Talleres

Mini curso de geometría dinámica (5 sesiones)

Luis Moreno Armella

Cinvestav

IPN, México

Nivel. Inicial

Objetivo. Reconocer el potencial de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, desde una perspectiva didáctica.

Descripción general del taller. Este mini curso no sigue fielmente la metodología de taller. A partir de demostraciones (presentaciones) de actividades en geometría y la reflexión didáctica, los participantes podrán apreciar el potencial de la tecnología.

Conocimientos previos. Conocimientos elementales de geometría.

Programación.

Primer día: dibujo y construcción, la vida del triángulo y la vida de la circunferencia.

Segundo día: la vida de la cónica, el caracol y el pedal. Tecnología y cognición.

Tercer día: ejercicios.

Actividades en análisis de datos (3 sesiones)

Hugo Martín Cuéllar García

Grupo Coordinador MEN

Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Instituto Técnico Industrial Tocancipá

Nivel. Inicial

Objetivos. Explorar algunas de las potencialidades de la calculadora TI 92 referentes al análisis de datos, mediante la realización de actividades que pretenden servir de apoyo al desarrollo del pensamiento estadístico.

Descripción general del taller. A partir de una base de datos sobre indicadores sociales y económicos de algunos países latinoamericanos se observarán de manera práctica algunas herramientas estadísticas de la calculadora TI 92 para realizar su análisis. Se trabajarán actividades en las que las posibilidades de cálculo estadístico y representaciones gráficas de la calculadora permiten abordar algunos contenidos de estadística factibles de tratar en la escuela secundaria. Igualmente se espera discutir sobre algunas dificultades previsibles en el desarrollo de este tipo de trabajo con los estudiantes.

Conocimientos previos. Manejo básico de la calculadora

Programación.

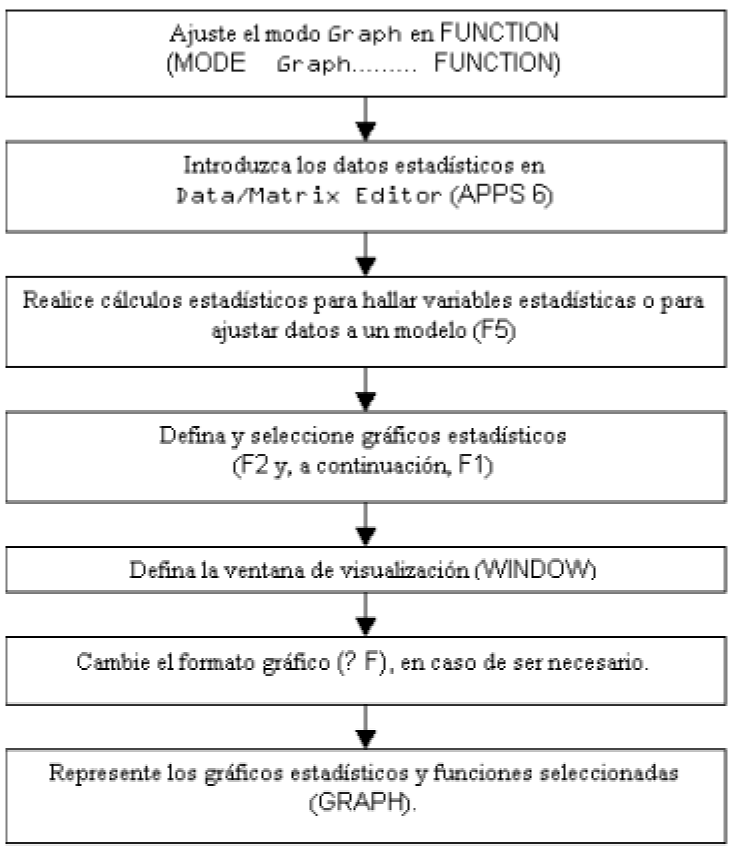
Primer día: la tabla de datos y variables – diagramas de líneas – nubes de puntos

Segundo día: diagramas de barras – cálculo de estadísticos

Tercer Día: diagramas de Cajas – relación entre variables

Procedimientos

El siguiente esquema describe, en forma general, los pasos empleados para realizar cálculos estadísticos o representaciones gráficas.



Desarrollo del taller.

Los datos que aparecen en la tabla 1 fueron tomados del Informe de la UNICEF sobre el Estado Mundial de la Infancia 1998. El objetivo central de este taller es analizar estos datos con ayuda de las diferentes representaciones que ofrece la calculadora TI 92 .

INDICADORES BÁSICOS

País	TMM5	(tasa)	TMI(0-1)tasa		Población (miles)	Nacimientos (miles)	Muertes 0-5 (miles)	Esperanza de Vida al nacer (años)
	1960	1996	1960	1996	1996	1996	1996	1995
1Argentina	72	25	60	22	35219	709	18	73
2Bolivia	252	102	152	71	7593	258	26	61
3Brasil	177	52	115	44	161087	3211	167	67
4Chile	138	13	107	11	14421	294	4	75
5Colombia	130	31	82	26	36444	878	27	71
6Costa Rica	112	15	80	13	3500	86	1	77
7Cuba	54	10	39	10	11018	149	2	76
8Ecuador	180	40	115	31	11699	309	12	70
9Haití	260	134	170	94	7259	250	34	54
10Honduras	204	35	137	29	5816	201	7	69
11Jamaica	76	11	58	10	2491	56	1	74
12México	148	32	103	27	92718	2351	75	72
13Nicaragua	209	57	140	44	4238	145	8	68
14Panamá	104	20	67	18	2677	62	1	74
15Paraguay	90	34	66	28	4957	158	5	69
16Perú	234	58	142	45	23944	615	36	68
17Uruguay	56	22	48	20	3204	54	1	73
18Venezuela	70	28	53	24	22311	570	16	72

Tabla 1

Definición de los indicadores

Tmm5: Tasa de mortalidad de menores de 5 años – Probabilidad de muerte desde el nacimiento hasta la edad de 5 años, expresada por cada 1.000 nacidos vivos.

TMI 0-1. Tasa de mortalidad infantil – Probabilidad de muerte desde el nacimiento hasta la edad de 1 año, expresada por cada 1.000 nacidos vivos.

Esperanza de vida al nacer: Promedio de años de vida de un recién nacido según la probabilidad de muerte prevaleciente en el momento del nacimiento.

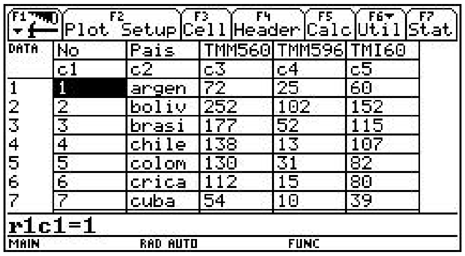
Primera sesión

Tabla de datos y Variables. Inicialmente se pretende discutir sobre el significado de los datos que se presentan en la tabla 1, intentando establecer algunas relaciones importantes, por ejemplo: ¿Qué indica TMM5? ¿Qué significa que un país tenga un valor alto en este indicador?

También es posible considerar inquietudes en torno a la forma en que se han establecido estos datos, por ejemplo: ¿Cómo se puede calcular la esperanza de vida en un país?

¿Qué otras inquietudes sugiere el estudio de esta tabla de datos?

Manejo de los datos con el editor de datos de la TI92. En la figura 1 se trabaja en torno al manejo del editor de datos de la calculadora considerando algunas funciones propias de este entorno.



DATA	No	Pais	TMM560	TMM596	TMI60
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	argen	72	25	60
2	2	boliv	252	102	152
3	3	brasi	177	52	115
4	4	chile	138	13	107
5	5	colom	130	31	82
6	6	crica	112	15	80
7	7	cuba	54	10	39

r1c1=1

Para introducir los datos del cuadro sobre INDICADORES BÁSICOS se debe crear un nuevo archivo seleccionando la opción Data/Matrix Editor (APPS 6)

Figura 1.

Diagramas de líneas. Las primeras representaciones gráficas a tratar hacen referencia a los diagramas de línea al considerar la columna del número correspondiente a cada país con alguna otra de las variables establecidas en la tabla.

Por ejemplo al considerar las gráficas correspondientes a TMM5 de 1960 y 1996 (figuras 2 y 3), ¿qué conclusiones puede obtener?

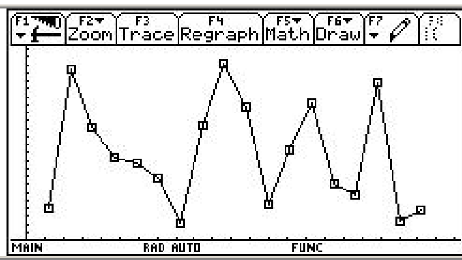


Figura 2. País / TMM5 1960

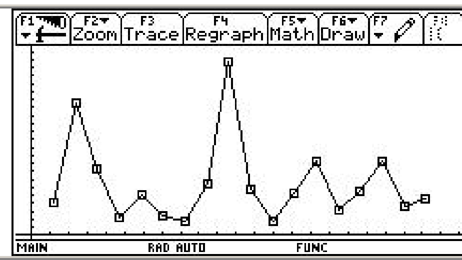


Figura 3. País / TMM5 1996

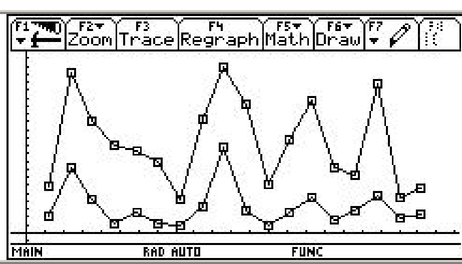
Desde la tabla de datos se definen los gráficos estadísticos, primero con F2 *y a continuación* F1 *. En este caso las gráficas corresponden a la selección de las opciones*

Plot Type: xy-line ; Mark: Box

En el eje X se define la columna correspondiente al país (C1) y en el eje Y se define la columna correspondiente a TMM5 1960 (izquierda) y TMM5 1996 (derecha).

Para observar los gráficos estadísticos se selecciona la opción GRAPH *y la ventana de graficación se ajusta con* ZoomData (F2 + 9).

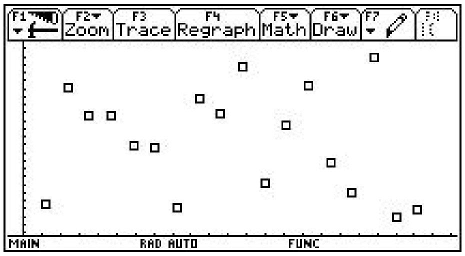
Y si ahora se presentan las dos gráficas simultáneamente como en la figura 4, ¿qué concluye?



Las dos gráficas se muestran seleccionando simultáneamente los Plots *correspondientes y ajustando la ventana de graficación con la opción* ZoomData

Figura 4. País / TMM5 1960 y 1996

Nube de puntos . Otra gráfica que se puede considerar es la formada por puntos, por ejemplo si se observa la gráfica de la figura 5 que compara la diferencia de la tasa TMM5 de 1960 y 1996, ¿qué se puede concluir?



Las gráficas corresponden a las opciones

Plot Type: Scatter ; Mark: Box .

En el eje X se define la columna correspondiente al país (C1) y en el eje Y se define la columna correspondiente a la diferencia entre TMM5 1960 y TMM5 1996

Para observar los gráficos estadísticos se utiliza el mismo procedimiento señalado anteriormente.

Figura 5. País / diferencia TMM5 1960 a 1996

¿Qué otras informaciones se podrían obtener al realizar las gráficas de líneas o de nube de puntos de, por ejemplo, país vs. población, o país vs. nacimientos 1996, o país vs. esperanza de vida 1995?

Segunda sesión

Diagramas de barras. Un tipo de gráfica importante es el histograma (figuras 6 y 7). Este tipo de gráfica presenta información sobre el número de veces que se repite un hecho (frecuencia). Al trabajar con la calculadora se debe tener presente el manejo de la ventana de graficación y sobre el ancho de las columnas.

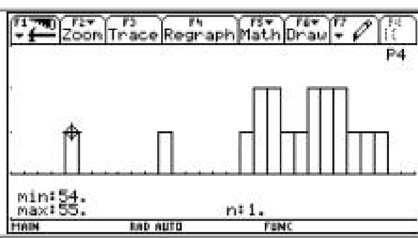
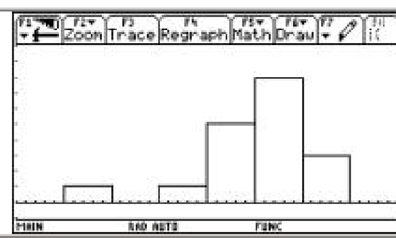
	

Figura 6. Histograma. Esperanza de vida Ancho de columna 1	Figura 7. Histograma. Esperanza de vida Ancho de columna 3

Los histogramas también se configuran desde la tabla de datos con F2 *y* F1 .

En este caso las gráficas corresponden a la opción

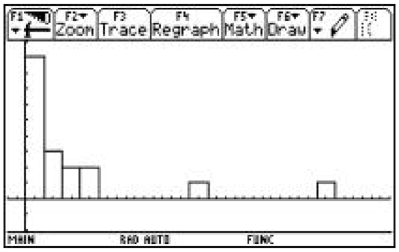
Plot Type: Histograma .

En el eje X se define la columna correspondiente a la esperanza de vida en cada país (C10) y para cada gráfico se define un ancho de columna (Hist.Bucket Width *) adecuado.*

Para observar los gráficos se utiliza el mismo procedimiento señalado anteriormente.

Nota: Aunque técnicamente en la presentación de los histogramas no debería haber clases vacías, este tan solo es un ejemplo de cómo obtener esta representación con ayuda de la calculadora TI92

¿Qué información se obtiene de los histogramas de las figuras 6 y 7?



Para este histograma se considera la columna C7 que representa la población en 1996, con un ancho de columna de 10000.

Los valores para la ventana de graficación son:

xmin = -10000

xmax = 200000

xscl = 1

ymin = -2

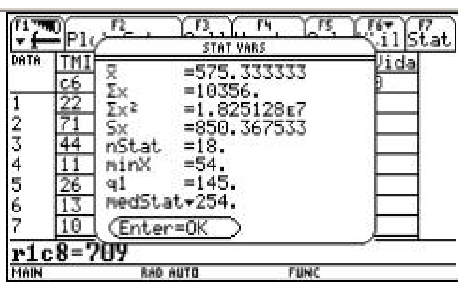
ymax = 15

Figura 8. Histograma: Población 1996

¿Qué información ofrece la gráfica de la figura 8?

Cálculo de estadísticos. La información que se presenta a partir del cálculo de los estadísticos (media, mediana, q1, q3, desviación estándar,...) también es importante para contemplar otros aspectos de los datos de la tabla.

La pantalla que se presenta en la figura 9 presenta los cálculos que realiza la calculadora con respecto, en este caso, al índice de nacimientos en estos países durante 1996.



Los cálculos estadísticos se realizan desde la tabla de datos con la opción (F5 *). Se selecciona en* Calculation Type: OneVar *y se determina la columna sobre la cuál se va a realizar el cálculo, en este caso C8.*

Entre los datos qu e se observan en este gráfico están la Media, la sumatoria de los datos, la desviación estándar, los cuartiles, etc.

Figura 9.

¿Qué significa cada una de las variables que se muestran en la figura 9?

¿Qué puede concluir al comparar el valor de la desviación estándar con respecto a la media?

Las gráficas que se generan al comparar por ejemplo el diagrama de líneas con el valor de q1, la mediana y q3 (figura 10), pueden indicar una forma inicial de distribución de los datos:

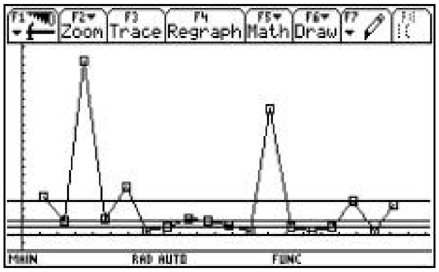


Figura 10.

Se pueden combinar los datos estadísticos obtenidos en el ejemplo anterior (minX , q 1, medStat , q 3, maxX *) y los diagramas de líneas para presentar gráficas que ofrecen información sobre la distribución del conjunto de datos.Las líneas horizontales corresponden a gráficas constantes con los valores mencionados.*

¿Qué información suministra la gráfica de la figura 10?

Tercera sesión

Diagramas de cajas. Los diagramas de cajas y bigotes (figuras 11 y 12) permiten observar, *a golpe de ojo* , la forma en que están distribuidos cierto conjunto de datos.

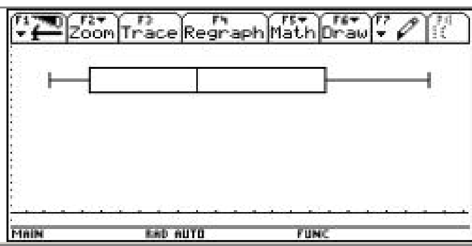


Figura 11. Diagrama de cajas. TMM5 1960

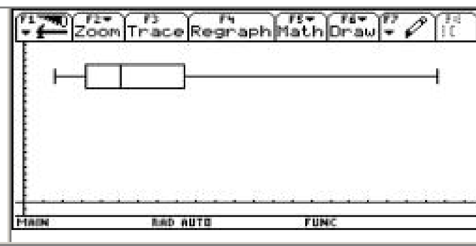


Figura 12. Diagrama de cajas. TMM5 1996

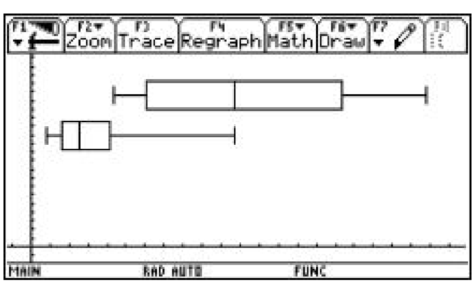
Los diagramas de cajas configuran desde la tabla de datos con F2 *y* F1 *.*

En este caso las gráficas corresponden a la opción Plot Type: Box *.*

En el eje X se define la columna correspondiente a TMM5 1960 (izquierda) y TMM5 1996 (derecha).

Para observar los gráficos estadísticos se selecciona la opción GRAPH *.*

¿Qué se puede concluir al observar los diagramas de las figuras 11 y 12?



Para presentar gráficas simultáneamente, se seleccionan desde la tabla de datos con F2 *y* F1 *.*

Figura 13. Diagramas de cajas. TMM5 1960 – TMM5 1996

Y al tener los dos diagramas simultáneamente (figura 13), ¿qué se concluye?

Relación entre variables. Es posible que algunos de los datos de la tabla estén relacionados de manera especial. Una forma de observar estas posibles relaciones es graficando (en líneas o nube de puntos) los datos correspondientes a dos variables. (Figuras 14 y 15)

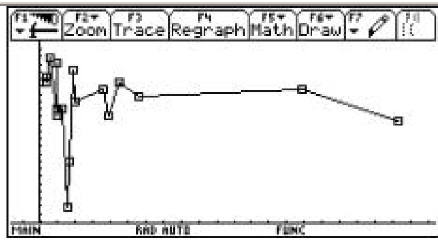


Figura 14. Nacimientos / Esperanza de vida

Los datos sobre los nacimientos están ordenados de menor a mayor

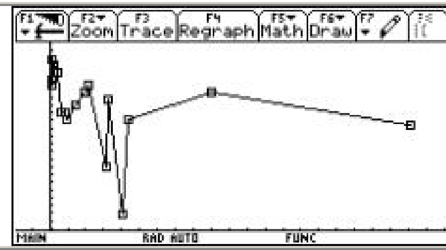


Figura 15. Muertes / Esperanza de vida

Los datos sobre las muertes están ordenados de menor a mayor

Para obtener estas gráficas se recurre nuevamente a la opción Plot Type: xy-line ; Mark: Box *.*

¿Qué relación observa entre el número de nacimientos o de muertes con la esperanza de vida? (figuras 14 y 15)

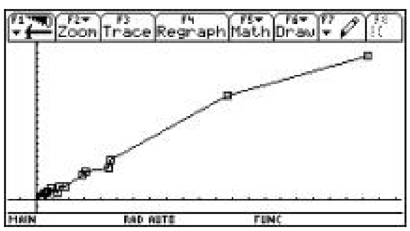


Figura 16. Población / Nacimientos

Los datos sobre la población están

ordenados de menor a mayor

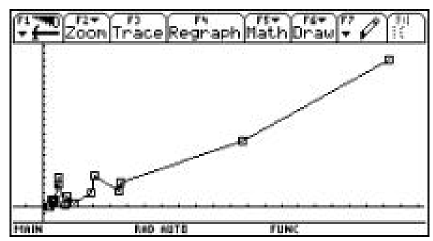


Figura 17. Población / Muertes

Los datos sobre las muertes están

ordenados de menor a mayor

¿Se observa alguna relación clara entre la población y el número de nacimientos o de muertes?

Bibliografía

UNICEF (1998) *Informe Sobre el Estado Mundial de la Infancia*

Batanero , Carmen. *Análisis Exploratorio de Datos en la Escuela Secundaria*. Atas da Conferência Internacional "Experiências e expectativas do Ensino de Estadística – Desafios para o Século XXI". Florianópolis, Santa Catarina, Brasil – 20 a 23 de Setembro de 1999.

Texas Instruments, TI 92 (1995) *Manual del Usuario*. Texas Instruments Incorporated.

Estrategias aritmética, geométrica y algebraica en la resolución de un problema con la TI92 (3 sesiones)

Leonor Camargo Uribe

Hugo Martín Cuéllar

Grupo Coordinador MEN

Incorporación Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Nivel . Inicial

Objetivos. Ilustrar el potencial de los sistemas algebraicos computacionales (CAS), instalados en la calculadora TI 92 , en el diseño de situaciones didácticas que integran el pensamiento aritmético, algebraico, variacional y estadístico.

Descripción general del taller. El taller va dirigido a profesores de matemáticas de Educación Básica Secundaria. A partir de un ejercicio de optimización, se aprovecharán los recursos matemáticos de las versiones de los programas Derive, Hoja de Cálculo y Cabri, instalados en la calculadora TI 92 , para establecer conexiones entre los pensamientos aritmético, algebraico, variacional y estadístico.

Conocimientos previos. Conocimientos matemáticos elementales de álgebra

Programación.

Primer día: exploración de una tabla numérica.

Segundo día: resolución algebraica de un problema de optimización.

Tercer día: resolución geométrica del problema.

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Encontrar un patrón de regularidad que permita describir cada columna en términos de la primera.

1	18	28	2	504
2	16	26	4	832
3	14	24	6	1008
4	12	22	8	1056
5	10	20	10	1000
6	8	18	12	864
7	6	16	14	672
8	4	14	16	448
9	2	12	18	216
10	0	10	20	0

Segunda sesión

Enunciado de la situación

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de un material rectangular de 30 unidades de largo por 20 unidades de ancho, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas.

a. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja si se desea obtener el mayor volumen?

b. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para lograr la mayor área superficial posible?

1. a. Encuentre expresiones algebraicas equivalentes para el volumen de la caja.

b. Utilice las opciones expand (y factor (, las cuales se encuentran en el menú F2 Algebra , para verificar que las expresiones son equivalentes.

c. Iguale las diferentes expresiones y oprima ENTER para verificar sin son equivalentes o no.

d. Evalúe la(s) expresión(es) algebraica(s) correspondiente(s) al volumen para explorar cuáles podrían ser las dimensiones de la caja para obtener máximo volumen. Use el comando “con” o “tal que” cuyo símbolo es ú (2^{nd} + K).

2. Use la opción solve(para explorar:

a. ¿Cuál debe ser el valor de la altura de la caja para que el largo sea de 22 unidades?

b. ¿Cuál deber ser el valor de la altura de la caja para que el perímetro del patrón de la caja, una vez hechos los cortes, sea de 100 unidades?

c. ¿Cuál debe ser el valor de la altura de la caja para que el volumen sea 864 unidades cúbicas?

3. Defina la función **vol (x)** (emplee la opción Define que se encuentra en el menú F4 Other), correspondiente al volumen de la caja y ensaye diferentes valores para explorar cuáles podrán ser las dimensiones de la caja para obtener máximo volumen.

4.

a. Declare las variables **alto, ancho** y **largo** (opción STO) utilizando las expresiones algebraicas correspondientes.

b. Declare la variable **vol** usando las variables que acaba de declarar.

c. Asigne valores a la letra que usó en las expresiones algebraicas para ver cómo varía el ancho, el largo y el volumen, cuando cambia la altura.

5. Use la opción differentiate (, la cual se encuentra en el menú F3 Calc , para hallar las dimensiones de la caja cuando el volumen es máximo.

a. Entre al editor de ecuaciones (¨+ W) e introduzca la expresión correspondiente al volumen de la función.

b. Modifique la ventana de graficación (¨+ E) hasta obtener una gráfica (¨+ R) que permita observar las características completas de la función del volumen.

c. Use las opciones de las teclas de función para estudiar el comportamiento de la curva y hallar el máximo.

d. Introduzca la función y = 864, haga la gráfica y explique el resultado del numeral 2c.

Tercera sesión

1. Estudio de la situación.

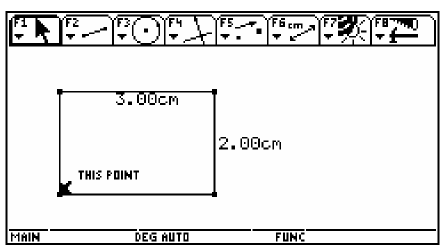
· El modelo debe basarse en un rectángulo de tamaño arbitrario que representará el pedazo de material.

· Para representar los cortes debemos construir cuadrados congruentes en las esquinas del rectángulo (bastará con construir uno y hacer sus simétricos).

· El tamaño de esos cuadrados tiene que variar, por lo que debe haber un punto móvil sobre uno de los lados del rectángulo, punto que determina el tamaño del cuadrado.

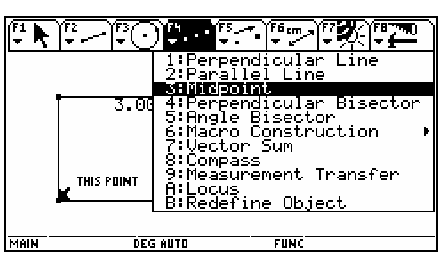
· Existe un tamaño límite del cuadrado: su lado no puede sobrepasar la mitad del lado más corto del rectángulo.

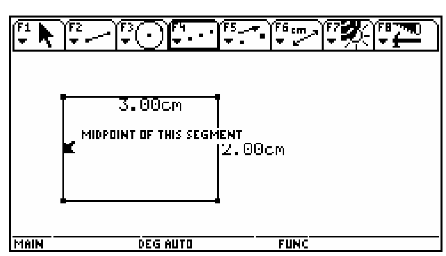
2. Construcción.

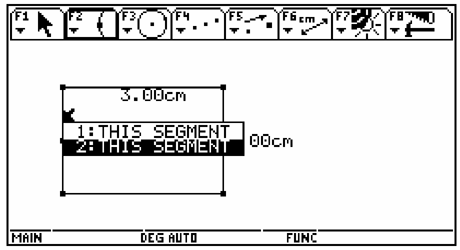


a. Construya un rectángulo de 2cm x 3 cm.

b. Construya el punto medio de uno de los lados más cortos.

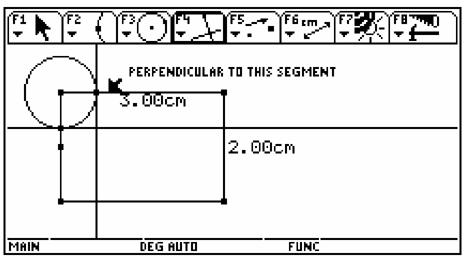


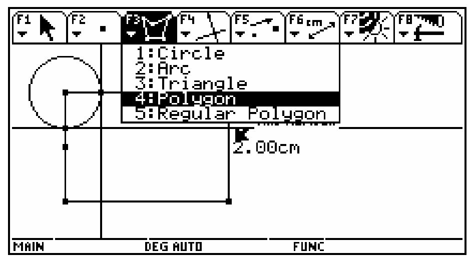




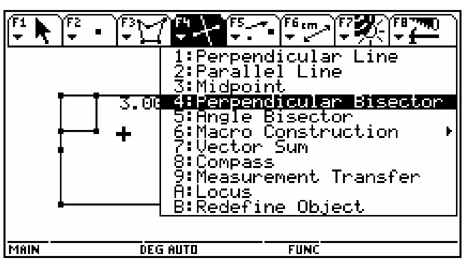
c. Construya un segmento desde el extremo del lado corto hasta el punto medio y dibuje un punto sobre ese segmento.

