una resultante y una cupla. En efecto, sean $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_N$ las fuerzas que actúan sobre un rígido, aplicadas en los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ y sea P un punto cualquiera. Si en P imagino aplicadas, para cada fuerza $\boldsymbol{F}_i$, dos fuerzas, una igual a $\boldsymbol{F}_i$ y otra a $-\boldsymbol{F}_i$ tendré un sistema equivalente (Fig. 11.12). Pero ahora la fuerza $\boldsymbol{F}_i$ aplicada en P_i y la $-\boldsymbol{F}_i$ aplicada en P forman una cupla cuyo momento vale

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{11.33}$$

Está claro pues que el sistema primitivo equivale a una resultante

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i \tag{11.34}$$

y un momento respecto del punto P dado por

$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{11.35}$$

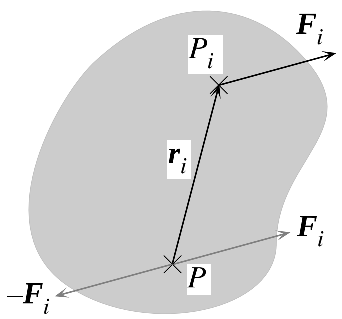


Fig. 11.12. Reducción del sistema de fuerzas y momentos aplicados a un cuerpo rígido.

Estabilidad del equilibrio

La aplicación de las condiciones de equilibrio permite averiguar si puede o no haber equilibrio para un dado sistema. Sin embargo la observación muestra que algunas situaciones de equilibrio no se dan en la práctica. Veamos un ejemplo simple: la Fig. 11.13a muestra una esfera ubicada en el vértice de una superficie, donde el plano tangente es horizontal. Esta posición es de equilibrio, pero no es posible en la práctica lograr que la esfera quede en esa posición, porque se cae. El motivo de esto es que si la esfera está colocada en la forma indicada, basta que una pequeña perturbación la aparte de la posición de equilibrio, aunque sea muy poco, para que la reacción deje de compensar por completo el peso de la esfera y quede una componente tangencial no equilibrada, que tiende a apartar más a la esfera de la posición de equilibrio (Fig. 11.13b). Como en la práctica es imposible evitar perturbaciones infinitesimales, este equilibrio no se realiza. En este caso se dice que el equilibrio es *inestable* (frente a pequeñas perturbaciones).

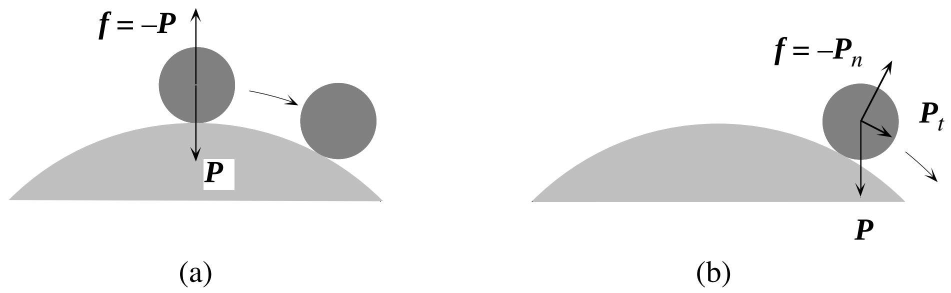


Fig. 11.13. Equilibrio inestable.

En la Fig. 11.14 se muestra una esfera que descansa en el fondo de un valle. Este es un equilibrio que se da en la práctica, porque es *estable* frente a pequeñas perturbaciones: si un golpe aparta la esfera de su posición inicial llevándola a una posición como la indicada en (b), la reacción de la superficie no compensa al peso igual que en el caso anterior, pero ahora la componente tangencial del peso tiende a devolver a la esfera a la posición de equilibrio. Se produce entonces un movimiento oscilatorio que eventualmente se amortigua y finalmente la esfera queda en la posición inicial de equilibrio.