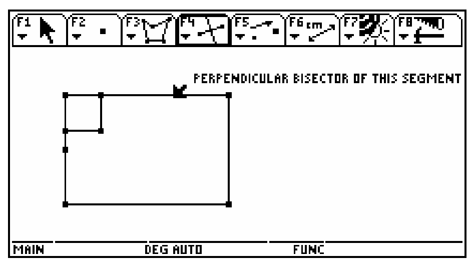
d. Construya un cuadrado utilizando la esquina del rectángulo y el punto móvil sobre el segmento (use la opción polígono).



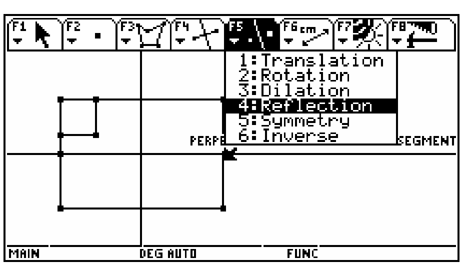


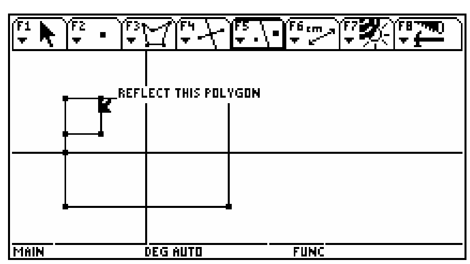
e. Construya las mediatrices de los lados del rectángulo.

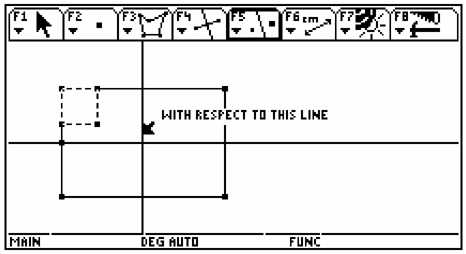




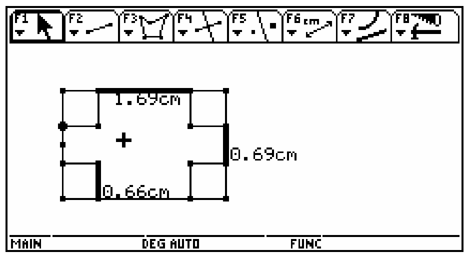
f. Construya la simetría axial del cuadrado usando las mediatrices como ejes de simetría.



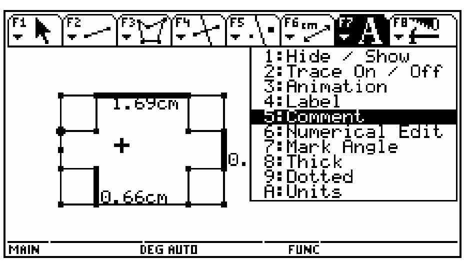


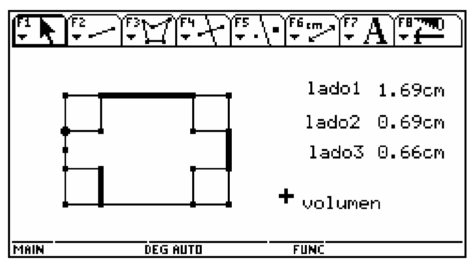


g. Oculte las construcciones intermedias. Ya tiene un modelo del pedazo rectangular con cuadrados recortados de las esquinas. El punto móvil le da la posibilidad de explorar todos los posibles tamaños de cuadrados. Ahora construya segmentos que representen las tres dimensiones de la caja y mídalos.

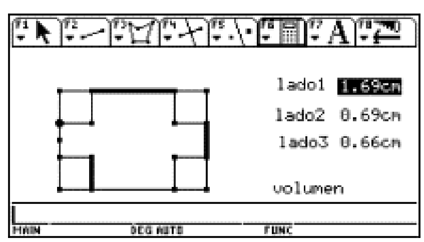


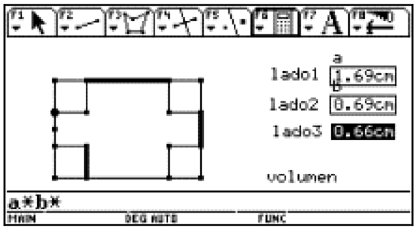
h. Utilizando la opción Comment (F7+ 5) organice la información en la pantalla.

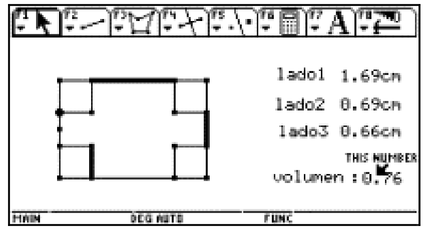




i. Ahora calcule el volumen de la caja con la opción Calculate (F6+6) y señale sucesivamente los valores de los lados de la caja.







En este momento ya puede mover el punto que determina el tamaño del cuadrado y observar cómo varía el volumen de la caja.

3. Construya una tabla obtenida a partir de un conjunto de datos:

a. seleccione F6 + 7 Colect data (agrupar datos) Define Entry (definir entrada)

b. seleccione los datos que se van a relacionar

c. seleccione F6 + 7 Colect data (agrupar datos) Store Data (almacenar datos)

d. seleccione F7 + 3 Animation (animación)

e. anime el punto correspondiente

f. abra la tabla arrojada por estos valores: oprimir la tecla de Aplicaciones (APPS) y seleccionar 6: Data/Matrix Editor + Current .

4. Construya la gráfica:

a. ubicado en el editor de datos, seleccione F2 Plot Setup

b. seleccione F1 para definir las características de la gráfica

c. seleccione el tipo de gráfica (Scatter) y el tipo de marca para los puntos (Box).

d. asigne a la variable x los valores correspondientes a la columna 1 (c1)

e. asigne a la variable y los valores correspondientes a la columna 2 (c2)

f. oprima ENTER dos veces

g. grafique los puntos (¨ GRAPH)

h. para visualizarlos mejor seleccione ZoomData en F2 + 9.

5. Haga el cálculo de regresión:

Ubicado en el editor de datos, seleccione F5 Calc y escoja el tipo de regresión que mejor se ajusta a los datos. Guarde esta función en y1.

Bibliografía

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas*. Serie Lineamientos.

Ministerio de Educación Nacional (2002). *Seminario de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* . Serie Memorias.

Cabri o el placer de hacer matemáticas (3 sesiones)

Martin Eduardo Acosta Gempeler

Grupo coordinador MEN

Incorporación Nueva s Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Nivel. Intermedio (abierto para todos, pero se recomiendan conocimientos básicos de Cabri y de Geometría plana).

Objetivos. Vivir una experiencia de exploración geométrica con ayuda de Cabri para re-descubrir el placer de hacer geometría

Descripción general del taller. ¿Usted piensa saber todo o casi todo sobre el triángulo? ¿Para usted la bisectriz, la altura y la mediana son recuerdos lejanos del colegio? ¿Usted piensa que la geometria plana es algo que se invento Euclides hace miles de años? Lo invitamos a participar en un zafari en la selva de los triángulos para sorprenderse con el mundo increible de la geometría.

Conocimientos previos. Se recomienda un manejo básico del Cabri y conocimientos básicos de geometría plana, pero sobre todo, mucha curiosidad y deseos de trabajar.

Programación.

Primer día: de la geometría a secas a la geometría dinámica; algunos principios básicos de supervivencia en el mundo de la geometría dinámica.

Segundo día: construir, explorar, explicar; del mundo de la pantalla al mundo de la geometría.

Tercer día: ¿y las matemáticas qué?

Desarrollo del taller.

Primera Sesión

Realicen la siguiente construcción que a partir de un triángulo y un punto cualquiera produce un segundo punto:

Construcción 1

Sea ABC cualquier triángulo

Sea P cualquier punto

Construya P1, P2 y P3 simétricos de P con respecto a los lados de ABC.

Construya P', centro de la circunferencia circunscrita del triángulo P1P2P3.

Definan una macro que les permita a partir de cualquier punto P y cualquier triángulo construir la imagen de P. Consideren esta macro como una transformación del plano.

Hagan un listado de las preguntas que consideren importante responder para caracterizar esta transformación.

Dado un triángulo, un punto y su imagen, utilicen el desplazamiento para hacer una primera caracterizacion de la transformación, e intenten responder a sus preguntas.

Elaboren un informe de la exploración dando cuenta de su trabajo: sus preguntas guía, sus conjeturas, sus dificultades, sus preguntas pendientes...

Segunda Sesión

En la sesión anterior, realizaron una primera exploración para caracterizar la transformación determinada por la construcción 1. Ahora deberán realizar una exploración exhaustiva para responder a sus preguntas, pero tambien para alcanzar el siguiente objetivo:

Objetivo

Encontrar uno o más procedimientos de construcción para la misma transformación

En la primera exploración, realizaron el desplazamiento del punto P libre en todo el plano. En esta segunda exploración les sugerimos estudiar el desplazamiento de P' cuando P se mueve sobre un objeto determinado.

Familiarícense primero con los siguientes procedimientos Cabri:

- redefinir un punto
- lugar geométrico

Luego escriban una estrategia de exploración, listando los objetos a los cuales quieren ligar P, de manera que puedan obtener sus imagenes por la transformación.

Con esta estrategia comiencen una exploración exhaustiva, teniendo en cuenta:

- s u listado de preguntas so bre la transformación
- las consignas de estudio de una figura

- el objetivo de la sesión

Elaboren un informe escrito y una presentación corta de su exploración. No olviden nombrar su estrategia, las propiedades encontradas, los procedimientos de verificación, los resultados, las preguntas pendientes.

Tercera sesión

Consignas de exploración de una figura :

1. **Dudar de lo que se ve**: desplace los puntos libres para verificar las propiedades invariantes.

2. **Ver más de lo que se ve**: utilice sus conocimientos geométricos para conjeturar relaciones entre los objetos.

3. **Enriquecer la figura** : utilice las herramientas de Cabri para buscar y verificar relaciones. Trace rectas, circunferencias, segmentos, haga mediciones, realice cálculos, compruebe propiedades, trace lugares geométricos ...

4. **Explicar las relaciones verificadas**: el proceso de construcción es el camino privilegiado de la explicación. Explicar es relacionar lo nuevo con lo ya conocido.

Sugerencia (incompleta) de relaciones a verificar en una figura:

Puntos y rectas :

- ¿Tres puntos están alineados?
- ¿Tres rectas son concurrentes?
- ¿Un punto pertenece a una recta?¿Una recta pasa por un punto?
- ¿Dos rectas son paralelas (perpendiculares)?

Puntos y circunferencias:

- ¿Cuatro puntos están en una circunferencia?
- ¿Dados tres o más puntos, dos de ellos son equidistantes del tercero?
- ¿Dos circunferencias son concéntricas (tangentes)?

Rectas y circunferencias:

- ¿Una recta es tangente a una circunferencia?
- ¿Una recta es diámetro de una circunferencia?

Longitudes y ángulos:

- ¿Dos o más segmentos son congruentes (proporcionales)?

- ¿Dos ángulos son congruentes (proporcionales, complementarios, suplementarios)?
- Proporciones: media aritmética, media geométrica, proporcion áurea, media armónica.

Polígonos:

- Triángulos: equilátero, isósceles, rectángulo?
- Cuadrilátero: paralelogramo, rectángulo, trapecio, cuadrado?
- ¿Polígono regular?

Transformaciones :

- ¿Dos objetos son simétricos?
- ¿Dos objetos son homotéticos?
- ¿Dos puntos son inversos?
- ¿Conserva las longitudes (los ángulos, el paralelismo, la incidencia)?

Definiciones e instrucciones de construcción

Para construir la circunferencia circunscrita de un triángulo:

La circunferencia circunscrita de un triángulo ABC es la circunferencia que contiene los tres vértices del triángulo. Como una circunferencia es el lugar de todos los puntos equidistantes del centro, entonces el centro de la circunferencia circunscrita debe ser equidistante de los tres vértices A, B y C. Sabiendo que la mediatriz de un segmento es el lugar de todos los puntos equidistantes de sus extremos, el punto de corte de las mediatrices del triángulo ABC será el centro de la circunferencia circunscrita.

Para construir la circunferencia inscrita de un triángulo:

La circunferencia inscrita es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo. Por lo tanto, los lados del triángulo son equidistantes del centro de la circunferencia inscrita. Sabiendo que la bisectriz de un ángulo es el lugar de todos los puntos equidistantes de las rectas que forman el ángulo, el punto de corte de las bisectrices del triángulo ABC será el centro de la circunferencia inscrita.

Bibliografía

G. Onofrio . (1924) *Les Foyers du triangle*. Lyon, Societé anonyme de l'imprimerie A.Rey .

Eugene Rouche et Charles de Comberousse . (1900) *Traité de Géomètrie*. Editions Jacques Gabay.

R.Cuppens . *Faire de la geometrie en jouant avec Cabri Géomètre*, V 2.

Rectas y circunferencias tangentes (3 sesiones)

Ernesto Acosta Gempeler

Grupo Coordinador MEN

Incorporación Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería

Nivel. Intermedio (abierto para todos, pero se recomiendan conocimientos básicos de Cabri y de geometría plana).

Objetivos. Descubrimiento de relaciones inesperadas mediante la exploración de problemas de tangencia de rectas y circunferencias en Cabri con el propósito de generar estrategias de solución de problemas en geometría dinámica.

Descripción general del taller. Haremos una exploración de algunos problemas de tangencia entre circunferencias y rectas. Comenzaremos por plantear problemas muy elementales y a medida que adquiramos destreza con el uso de la calculadora y las estrategias de solución de problemas en geometría dinámica, resolveremos problemas cada vez más complejos.

Conocimientos previos: Se recomienda un manejo básico del Cabri y conocimientos básicos de geometría plana.

Programación.

Primer día: manejo de las herramientas que usaremos en el planteamiento, exploración y solución de problemas. La traza y el lugar geométrico. Circunferencia tangente a una recta y recta tangente a una circunferencia.

Segundo día: rectas tangentes a dos circunferencias y circunferencias tangentes a dos rectas.

Tercer día: rectas tangentes a tres circunferencias y circunferencias tangentes a tres rectas.

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Circunferencias tangentes a una recta y rectas tangentes a una circunferencia.

1. Se plantea el problema de construir una circunferencia tangente a una recta dada *r*. Éste se puede resolver fácilmente debido a que no se han impuesto condiciones adicionales. Por ejemplo, construir una recta p perpendicular a *r*, tomar un punto *P* sobre *p* y construir la circunferencia *c* con centro en *P* que pasa por el punto *I* de intersección entre *p* y *r*. Hemos usado aquí que la recta tangente a una circunferencia en un punto *I* es una recta que:

a. pasa por *I*

b. perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por *I*.

2. El problema se puede complicar un poco si se pide que la circunferencia pase además por un punto dado *P*. Una forma muy útil de atacar el problema en geometría dinámica consiste en escoger una familia de circunferencias que pasan por *P* y entre éstas encontrar las que son tangentes a la recta dada. Por ejemplo, trazamos una recta *s* paralela a *r* que pasa por *P*, tomamos un punto *Q* en *s* y construimos la circunferencia *z* con centro en *Q* y que pasa por *P*. Al mover *Q* sobre *s* tenemos una familia de circunferencias *z* que pasa por *P*. ¿Cuántas de éstas son tangentes a *r*?

Ahora, tracemos una recta *p* perpendicular a *r* que pasa por *Q* (en búsqueda de satisfacer la condición 1b). Las rectas *p* y *r* se intersecan en *U*; la intersección de *z* y *p* entre *Q* y *U* es *V*. Debemos ahora mover *Q* de tal manera que *V* esté sobre *r* (en búsqueda de la condición 1a).

Si activamos la traza de *V* y movemos *Q* sobre *s* podremos conjeturar que el lugar geométrico de *V* cuando *Q* se mueve sobre *s* es una recta que pasa por *P* y corta a *r* en el punto *I* que es el punto de tangencia que buscamos.

Trazamos la recta *t* que pasa por *P* y *V*, trazamos una recta perpendicular *m* que pase por *I* (*I* es el punto de intersección entre *t* y *r*). El centro C de la circunferencia buscada es el punto de intersección entre *m* y *s.*

Observaciones:

- Le hemos preguntado a la calculadora cuál es el lugar geométrico de *V* cuando *Q* se mueve sobre *s*. La calculadora nos ha dicho que el lugar geométrico es la recta *t* que pasa por *P* y *V* y que la intersección entre *t* y *r* es el punto de tangencia *I* buscado. *Esta es la forma de preguntar y leer la respuesta de la calculadora cuando trabajamos en geometría dinámica.*

- La escogencia de la recta *s* paralela a *r* es lo que llamaré la *introducción de un objeto test,* lo que nos permite trabajar con una subfamilia "más pequeña" de circunferencias que pasan por *P*.

3. ¿Es necesa rio que *s* sea paralela a *r*? Repita el punto 2 escogiendo otros *objetos test.*

4. Construimos "todas" las circunferencias que pasan por *P* y son tangentes a *r*.

5. ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por P y son tangentes a r?

6. Repitamos 1 a 5 para el problema dual: construir una recta tangente a una circunferencia dada. ¿Qué diferencias se encuentran con el problema inicial?

Segunda sesión

Circunferencias tangentes a dos rectas y rectas tangentes a dos circunferencias.

1. Se plantea el problema de construir una circunferencia tangente a dos rectas dadas *r* y *s*. Usaremos las estrategias aprendidas en la primera parte: *introducción de un objeto test, preguntar a la calculadora y leer la respuesta*. Trazamos una recta *t* adicional (objeto test). Tomamos un punto *P* sobre *t* y construimos una circunferencia *z* con centro en *P* y tangente a *r*. Al mover *P* sobre *t* obtenemos una familia de circunferencias *z* que son tangentes a *r*. ¿Cuántas son tangentes a *s*?

Ahora construimos la recta *p* perpendicular a *s* que pasa por *P* (en búsqueda de la satisfacción de la condición 1b). Tomamos *V*, uno de los puntos de intersección entre la circunferencia *z* y *p*.

Al activar la traza de *V* y mover *P* sobre *t* vemos que su lugar geométrico es una recta que pasa por *V* y *R* (punto de intersección entre *t* y *r*) que corta a *s* en *I* que es el otro punto de tangencia buscado (en búsqueda de satisfacer la condición 1a).

Trazamos la recta *u* que pasa por *V* y *R*, construimos la recta *v* que pasa por *I* (punto de intersección entre *u* y *v*) y es perpendicular a *s*. El punto *C* de intersección entre *v* y *t* es el centro de la circunferencia buscada.

2. El problema se puede complicar un poco si se pide que la circunferencia pase además por un punto dado *P*. Introduzcamos un objeto *test* conveniente y resolvamos el problema.

3. Construyamos todas las circunferencias tangentes a las dos rectas dadas.

4. ¿Cuál es el lugar geométrico de las circunferencias tangentes a las dos rectas dadas?

5. Resolvamos el problema dual: Construir una recta tangente a dos circunferencias dadas. ¿Qué diferencias encuentra con el problema inicial?

6. Construyamos una circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia dadas.

Tercera sesión

Circunferencias tangentes a tres rectas dadas

1. Se plantea el problema de construir una circunferencia tangente a tres rectas dadas *r, s* y *t*. Usaremo lo aprendido. El centro de la circunferencia buscada está en el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a r y a s y en el correspondiente para s y t. ¡Encontrémoslo!

2. ¿Cuántas circunferencias tangentes a las tres rectas dadas hay? ¿Cuál es el lugar geométrico de sus centros?

Observación. A estas alturas ya estamos en capacidad de plantear y resolver muchos problemas más sobre rectas y circunferencias tangentes. Lo podemos hacer usando lo aprendido y combinando el número de rectas y el número de circunferencias. Un problema histórico consiste en construir todas las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Es el problema de las circunferencias de Apolonio. Un caso particular de este problema es cuando las circunferencias dadas son tangentes entre sí. Los centros de las circunferencias tangentes se conocen como los centros de Soddy del triángulo formado por los centros de las circunferencias dadas.

Bibliografía.

Ministerio de Educación Nacional (2002). *Seminario de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* . Serie Memorias, p.p. 312,313.

Programación gráfica utilizando la calculadora TI - 92 plus (3 sesiones)

Efraín Alberto Hoyos Salcedo

Universidad del Quindío

Nivel. Intermedio

Objetivos.

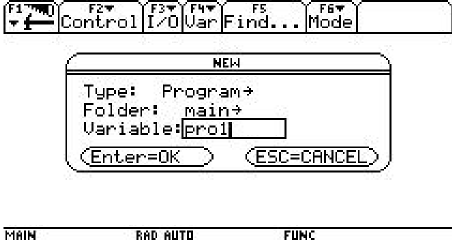
- Adquirir algunos de los elementos básicos de programación en la calculadora TI 92.

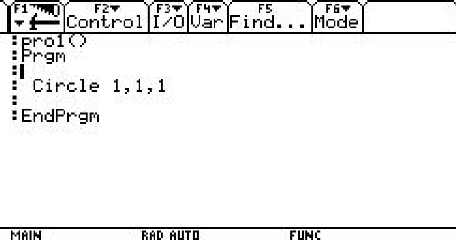
- Graficar funciones y hacer construcciones geométricas mediante la programación de la calculadora.

Descripción general del taller . Escritura de un programa sencillo en la calculadora TI 92 . Presentación de los elementos básicos de programación. Realización de gráficas utilizando las primitivas y gráficas con la primitiva línea. Transformaciones geométricas: Translación - Rotación - Reflexión. Utilización de las instrucciones de alto nivel para graficar funciones. Animación haciendo gráficas desde un menú de opciones.

Conocimientos previos. Conocimientos básicos de geometría y manejo básico de la TI 92 .

Desarrollo del taller.





Sesión 1

Cómo escribir un programa sencillo en la calculadora TI 92

Para crear un programa nuevo en la calculadora TI 92, debe usar el editor de programas, el cual se activa presionando la tecla APPS. Se escoge la opción 7 Program Editor y se selecciona la alternativa 3, como se indica en la figura 1.

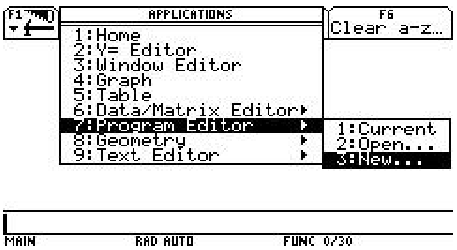


Figura 1

Cada programa debe tener un nombre, el cual se asigna al frente de la palabra variable como se muestra en la figura 2.

Figura 2

Al presionar ENTER dos veces, la calculadora dispone el editor, y en forma automática presenta el encabezamiento del programa y el fin del mismo como se ve en la figura 3.

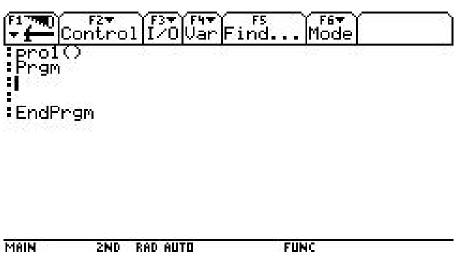
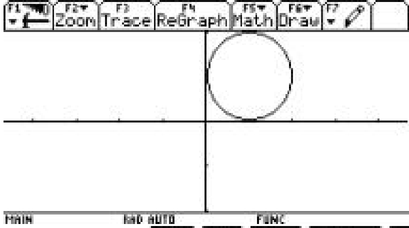


Figura 3

Observe que el cursor queda exactamente en el lugar adecuado donde debe escribirse la primera instrucción del programa que se desea hacer. En este momento se introduce la primera instrucción del programa, como por ejemplo la empleada para hacer un círculo, tal como se muestra en la figura 4.

Figura 4

El anterior es un programa que ya se puede ejecutar y al hacerlo presenta un círculo en la pantalla gráfica. Para ejecutar este programa debe ir a la pantalla HOME y en la parte inferior escribir el nombre del programa seguido de paréntesis como se indica en la figura 5.



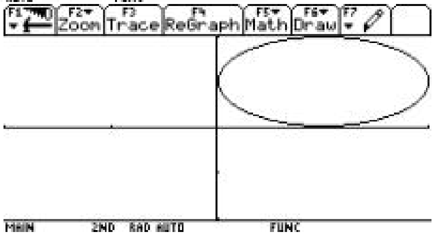
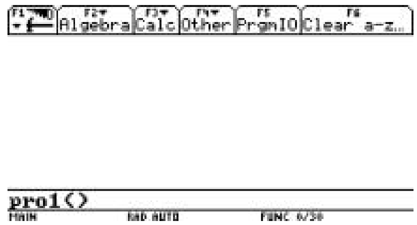


Figura 5



Observe que la apariencia de la figura es la de una elipse. Para corregir el efecto visual use la instrucción ZoomSqr antes de dibujar el círculo y el programa quedaría como el ilustrado en la figura 6. Ejecute nuevamente el programa desde la pantalla HOME y observe cómo mejora la apariencia del círculo.

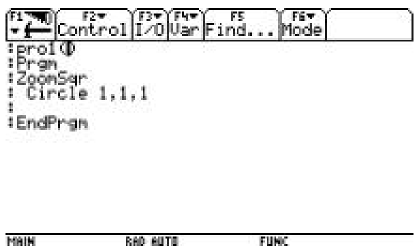


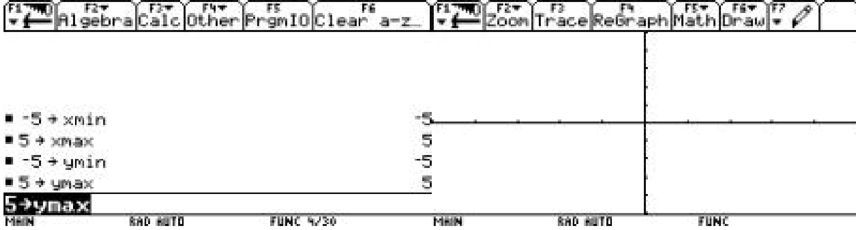
Figura 6

Es de anotar que la salida de un programa que muestra gráficas se efectúa en la pantalla GRAPH. Por otro lado, la calculadora no acepta un nombre de programa ya existente en la memoria.

Puede abandonar el editor de programas en cualquier momento, como por ejemplo, cada vez que vaya a ejecutar el programa lo cual se hace desde la pantalla HOME.

Los programas almacenados en la calculadora pueden abrirse desde el editor de programa con la opción open así como se muestra en la figura 7.

Figura 7



Algunas consideraciones generales de la pantalla GRAPH

Esta pantalla tiene 239 pixeles de ancho por 103 de alto, los cuales se reparten en forma proporcional a la ventana que configure el usuario. La configuración estándar de la pantalla GRAPH se puede observar en la figura 8.

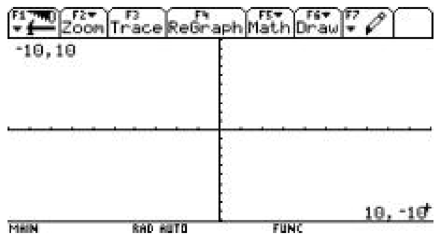


Figura 8

Como se puede apreciar, la calculadora dispone por defecto, de una ventana gráfica con un sistema cartesiano que considera 10 unidades hacia la derecha, 10 a la izquierda, 10 hacia arriba y 10 hacia abajo; claro está que el usuario puede cambiar dicha ventana de varias formas. Una manera es cambiando los valores de las variables que la controlan (xmin, xmax, ymin, ymax). Por ejemplo, configuremos una ventana de 5 unidades hacia arriba, 5 hacia abajo, 5 hacia la derecha y 5 hacia la izquierda , así como se muestra en la figura 9.

Figura 9

Sesión 2

Elementos básicos de programación

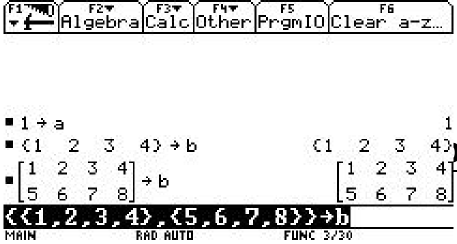
La programación de la calculadora TI 92 permite manejar tres clases de variables:

- **Variables del sistema** (no se pueden renombrar), por ejemplo xmax, xc.

- **Variables de carpeta**, se crean en el programa y permanecen en la memoria, incluidas en la carpeta donde se encuentra el programa. Se crean como en el siguiente ejemplo: 4>d.

- **Variables locales** son creadas con la orden “local” y no se almacenan en la memoria. Esto quiere decir que después de terminada la ejecución del programa, las variables desaparecen. Por ejemplo, para crear las variables locales f, j, suma, se escribe: Local f,j,suma

Cualquier lenguaje de programación permite manejar unas estructuras de datos para almacenar los datos y unas estructuras de control para determinar lo que se debe hacer con dichos datos. Las formas más comunes para almacenar datos son las siguientes:



- almacenar un número en una variable
- almacenar un arreglo en una variable

Veamos los ejemplos en la figura 10:

Figura 10

Las principales estructuras de control son las siguientes:

If
If ... then... endif
If ... then... else … endif

Goto eti

Lbl eti

For … endfor

While endwhile

Loop … endloop

Exit permite la salida de un bucle.

Cycle transfiere el control del programa a la siguiente repetició n del bucle.

Realización de gráficas utilizando las primitivas.

Aunque la primitiva gráfica es la instrucción para pintar un punto, también se pueden considerar como primitivas gráficas las instrucciones para dibujar una línea recta y un círculo.

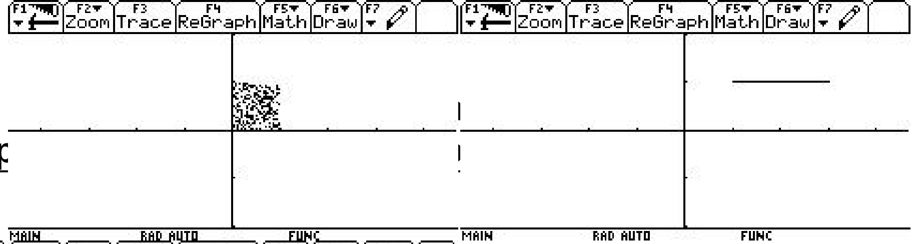
Instrucciones para activar un punto en pantalla.

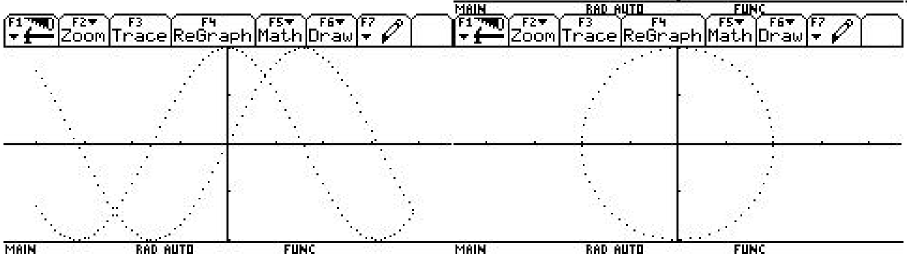
Pton x, y . Pxlon x, y (activa el punto (x,y) en la ventana configurada)

Ptchg x, y. Pxlchg x, y (activa el punto (x,y) en la ventana configurada)

Veamos algunos ejemplos de programas que dibujan gráficas realizadas con puntos (se trabajará con la ventana: xmin = -5, xmax = 5, ymin = -2, ymax = 2):

Una recta (Figura 11)





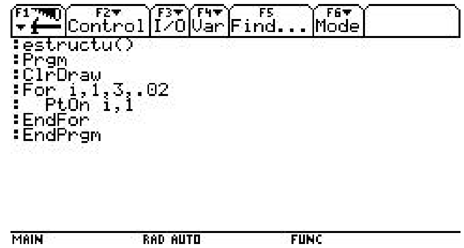


Figura 11

Puntos aleatorios (Figura 12)

Figura 12

Circunferencia (Figura 13)

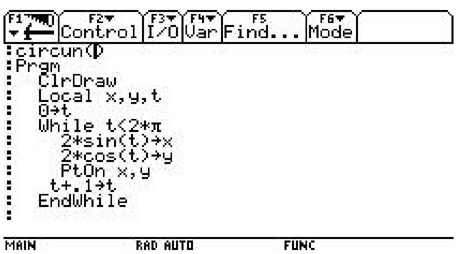


Figura 13

Gráfica de las funciones seno y coseno simultáneamente (Figura 14)

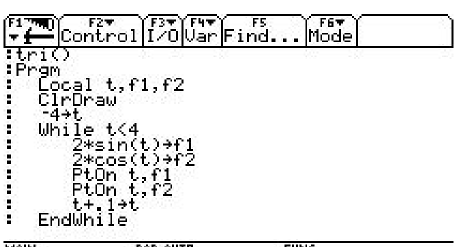
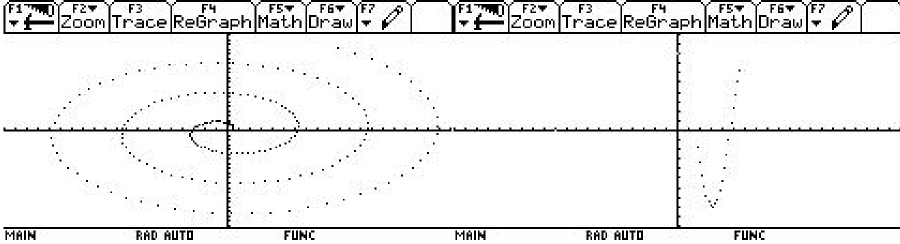


Figura 14

Curvas Paramétricas (Figura 15)



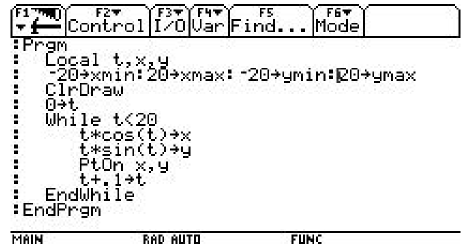


Figura 15

Movimiento de varios puntos en la trayectoria de la función seno (Figura 16)

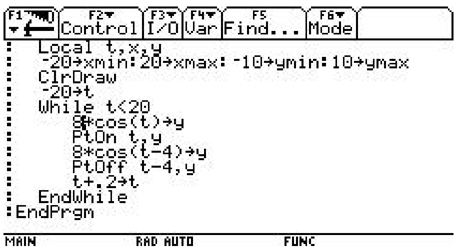


Figura 16

Gráficas con la primitiva línea

Hay varias instrucciones que permiten realizar gráficas de líneas recta, entre ellas tenemos:

Line x1, y1, x2, y2[, m] traza una recta desde el punto (x1,y1) hasta el punto (x2,y2)

Linehorz y[, m] traza una línea horizontal por el valor de y

Linevert x[, m] traza una vertical por el valor de x

Si m = 1 dibuja la recta por omisión

Si m = 0 desactiva la recta

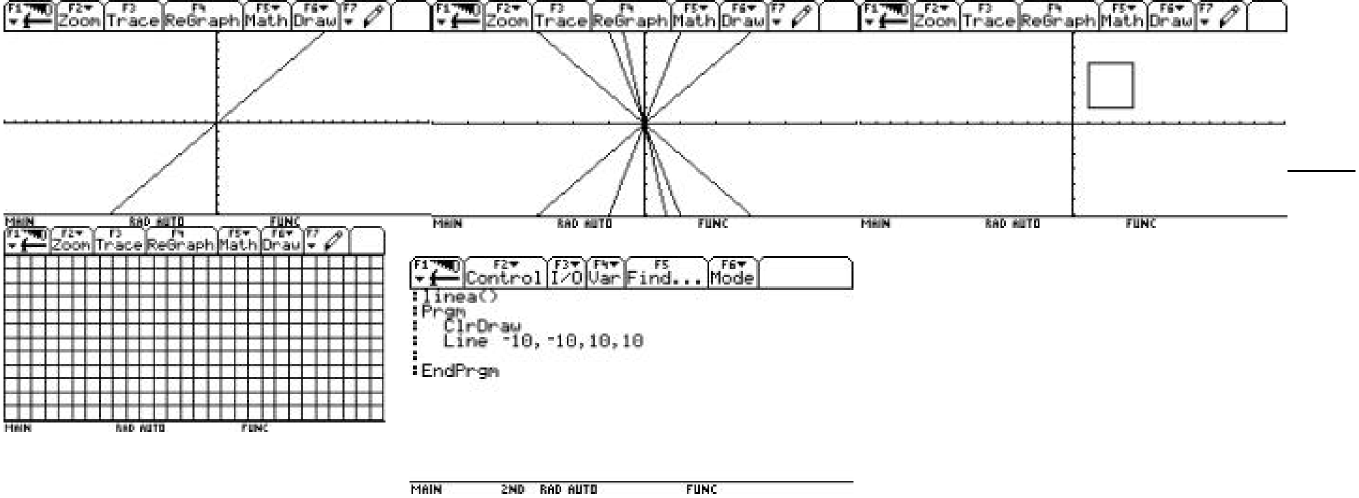
Si m = -1 activa o desactiva la recta según el estado inicial.

Drawslp x1, y1, p traza una recta que pasa por el punto x1,y1 y tiene pendiente p

Linetan expresión1, expresión2 traza una recta tangente a la expresión1 en el punto dado por expresión2.

Pxlline f1, c1, f2, c2[, m] opera lo mismo que line pero no lo hace sobre la ventana sino sobre los pixeles de la pantalla.

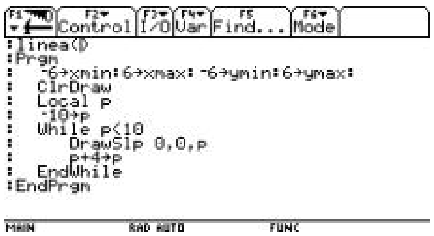
Veamos un ejemplo de gráfica de una de recta. (Figura 17)



```
:linea()
:Prgm
:  ClrDraw
:  Line ⁻10,⁻10,10,10
:
:EndPrgm
```

Figura 17

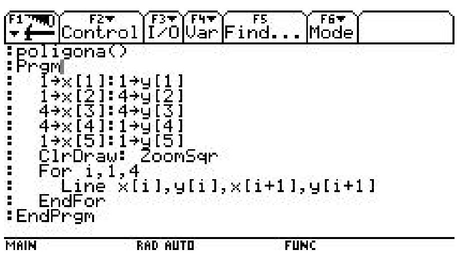
Ahora veamos varias rectas de diferente pendiente. (Figura 18)



```
:linea()
:Prgm
:  ⁻6→xmin:6→xmax:⁻6→ymin:6→ymax:
:  ClrDraw
:  Local p
:  ⁻10→p
:  While p≤10
:     DrawSlp 0,0,p
:     p+4→p
:  EndWhile
:EndPrgm
```

Figura 18

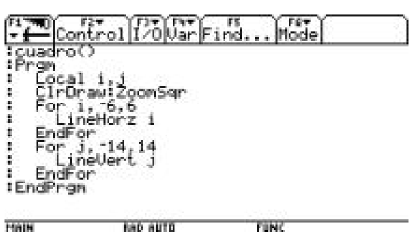
El programa de la figura 19 grafica una poligonal cerrada.



```
:poligona()
:Prgm
:  1→x[1]:1→y[1]
:  1→x[2]:4→y[2]
:  4→x[3]:4→y[3]
:  4→x[4]:1→y[4]
:  1→x[5]:1→y[5]
:  ClrDraw: ZoomSqr
:  For i,1,4
:    Line x[i],y[i],x[i+1],y[i+1]
:  EndFor
:EndPrgm
```

Figura 19

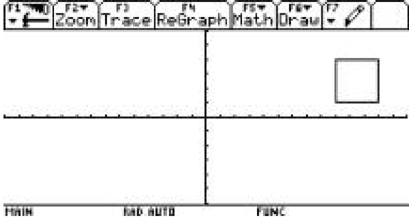
El siguiente ejemplo (figura 20) permite cuadricular la pantalla de la calculadora, utilizando las instrucciones LineHorz y LineVert.

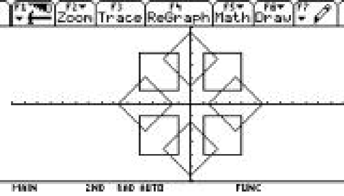


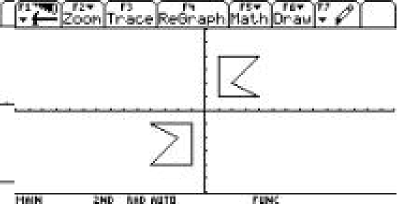
```
:cuadro()
:Prgm
:  Local i,j
:  ClrDraw:ZoomSqr
:  For i,⁻6,6
:    LineHorz i
:  EndFor
:  For j,⁻14,14
:    LineVert j
:  EndFor
:EndPrgm
```

Figura 20

Transformaciones geométricas







Traslación: para trasladar una poligonal a una nueva posición, se incrementan o decrementan las coordenadas de cada vértice de la poligonal. Por ejemplo, para trasladar el polígono de la figura 20, 8 unidades a la derecha, se procede como se muestra en la figura 21.

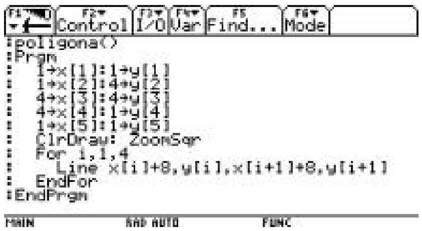
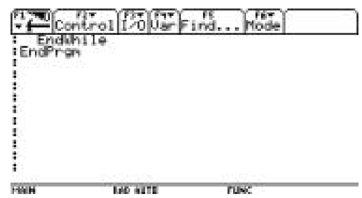


Figura 21

Rotación: para rotar el polígono de la figura 21, un ángulo de 30 grados, las coordenadas de



cada vértice deben ser rotadas dicha cantidad, tal como se indica en la figura 22.

Figura 22

Reflexión: para reflejar una poligonal con respecto al eje y se cambia, en las coordenadas de cada vértice, el valor de x por –x. Para reflejar una poligonal con respecto al eje x se cambia, en las coordenadas de cada vértice, el valor de y por –y. Si se cambian ambos signos de las coordenadas de cada vértice, se obtiene un reflexión con respecto al origen.

En la figura 23 se ilustra un ejemplo de este último caso.

Figura 23

Sesión 3

U tilización de las instrucciones de alto nivel para graficar funciones

Algunas de las instrucciones que la calculadora posee, las cuales permiten graficar en forma rápida funciones y relaciones, son las siguientes (casos particulares):

Setmode (“ graph ”,” function ”)

Drawfunc sin (x)

Drawinv cos (x)

Drawpol 5* cos(ê),5* sin(ê),0,4,.2

Drawparm t * cos (t),t* sin (t),0,5,.1

Circle 1,1,2

Pxlcrcl 10,10,10

Stopic v 1,0,0,20

Xorpic v 1,20,25

Andpic v1,30,60

Graph expresión1 [, expresión2] [, var1] [, var2]

trace

Shade sin(x),2* sin(x)

Newplot 1,1,l1,l2

Disp G

Fnon 1

Fnoff 2

Plotsoff 3

Plotson 2

Style 1,” below ”

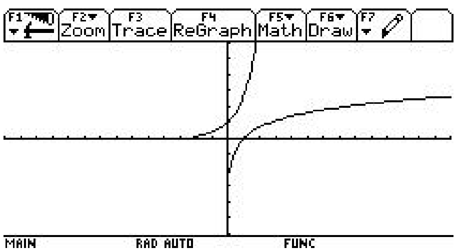
Ejemplificación de las instrucciones inmediatamente anteriores:

En la figura 24 está escrito un programa que grafica la función 3*sin(x) y una secuencia de líneas tangentes a dicha función para x entre 1 y 2. Para ello utiliza la instrucción LineTan.

```
F1  F2▾     F3▾ F4▾ F5    F6▾
    Control I/O Var Find… Mode
:tangen()
:Prgm
:  setMode("Graph","FUNCTION")
:  ClrDraw:ClrGraph
:   ZoomSqr
:  Graph 3*sin(x)
:  1→x
:  While x<2
:   LineTan 3*sin(x),x
:   x+.1→x
:  EndWhile
:EndPrgm
MAIN      RAD APPROX      FUNC
```

Figura 24

El programa de la figura 25 dibuja inicialmente la función logaritmo natural y luego su inversa.




```
F1  F2▾     F3▾ F4▾ F5      F6▾
    Control I/O Var Find... Mode
:fun1()
:Prgm
:   setMode("Graph","FUNCTION")
:   ClrDraw
:   DrawFunc ln(x)
:   DrawInv ln(x)
:
:
:EndPrgm
MAIN      RAD AUTO      FUNC
```

Figura 25

El programa de la figura 26 permite dibujar una rosa de 4 pétalos en coordenadas polares y una espiral.

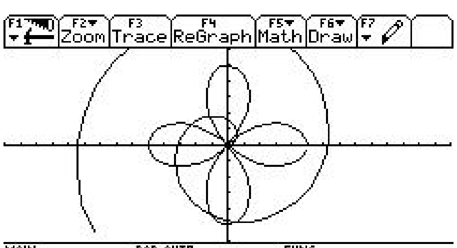
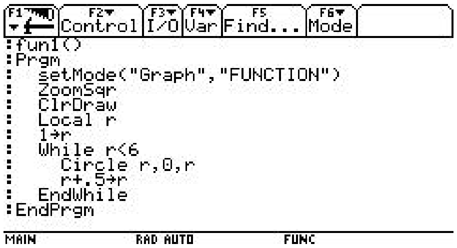


Figura 26

```
F1  F2▾     F3▾ F4▾ F5      F6▾
    Control I/O Var Find... Mode
:fun1()
:Prgm
:   setMode("Graph","FUNCTION")
:   ClrDraw
:   DrawPol 5*cos(2*θ),0,2*π,.1
:   DrawParm t*cos(t),t*sin(t),0,10,.2
:EndPrgm
MAIN      RAD AUTO      FUNC
```

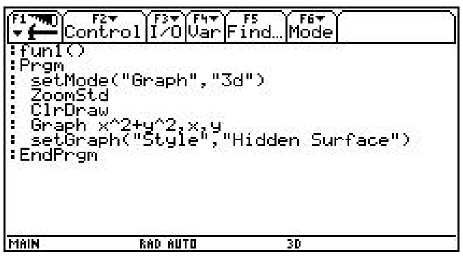
Las instrucciones de la figura 27, dibujan una serie de círculos sobre el eje x de izquierda a derecha.



```
:fun1()
:Prgm
:  setMode("Graph","FUNCTION")
:  ZoomSqr
:  ClrDraw
:  Local r
:  1→r
:  While r<6
:    Circle r,0,r
:    r+.5→r
:  EndWhile
:EndPrgm
```

Figura 27

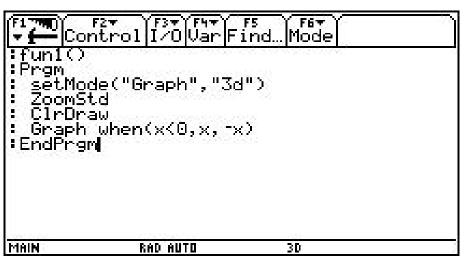
El código de la figura 28 utiliza la instrucción Graph para graficar en este caso un paraboloide.



```
:fun1()
:Prgm
: setMode("Graph","3d")
: ZoomStd
: ClrDraw
: Graph x^2+y^2,x,y
: setGraph("Style","Hidden Surface")
:EndPrgm
```

Figura 28

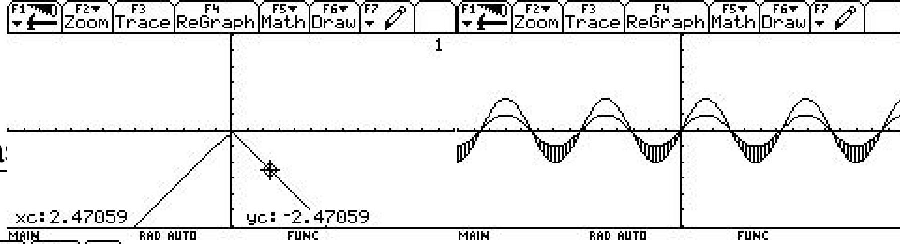
Utilizando la instrucción when , es posible graficar una función por trozos como se ilustra en la figura 29.

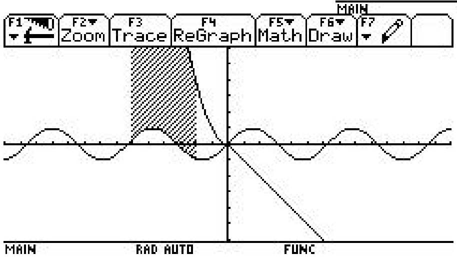


```
:fun1()
:Prgm
: setMode("Graph","3d")
: ZoomStd
: ClrDraw
: Graph when(x<0,x,⁻x)
:EndPrgm
```

Figura 29

La instrucción “ Shade expresión 1, expresión 2” permite visualizar en forma sombreada la parte comprendida entre dos gráficas correspondientes a expresión1 y expresión2 donde la expresión1 sea menor que la expresión2. Veamos el ejemplo de la figura 30.





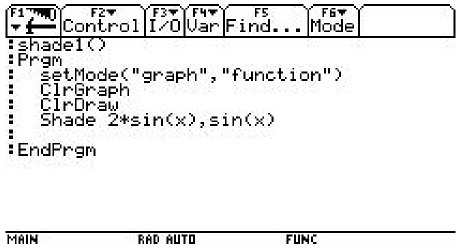


Figura 30

Otro ejemplo de aplicación de la instrucción Shade en un intervalo para dos funciones donde una de ellas se hace por trozos, se presenta en la figura 31.

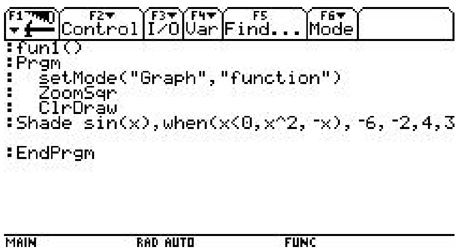
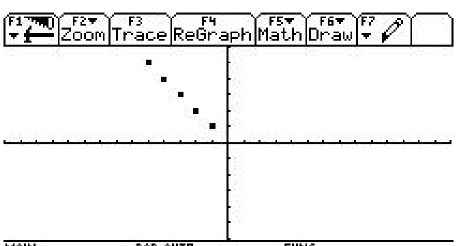


Figura 31

La opción trace es una instrucción que dispone el cursor para que el usuario lo mueva, restringido su movimiento al dominio y rango de las funciones. Veamos un ejemplo en la figura 32.



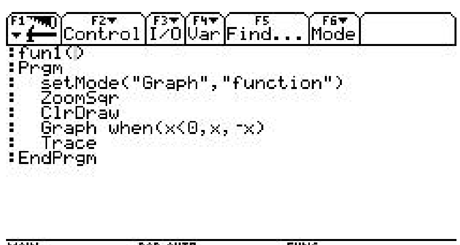


Figura 32

Podemos emplear la instrucción newplot para graficar un conjunto de puntos, como se ilustra en la figura 33.

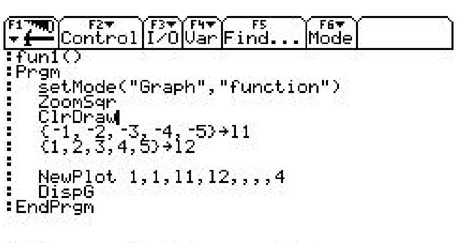


Figura 33

Animación

La forma corriente de simular el movimiento de una gráfica en la pantalla es mostrándola en forma consecutiva en diferentes puntos de la pantalla. Para ello, dichas imágenes deben grabarse con antelación en memoria y en formato PIC. Esto se logra realizando la gráfica en la pantalla GRAPH y luego con la opción Save Copy As se escoge el tipo Picture y se almacena la figura como se muestra en la figura 34.

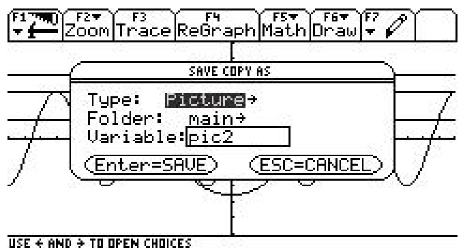
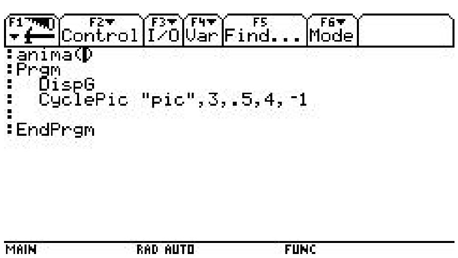


Figura 34

Ya grabadas, estas imágenes se muestran en pantalla en forma consecutiva mediante la instrucción cycle , así como se observa en la figura 35:



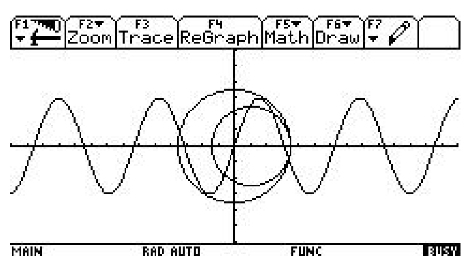
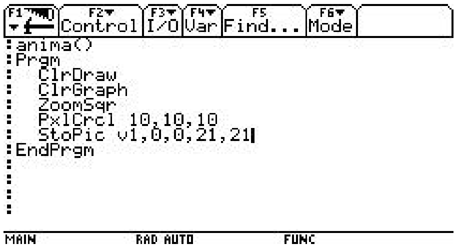


Figura 35

Mediante la instrucción stopic**,** se puede almacenar una porción de la pantalla gráfica, la cual se puede colocar en diferentes partes de la misma haciendo operaciones (and, or, xor) con la parte correspondiente. La figura 36 muestra un ejemplo del lugar en el que se dibuja un círculo con la instrucción pxlcrcl y se almacena en la variable v1 mediante la instrucción stopic.



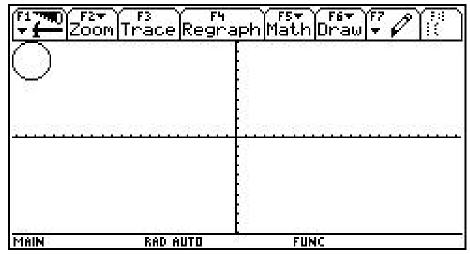
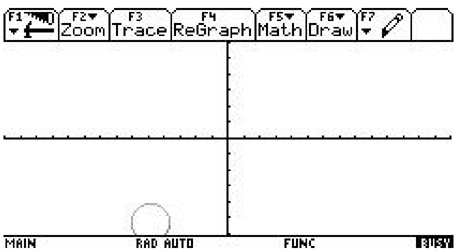


Figura 36

El código de la figura 37 pone en movimiento el círculo almacenado en la variable v1. Note que la instrucción xorpic se ejecuta 2 veces, pues inicialmente coloca la gráfica y luego la borra.