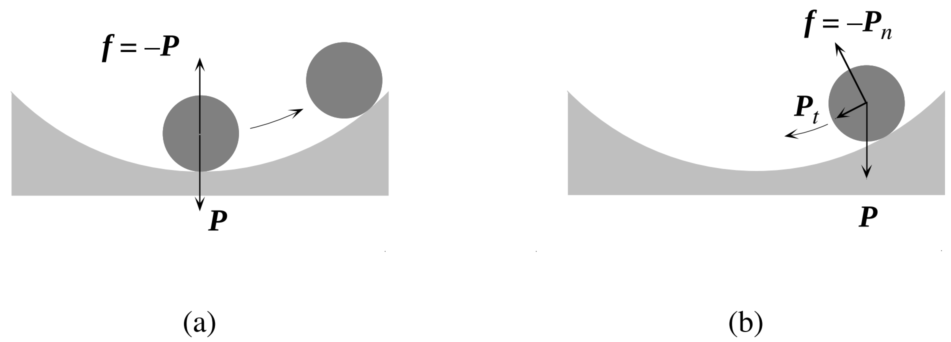


Fig. 11.14. Equilibrio estable.

Entre estos casos extremos se puede dar un caso intermedio: si la esfera descansa sobre un plano (Fig. 11.15a), cualquier posición (en cualquier punto del plano) es de equilibrio. Si inicialmente la esfera está en la posición A y una perturbación la desplaza hasta B quedando allí en reposo, se mantendrá en B hasta ser perturbada nuevamente: tanto A como B son posiciones de equilibrio y se dice que el equilibrio es *indiferente*.

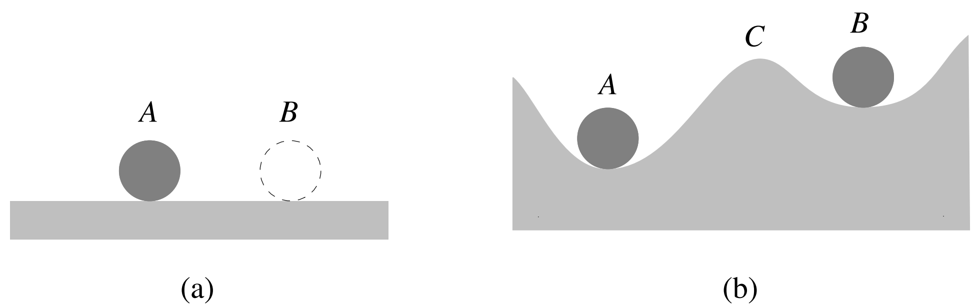


Fig. 11.15. (a) Equilibrio indiferente. (b) Equilibrio metaestable: la posición B es estable para pequeñas perturbaciones, pero no frente a perturbaciones de gran amplitud.

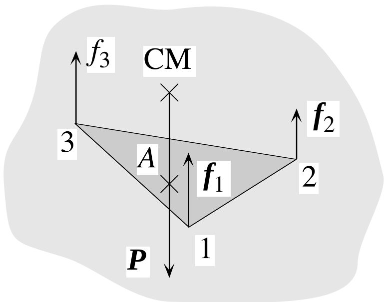
De estos ejemplos se desprende que todos los equilibrios deben ser examinados en lo referente a su estabilidad, puesto que los que se observan en la práctica son solamente aquellos que son *es-*

tables o *indiferentes*. Un equilibrio inestable se rompe espontáneamente y sólo se puede mantener si se interviene activamente aplicando fuerzas que estabilicen al sistema (como cuando se sostiene una escoba apoyando la punta del palo en un dedo).

En la práctica no sólo interesa la estabilidad del equilibrio frente a perturbaciones infinitesimales, sino también la estabilidad frente a perturbaciones de amplitud finita. La Fig. 11.15b muestra una esfera apoyada sobre una superficie con dos valles. Tanto A como B son posiciones de equilibrio *estable* frente a pequeñas perturbaciones: una pequeña perturbación produce oscilaciones alrededor de B (o de A) que finalmente se amortiguan, recuperándose la posición de equilibrio inicial. Pero si la perturbación es *grande* el resultado puede ser diferente: si la esfera B recibe un empujón que la lleva hasta la cresta C de la loma entre B y A, puede caer hacia A y nunca volverá espontáneamente a B. En este caso se dice que el equilibrio en B es *metaestable*.

Estabilidad del equilibrio de un objeto extenso apoyado

Consideremos el equilibrio de una roca de forma irregular, apoyada sobre un sustrato rígido (pueden ser otras rocas). En general la roca está en contacto con el sustrato en no más de tres puntos[3] . Sean 1, 2 y 3 estos puntos. En 1, 2 y 3 el sustrato ejerce las reacciones $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ que equilibran al peso $\boldsymbol{P}$ de la roca (Fig. 11.16a). En general esas reacciones tienen tanto componentes horizontales como verticales. Las componentes horizontales (no dibujadas en la figura) se cancelan entre sí. Las componentes verticales compensan el peso.