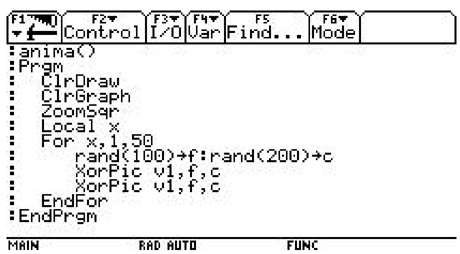
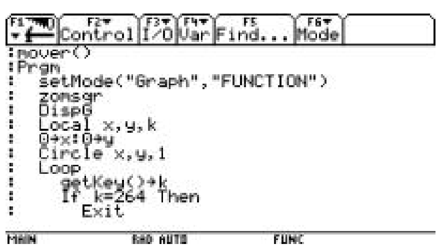
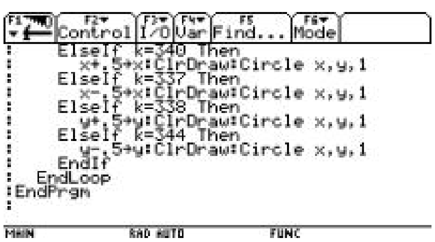


Figura 37

Simulación del movimiento de una gráfica utilizando las teclas de flechas. (Figura 38)





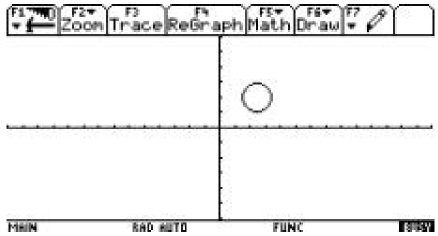
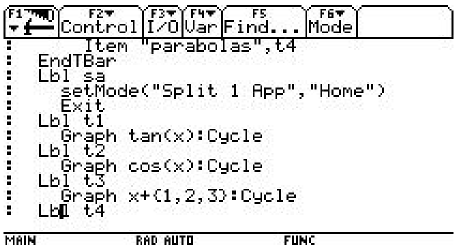


Figura 38

Haciendo gráficas desde un menú de opciones

Es posible disponer de una barra de menú con opciones, desde donde se pueden ejecutar órdenes gráficas. Para ello existen varias posibilidades:

- Utilizar la instrucción toolbar ... endtbar. (Figura 39)



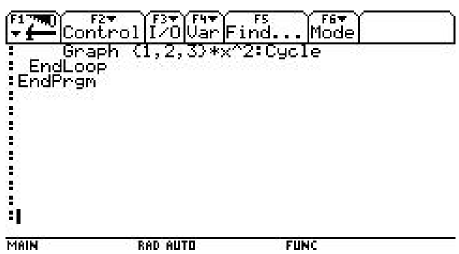


Figura 39

Como se puede observar en la gráfica que se muestra a continuación, la barra de herramientas es reemplazada por la barra programada por el usuario, y cada submenú se activa con las teclas de función. Con las teclas de cursor el usuario se puede desplazar en las opciones y escoger la que esté resaltada presionando la tecla ENTER. Por ejemplo, si se presiona ENTER en la opción coseno, la gráfica obtenida es la ilustrada en la figura 40.

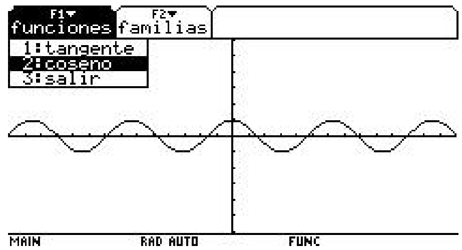


Figura 40

Si se presiona la tecla ENTER en la opción rectas , la gráfica obtenida se muestra en la figura 41.

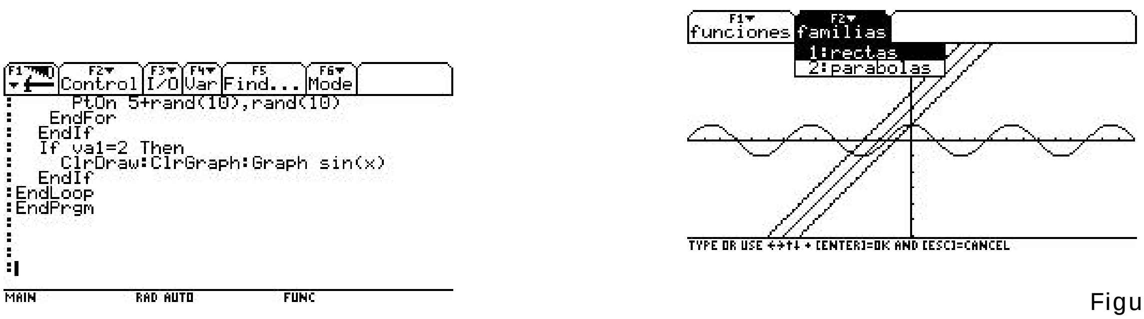


Figura 41

- Utilizar un menú flotante, para escoger de él alguna opción. El ejemplo ilustrado en la figura 42, dispone al usuario un menú flotante.

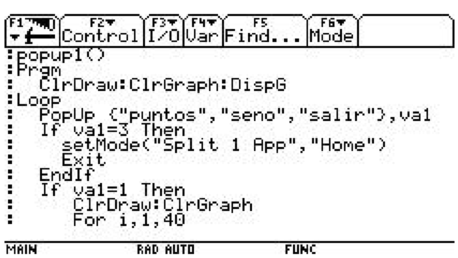
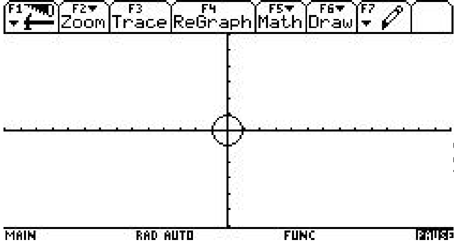


Figura 42

Al presionar la tecla ENTER en la primera opción, se muestra la gráfica de la figura 43:

Figura 43



- Usar una ventana de diálogo, lo cual se ejemplifica en el programa de la figura 44:

Figura 44

Simulación en Cabri e integración de sistemas de representación

(3 sesiones)

Fabiola Rodríguez García

Instituto Pedagógico Nacional

Grupo Coordinador MEN

Incorporación Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Martín Eduardo Acosta Gempeler

Grupo Coordinador MEN

Incorporación Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Nivel . Intermedio

Objetivos.

- Analizar la simulación del movimiento de tres aviones que viajan paralelamente.
- Relacionar las diferentes representaciones obtenidas a partir de la toma automática de datos

- Analizar dichas representaciones a la luz del fenómeno simulado.

- Describir y caracterizar el movimiento de los aviones, a partir del análisis de las representaciones.

Descripción general del taller. Se presenta un archivo construido en Cabri, el cual debe ser grabado en las calculadoras. En dicho archivo está construida la simulación del movimiento de tres aviones que viajan paralelamente en línea recta y en el mismo sentido. [1]

Se pretende que a través de la observación, la exploración y la sistematización de los resultados, se modelen las situaciones de cambio presentes en la simulación y exprese el modelo en palabras y simbólicamente, representándolo en forma tabular, gráfica y mediante expresiones algebraicas. Finalmente se hará la construcción de la simulación.

Conocimientos previos . Se recomienda que los participantes tengan una idea general de lo que pueden trabajar en las diferentes ventanas de la calculadora (HOME, geometría, editor de funciones, editor de datos, etc.) y que hayan hecho una primera exploración del registro de datos en una tabla, del manejo de las mismas y de la construcción de gráficas a partir de un conjunto de datos. Esto centrará el desarrollo de la actividad en la habilidad cognitiva que se pretende lograr y no en la habilidad de manejo técnico. Sin embargo, no hay inconveniente en que pueda aprovecharse la actividad para desarrollar la fluidez tecnológica. De igual manera es conveniente que los participantes sepan grabar archivos de una calculadora a otra.

Programación.

Primer día : copia del archivo, observación y descripción de la simulación (inicialmente sin tomar medidas y posteriormente considerando las medidas)

***Segundo día* : registro automático en una tabla de las distancias recorridas por cada avión en los diferentes instantes, análisis de los cocientes entre las diferencias de distancia y de tiempo, caracterización de los movimientos con base en los resultados anteriores**

***Tercer Día* : construcción de las gráficas de distancia contra tiempo, aproximaciones de la expresión algebraica, cálculo de regresión, construcción de la simulación**

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Observación y descripción de la simulación.

El archivo que observa corresponde a la simulación del movimiento de tres aviones que se mueven paralelamente y en el mismo sentido. Los tres puntos A, B y C representan a cada uno de los aviones y el número que aparece representa el tiempo que transcurre. Para dar comienzo a la simulación, aplique Animación al número. (En ningún caso borre el número, pues la simulación dejará de funcionar).

Primera parte: sin toma de medidas

a. Observe cómo varía el movimiento de los aviones a medida que transcurre el tiempo y describa lo sucedido.

b. ¿Hay algún momento en el que dos de los aviones se encuentren sobre la misma vertical? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son esos aviones y, aproximadamente, al cabo de cuánto tiempo se encuentran?

c. ¿Habrá algún momento en el que los tres aviones se encuentren sobre la misma vertical? Si la respuesta es afirmativa, ¿al cabo de cuánto tiempo? De lo contrario, explique.

d.¿Qué avión llegará primero al destino? ¿Porqué?

e. Observe el movimiento de cada uno de los aviones por separado y descríbalo en la siguiente tabla.

Avión 1
Avión 2
Avión 3

f. ¿Cómo varía la distancia del Avión A a medida que transcurre el tiempo?

g. ¿Qué tipo de gráfica cartesiana se producirá al relacionar el tiempo y la distancia del avión A?

h. Responda las preguntas f y g para los aviones B y C.

i. Describa el movimiento de los aviones comparándolos dos a dos.

Segunda parte: tomando medidas

Nota para el profesor : *esta parte de la exploración de la simulación tomando medidas, puede desarrollarse con distintos matices dependiendo del grado en el que se desarrolle y del objetivo que se pretenda lograr. Por ejemplo, puede aprovecharse para analizar la información obtenida en la tabla en términos de la variación de las distancias a medida que varía el tiempo, para introducir el significado de pendiente de una recta como cociente entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, o para reforzar el concepto de velocidad media.*

a. Mida y registre en la siguiente tabla las distancias recorridas por cada avión en cada uno de los siguientes tiempos, a partir el momento inicial:

Tiempo (horas)	Distancia Avión A	Distancia Avión B	Distancia Avión C
1			
1.5			
2			
2.5			
3			
3.5			
4			

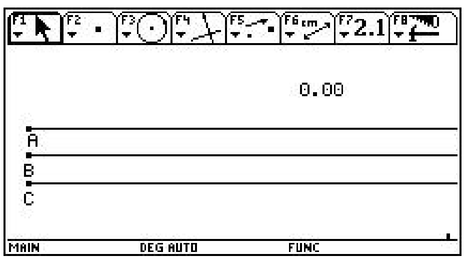
b. Calcule los cocientes $\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$ para cada uno de los aviones, en los siguientes intervalos de tiempo:

Intervalo de tiempo	Cociente $\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	Cociente $\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	Cociente $\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$
	Avión 1	Avión 2	Avión 3
(1, 2.5)			
(2, 3.5)			
(1, 4)			
(3.5, 4)			

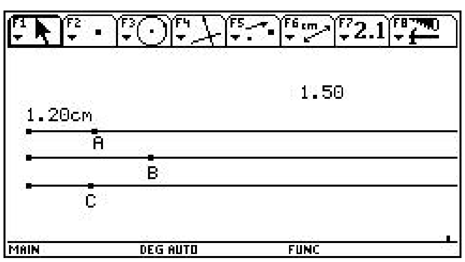
De acuerdo con estos resultados, ¿qué concluye con respecto al movimiento de cada uno de los aviones?

Segunda sesión

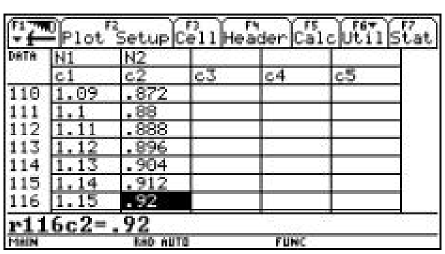
Registro automático en la tabla de la distancia recorrida por el avión A en los diferentes instantes de tiempo.



Mida la distancia recorrida por el avión A, en cualquier instante de tiempo.

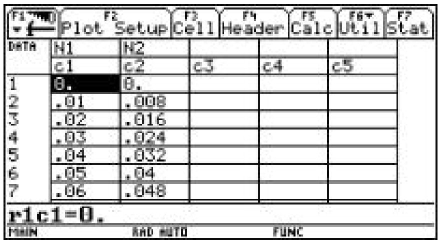


Re-edite nuevamente el valor del tiempo y a partir del instante 0.0, registre en una tabla los datos obtenidos de tiempo y distancia para el avión A [2] .



DATA	N1	N2			
	c1	c2	c3	c4	c5
110	1.09	.872			
111	1.1	.88			
112	1.11	.888			
113	1.12	.896			
114	1.13	.904			
115	1.14	.912			
116	1.15	.92			

r116c2=.92



F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat

DATA	N1	N2			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.	0.			
2	.01	.008			
3	.02	.016			
4	.03	.024			
5	.04	.032			
6	.05	.04			
7	.06	.048			

r1c1=0.

MAIN RAD AUTO FUNC

Teniendo en cuenta los valores registrados en la tabla, responda:

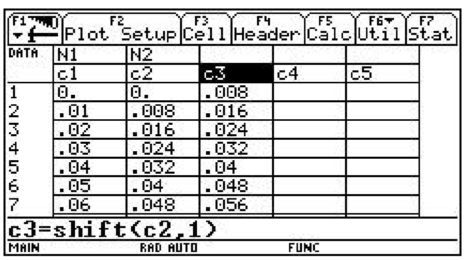
a)¿Cómo varía la distancia del avión A, a medida que transcurre el tiempo?

b)¿En qué momento aproximadamente el avión A ha recorrido una distancia de 0.5 Km? (su correspondiente en la pantalla, de acuerdo con la escala, es de 1cm).

Análisis de los cocientes entre las diferencias de distancia y tiempo

Realice algunas diferencias de los valores registrados para el tiempo, entre un dato y el anterior. ¿Qué valor obtuvo? Tenga presente este resultado ya que nos referiremos a él como Δt .

Calcule las diferencia de distancias entre un dato y el anterior y almacene estos resultados en otra columna, (por ejemplo en C3) [3]



F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat

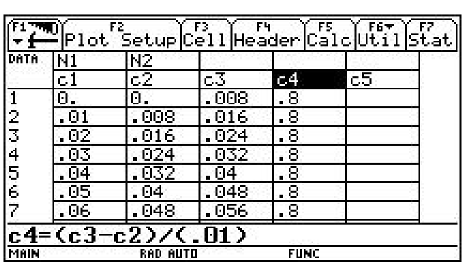
DATA	N1	N2			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.	0.	.008		
2	.01	.008	.016		
3	.02	.016	.024		
4	.03	.024	.032		
5	.04	.032	.04		
6	.05	.04	.048		
7	.06	.048	.056		

c3=shift(c2,1)

MAIN RAD AUTO FUNC

Calcule en otra columna (por ejemplo en C4), el cociente $\dfrac{d_2 - d_1}{\Delta t}$

Nota para el profesor: *este cociente calcula la velocidad casi instantánea del avión A ya que el intervalo de tiempo considerado es relativamente pequeño (fue por esta razón que se editó el valor del tiempo con dos cifras decimales). De esta manera puede comenzar a fundamentarse la idea de velocidad instantánea y velocidad media de un móvil. Para digitar la expresión no olvide tener presente el uso adecuado de los paréntesis.*



F1	F2 Plot Setup	F3 Cell	F4 Header	F5 Calc	F6 Util	F7 Stat

DATA	N1	N2			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.	0.	.008	.8	
2	.01	.008	.016	.8	
3	.02	.016	.024	.8	
4	.03	.024	.032	.8	
5	.04	.032	.04	.8	
6	.05	.04	.048	.8	
7	.06	.048	.056	.8	

c4=(c3-c2)/(.01)

MAIN RAD AUTO FUNC

¿Qué valores se obtienen al realizar este cálculo?

¿Que representa este resultado con relación al movimiento del avión A?

¿Qué concluye acerca del movimiento del avión A?

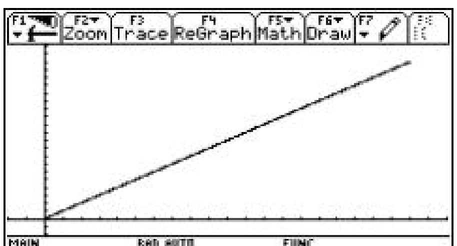
Describa el movimiento del avión A

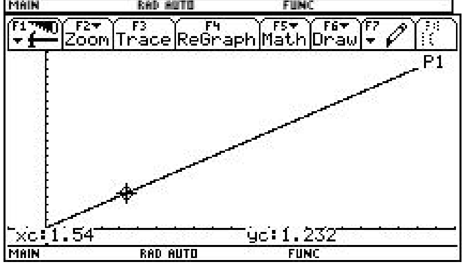
Tercera sesión

Construcción de la gráfica de distancia contra tiempo del avión A

Nota para el profesor: *Una variación a la estrategia aquí presentada consiste en hacer primero la construcción de la gráfica directamente en Cabri y a partir de allí orientar la reflexión. Es decir, se puede aprovechar para hacer un análisis eminentemente geométrico. Si se quiere hacer un análisis numérico se sugiere la siguiente actividad.*

Construya la gráfica de distancia contra tiempo del avión A. [4]





¿Qué forma aproximada tendría la gráfica que une los puntos?

¿Cómo varía la distancia a medida que transcurre el tiempo?

¿Cuál es la distancia recorrida al cabo de dos horas? ¿Existe otro valor? Explique.

¿En qué momento ha recorrido 0.5 Km? (su correspondiente en la pantalla, de acuerdo con la escala, es de 3cm).

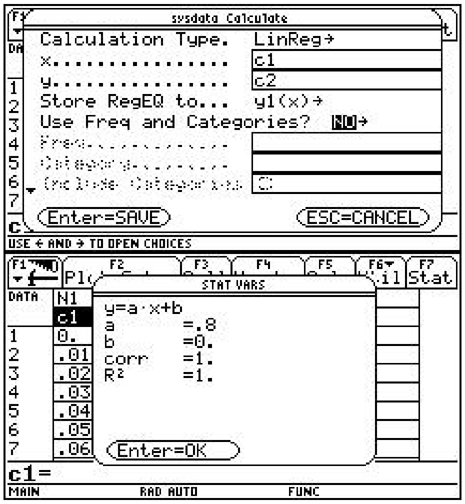
Aproximaciones de la expresión algebraica que mejor relaciona el tiempo y la distancia del avión A

Escriba una expresión general que relacione adecuadamente al tiempo transcurrido y la distancia recorrida por el avión A. Tenga en cuenta sus observaciones con respecto a la variación y los resultados numéricos obtenidos en la tabla.

Introduzca esta expresión en el editor de funciones y grafíquela. Compare las gráficas y escoja la expresión que mejor modela los datos.

Cálculo de regresión

a) Realice el cálculo de regresión [5] y almacene el resultado en la variable y1.



Escriba la función que mejor modela los datos y de acuerdo con esta expresión, responda:

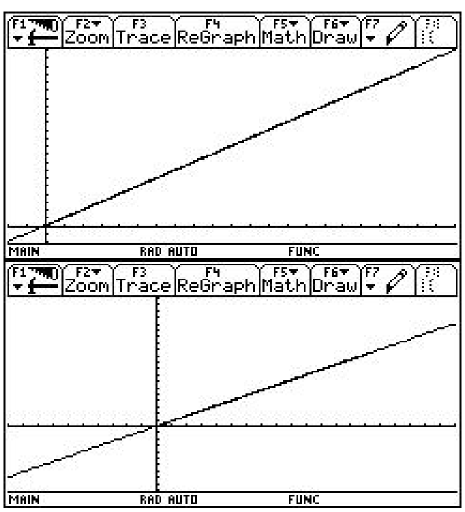
¿En qué coincide y en qué difiere con la expresión que usted encontró?

¿ Qué representa cada coeficiente con relación a los resultados obtenidos en el análisis de la tabla?

¿ Qué representa cada coeficiente con relación al movimiento del avión A?

Describa la variación de la distancia con respecto al tiempo teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

b) Visualice la función obtenida y los datos tomados de la simulación y seleccione una ventana apropiada para observar mejor la función.



¿Qué tipo de gráfica se obtiene? Describa el comportamiento de dicha gráfica.

C onstrucción de la simulación

La construcción propuesta utiliza una característica del programa de geometría dinámica Cabri Géomètre, el cual ofrece la posibilidad de animar un número. De esta manera, si se escribe cualquier número utilizando Edición Numérica (Numerical Edit) y luego se le anima, éste comenzará a aumentar o a disminuir su valor. Teniendo en cuenta que además podemos efectuar cálculos utilizando este número y transferir esas medidas a objetos geométricos de la pantalla, podemos hacer la simulación del movimiento de tres puntos que representan el movimiento de los aviones.

Considere que los aviones A y B viajan a velocidad constante y el avión C con aceleración constante: el avión A viaja 400Km/h, el avión B a 750 Km/h y el avión C viaja con aceleración constante de 0.5Km/h^2.

La simulación consiste en definir un número t que representará el tiempo en horas, y con base en él se calcularán las distancias recorridas por cada avión. Estas distancias son: para el avión A, t*400; para el avión B, t*750 y para el avión C, 0.5*t^2. Sin embargo, como se tiene una restricción de tamaño en la pantalla, y teniendo en cuenta que las medidas se hacen en centímetros, se debe hacer un ajuste de escalas para representar las distancias. Considere por ejemplo la equivalencia de 2 cm con 1000 km. Esto quiere decir que 1km equivale a 0,002cm. De esta manera las ecuaciones para calcular las distancias de cada avión, se convierten respectivamente en: t*0.8, t*1.5 y 0.5*t^2.

Pasos en la construcción :

1. Con la herramienta Edición Numérica , escriba el número 0,0 (la cifra decimal determina la rapidez de variación del número).

2. Con la herramienta Calcular , obtenga el número que representa la distancia recorrida por el avión A, es decir t*0.8.

3. Use el mismo procedimiento para las distancias recorridas por el avión B (t*1.5) y por el avión C (0.5*t^2).

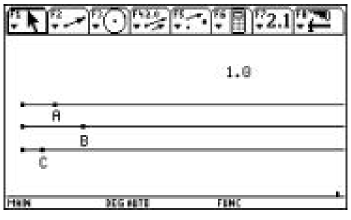
4. Construya la ruta de los aviones: dibuje tres semirrectas paralelas (de manera que ocupen la pantalla a lo ancho).

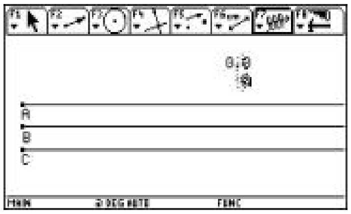
5. Transfiera la distancia calculada de cada uno de los aviones en la semirrecta respectiva.

6. Marque cada punto que representa los aviones, con las etiquetas correspondientes A, B y C.

7. Oculte los resultados obtenidos en los puntos 2 y 3.

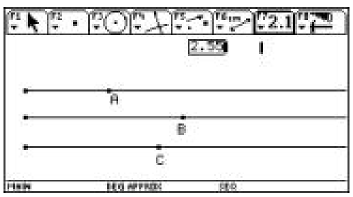
8. Para que la simulación funcione, anime el valor de t.

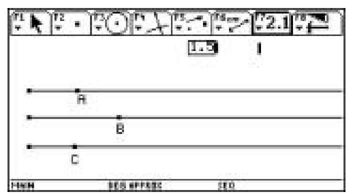




Nota: Es importante dominar el procedimiento de animación de un número; de lo contrario puede dañarse la construcción y detener el desarrollo de la actividad. Por lo tanto debe tenerse en cuenta lo siguiente:

a. El número puede editarse de dos maneras: haciendo doble clic sobre él, o seleccionando Edición Numérica y luego clic sobre el número. Al editar el número usted puede cambiarlo, añadirle o eliminarle cifras decimales.





b. El número animado variará a una velocidad constante en las unidades, decenas, décimas, centésimas, etc. dependiendo de dónde esté el cursor de edición. Si el número está variando en unidades y desea que varíe en centésimas, edítelo, luego oprima ¨ y simultáneamente mueva el cursor hasta las centésimas.

c. Para animar el número seleccione Animación (menú F7) y luego haga clic sobre el número. Luego desplace el cursor hacia abajo si quiere que el número aumente, o hacia arriba si quiere que el número disminuya.

d. Para detener la animación oprima ENTER. Un segundo ENTER reanuda la animación. Si desea salir de la animación oprima ESC.

e. Para recomenzar la animación edite el número colocándolo en 0.00 y luego aplíquele animación.

Bibliografía

Vitor Duarte Teodoro, *Modelacao computacional em ciências e matemática*, Revista Informática Educativa, Uniandes-Lidie, Colombia, Vol. 10, N°2, 1997, pp. 171-182

Lineamientos Curriculares de Matemáticas, *Ministerio de Educación Nacional*, Bogotá, 1998

Teresa Rojano C. y Luis Moreno Armella , *Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo*, Revista Avance y Perspectiva, México, Vol. 18, 1999, 325-333.

Oscar Fernando Soto Agreda

Libardo Manuel Jácome

Universidad de Nariño

Nivel . Medio y universitario

Objetivos.

- Estudiar algunos resultados en torno de las ecuaciones cuadráticas conseguidos por los griegos y sintetizados en Los Elementos de Euclides.

- Vincular el conocimiento geométrico griego dentro de un sistema de geometría dinámica como Cabri.

- Establecer relaciones entre diferentes representaciones de una función cuadrática a partir del modelo presentado por el matemático medieval Tabit ben Qurra el Harrani.

- Solucionar automáticamente ecuaciones cuadráticas utilizando herramientas de macroconstrucción, animación y modificación inmediata que posee la calculadora TI 92.

Descripción general del taller. El taller se ha diseñado de manera que explote todas las formas de representación que ofrece la calculadora graficadora TI 92 en el estudio de la función cuadrática y sus raíces. Se consolida su estudio desde el conocimiento que al respecto poseían los griegos y que se evidencia en Los Elementos de Euclides, pasando por la forma convencional de representar este tipo de funciones elaborada por Tabit Ben Qurra el Harrani y conectando con el legado de Descartes en torno de la Geometría Analítica. La forma analítica de representar el problema permite calcular de manera inmediata las raíces de una función cuadrática.

Conocimientos previos . Conocimientos básicos de Geometría y resolución de Ecuaciones cuadráticas. Manejo básico de la TI 92 , elaboración de macro construcciones en Cabri.

Programación.

Primer día : contextualización histórica del problema. Enfoque geométrico euclideano.

Segundo día: solución de un caso particular. Enfoque al estilo del matemático Tabit Ben Qurra el Harrani. Construcción de una función cuadrática con coeficientes dinámicos.

Tercer día: enfoque analítico, raíces de una función cuadrática. Cálculo automático de raíces de la ecuación cuadrática.

Ítem	Contenido	Duración
1. Valor instantáneo de una función cuadrática.	Interpretación geométrica utilizando Cabri Géomètre al estilo del matemático Tabit Ben Qurra el Harrani, matemático hindú del siglo IX de nuestra era. Estudio de un caso. Elaboración de la construcción y de una macro.	Media hora

2. Generación de tablas y representación gráfica	Captura de los datos generados en algún caso estudiado en el ítem precedente, regresión cuadrática, determinación de la función. Representación cartesiana de la parábola.	Una hora
3. Construcción de una función cuadrática con coeficientes dinámicos.	Elaboración de una construcción según el diseño de Tabit Ben Qurra, susceptible de modificación inmediata y automática de sus coeficientes.	Media hora
4. Raíces de la función cuadrática	Cálculo aproximado de las raíces aprovechando la potencialidad gráfica de la TI-92 Plus. Cálculo simbólico de las raíces, recurriendo a la orden Solve de Derive	Una hora
5. Estudio del caso $ax-x^2= b^2$ elaborado por Euclídes.	Construcción geométrica de la construcción requerida para resolver una ecuación de este tipo. Estudio de las condiciones para la existencia de las soluciones.	Una hora
6. Cálculo Automático de Raíces de la ecuación Cuadrática $Ax^2+Bx+C = 0$	Búsqueda de un discriminante gráfico. La potencia del teorema de Pitágoras. El pensamiento de Descartes. Estudio de todos los casos que se presentan en concordancia con la naturaleza de las raíces. El caso de las raíces complejas.	Dos horas

Representación del conocimiento matemático a través de soportes informáticos (3 sesiones)

Jim Kaput

Universidad de Massachusetts

Nivel. Inicial e intermedio.

Objetivo. Ilustrar la importancia de las representaciones dinámicas en el estudio de la matemática del cambio y la variación.

Descripción general del taller. A partir de ejemplos se pondrá en evidencia la forma de aprovechar las representaciones dinámicas que brinda la tecnología, para estudiar las grandes ideas que subyacen al cálculo.

Conocimientos previos. Conocimientos de matemática elemental.

Diseños didácticos para el estudio de la variación (3 sesiones)

Colette Laborde

Universidad Joseph Fourier

Nivel. Inicial e intermedio.

Objetivo. Explorar algunas consecuencias de la posibilidad de variación en geometría dinámica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Descripción general del taller. Se realizarán ejercicios prácticos para ilustrar el uso del *modo de arrastre* del Cabri en el estudio de la variación en matemáticas, haciendo explícita una dimensión no explotada de la geometría.

Conocimientos previos. Conocimientos de geometría elemental.

---

[1] La construcción del archivo con la simulación se encuentra al final del taller

[2] Para realizar este registro se procede de la siguiente manera:

1. Asegúrese de que no haya datos en el archivo SYSDATA .
2. Una vez esté ubicado en el archivo de Cabri Gémètre sobre el cual se está trabajando, s eleccione F6 + 7 Collect data (agrupar datos), y luego Define Entry (definir entrada).
3. Seleccione los datos que se van a relacionar. Para este caso, seleccione **en su orden** el tiempo y la distancia del avión A.
4. Almacene los datos: seleccione F6 + 7 Collect data (agrupar datos) Store Data (almacenar datos).
5. Anime el tiempo. Para esto seleccione F7 + 3 Animation (animación) y anime el valor que define el tiempo. Cuando quiera detener la animación oprima la tecla ESC .
6. Visualice la tabla arrojada por estos valores. Para esto oprima la tecla de APLICACIONES y seleccione 6: Data/Matrix Editor + Open + Sysdata .

[3] Suponiendo que estos datos de distancia se encuentran en la columna 2, se procede así:

1. Para copiar en otra columna (por ejemplo en C3) y desplazar hacia arriba una celda, los datos obtenidos en C2 (correspondientes a la distancia del avión A), se oprime F4 con el fin de definir la cabecera de la columna donde se va a copiar y se **digita** allí C3 = **shift** (C2,1). (Si la calculadora está en español, se debe digitar **desplaz** (C2,1))

2. E n otra columna (por ejemplo C4), se calcula C3-C2. Para esto se ubica en la cabecera de la columna y se digita C3-C2.

[4] Para construir la gráfica se sigue este procedimiento:

1. Ubicados en el editor de datos, seleccionar F2 Plot Setup
2. Seleccionar F1 para definir las características de la gráfica
3. Seleccionar el tipo de gráfica (Scatter) y el tipo de marca para los puntos (Box).
4. Asignar a la variable *x* los valores correspondientes a la columna 1 (c1)
5. Asignar a la variable *y* los valores correspondientes a la columna 2 (c2)
6. Oprimir ENTER dos veces

7. Graficar los puntos (¨ GRAPH). Para visualizarlos mejor seleccionar ZoomData en F2 + 9 .

[5] Para hacer el cálculo de regresión:

Ubicados en el editor de datos, seleccionar F5 Calc y escoger el tipo de regresión que se considera mejor ajusta a los datos. Guardar esta función en $y1$.

Diseño y desarrollo de situaciones problema con apoyo de calculadoras algebraicas (2 sesiones)

Gilberto Obando Zapata

Universidad de Antioquia

John Jairo Múnera Córdoba

Liceo Comercial Pedro Luis Álvarez Correa

Gloria Galvis Virgues

Normal Superior María Auxiliadora

Nivel. Intermedio (la participación en el taller no requiere de mayores conocimientos sobre el uso de la calculadora, aunque tampoco pretende dar formación en este sentido)

Objetivos.

- Generar reflexiones alrededor de diferentes conceptos matemáticos a través de la mediación

de las calculadoras gráficas.

- Reflexionar sobre el diseño y desarrollo de situaciones problema mediadas por calculadoras, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Descripción general del taller. El taller tiene el propósito fundamental de desarrollar algunas situaciones problemáticas que permiten reconocer a las herramientas computacionales como instrumentos que ofrecen diferentes formas de representación. Con estos instrumentos es posible desarrollar altos niveles expresivos y, en términos Luis Moreno, detonar la actividad cognitiva del estudiante. Además del trabajo con las situaciones, se propiciarán discusiones conducentes a la valoración tanto del papel mediador de estos instrumentos tecnológicos, como del papel de las situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas, para promover el diseño de nuevas situaciones.

Conocimientos previos . Es necesario que los participantes tengan conocimientos básicos de geometría, álgebra y cálculo diferencial.

Programación.

Primer día: una actividad de geometría para ampliar el papel de la formulación y validación de hipótesis, desde el contexto de situaciones problema.

Segundo Día: discusión de situaciones problema relacionadas con elementos del álgebra escolar y con elementos introductorios a la noción de derivada.

Desarrollo del taller.

Nota: *Las construcciones de los archivos mencionados en las diferentes sesiones de trabajo, se encuentran desarrolladas al final del taller.*

Trabajando con polígonos

Primera situación: un problema sobre áreas y perímetros

Estudiaremos en esta primera situación las posibles relaciones que existen entre el perímetro y el área de polígonos.

1. Discuta las siguientes afirmaciones cuando se hace referencia a rectángulos:

- a mayor perímetro mayor área.
- a mayor perímetro menor área.
- si dos rectángulos tiene igual área entonces tienen igual perímetro.

2. Dibuje dos o más rectángulos cuyas áreas sean diferentes y con perímetros iguales. Formule una hipótesis.
3. Dibuje dos o más cuadriláteros cuyos perímetros sean diferentes pero con áreas iguales. Formule una conjetura.
4. Con respecto a los heptágonos, ¿será cierto que siempre el de mayor perímetro es el que tiene mayor área? Formule argumentos para probar su conjetura.

Utilice el archivo **taller_2** para validar las hipótesis formuladas en el punto 2. (Figura 1)

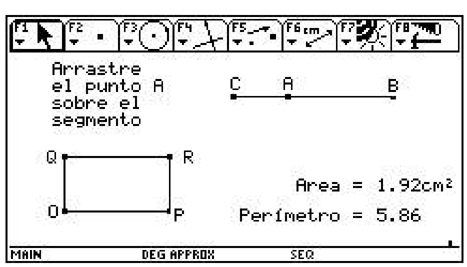


Figura 1

b- Abra los archivos **taller_1** y **taller_4** y compruebe sus conjeturas formuladas en el punto 3. (Figura 2)

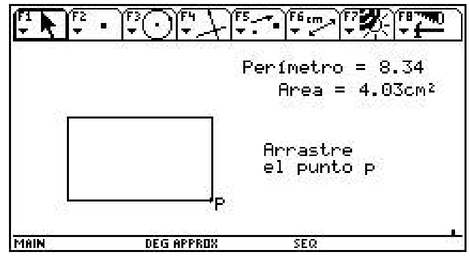


Figura 2

c- El archivo **taller_3** le ayudará a evidenciar los argumentos formulados en el punto 4. (Figura 3)

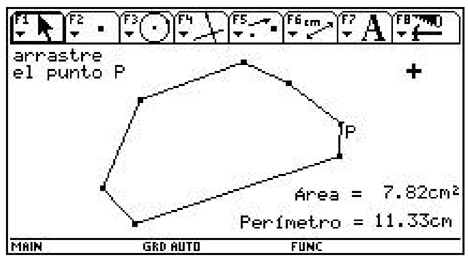


Figura 3

Segunda situación: un problema de invarianza de áreas

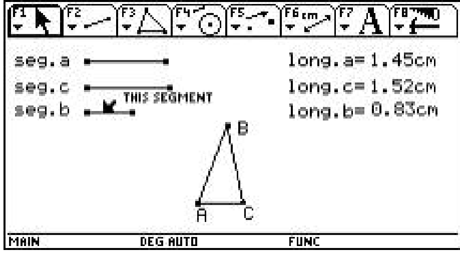
1. Abra el archivo **trian1**.

¿Será posible mover el punto P de tal manera que el área se conserve? Explique.

2. Abra ahora el archivo **trian2.**
   a. Mueva el punto P. ¿ Qué varía y qué se conserva?
   b. ¿Qué tipo de trayectoria describe el punto P?
   c. ¿Qué relación guarda este hecho con los elementos que se conservan en el triángulo?
3. Abra el archivo **trian3.**
   a. ¿En cuál de las dos figuras que aparecen allí, al mover el punto P, se conserva el área? ¿Por qué?
   b. Generalice este hecho.

Tercera situación: construyendo triángulos.

1. ¿Con cualquier trío de segmentos se puede construir un triángulo?
2. Abra el archivo **trian4**. Arrastre uno de los extremos del segmento a, bien sea agrandando su longitud, o reduciéndola, y observe qué pasa con el triángulo.(Figura 4)



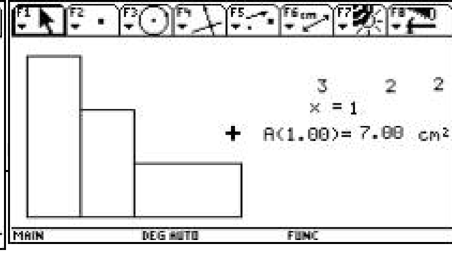


Figura 4

¿Qué relaciones deben existir entre las longitudes de los segmentos a, b y c para que se forme un triángulo?

Un poco de álgebra

Cuarta situación: modelación de polinomios

1. Abra el archivo **algebra**. Al abrirlo encontrará una pantalla similar a la de la figura 5.

Figura 5

   a. Analice qué relación guarda la representación geométrica con los datos d1, d2, d3, x y A(1). Para ello considere por ejemplo x = 0.5 ó x = 1.5. Explique las posibles relaciones encontradas. ¿Qué se conserva y qué varía?

b. Cambie ahora d1 = 2, d2 = 1 y d3 = 3 y cambie a x. ¿Se mantienen las relaciones enunciadas?

   c. Con base en lo anterior, ¿qué significa cada dato en la representación geométrica?

2. Vuelva de nuevo a los datos originales.

   a. Escriba una expresión matemática para calcular el área de la figura.
   b. Si x es igual a 5, ¿cuál es el área?
   c. Si x es igual a 5, ¿cuál es el perímetro de la figura?

3. Edite el valor de 0 para *x* y con la función de toma automática de datos realice una tabla donde en la primera columna se tomen los valores de *x* y en la segunda los valores de *A(x)*, al animar *x*. Estos datos aparecen en el programa editor de datos en un archivo que, por defecto, la calculadora archiva bajo el nombre de sysdata.

   a. ¿A qué conjunto corresponden los datos de la primera y segunda columnas?
   b. ¿Cómo obtener los datos de la segunda columna a partir de la primera?
   c. ¿Qué significa una pareja de datos a la luz de la representación geométrica?
   d. Grafique *A(x)* vs. *x*. Encuentre la ecuación de la gráfica que mejor se adecúe a los puntos obtenidos en la representación de C1 vs. C2. Utilícela para hallar el valor de *A(x)* cuando *x* = 1756.

4. Mida el perímetro de la figura y haga una toma automática de datos, para *x* y para el perímetro al animar *x*. Encuentre la expresión que mejor describe su comportamiento.

Quinta situación: hacia el concepto de derivada

1. Con la opción Define, defina la función $f(x) = 3x^2 + 5$ y la función que calcula la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Esta función es:

$$m(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Defina ahora la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos de abscisas a y b. Recuerde que esta ecuación es:

$$e(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

3. Encuentre la pendiente y la ecuación de las rectas secantes a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 5$, que pasan por los puntos *(3, f(3))* y *(b, f(b))*. Para esto asigne el valor 3 a "a" y a "b" asígnele valores cercanos a 3.

Calcule *e(a,b) y m(a,b)* y complete la siguiente tabla con los resultados obtenidos:

a	B	M(a, b)	e(a, b)
3	3.5		
3	3.2		
3	3.1		
3	3.01		
3	3.0001		
3	3		
3	2.999		
3	2.99		
3	2.8		
3	2.7		

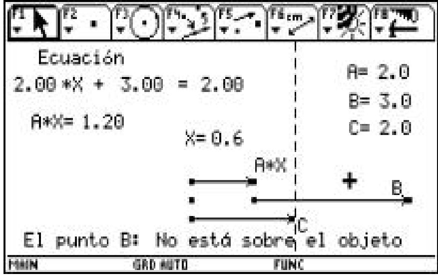
a. ¿Qué significan los datos de la tabla?
b. ¿Qué significado tiene el valor m(3,3)?
c. ¿Por qué para el punto (3, f(3)) el valor de m(a, b) es indefinido?

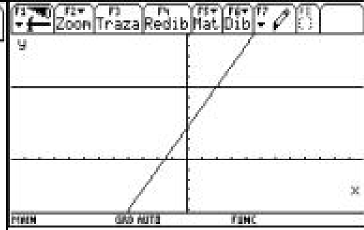
4. Grafique f(x) y cada una de las rectas que tienen por ecuación e(a, b). Con base en esta gráfica responda:
   a. ¿Qué observa con estas rectas a medida que el valor de b se acerca al valor de a?
   b. Calcule el límite de m(a, b) cuando b tiende a 3. ¿Qué significado tiene este valor?

5. Con ayuda de la calculadora complete la siguiente tabla:

A	Lim m(a, b) b ® a
1.0	
1.5	
2.0	
3.5	
4.5	
6.5	
8.0	
10	

a. Utilice el editor de datos para tabular estos resultados y realice la gráfica cartesiana. ¿Que significan cada uno de estos puntos en términos de la función f(x)?





b. Realice un análisis de regresión. ¿Qué relación guarda la función resultante del análisis con la función f(x)?

Sexta situación: solución de ecuaciones lineales

1. **Solución de ecuaciones lineales de la forma Ax + B = C.** Solucione la ecuación 2x + 3 = 2 usando como mínimo dos métodos diferentes.

2. **Solución de la ecuación usando una simulación.** Abra el archivo **ecu_li_1** y edite los valores correspondientes a A, B, C de tal forma que se obtenga la ecuación dada. Edite el valor de x hasta que aparezca en el mensaje de la parte inferior del archivo "el punto B está sobre el objeto". (Figura 6)

Compare la solución hallada bajo esta modelación con la obtenida en el primer punto. Cambie los valores de A, B y C para explorar otras ecuaciones. Figura 6

Interprete cómo funciona el modelo a partir de la exploración realizada.

3. **Solución de la ecuación como función.** Observe en la figura 7 e identifique: ¿Qué funciones se graficaron? ¿Sirve este sistema para encontrar la solución de la ecuación dada anteriormente? Si es así ¿cómo?

¿Habrá otras posibilidades de encontrar la solución, usando el editor de funciones?

Figura 7

4. **Solución de la ecuación como variación numérica.** Construya las tablas de valores de las funciones de las gráficas anteriores y encuentre en ellas la solución de la ecuación.

Construcción de los archivos:

Archivos para la primera situación: un problema sobre áreas y perímetros.

El archivo taller_2:

1. **Dibuje un segmento y llame B y C a sus extremos.**
2. Utilizando la opción punto sobre objeto, coloque un punto sobre este segmento. Llame A a este punto.
3. Dibuje dos rayos con origen común y perpendiculares entre si. (Puede dibujar dos líneas perpendiculares entre si, y a partir del punto de intersección entre ellas dibujar los dos rayos. Luego oculte las dos líneas). Al origen común de estos dos rayos llámelo O**.**
4. Con la opción compás, dibuje una circunferencia de radio igual al segmento AB, y con centro en O. Halle la intersección de esta circunferencia con uno de los rayos y llámelo P. Trace una recta perpendicular a este rayo y que pase por el punto P.
5. Con la opción compás, dibuje otra circunferencia de radio igual al segmento AC, y con centro en O. Halle la intersección de esta circunferencia con el otro rayo y llámelo Q. Trace una recta perpendicular a este rayo y que pase por el punto Q.
6. Halle el punto de intersección entre las rectas construidas en los puntos 4 y 5 y llámelo R.
7. Oculte los rayos, las rectas y la circunferencia. Dibuje el rectángulo cuyos vértices son: OPRQ. Mida el área y el perímetro de dicho rectángulo.

El archivo taller_1:

1. Dibuje dos líneas paralelas entre si. Llámelas l1 y l2 respectivamente.
2. Dibuje un segmento AB **.**
3. Con la opción punto sobre objeto, coloque un punto sobre l1, y llámelo P. Con la opción compás dibuje una circunferencia cuyo centro sea P**,** y con radio igual a la longitud del segmento AB **.** Halle la intersección de esta circunferencia con l1. A uno de los puntos de intersección llámelo Q**.**
4. Realice un procedimiento similar pero sobre la línea l2**.** Llame P'y Q' a los puntos que obtiene sobre esta recta.
5. Oculte la línea l2, al igual que las circunferencias y los puntos de intersección que no han sido utilizados. Haga que la línea l1 se vea punteada. Luego dibuje el polígono PQ Q **'** P'**.**
6. Mida el área y el perímetro de este polígono.

El archivo taller_4:

1. Dibuje dos rayos perpendiculares entre sí y con origen común O. Utilizando la opción punto sobre objeto, dibuje sobre uno de los rayos un punto y llámelo P. Trace el segmento cuyos extremos sean los puntos O y P**.** Este segmento es uno de los lados de un rectángulo que se va construir. Mida la longitud de este segmento.
2. Utilizando edición numérica (la cual se encuentra en el menú F6, opción 6), escriba un número en la pantalla. Este número representa el área fija del rectángulo que se va a construir.
3. Utilizando la opción 6: calcular que se encuentra en el menú F6, divida el número que representa el área, entre la longitud del segmento. Este valor representa la longitud del otro lado del rectángulo que se va a construir. Transfiera este valor sobre el otro rayo (para ello utilice la opción transferencia de medidas (menú F4, opción 9). Llame Q al punto que se obtiene sobre este rayo.
4. Trace una perpendicular al rayo que contiene a P por este punto. Igualmente trace una perpendicular al rayo que contiene a Q por este punto. Llame R la intersección de estas dos rectas. Oculte las rectas y rayos.
5. Finalmente dibuje el rectángulo OPRQ**.**

El archivo taller_3:

Este archivo no requiere de instrucciones especiales, pues se trata de construir, con la

herramienta polígono, un polígono de 7 y 8 lados.

A rchivos para la segunda situación: invarianza de áreas

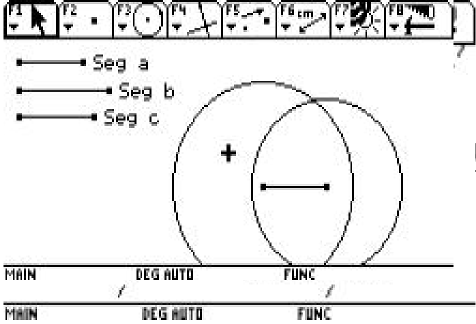
El archivo trian1:

1. Construya un triángulo de vértices A, B y P.

2. Mida el área del triángulo.

El archivo trian2:

1. Construya un segmento de extremos A y B.



2. Trace una línea paralela al segmento AB.

3. Ubique un punto P sobre la paralela.

4. Construya el triángulo de vértices A, B y P. Oculte la paralela.

5. Mida el área del triángulo.

6. Finalmente puede agregar un texto como se muestra en la figura 8.

Figura 8

El archivo trian3:

En este archivo ilustrado en la figura 9, aparecen dos triángulos construidos de manera similar al que se construyó en trian2, solo que en uno de ellos, la línea en la que se ubica el punto P no es paralela al segmento inicialmente construido. Además, se deben mostrar las alturas correspondientes al punto P de cada triángulo. Con la opción de medida, se pueden medir las alturas y las bases respectivas en cada triángulo. Finalmente con la opción comentario puede lograr una pantalla como la que se muestra a la derecha.

Figura 9

A rchivo para la tercera situación: construyendo triángulos

El archivo trian4:

1. Construya tres segmentos, a, b y c respectivamente. Al momento de dibujar cada segmento puede usar un nombre para cada uno (ver figura 10).

2. Construya un rayo y con la opción compás, transfiera a este rayo la longitud del segmento a.

3. Halle el punto de intersección entre el rayo y la circunferencia. Trace el segmento cuyos extremos son el origen del rayo y el punto obtenido. Oculte el rayo y la circunferencia.

Figura 10

4. Construya una circunferencia de centro en uno de los extremos del segmento anterior y de radio el segmento b. Construya otra circunferencia con centro en el otro extremo del segmento y de radio el segmento c.

5. Halle el punto de intersección entre las dos circunferencias y ocúltelas.

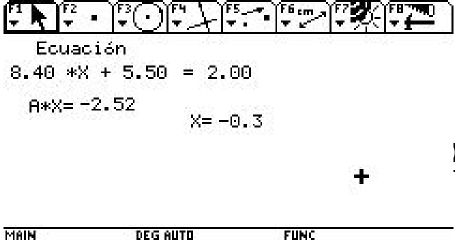
6. Trace los segmentos de extremos el punto de intersección de las circunferencias y los extremos del que ya existe respectivamente.

7. Mida la longitud de cada segmento y etiquételos con la opción comentario.

Archivo para la cuarta situación: modelación de Polinomios

El archivo álgebra

1. Escriba, utilizando edición numérica, los números 3, 2, 2 y 1. Estos son los datos d1, d2, d3 y x respectivamente.



2. Construya dos rayos perpendiculares entre sí.

3. Sobre el rayo horizontal transfiera el valor de x = 1, y sobre el vertical, el resultado de multiplicar a d1 por el valor de x. (Utilice la opción calcular. Una vez transfiera este resultado ocúltelo).

4. Por los puntos, resultado de las transferencias, trace líneas perpendiculares. Halle su intersección y construya, con la opción polígono, el rectángulo de vértices los cuatro puntos existentes.

5. Construya un rayo sobre la segunda perpendicular vertical y transfiera el valor de d2 = 2.

6. Obtenga el punto simétrico del punto origen del rayo horizontal respecto a su consecutivo sobre el mismo rayo.

7. Por los puntos obtenidos en 5 y 6 construya líneas perpendiculares, la intersección y construya el nuevo rectángulo (queda de 2x1).

8. Sobre la última perpendicular (vertical) construya un rayo. Edite el valor de uno y transfiéralo en el nuevo rayo. Oculte esta edición para que no se confunda con el valor de x.

9. Por el punto antes obtenido, trace una línea perpendicular al rayo, sobre ésta y con origen en el mismo punto, trace un rayo.

10. Transfiera sobre el rayo anterior el valor de d3 = 2. Construya por este punto una perpendicular al rayo. Halle la intersección de ésta y el rayo inicialmente construido. Trace el rectángulo cuyos vértices son los cuatro últimos puntos construidos (quedan de 1x2).

11. Oculte todo, excepto los datos d1, d2, d3, x y los tres rectángulos construidos.

12. Calcule el área de cada uno de los rectángulos, y con la opción calcular obtenga su suma. El valor resultante es el valor de *A(x)*. Oculte las áreas individuales.

Archivo para la sexta situación: solución de ecuaciones lineales

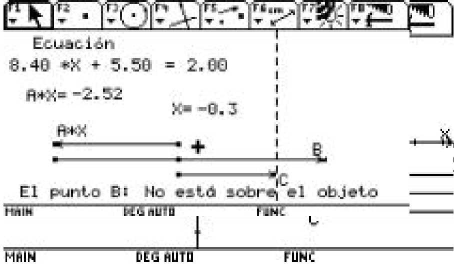
El archivo ecua_li _1:

1. Utilizando edición numérica, escriba tres números en la pantalla. Estos números representan los coeficientes A, B y C, de una ecuación lineal de la forma *A* **×** *X* **+** *B* **=** *C*. Utilizando la opción comentario puede escribir la siguientes tres expresiones: **ecuación**, *** X +** , **=** (cada una por separado). Luego organice estos elementos como se muestra en la figura 11.

Figura 11

2. Utilizando edición numérica escriba otro número. Este número representa los valores que puede tomar la variable X**.** Con la opción comentario puede escribir la expresión: X **=** . Organice estos dos elementos como se muestra en la figura 9.

3. Utilizando la opción calcular, multiplique el valor que representa el coeficiente A, con el valor que representa la variable X. Con la opción comentario escriba la expresión: A ***** X . Organice estos dos elementos como se muestra en la figura 9.



4. Con la opción formato elija mostrar el plano de coordenadas cartesianas. Dibuje tres líneas paralelas al eje X (en el resto de las instrucciones nos referiremos a estas líneas como l1, l2 y l3 respectivamente). Halle el punto de intersección de cada una de estas líneas con el eje Y.

5. Transfiera sobre l1, y a partir del punto de intersección con el eje Y, el valor que representa el producto A ***** X **.** Esta acción produce un nuevo punto sobre dicha recta. Etiquete el punto obtenido con la expresión: A ***** X **.**

6. Con un procedimiento similar, transfiera sobre l3, el valor que representa el coeficiente C de la ecuación. Al nuevo punto obtenido en dicha recta etiquételo con la letra C**.**

7. Trace una línea perpendicular a l1, y que pase por el punto A***** X (Llamaremos l4 a esta perpendicular)**.** Halle el punto de intersección entre l4 y l2. Finalmente, transfiera sobre l2, y partir del punto de intersección hallado, el valor que representa el coeficiente B de la ecuación. Al nuevo punto obtenido etiquételo con la letra B. Debe tener una pantalla como la que se muestra en la figura 12. Figura 12

8. Dibuje tres vectores: uno de ellos con origen en el punto de intersección del eje Y y l1, y con extremo en el punto A ***** X. Otro, con origen en el punto de intersección de l2 y l4, y extremo en el punto B, y el último, con origen en el punto de intersección del eje Y y l3, y con extremo en el punto C**.**

9. La solución de la ecuación se verifica cuando la suma de los vectores A ***** X y B es igual al vector C**.** Para estar seguros de dicha igualdad se procede de la siguiente manera: Se traza una recta perpendicular a l3, y que pase por el punto C (Llamaremos l5 a dicha recta), y luego le pedimos a la calculadora que verifique si el punto B pertenece a la recta l5.

10. Oculte las líneas l1, l2, l3 y l4, así como el plano coordenado (menú F8, opción 9). Finalmente obtendrá una pantalla como la de la figura 13.

Figura 13

Bibliografía

Ministerio de Educación Nacional (2002) *Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.

Construcción de cónicas y de curvas pedal (2 sesiones)

Grupo del Tolima [1]

Nivel. Intermedio

Objetivos.

- Presentar la construcción de cónicas utilizando el programa Cabri, destacando en ellas las ventajas que brinda este ambiente para los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

- Presentar algunas curvas que se generan utilizando cónicas y el concepto de recta tangente de una curva en un punto

Descripción general del taller. Durante el desarrollo del taller se presentarán varias construcciones de las cónicas utilizando el programa Cabri y se solucionarán problemas que utilicen estas construcciones o que empleen cónicas.

Conocimientos previos. *Matemáticos* : definición de las cónicas, recta tangente a una curva en un punto.

Manejo de la calculadora: construir con la calculadora rectas, rectas perpendiculares, puntos, punto sobre objeto y puntos de intersección.

Desarrollo del taller.

Sesión 1

Construcción de cónicas

1. Parábola

1.1. Definición.

Se llama parábola al lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que sus distancias desde un punto fijo y desde una recta fija son iguales. El punto se llama foco de la parábola y la recta se llama directriz.

1.2. Elementos para la construcción.

Para construir una parábola necesitamos inicialmente de 2 elementos fijos: un punto arbitrario F y una recta arbitraria d, tales que F no esté contenido en d.

Si P es un punto de la parábola, la distancia del punto P al punto fijo F debe ser igual a la distancia del punto P a la recta fija d. Entonces P debe ser un punto sobre la perpendicular a la recta d y sobre la mediatriz del segmento que une el pie de ésta perpendicular con el punto F.