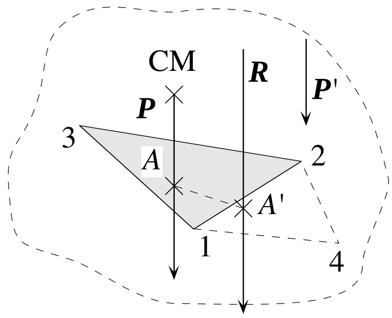


Fig. 11.16. Una roca apoyada sobre un sustrato de forma irregular: (a) la condición de equilibrio; (b) el agregado de una fuerza adicional puede romper el equilibrio.

En el equilibrio el momento neto calculado respecto de cualquier punto debe ser nulo. En particular debe ser nulo el momento calculado respecto del punto 1 y por lo tanto la componente de ese momento en la dirección de la línea 1-2. Es evidente entonces que $\boldsymbol{f}_3$ y la intersección A de la línea de acción de $\boldsymbol{P}$ con el plano 1, 2, 3 se deben encontrar del mismo lado de la línea 1-2. En efecto, si estuviesen en lados opuestos los momentos de $\boldsymbol{f}_3$ y $\boldsymbol{P}$ tendrían el mismo sentido de giro alrededor de 1-2 y no habría equilibrio. Repitiendo el argumento para los puntos 2 y 3 se ve que A debe estar dentro del triángulo (1 2 3).

Este equilibrio es *metaestable* porque si se perturba la roca aplicándole una fuerza adicional, por ejemplo si la pisamos al caminar, el equilibrio se puede romper. Si $\boldsymbol{P}'$ es la fuerza adicional, las fuerzas $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{P}'$ se pueden combinar en una única resultante $\boldsymbol{R}$. Si B es la intersección de la línea

[3] En realidad son regiones de tamaño pequeño, pero a los fines de este análisis las podemos considerar puntiformes.

de acción de $\boldsymbol{P}'$ con el plano 1, 2, 3, lo que sucede depende de si B cae dentro o fuera del triángulo (1 2 3):

- Si B está dentro del triángulo, cualquiera sea B el punto A' donde la recta de acción de $\boldsymbol{R}$ intercepta el plano 1, 2, 3 estará también dentro del triángulo (1 2 3). En este caso las reacciones establecen *siempre* el equilibrio.
- Si B cae fuera del triángulo entonces A' podrá estar o no dentro del triángulo, dependiendo de P' y de la posición de B. Si A' se encuentra dentro del triángulo hay equilibrio. Si A' está fuera del triángulo (Fig. 11.16b), no hay equilibrio y la roca se da vuelta.

Si la piedra se da vuelta encontrará eventualmente otra posición de equilibrio análoga a la anterior. Por ejemplo, si pivotó alrededor de la línea 1-2, encontrará en algún momento un nuevo punto de apoyo como el 4 y se equilibrará bajo la acción de $\boldsymbol{R}$ apoyándose en 1, 2 y 4 si la línea de acción de $\boldsymbol{R}$ cae dentro del triángulo (1 2 4).

Equilibrio en presencia de fuerzas conservativas

Si un objeto puntual se encuentra sometido a un campo de fuerzas conservativas

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{11.36}$$

es posible definir una energía potencial $V(\boldsymbol{r})$ tal que

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V \tag{11.37}$$

La condición de equilibrio es pues

$$\nabla V = 0 \tag{11.38}$$

o sea

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{11.39}$$

Sea $\boldsymbol{r}_0$ un punto de equilibrio. Para ver si el equilibrio es estable o inestable tenemos que examinar en que dirección se dirige la fuerza cuando nos apartamos un poco del equilibrio.
Cerca de $\boldsymbol{r}_0$, donde las derivadas primeras de V se anulan,

$$V(\boldsymbol{r}_0 + \delta\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}_0) + \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_i \delta x_j = V(\boldsymbol{r}_0) + \delta V \tag{11.40}$$