1.3. Construcción (Figura 1):

- Trazar una recta d
- Ubicar un punto F que no pertenezca a d. ¿Por qué no puede pertenecer?
- Ubicar un punto P’ que pertenezca a d
- Trazar por P’ una recta l perpendicular a la recta d
- Trazar el segmento FP’
- Trazar la mediatriz m al segmento FP’
- Marcar el punto P como la intersección entre las rectas l y m

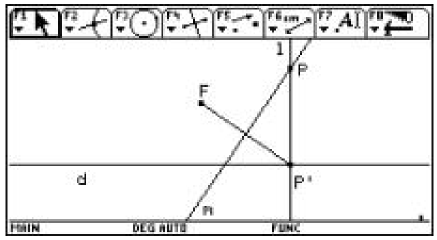


Figura 1

· Realizar la traza o el lugar geométrico del punto P cuando se desplaza P'. (Figura 2)

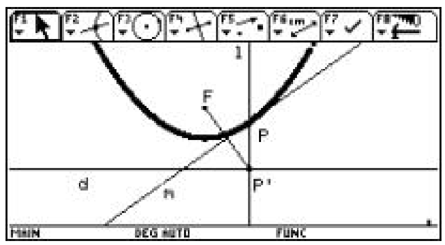


Figura 2

1.4. Extensiones de la construcción de la Parábola.

Un software de geometría dinámica como Cabri, permite explorar diversas posibilidades o variantes de un mismo problema geométrico. Así, respecto a la parábola, se pueden explorar las siguientes opciones. Por ejemplo, dado que GP = FP, es posible construir un círculo con centro en P, que pase por los puntos F y G y, además, que sea tangente a la directriz en el punto G (Figura 3). Teniendo en cuenta estas propiedades, se puede entonces escribir una definición alternativa de parábola: *una parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta dada (la directriz) y que pasan por un punto dado (el foco).*

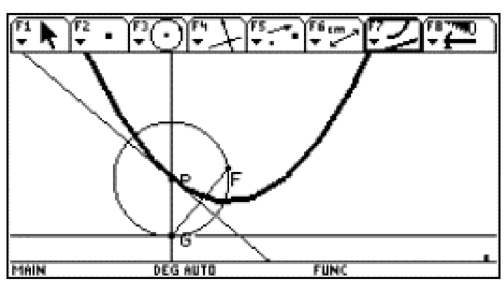
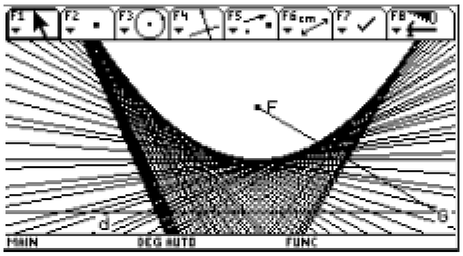


Figura 1

Figura 3

Parábola como lugar geométrico de centros de una circunferencia.

La construcción básica de la parábola como envolvente de un lugar geométrico de rectas (Figura 4a) o como lugar geométrico de puntos (Figura 4b), está basada en el concepto geométrico de *mediatriz* (en este caso, la mediatriz del segmento FG).



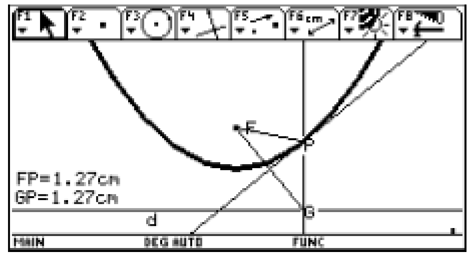


Figura 4a.

Parábola como envolvente de rectas

Figura 4b.

Parábola como envolvente de puntos

Como una variante de la construcción original se propone investigar lo que pasa cuando, en lugar de la mediatriz, se construye una recta perpendicular al segmento FG de modo que pase por cualquier punto de éste. Veamos: ubique un punto A en cualquier parte del segmento FG, localice el punto P de intersección entre la perpendicular que pasa por A y la que pasa por G, construya el lugar geométrico del punto P cuando G se mueve a través de la recta d (Figura 5). Arrastre el punto A a lo largo del segmento FG y explique lo que ocurre.

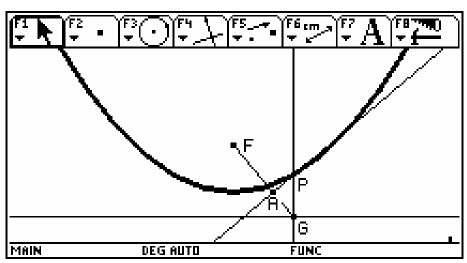


Figura 5

La forma del lugar geométrico, ¿corresponde a una parábola? De ser así, ¿dónde están (cuáles son) su foco y su directriz?, ¿En qué caso el punto F corresponde al foco?, ¿En qué caso la recta d corresponde a la directriz?, ¿Qué ocurre cuando el punto A coincide con uno de los extremos del segmento FG?, ¿Cuál es la relación de la recta AP con el lugar geométrico de la parábola a medida que el punto A se mueve a través del segmento FG?, ¿Qué es lo realmente importante de la relación entre la mediatriz del segmento FG y la parábola? Este tipo de interrogantes pueden ser investigados con el fin de indagar mejor sobre la profundidad del pensamiento matemático de los estudiantes.

1.5. Problema

Dada una recta fija y 2 puntos que no pertenecen a la recta y ubicados en el mismo semiplano con respecto a la recta, construir una parábola que pase por los dos puntos y tenga a la recta como directriz. ¿Es siempre posible construir la parábola bajo estas condiciones?

1.6. Aplicaciones

- La parábola es una curva que aparece con frecuencia en la naturaleza. En Física se conoce que si a un cuerpo que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme se le somete al mismo tiempo y en otra dirección al efecto de una fuerza que induzca en él una componente de aceleración (por ejemplo la fuerza de atracción de la gravedad), entonces la trayectoria resultante del cuerpo es una parábola.
- Las lentes de aumento y los espejos de los faros, así como los radares tienen forma parabólica. Ello obedece a que un haz de rayos paralelos al eje de la parábola al chocar contra el espejo parabólico se concentra en el foco.

2. Elipse

2.1. Definición.

Es el lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos de plano (llamados focos) es constante.

El círculo es un caso particular de elipse ¿Por qué?

Otros elementos de una elipse son: el eje mayor, el eje menor, el centro O, el eje focal (distancia entre los focos) y el lado recto (cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por un foco).

2.2. Elementos para la construcción.

La distancia de un punto P de la elipse a uno de los focos más la distancia del mismo punto al otro foco es constante. Esto es equivalente a tomar un segmento y partirlo en dos secciones, en todas las posibles particiones se observa que la suma de las dos longitudes es constante. Este segmento puede ser representado como el radio de una circunferencia.

También se requiere utilizar el concepto de mediatriz.

2.3. Construcción (Figura 6).

· Construir una circunferencia con centro F1 y radio r

· Ubicar un punto interior al círculo, llámelo F2

· Ubicar un punto arbitrario Qsobre la circunferencia

· Construir el segmento QF1

· Construir el segmento QF2

· Construir la mediatriz de QF2

· Localizar el punto P de intersección de la mediatriz del segmento QF2 con el segmento QF1.

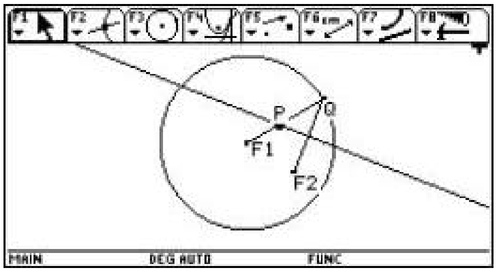


Figura 6

Realizar la traza de P moviendo el punto Q. (Figura 7)

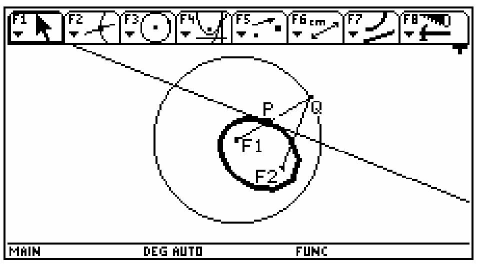


Figura 7

¿Por qué razón se construye la mediatriz?, Explique cuál es la relación que existe entre los segmentos PQ y PF2

2.4. Problema

Dados tres puntos del plano, dos de ellos fijos, construir una elipse tal que los dos puntos fijos sean los focos y el punto móvil sea un punto de ella

Solución.

Sean A y B los puntos fijos (focos de la elipse) y C el punto que pertenece a la elipse. (Figura 8)

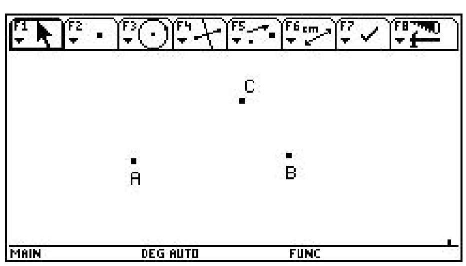


Figura 8

1. Construir la circunferencia de centro B y radio BC y el segmento de extremos A y D que pasa por el centro de la circunferencia. La longitud de este segmento es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AB y BC. (Figura 9)

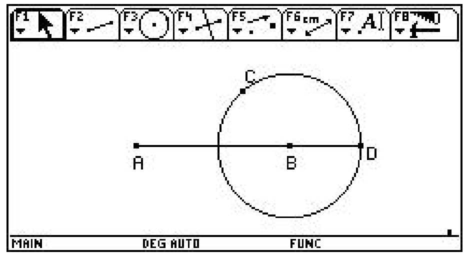


Figura 9

2. Ocultar la circunferencia.
3. Marcar un punto E sobre el segmento AD y construir la circunferencias de centro A y radio AE, y de centro B y radio ED. (Figura 10)

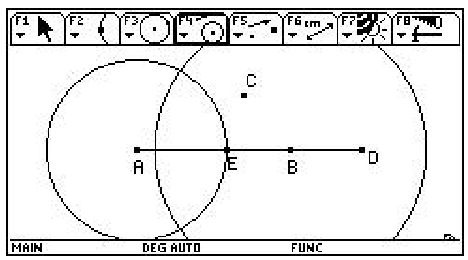


Figura 10

4. Marcar los puntos de intersección de las dos circunferencias. Estos puntos pertenecen a la elipse.
5. Activar la traza para los puntos de intersección y dar animación al punto E. Este punto se mueve sobre el segmento AD.

2.5. Aplicaciones.

- En 1609 el astrónomo alemán J. Kepler (1571-1630) demostró que los planetas siguen trayectorias elípticas estando el sol en uno de los focos; estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, es decir, se parecen mucho al círculo.

- Cualquier tangente a una elipse forma ángulos iguales con respecto a los segmentos que unen el punto de tangencia con los focos. Por consiguiente, si desde uno de los focos se emiten señales luminosas o sonoras que se reflejen o reboten en la elipse, estas señales se recibirán concentradas en el otro foco.

3. Hipérbola

3.1. Definición.

Es el lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

3.2. Construcción

1. Ubicar dos puntos fijos como focos y llamarlos F1 y F2.

2. Haciendo centro en uno de ellos, por ejemplo en F2, construir una circunferencia de radio r, cualquiera sea r (la longitud de r corresponderá a la diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos).

3. Ubicar un punto Q sobre la circunferencia.

4. Trazar la recta QF2.

5. Localizar un punto P sobre la recta QF2 talque d(P,F2)-d(P,F1) = r. Esta situación implica que d(P,Q) = d(P,F1); por consiguiente P está ubicado a igual distancia de los extremos del segmento QF1, de ahí que P pertenezca a la mediatriz del segmento QF1. Para construir entonces elpunto P se procede así:

5.1. Trazar el segmento QF1

5.2. Trazar la mediatriz M del segmento QF1

5.3. Marcar como P el punto de intersección de la recta QF2 con la recta M. (Figura 11)

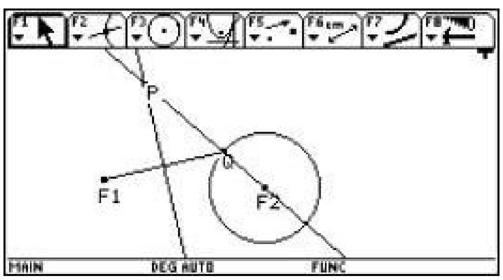


Figura 11

6. Realizar el lugar geométrico o la traza de P con respecto a Q. (Figura 12)

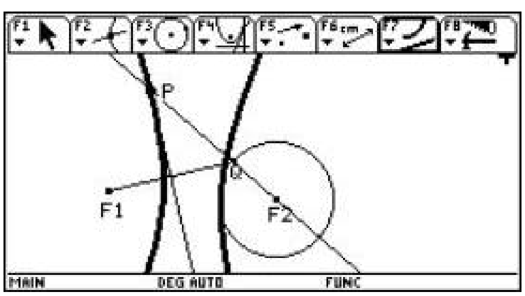


Figura 12

3.3. Problema:

Dado dos puntos fijos que constituyen los focos de una hipérbola y un punto P que pertenece a esta curva, construya la hipérbola.

3.4. Aplicaciones

Cuando desde un punto cualquiera de la curva se trazan segmentos a los focos, la bisectriz del ángulo formado por dichos segmentos es tangente a la hipérbola. Inversamente, cualquier tangente a la hipérbola es bisectriz del ángulo formado por los segmentos que unen los focos con el punto de tangencia.

3.5. Problema

Dado un punto Q sobre una circunferencia con centro en O y un punto P exterior a ella, determinar el lugar geométrico que genera la intersección de la recta que pasa por P y Q con la recta que pasa por O y el simétrico de Q con respecto a OP, cuando Q se mueve.

Dependiendo de la distancia en que se ubique a P con respecto al centro de la circunferencia, se obtienen diferentes lugares geométricos. En particular, el lugar geométrico que se genera cuando P está a una distancia menor que 2R es una hipérbola. (Figura 13)

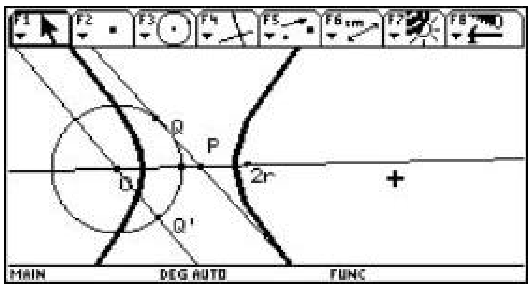


Figura 13

· Cuando P se ubica a una distancia igual a 2R se genera una parábola.(Figura 14)

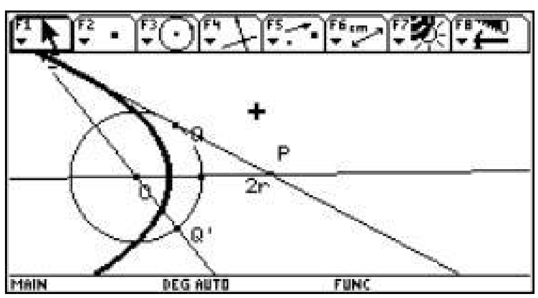


Figura 14

· Cuando P está a una distancia mayor que 2R con respecto al centro de la circunferencia, se genera una elipse. (Figura 15)

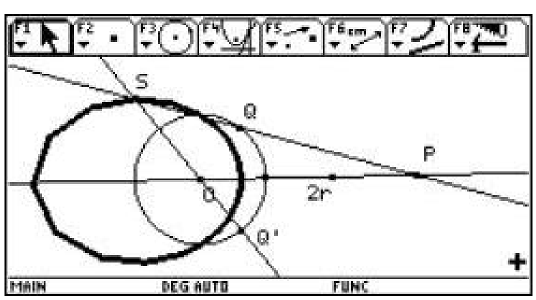


Figura 15

Finalmente, cuando P tiende al infinito, el lugar geométrico tiende a ser una circunferencia. (Figura 16)

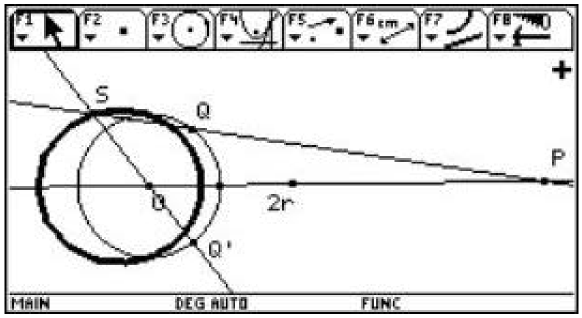


Figura 16

Sesión 2

Curvas pedal

Una curva pedal a una curva dada se construye de la siguiente manera:

- construir una curva C y un punto S que no esté en la curva
- trazar una tangente t a la curva C en un punto P de ella
- trazar una recta l perpendicular a t que pase por S.

El lugar geométrico que genera el punto de intersección entre l y t cuando P se mueve sobre la curva C, se denomina curva pedal.

2. Caracol de Pascal

2.1. Primera construcción

Considerar una circunferencia con radio OP, una tangente a la circunferencia en P, y un punto S exterior a la circunferencia. (Figura 17)

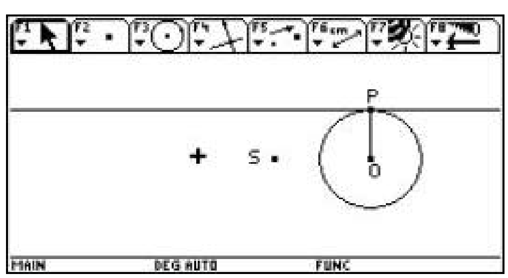


Figura 17

Por el punto S trazar una perpendicular a la recta tangente, intersecándose en Q. (Figura 18)

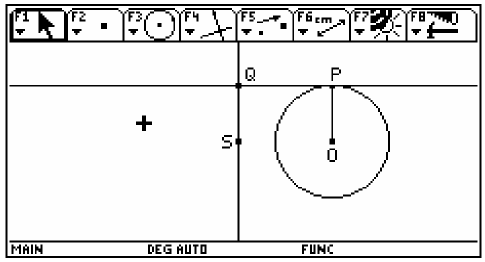


Figura 18

Activar la traza o lugar geométrico en Q con respecto a P. (Figura 19)

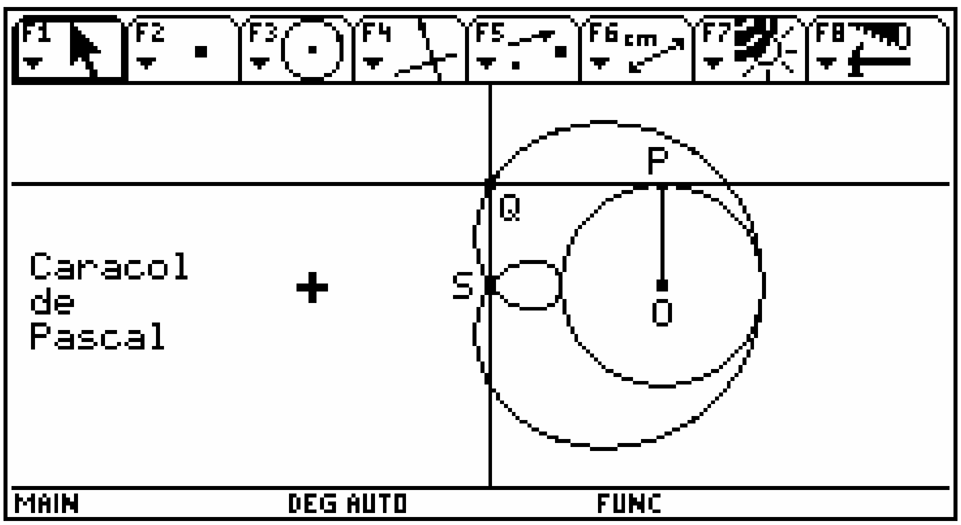
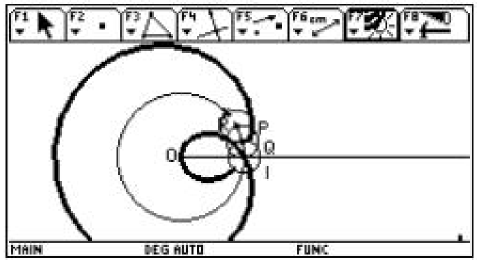


Figura 19

¿Qué sucede si el punto S se ubica sobre la circunferencia y es exterior a T?

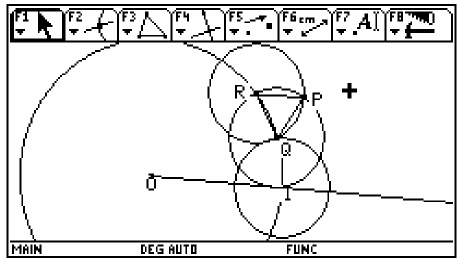
2.2. Otra construcción del Caracol de Pascal

Dibujar una circunferencia C con centro en O y radio r cualquiera; trazar luego una semirrecta cuyo origen coincida con O. Determinar el punto I de intersección de la circunferencia C con la semirrecta.



Trazar otra circunferencia C1,con centro en I y cuyo radio r'sea menor que r. Luego, haciendo centro en uno de los puntos de intersección de las circunferencias C y C1 anteriores, trazar otra circunferencia C2 de radio r'. Repetir el procedimiento anterior para trazar una tercera circunferencia C3 igualmente con radio r'. (Figura 20)

Figura 20



Por otra parte, las intersecciones de las circunferencias C1, C2 y C3 determinan los puntosP, Q y R.(Figura 21)

Figura 21

Da la impresión de que el triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R, es equilátero. Sustentar o contradecir esta afirmación.

Finalmente determinar el lugar geométrico que describe el punto P cuando el punto Q se mueve alrededor de la circunferencia C (Figura 22).

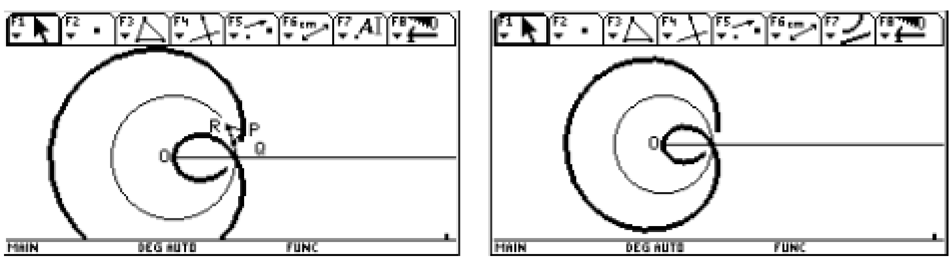


Figura 22

Caracol de Pascal como lugar geométrico que describe el punto P cuando Q se mueve alrededor de la circunferencia C.

3. Lemniscata de Bernoulli

Utilizando la construcción de la hipérbola, propuesta inicialmente, trazar la mediatriz del segmento PF2, trazar una recta perpendicular a esta mediatriz que pase por el punto medio entre F1 y F2 y llame Q a la intersección de estas dos rectas. (Figura 23)

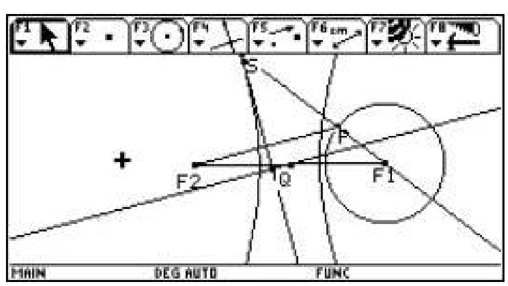


Figura 23

Activa r la traza o lugar geométrico en Q con respecto a P. (Figura 24)

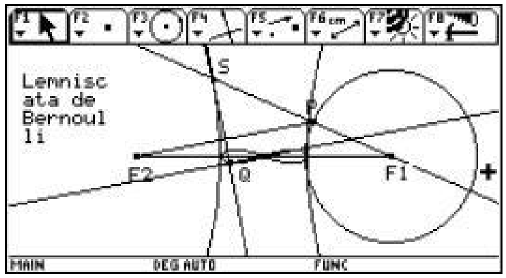


Figura 24

4. Folium de Descartes

Sea P un punto ubicado sobre una parábola de foco F y directriz d. Trazar una perpendicular que pase por el foco F y la directriz d. Llamar R a la intersección de estas dos rectas. Por el punto P trazar una perpendicular a la directriz d y llamar S al punto de intersección. (Figura 25)

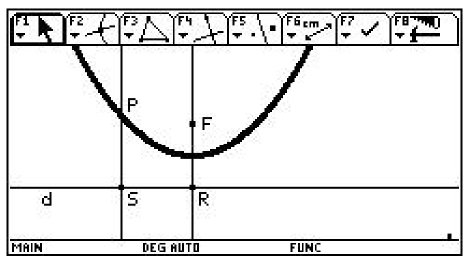


Figura 25

Construir la mediatriz m del segmento FS. (Figura 26)

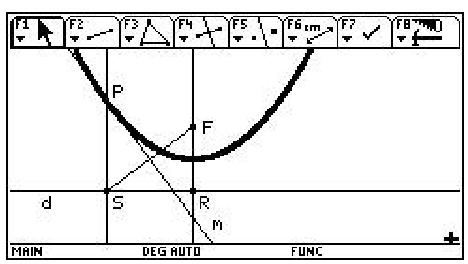


Figura 26

Construir una recta perpendicular l a la mediatriz m que pase por R. Marcar con Q el punto de intersección de estas dos rectas. (Figura 27)

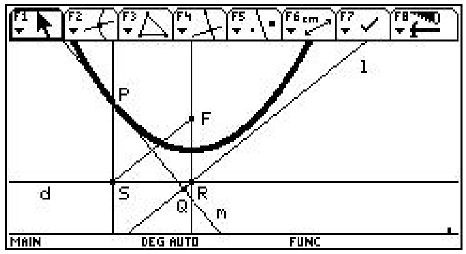


Figura 27

Trazar el lugar geométrico o traza de Q con respecto a P. (Figura 28)

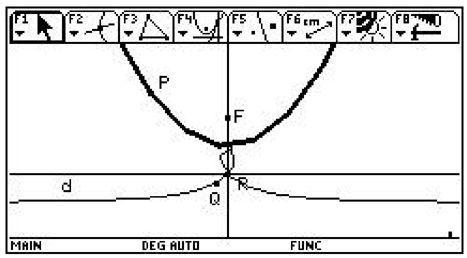


Figura 28

5. Bruja de Agnessi

Dada una circunferencia, construir su diámetro y denominar sus extremos con A y B. Sobre el punto A trace la recta tangente a la circunferencia y ubique un punto P sobre la tangente. (Figura 29)

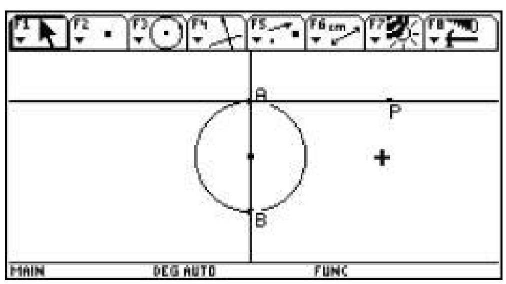


Figura 29

Trazar una recta que pase por P y B. Marcar con R el punto de intersección entre la circunferencia y la recta PB. (Figura 30)

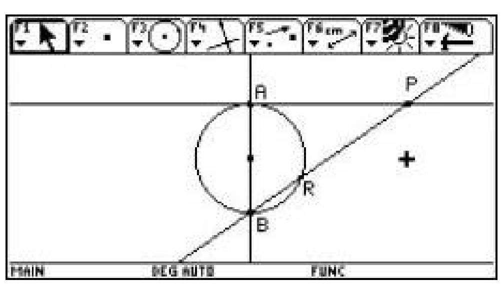


Figura 30

Construir una recta l perpendicular a la recta tangente en el punto P y otra recta perpendicular a la recta l desde el punto R. Denominar Q al punto de intersección entre estas dos perpendiculares. (Figura 31)

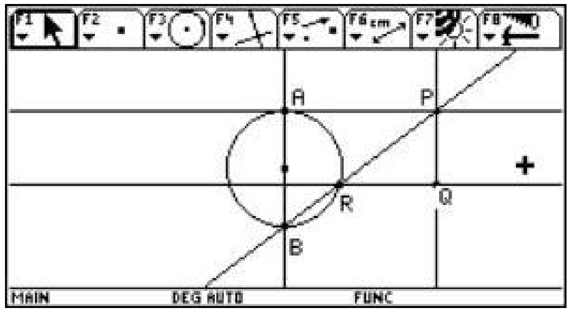


Figura 31

Construir el lugar geométrico o la traza de Q con respecto a P. (Figura 32)

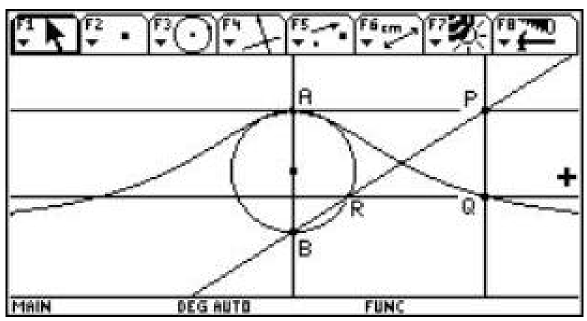


Figura 32

Bibliografía

Centre Informatique Pédagogique "CIP" (1996). *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géometre*. Genova: CIP.

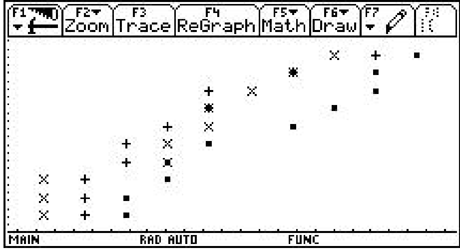
Miguel de Guzmán (1988). *Aventuras Matemática*s Barcelona. Editorial Labor S.A.

Ministero de Educación Nacional (2002). *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes*: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: MEN.

Swokowski , Earl L (1982). *Cálculo con geometría Analítica*. Estados Unidos. Wadsworth Internacional Iberoamérica.

Texas Instruments TI-92 (1996). *Manual del usuario*. Estados Unidos. Texas Instruments

Velasco , Gabriel (1983). *Tratado de Geometría*. México. Editorial Limusa



El análisis de gráficos en la conceptualización estadística (2 sesiones)

Martha Bonilla Estévez
Universidad Distrital
Edwin Carranza Vargas
Instituto Pedagógico Nacional

Nivel : Inicial

Objetivo. Discutir las potencialidades del uso de la calculadora para el aprendizaje de algunas nociones estadísticas, a partir del análisis de gráficos y datos, y de algunas medidas de tendencia central.

Descripción general del taller. A partir del uso de los gráficos dispuestos en la calculadora tales como los histogramas, las ojivas y las cajas, se proponen actividades encaminadas a desarrollar el uso de conceptos estadísticos fuertemente relacionados con el análisis de datos, en la toma de decisiones. También se aborda el papel de las diferentes representaciones en la argumentación desarrollada. Se trata sobre todo de mostrar un camino alterno (y hasta contrario al habitual), para abordar la enseñanza de la estadística escolar, basado en el análisis de gráficos.

Conocimientos previos. Ninguno en especial.

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Se lanzan tres aviones de papel (10 veces cada uno) y se registran los tiempos de vuelo. Se trata de seleccionar el mejor modelo de avión que *garantice mantenerse más tiempo en el aire.*

1. A continuación, se muestran los comportamientos de cada avión, mediante diagramas de dispersión, cuyas parejas ordenadas relacionan tiempo-lanzada. (Figura 1)

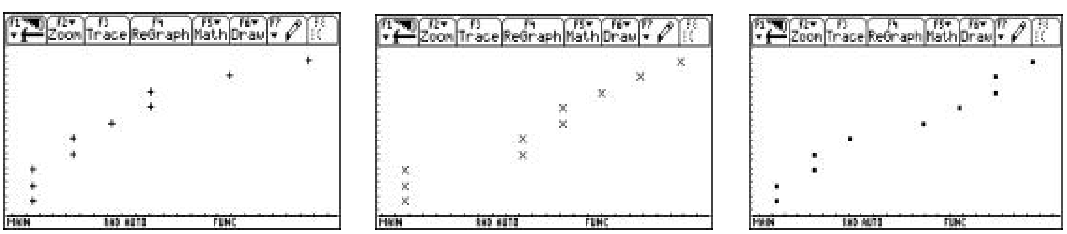


Figura 1

Avión 1 Avión 2 Avión 3

Tomando como base la información de las gráficas, presente argumentos para decidir cuál es el mejor avión.

2. Si mostramos una gráfica simultánea con las tres situaciones (figura 2), ¿qué tanto le ayuda la información aquí representada para tomar la decisión?

Figura 2

3. Ahora apóyese en la información de los respectivos diagramas de cajas para sustentar su decisión. (Figura 3)

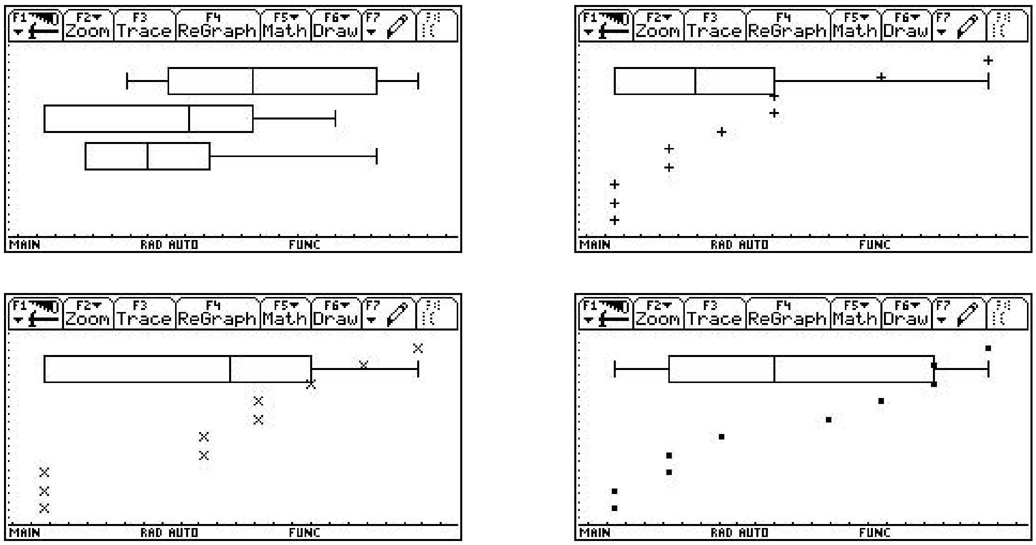


Figura 3

4. Analice ahora la información de los histogramas. (Figura 4)

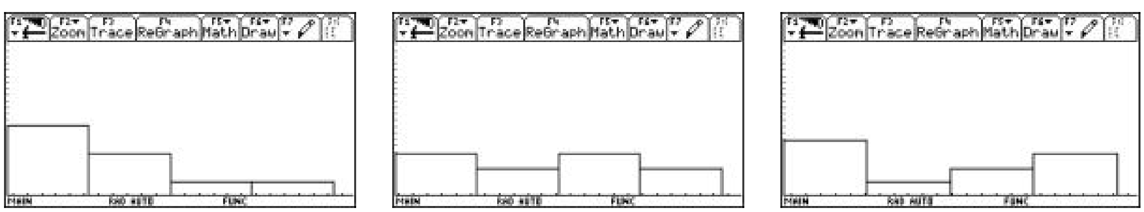


Figura 4

5. Realice un escrito en el que usted dé el mayor número de argumentos para sustentar su decisión. Trate de usar una a una la información que cada tipo de gráfico le proporcionó.

Problemas propuestos

Primera actividad.

Se presentan tres diagramas de cajas (figura 5). Cada uno representa el tiempo de duración de cada una de tres bombillas de diferente marca en kw/h. ¿Cuál marca compraría en el supuesto de que los precios no varíen mucho?

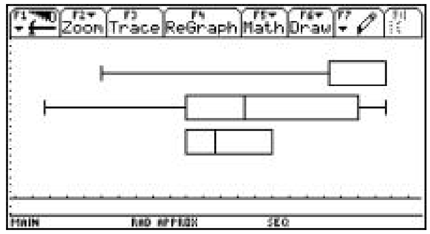


Figura 5

Segunda actividad.

Los tres diagramas de cajas de la figura 6, se refieren al pH de tres marcas de champú. ¿Cuál champú compraría?

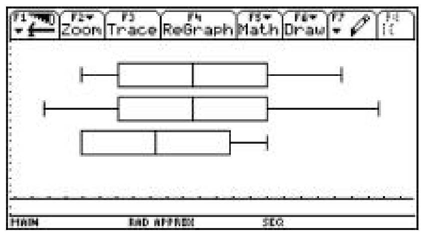
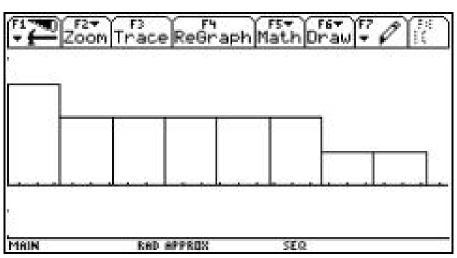
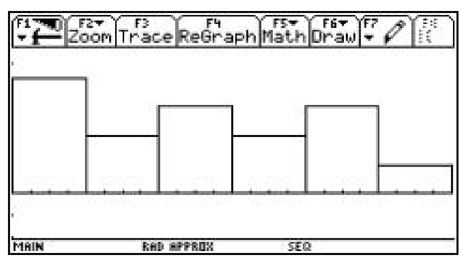


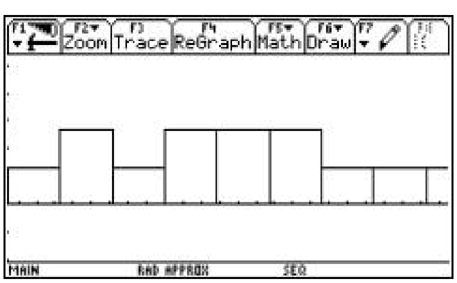
Figura 6

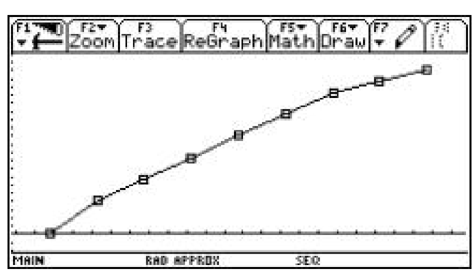
Segunda sesión

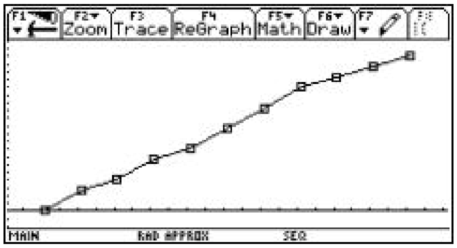
A continuación se presenta un conjunto de gráficos estadísticos de 2 tipos. Encuentre pares de ellos que correspondan a la representación de los mismos datos. Explique sus respuestas.

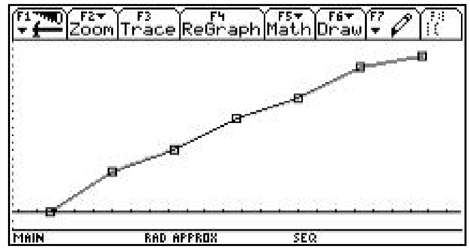












Bibliografía

Batanero, C. , Estepa A.,Godino, D. (1991). *Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria*. En Suma No 9

Batanero, C. , Godino, D. Green R., Holmes, P. y Vallecillos, A. *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*. International Journal of mathematics Education in Science and Tecnology, 25(4), 527 -547.

Batanero, C. (2001) *Didáctica de la Estadística. Granada*: Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

M oreno, L. y Waldegg, G. (2002.) *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas*. En: Memorias Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá : Ministerio de Educación Nacional

---

Construyendo conceptualización de proporcionalidad usando transformaciones geométricas tradicionalmente poco explotadas (2 sesiones)

Jaime Romero Cruz

Universidad Distrital

Nivel . Inicial

Objetivos.

1. Discutir sobre el aprendizaje de la proporcionalidad, considerando los siguientes aspectos:

- hallazgos del factor de proporcionalidad

- inversión de la descripción de los caminos

- aportes para una discusión sobre el esquema **a + +** y **a - -**

4. Discutir sobre el empleo de la calculadora como mediadora en la enseñanza y el aprendizaje de los aspectos mencionados anteriormente.

Descripción general del taller. El taller abordará la temática de la proporcionalidad como un aspecto alrededor del cual se puede organizar buena parte del currículo de las matemáticas escolares. Se desarrollará a través de la discusión de dos situaciones problema diseñadas de tal manera que se evidencia la potencialidad de un instrumento como la calculadora, en la comprensión de aspectos relacionadas con la temática seleccionada.

Conocimientos previos . El que corresponde a un profesor de matemáticas que ha enseñado la proporción.

Programación.

Primer día : exploración de homotecias, construcción de homotecias.

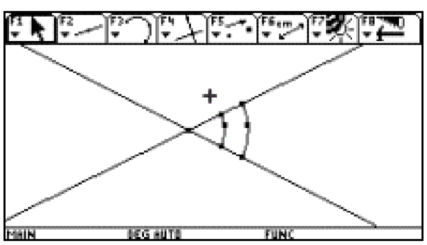
Segundo día : el problema de la balanza.

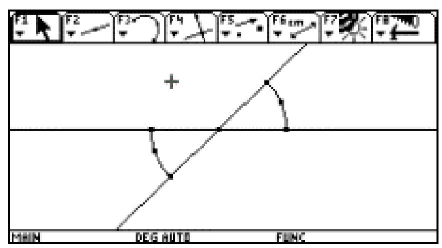
Desarrollo del taller.

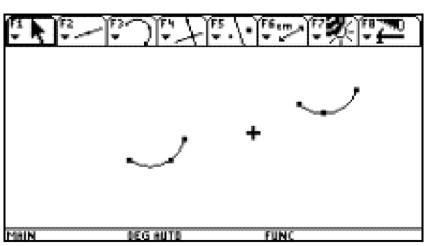
Primera sesión

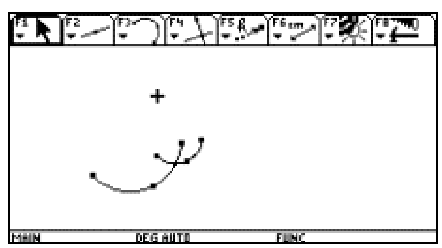
En un curso de estudiantes con edades entre 14 y 16 años, el profesor pidió a sus estudiantes resolver la siguiente situación: *Use la calculadora para hallar, mostrar y validar respuestas a la pregunta ¿cuándo dos arcos cubren el mismo ángulo?*

Los estudiantes presentaron las siguientes soluciones:

1. 

2. 

3. 

4. 

Realice construcciones que reproduzcan las soluciones presentadas y valídelas usando la

calculadora TI 92

¿Qué herramientas del Cabri le permitieron explorar respuestas a esta pregunta?

¿Qué herramientas del Cabri le permitieron mostrar respuestas a esta pregunta?

¿Qué herramientas del Cabri le permitieron validar respuestas a esta pregunta?

Segunda sesión [2]

Un hombre tiene un encuentro cerca no con un ser de otro mundo. En la conversación establecida, el terrícola le extiende una invitación para que su comunidad visite la tierra. El extraterrestre explica que en su planeta tienen diferentes tipos de nave circular y que requiere un ovnipuerto que permita el aterrizaje de cualquier tipo de nave. El terrícola acepta construir un ovnipuerto. Para ponerse de acuerdo en las medidas, el extraterrestre entrega un pedazo de cuerda que le va a permitir describir las naves. Según su tamaño, hay naves con perímetro de: (ver Tabla 1)

Tabla 1

50
75
100
200
300

Tabla 2

Veces el Radio
1, 1/2
1/3, 1/4
2, 3 veces el pedazo de cuerda

Como las naves tienen aletas en forma de arco que requieren descansar en muros con su misma forma y longitud y las aletas están separadas por la misma distancia, tenemos naves cuyas aletas según el número (2, 3, 4, 5 y 6) pueden medir: (ver Tabla 2)

Actividad: crear un modelo en Cabri que permita representar todos los posibles ovnipuertos para los diferentes tipos de naves.

Preguntas que orientan la solución:

¿Cuántos tipos de nave hay?

¿Cuál es el máximo tamaño que podrían tener las aletas en términos del pedazo de cuerda?

¿Cuál es el mínimo tamaño que podrían tener las aletas en términos del pedazo de cuerda?

¿Es importante el número de aletas? Explique detalladamente sus razones y cómo las logró

¿Importa el tamaño de la nave?

Según el tamaño de las aletas ¿qué ángulos describen los arcos?

Pregunta para el profesor:

¿Qué conocimientos cree usted que los practicantes quieren promover en los estudiantes?

Bibliografía

Harel, G. and Confrey, J . (Eds) (1994), *The development of multiplicative reasoning in the Learning of mathematics*. Research in Mathematics Education Series. Albany, NY :State University of New York Press.

Llinares, S . (1993). *Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje.* Montero, L. y Vez, J. Eds. Las didácticas específicas en la formación del profesorado. Santiago de Compostela : Tórculo.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2002.) *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas.* En: Memorias Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá : Ministerio de Educación Nacional

Matemáticas y movimiento. Modelación de fenómenos de variación mediados por la TI 92 y el CBR (2 sesiones)

Mario Cardona Castaño

Normal Superior del Quindío

Nivel . Es un taller de nivel inicial o intermedio.

Objetivo. Reconocer las potencialidades de la TI 92 para modelar fenómenos físicos, a través de la modelación de fenómenos de movimiento con datos capturados con el CBR (sensor de movimiento)

Descripción general del taller. La modelación es un proceso propio de las matemáticas que permite explicar fenómenos físicos o naturales con un diagrama, una ecuación, una descripción verbal u otro, a partir de datos recogidos. Este proceso permite hacer predicciones por lo que dicha actividad matemática se pone ahora al alcance de los alumnos y docentes de la Educación Básica y Media, gracias a los recursos computacionales e informáticos, que se están incorporando en las aulas.

El taller se realizará en cuatro horas, teniendo como apoyo la calculadora TI 92 , datos tomados de fenómenos de movimiento y guías preparadas para las actividades del mismo. Se iniciará el taller con una revisión del funcionamiento básico de la calculadora, el editor de funciones y la pantalla de gráficas. Se examinarán las características del CBR y del programa ranger y se hará una captura de datos. A partir de la gráfica, se hará un análisis del movimiento.

Los datos capturados corresponden a la distancia recorrida por una pelota que rueda por una rampa. Se harán ajustes a la gráfica a partir del editor de funciones y de las posibilidades de cálculos de regresión que permite la calculadora. Se revisará la función resultante que modela el movimiento de la pelota y se examinarán los resultados a la luz del fenómeno estudiado.

Conocimientos previos . No es necesario poseer conocimientos especiales. En caso de que los participantes tengan un manejo inicial de la calculadora, se enfatizará más en el proceso de modelación.

Programación.

Primer día : reconocimiento de las funciones básicas de la calculadora, del editor de funciones y de la pantalla gráfica. Transmisión del programa ranger a la calculadora, análisis de sus características y funcionamiento. Captura de datos de movimiento y análisis del movimiento a partir del gráfico generado. Revisión de las tablas de datos.

Segundo día : presentación y análisis del problema, captura de datos de una pelota rodando por una rampa, transmisión de datos y depuración de la gráfica usando el programa ranger . Gráfica de datos de posición contra tiempo y ajuste a partir del editor de funciones y de las posibilidades de cálculos de regresión de la TI 92 . Análisis de los resultados a partir del fenómeno estudiado.

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Actividades Iniciales: acerca del manejo de la TI 92 y el CBR

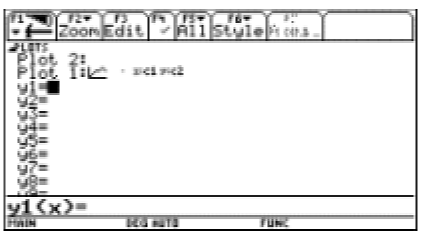
Se examinarán los aspectos relacionados con las aplicaciones que utilizaremos para el trabajo de modelación.

Actividad 1 . Reconocimiento del editor de funciones, de la pantalla gráfica y del editor de datos.

Dentro del software propio de la TI 92, aparecen estas tres aplicaciones, que nos permitirán

hacer el trabajo de modelación que nos proponemos:

El editor de funciones: permite definir una función, modificarla y seleccionarla. Para este taller se trabajará con coordenadas cartesianas y gráficas de puntos (Plot) obtenidas a partir de tablas de datos. Para acceder a este editor use la tecla ¨ (diamante) y a continuación pulse la tecla W (Y =). Debe aparecer ahora una pantalla como una de las que aparecen en la figura 1.



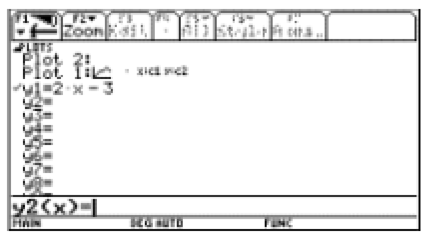


Figura 1

En el primer caso está definida una gráfica de puntos pero no hay definida ninguna función.

El cursor aparece como un recuadro negro al frente de y1 =

Es conveniente limpiar el editor de funciones. Para ello, oprima la tecla F1 y seleccione la opción 8 de dicho menú, Clear Functions, oprima ENTER y confirme oprimiendo ENTER nuevamente. Su pantalla debe ser similar a la figura de la izquierda.

Ahora defina dos funciones. Oprima ENTER. El cursor se ubica en la línea de entrada junto a

y1(x) **=**

Digite a continuación 2x – 3 y oprima ENTER. La función aparece como lo muestra la figura

de la derecha. Defina y2 como $x^2 - 3x + 1$

Estas dos funciones quedarán seleccionas; junto a ellas aparece el símbolo **Ö** al lado izquierdo**.** (Al oprimir F4 se activa o se desactiva la función seleccionada).

La pantalla gráfica (Graph Screen*):* nos permite visualizar las funciones definidas y seleccionadas en el editor de funciones. Para acceder a esta aplicación pulsamos ¨ y la tecla R (GRAPH). Debe aparecer una pantalla como la que se muestra en la figura 2 a la izquierda.

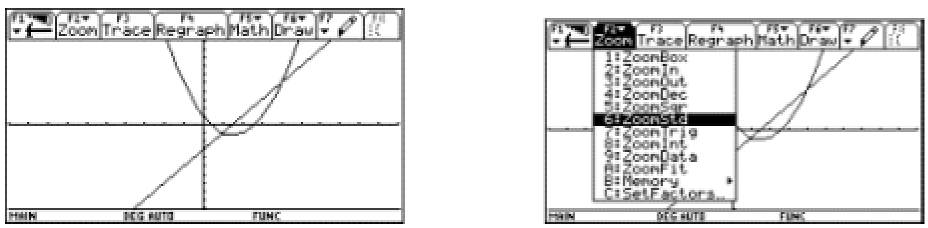


Figura 2

En caso de no ser similar a esta, use el menú F2(Zoom) y seleccione la opción 6 (Zoomstd), como muestra la gráfica de arriba a la derecha. Oprima ENTER y aparecen las coordenadas cartesianas en la forma estándar. Podemos modificar la ventana de visualización. Una forma de hacerlo es mediante el menú F2**.** Seleccione la opción 1 (ZoomBox).

Haciendo uso del cursor construya una caja que encierre la parte de la gráfica que queremos examinar, partiendo del vértice inferior izquierdo hasta el vértice superior derecho (figura 3). Al ubicar el cursor e n el lugar deseado, oprima ENTER.

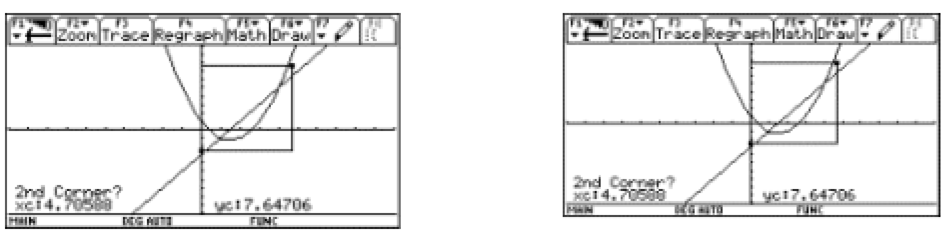


Figura 3

Debe aparecer una pantalla como la de la figura 4:

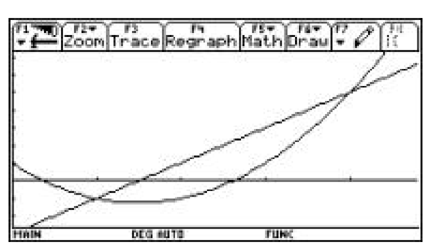


Figura 4

Al usar la opción F3 (Trace), el cursor se ubica sobre la gráfica y muestra las coordenadas de cada punto, como se muestra en la figura 5.

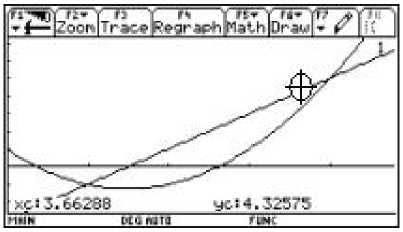


Figura 5

Finalmente, para acceder al editor de datos se usa la tecla APPS (junto a la tecla del cursor) y se selecciona la opción 6 (Data/Matrix Editor).

Actividad 2. Reconocimiento del CBR y del programa ranger .

El CBR (Calculator Based Ranger) es un detector sónico de movimiento, que trae incorporado el programa ranger . Con un CBR y una calculadora TI 92 , se pueden capturar, ver y analizar datos de movimiento en muy poco tiempo, sin tener que tomar medidas, ni realizar cálculos con lápiz y papel. Para un mejor conocimiento y uso de este sensor se recomienda consultar el manual operativo del mismo.

P odemos transferir el programa ranger a una calculadora desde el CBR o desde otra calculadora. Para transferir el programa desde el CBR , conecte este dispositivo firmemente a la calculadora mediante el cable correspondiente. Ubíquese en la pantalla principal de la calculadora (HOME), levante el cabezal pivotante del CBR y oprima el botón 92 . Cuando finaliza el proceso de transferencia, una luz verde parpadea y el CBR emite un sonido. El programa queda ahora en la memoria de la calculadora.

Para transferir el programa de calculadora a calculadora, conecte las dos calculadoras. En ambas calculadoras vaya a la ventana VAR-LINK ; para ello, oprima las teclas 2nd y - . A continuación seleccione el programa ranger en la calculadora que lo posea. Prepare las calculadoras para enviar y recibir el programa, usando la opción correspondiente en el menú F3 (LINK).

En la calculadora que envía, seleccione la opción 1 y en la calculadora que recibe, seleccione la opción 2. Oprima ENTER en la calculadora que recibe el programa y luego ENTER en la calculadora que envía. (Figura 6)

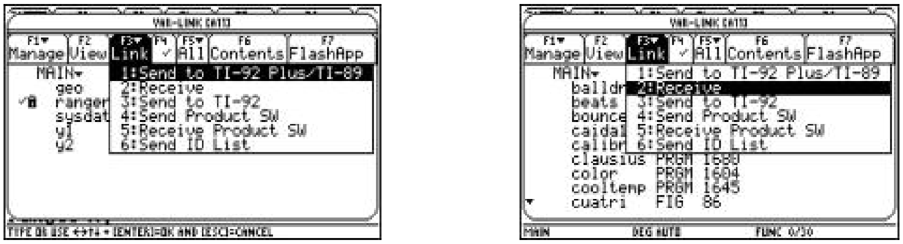


Figura 6

Este procedimiento se utiliza para transferir archivos y programas entre calculadoras.

Para ejecutar el programa ranger , oprima las teclas 2nd y - . En la ventana VAR-LINK seleccione ranger , oprima ENTER . Ahora cierre el paréntesis en la pantalla HOME y oprima nuevamente ENTER. Aparece la pantalla principal. Al oprimir ENTER de nuevo vamos al menú principal. Seleccione la opción 1: Setup/Sample , y configure el programa como se indica en la pantalla de la derecha de la figura 7.

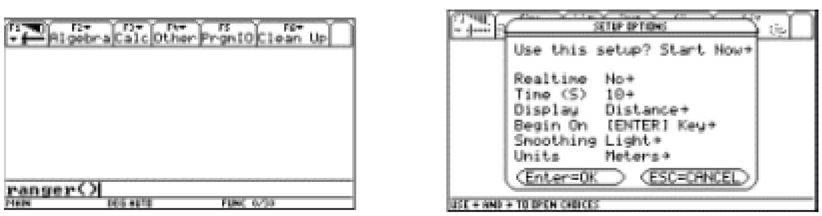


Figura 7

Actividad 3. Toma de datos y análisis de una gráfica de movimiento.