El equilibrio es estable si δV es positivo para cualquier desplazamiento $\delta\boldsymbol{r}$ desde $\boldsymbol{r}_0$. Luego V debe ser un *mínimo* para que el equilibrio sea estable.
En general un cuerpo de forma irregular como una roca tendrá muchas posiciones de equilibrio estable (en realidad metaestable) como se muestra en la Fig. 11.17. Entre ellas la más estable será la que corresponde a que el centro de masa esté *más bajo*. En efecto la energía potencial gravitatoria de la roca es una función complicada de la *posición* de la roca sobre el sustrato y de su *orientación*. Por lo tanto V depende de 5 parámetros. Cada posición de equilibrio como las que hemos descripto corresponde a un mínimo (local) de la energía potencial. Pero la energía potencial está dada simplemente por $V = Ph$, siendo h la altura del baricentro de la roca respecto

de un nivel de referencia. Por ejemplo las posiciones 1, 2, 3, 4 de la Fig. 11.17 son todas posiciones de equilibrio estables. Como $h_3 < h_2 < h_4 < h_1$, la posición h_3 es la más estable porque es el más bajo de los mínimos de V.

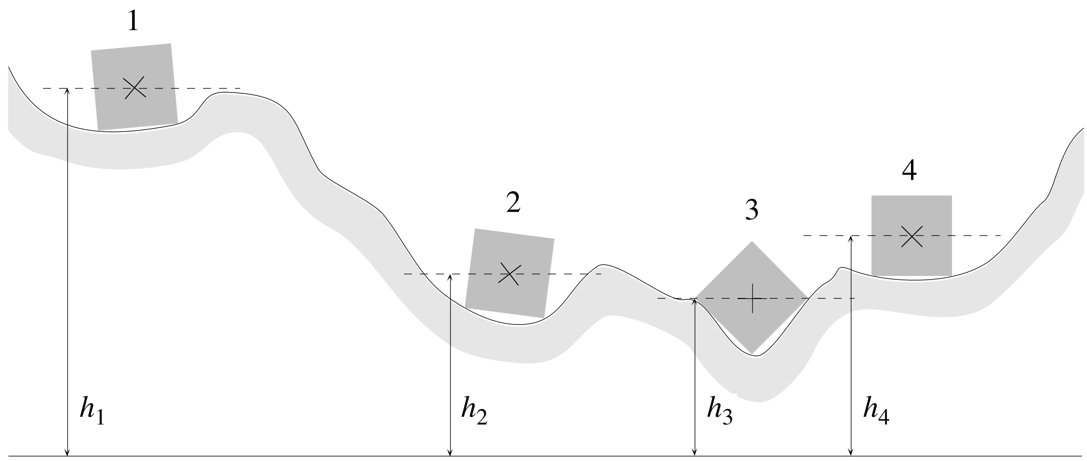


Fig. 11.17. Posiciones de equilibrio de un cuerpo rígido apoyado sobre una superficie irregular.

Comentario sobre las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido vinculado

Las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido vinculado (ecuaciones (11.17) y (11.18)) no son siempre suficientes para determinar las reacciones de los vínculos. Consideremos por ejemplo el problema de la escalera apoyada contra la pared. Si tomamos en cuenta el rozamiento de la escalera contra la pared (que supusimos nulo en nuestro anterior análisis) hay que agregar la componente vertical f_{Bv} de la reacción de la pared en las ecuaciones (11.24) y (11.25). Pero entonces el problema tiene 4 incógnitas (f_A, α_A, f_{Bh} y f_{Bv}) y seguimos teniendo las tres ecuaciones (11.23)-(11.25), que no alcanzan para determinar por completo las reacciones de los vínculos. En estos casos se dice que el problema es *indeterminado*. Otro ejemplo de problema indeterminado es el equilibrio de una mesa de cuatro patas apoyada sobre un piso horizontal, como el lector puede verificar fácilmente.

La indeterminación proviene de que el concepto de cuerpo (perfectamente) rígido es el caso límite de un cuerpo deformable, cuando las deformaciones tienden a cero. El pasaje a este límite es singular, en el sentido que si de movida se supone que no hay deformaciones se excluyen del problema las condiciones adicionales que hacen falta para encontrar las reacciones de los vínculos. En efecto, si se toman en cuenta las deformaciones, que a su vez dependen de la forma como se aplicaron las fuerzas activas, es posible determinar las reacciones[4].

[4] Ver, por ejemplo, el artículo ya citado sobre el equilibrio de la escalera considerando el rozamiento con la pared.