Conecte el CBR a la calculadora. Apunte el sensor hacia una pared en una zona libre de obstáculos (en un ángulo de 20º con respecto al sensor). La distancia mínima debe ser de 0.5 metros y la máxima de 6 metros, para unos buenos resultados. Oprima ENTER dos veces. Acérquese a la pared, aléjese, permanezca quieto. Al finalizar se transferirán los datos a la calculadora y aparecerá una gráfica como la de la figura 8.

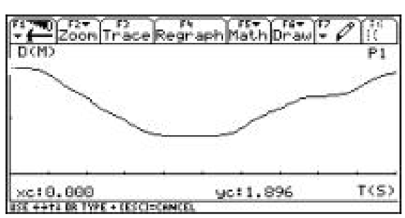


Figura 8

Estos datos pueden ser transferidos a otras calculadoras desde el CBR usando la opción Get CBR Data . Para ello ubíquese en el menú principal (Main Menú), seleccione la opción 5 (Tools), oprima ENTER y seleccione ahora la opción deseada. (Figura 9)

Figura 9

De manera similar se pueden transferir los datos de calculadora a calculadora usando la opción 2: Send TI 92 Data .

Pregunta 1 . ¿Cuál fue la gráfica que apareció en la calculadora?

Pregunta 2 ¿ Qué indica cada uno de los ejes de coordenadas?

Pregunta 3 : Describa el movimiento a partir de la gráfica

Pregunta 4 : ¿ En algún momento el móvil estuvo en reposo?, ¿durante cuánto tiempo?

Para cerrar el programa ranger , utilice las opciones QUIT y 2nd QUIT .

Segunda sesión

Modelando el movimiento de una pelota que rueda por una rampa.

Esta actividad se reestructura a partir de una propuesta que aparece en el manual de la Texas Instruments para el CBR .

La situación a explorar es la siguiente: encontrar cómo cambia la gráfica de distancia contra tiempo de una pelota rodando por una rampa, considerando diferentes inclinaciones de la rampa y encontrar el tipo de función que se ajusta mejor a los datos.

Actividad 1: ¿Cuál de las gráficas se ajustará mejor a la gráfica que relaciona distancia-tiempo, de una pelota rodando por una rampa? Justifique su punto de vista.(Figura 10)

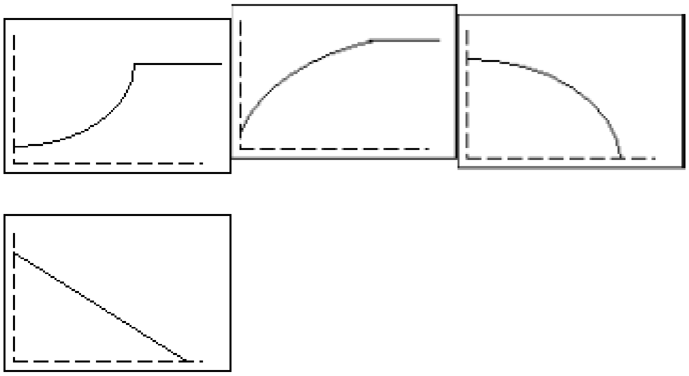


Figura 10

Actividad 2: Captura de datos.

a. Incline la rampa 15º. Marque un punto a 0.5 metros en la parte superior de la rampa, sitio del cual se soltará la pelota. Ubique el sensor donde lo desee.

b. Ejecute el programa ranger y seleccione la opción Setup/Sample .

Pulse ENTER para mostrar los ajustes:

REALTIME: NO

TIME(S): 3 SECONDS

DISPLAY: DISTANCE

BEGIN ON: (ENTER)

SMOOTHIG: LIGHT

UNITS: METERS.

c. Cuando los ajustes sean correctos, seleccione Start Now para comenzar la toma de datos. Oprima ENTER.

d. Una vez finalizada la toma de datos aparece la gráfica distancia– tiempo.

Si es necesario comparta los datos con otros compañeros.

¿Qué propiedad física se representa en el eje x?, ¿en qué unidades?, ¿qué propiedad física se representa en el eje y?, ¿en qué unidades?

Actividad 3: Primeros análisis.

Selección de datos:

Pulse ENTER para mostrar el menú Plot Menu. Seleccione Plot Tools y después, seleccione Select Domain. Mueva el cursor al punto en que se soltó la pelota y pulse ENTER. Mueva el cursor al punto en que la pelota alcanzó el final de la rampa y pulse ENTER. Se vuelve a dibujar la gráfica enfocada a la parte que corresponde a la caída de la pelota por la rampa.

Haga un bosquejo de la gráfica real. Etiquete la gráfica en los puntos en que se suelta la pelota y en que alcanza el final de la rampa.

¿Qué tipo de función representa esta gráfica?

¿Qué diferencias hay con la gráfica seleccionada en la pregunta 1?

¿Qué piensa que ocurrirá si se aumenta la inclinación de la rampa? Haga un esquema de la gráfica y justifique su respuesta.

Las curvas tienen la forma $y = ax^2 + bx + c$, ¿podría hallar los valores para a, b, c.?

Tercera sesión

Procesamiento de datos

Para esta actividad, usted debe disponer de un conjunto de datos tomados con el CBR correspondientes a la distancia recorrida por una pelota que rueda por una rampa y una calculadora TI-92.

La situación a explorar es la siguiente: *Encontrar la expresión analítica correspondiente a la gráfica de distancia contra tiempo, de una pelota rodando por una rampa, mediante el uso de la TI-92* .

Acerca de los datos: los datos se almacenan en listas en la carpeta MAIN de la calculadora, cuando se toman los datos en tiempo no real, tal y como lo hicimos en la actividad anterior. Los datos almacenados en las listas corresponden a la última toma de datos realizada y se almacenan así:

l1 contiene los datos del tiempo durante el cual se tomó la información.

l2 muestra los datos relacionados con la distancia del objeto en movimiento al sensor.

l3 muestra los datos relacionados con la velocidad del objeto en movimiento.

l4 muestra los datos relacionados con la aceleración del objeto en movimiento.

Actividad 1. Ajuste de los datos por medio del editor de funciones.

a. Salga del programa ranger, si aún está en él.

b. Por medio del editor de funciones y = , seleccione plot1 y defínalo considerando l1 contra l2. (Figura 11)

Figura 11

c. Observe la gráfica. Puede modificar su apariencia si lo desea.

d. Si es necesario, modifique la ventana para representar los datos. Puede usar la opción F2 + 9 (ZoomData) en la pantalla GRAPH.

e. Estudie la gráfica y trate de encontrar la expresión analítica de una función que se ajuste a los datos. Escríbala en el editor de funciones y compare su gráfica con la gráfica de los datos. ¿Considera que es un buen ajuste? Si es necesario modifíquelo hasta estar satisfecho.

f. Escriba la función que considere se ajusta a los datos.

¿Qué representan los parámetros de la función que se ajusta a los datos en el presente caso?

Actividad 2. Usando las posibilidades de regresión de la calculadora para ajustar los datos.

a. Defina un archivo de datos, usando el editor de datos y matrices. Para ello abra un archivo nuevo de datos y llámelo ram30. Defina la columna c1 = l1, en caso que no empiece por cero reste el primer valor. Defina la columna c2 = l2. No olvide seleccionar previamente la columna.

Las pantallas presentadas en la figura 12 le servirán de guía.

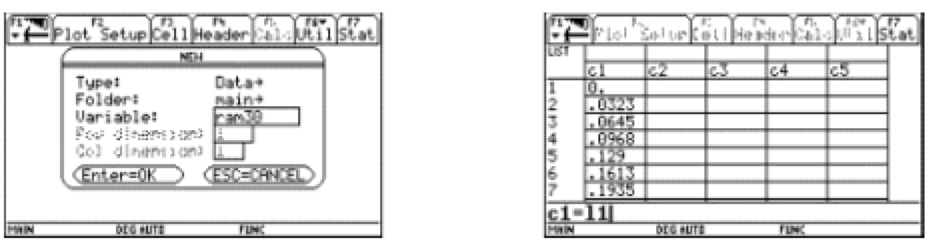


Figura 12

b. Usando este archivo y el menú F5 Calc seleccione el tipo de regresión que considere adecuado para ajustar los datos y guarde la ecuación de regresión en Y2(x). Asegúrese de no borrar una función que necesite. Dando ENTER aparecerá una pantalla como la presentada en la figura 13 a la derecha.

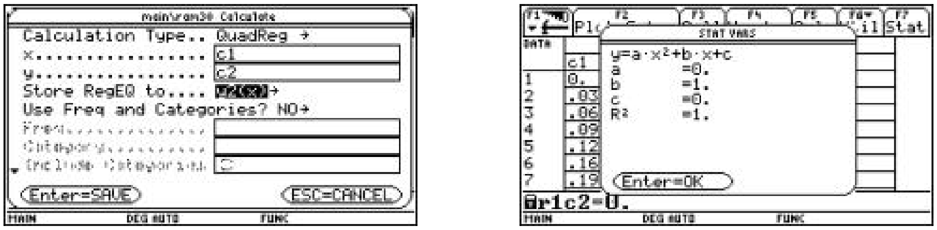


Figura 13

¿Qué significado tiene el valor el valor de R^2?

c. Si considera conveniente, ensaye otras opciones de regresión.

d. Compare los diferentes ajustes en el editor de funciones y en la pantalla GRAPH.

e. Compare sus resultados con otros compañeros.

¿La expresión analítica se ajusta al modelo teórico $x = \frac{at^2}{2} + v_i t + x_0$

¿Teóricamente cuál sería el valor de la aceleración?

¿Se acerca el valor de la aceleración hallado en este trabajo, al valor teórico de la aceleración?

Ampliación. Repetir la experiencia aumentando y disminuyendo la inclinación de la rampa.

Bibliografía

Texas Instruments. (1997) *Manual de la calculadora TI-92 plus*.

Texas Instruments. (1997) *Manual para el CBR.*

Ministerio de Educación Nacional. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Serie Memorias. (2001-2002).

Programación en la calculadora TI 92 (2 sesiones)

Julián Marín González

Universidad del Quindío

Nivel. Intermedio

Objetivos.

- Manejar el editor de programas de la calculadora.

- Conocer el lenguaje de programación de la calculadora TI 92.
- Desarrollar rutinas sencillas de programación.

Descripción general del taller. Uno de los potenciales más grandes que ofrecen las tecnologías computacionales es la flexibilización que permiten los lenguajes de programación. El conocimiento del lenguaje de programación de la calculadora TI 92 , permitirá a los usuarios idear y desarrollar nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de las matemáticas. Así mismo, permitirá usar gran cantidad de software disponible para la calculadora sin muchos traumatismos. En este taller se realizarán ejercicios relacionados con la escritura de un programa sencillo en la calculadora TI 92 y se presentarán algunos de los elementos básicos de programación.

Conocimientos previos. Ninguno en especial.

Programación.

Primer dia:

- Presentación del editor de programación.
- Reconocimiento del lenguaje de programación.
- Ejecución de programas.
- Uso de instrucciones de decisión.
- Uso de bucles.

Segundo dia:

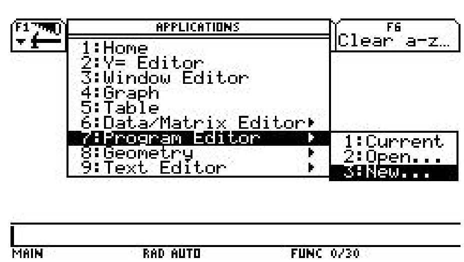
Menú y Cajas de diálogo.

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Presentación del Editor de programación

Para abrir el editor de programas, presione la tecla APPS. En la lista de opciones que se despliega, seleccione la opción 7 (Program Editor) y a continuación la opción 3 (New…). (Figura 1)



Reconocimiento del lenguaje de programación

Si no se especifica lo contrario, la pantalla de salida del programa es la pantalla PrgmI/O.

Analice el siguiente programa.

Para ilustrar algunas de las instrucciones, escriba un programa que muestre la serie de Fibonacci hasta un número dado. (Figura 4)

En la caja de diálogo, la calculadora pregunta por el nombre del programa. En la caja de texto variable, escriba la palabra progra 1 como se muestra en la figura 2. Presionamos la tecla ENTER dos veces (una para aceptar el nombre del programa y la otra para cerrar la caja de diálogo).

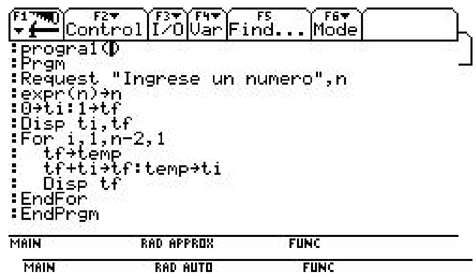


Figura 4

Vaya a la pantalla HOME, escriba el nombre del programa seguido de paréntesis y presione la tecla ENTER. (Figura 5)

Inmediatamente, la calculadora muestra el editor de programas. Allí puede identificar las siguientes partes: (figura 3)

progra 1 (): Es el encabezado. Corresponde al nombre del programa. Este identificador se utiliza para llamar o para ejecutar el programa.

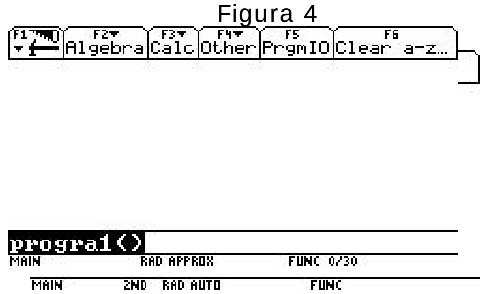


Figura 5

Al inicio, el programa muestra una caja de diálogo, como la que se presenta en la figura 6, para ingresar un número. Ingrese por ejemplo el número 5 y presione ENTER

Prgm: indica el inicio del programa

EndPrgm: señala el fin del programa

Todas las instrucciones de programación se deben escribir entre Prgm y EndPrgm

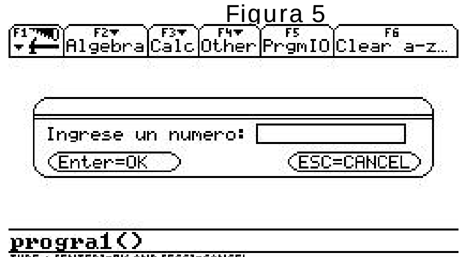


Figura 6

La calculadora despliega los números que se muestran en la pantalla que corresponden a los primeros 5 términos de la serie de Fibonacci. (Figura 7)

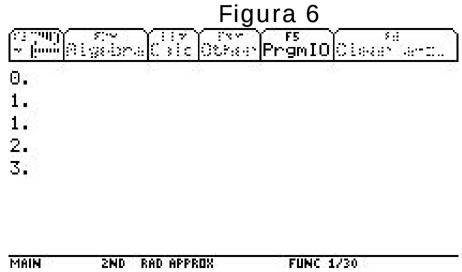


Figura 7

Instrucción	**Explicación**
Request " Ingrese un numero ", n	Esta instrucción muestra la caja de diálogo que solicita el número. El comando Request tiene dos parámetros: el primero corresponde al texto que va aparecer en la caja de diálogo. Al presionar la tecla

	ENTER , lo digitado por el usuario se almacenará (como una cadena) en el segundo parámetro.
expr(n) " n	La función expr(n) convierte la cadena ingresada en un número. Si esta conversión no es posible, sacará un mensaje de error. El número es asignado a la variable n .
0 " ti: 1 " tf	Se crean las variables ti y tf asignando los valores 0 y 1 respectivamente (los dos primeros términos de la serie de Fibonacci). Note que en esta línea hay dos instrucciones. Para escribir dos o más instrucciones en una sola línea, separe cada instrucción por dos puntos (:).
Disp ti , tf	Muestra en la pantalla Program I/O el valor de las variables ti y tf .
for i ,1, n - 2,1	Inicia un ciclo For basado en la variable i iniciando en 1 hasta que i > n -2 con incrementos de 1 (n -2 debido a que ya se han desplegado los dos primeros términos).
tf " temp	Asigna el valor de tf a la variable Temp.
tf+ti " tf:	Suma los valores de tf y de ti y los asigna a la variable tf .
Disp tf	Muestra el término calculado.
EndFor	Marca el final del ciclo For .

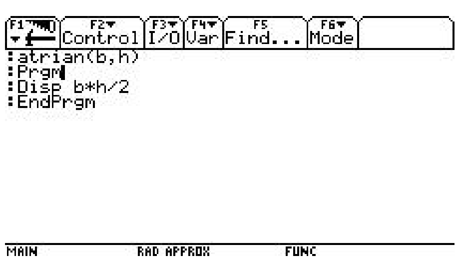
Tabla 1

Ejecución de programas

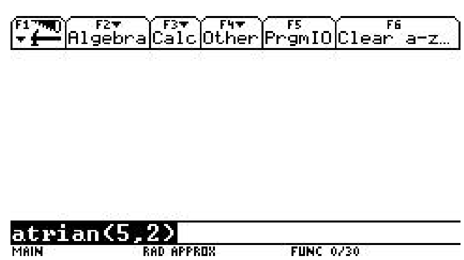
La ejecución de programas se puede hacer desde la pantalla HOME o desde otros programas.

Para hacerlo, escriba el nombre del programa seguido de paréntesis.

Si el programa necesita parámetros, estos se escriben entre los paréntesis y separados de comas. Por ejemplo, el programa de la figura 8 calcula el área de un triángulo dadas la base y la altura.



Listado del programa



Ejecución del programa

Figura 8

Como puede observar, en el encabezado se escriben dos variables que recibirán los valores enviados por el usuario.

Instrucciones de decisión

Como los demás lenguajes de programación, el de la calculadora también soporta la toma de decisiones mediante la instrucción condicional If. La forma general es

If condición

Bloque de instrucciones

Endif

El bloque de instrucciones se ejecutará en caso de que la condición se cumpla. Si deseamos ejecutar instrucciones para el caso en que no se cumpla la condición, utilizamos la estructura:

If condición then

Bloque de instrucciones

Else

Bloque de Instrucciones

Endif

En la figura 9 se presenta un ejemplo.

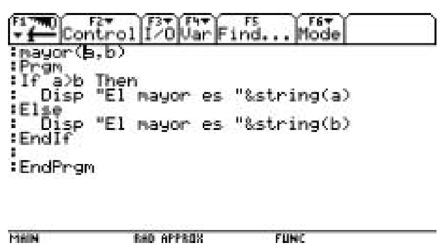


Figura 9

Puede acceder a estas estructuras de decisión, utilizando el menú F2 del entorno de programación.

Bucles

Para repetir instrucciones, contamos con las estructuras que aparecen en la tabla 2.

Bucle	Descripción	Sintaxis
For... EndFor	Utiliza un contador que controla las veces que se van a repetir las instrucciones.	For (variable,inicio,fin,[incremento]) En dFor

		Ejemplo:
		
		For (i,0,10,0.5)
		
		Disp i
		
		EndFor
		
		Ciclo For que va desde 0 hasta 10 con incrementos de 0.5

While...EndWhile	Repite las instrucciones mientras una condición dada sea verdadera.	While *condición* EndWhile Ejemplo: 0 " i While i <5 Disp i 0.5+ i " i EndWhile
Loop...EndLoop	Crea un bucle infinito. Generalmente contiene ordenes que permiten salir del ciclo. Las más utilizadas son: If, Exit, Goto y Lbl.	Loop EndLoop Ejemplo: 0 " i Loop Disp i i+ 1 " i if x> 5 exit EndLoop

Tabla 2

Puede acceder a estas estructuras de control utilizando el menú F2 del entorno de programación.

Actividad

Escriba el programa de la serie de Fibonacci utilizando cada uno de los ciclos mencionados anteriormente.

Segunda sesión

Menú y Cajas de diálogo

Una de las características más importantes de los lenguajes de programación actuales, es la posibilidad de crear interfaces de usuario más intuitivas y sencillas. El lenguaje de programación de la calculadora dispone de una serie de estructuras que facilitan este trabajo. Por ejemplo, To olBar...EndTBar , permite crear barras de menú. En la tabla 3 se muestra el uso de esta estructura.

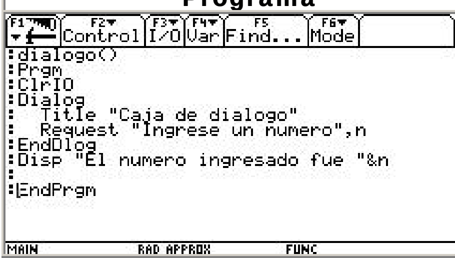
Programa	Comentarios
: Menu ( ) :P rgm : Clr IO : Disp “Presione las teclas de función” : Disp “para navegar en el menú” : Loop : Toolbar : Title “Menu1” : Item “Opcion1”, op 1 : Item “Salir”, sa : Title “Menu2” : Item “Opcion3”, op 3 : Item “Opcion4”, op 4 : EndTBar : Lbl sa : Exit : Lbl op 1 : Disp “Opcion1”	El comando Clr IO limpia la pantalla Prgm IO. Definimos un ciclo infinito usando la estructura Loop . Iniciamos la estructura Toolbar y en el interior definimos las opciones que va a tener la barra de menú, esto con la instrucción Title . Dentro de cada Title , usamos el comando Item para definir las opciones del menú. El segundo parámetro del comando Item corresponde a una Etiqueta a la que saltará el programa cuando el usuario seleccione una opción del menú. La instrucción Cycle hace que el flujo del programa continúe en la siguiente iteración del ciclo.

: Cycle	
: Lbl op 3	
: Disp “Opcion3”	
: Cycle	
: Lbl op 4	
: Disp “Opcion4”	
: Cycle	
: EndLoop	
: EndPrgm	

Tabla 3

Dialog...EndDlog , crea una caja de dialogo. Con la opción Request , permite el ingreso de datos. Observe el programa que ejemplifica el uso de la estructura en la figura 10.

Programa



Ejecución

Figura 10

Dentro de la estructura Dialog...EndDlog, podemos incluir otros modificadores como DropDown para crear una lista desplegable. En la figura 11 se presenta un ejemplo.

Programa

Ejecución

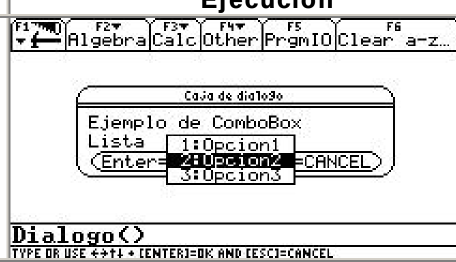


Figura 11

Es posible utilizar un menú flotante, para escoger alguna opción. En la figura 12 se muestra el programa.

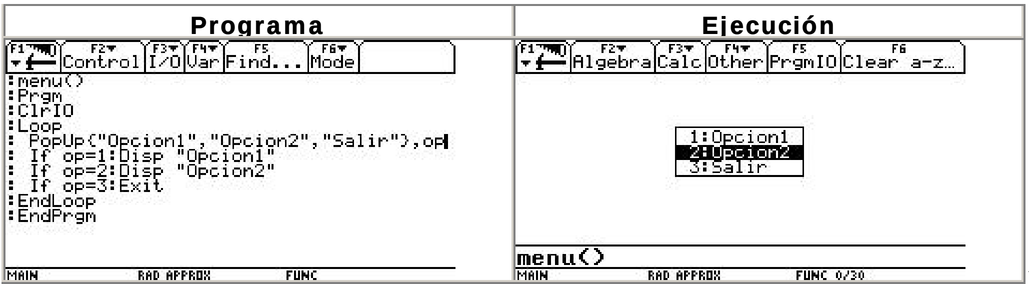


Figura 12

Actividad

Construya un programa utilizando una barra de menú y cajas de diálogo. Pida dos números y, de acuerdo a la opción del menú seleccionada, muestre el resultado de la resta, suma, multiplicación o división de estos.

---

[1] Rubén Darío Guevara. (Universidad del Tolima), Carlos Arturo Mirquez , Ivonne López (Escuela Normal Superior de Ibagué), Carlos Arturo Baquero (Colegio Nuestra Sra de las Mercedes), Alexander Castro Riaño (Ins. Técnico Industrial Jorge E Gaitàn), María Inés Preciado, Ligia del Carmen Díaz (Colegio Inem Manuel Murillo Toro), María Cristina Díaz (Colegio Nacional San Simón), Jorge Luis Aristizabal , Nury Eduarda Vaquero (Colegio San Miguel -Payandé), Martha Machado, Esteban Ortiz Avila (Colegio Comercial Camila Molano).

[2] Taller construido en el marco del proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas*, por Gerson Márquez, Arley Gómez y Carlos Castañeda, estudiantes para profesor que realizaron práctica intensiva en el Colegio Rafael Uribe Uribe J.M, durante el primer semestre del 2002.

Nuevas tecnologías en el estudio de la razón áurea: enfoque variacional

(2 sesiones)

Oscar Alberto Narváez Guerrero & Oscar Fernando Soto Agreda

Universidad de Nariño

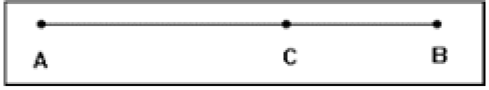
Nivel. Intermedio

Objetivos.

- Abordar el estudio de la *razón áurea* apoyados en el uso de nuevas tecnologías computacionales.

- Establecer relaciones entre las diferentes representaciones semióticas de la *Razón Áurea* (numérica, geométrica, algebraica, etc.), con otros tópicos de la teoría de números (fracciones continuas, números de Fibonacci, etc).

- Profundizar en el manejo de la calculadora TI 92.



Descripción general del taller. El taller está orientado a la construcción de diferentes representaciones de la *razón áurea* y al establecimiento de relaciones entre ellas, además del empleo de diferentes herramientas que ofrece la calculadora TI 92 para construir las fracciones y radicales continuos, los números de Fibonacci, una ecuación de Ramanujan y su relación con la proporción áurea.

Conocimientos previos. Conocimientos básicos de aritmética, geometría, cálculo diferencial. Manejo básico de la calculadora TI 92 .

Programación.

Primer día : contextualización, enfoque geométrico, enfoque variacional.

Segundo día : enfoque aritmético, enfoque analítico, ecuación de Ramanujan

Desarrollo del taller.

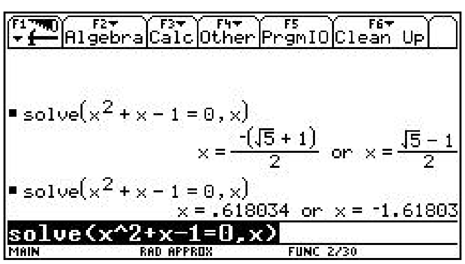
Primera sesión

1. Contextualización de la temática.

1.1. Conceptualización de ***RAZÓN ÁUREA***

El punto C, divide al segmento AB en una RAZÓN ÁUREA, si: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

Figura 1



Con el fin de cuantificar el valor de esta razón, se considera AB = 1, AC = x, CB = 1 – x

Reemplazando en la proporción inicial, resulta:

$1*(1 - x) = x*x$, lo que equivale a decir que $x^2 + x - 1 = 0$

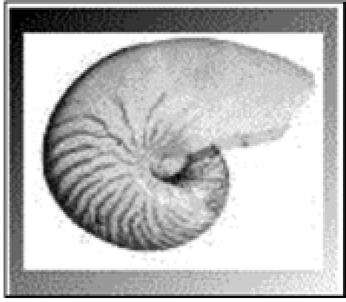
Al resolver esta ecuación en la TI 92, se obtienen los valores que se muestran en la figura 2.

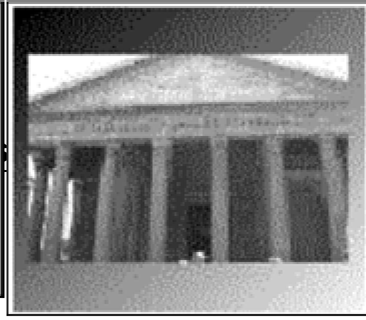
En lo que sigue, estaremos observando continuamente estos valores en diferentes contextos.

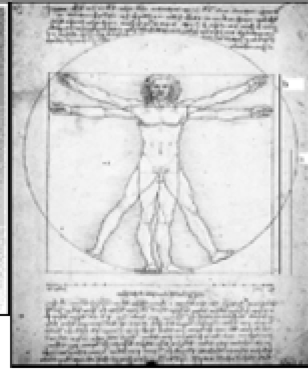
Figura 2

1.2. Antecedentes históricos y algunas de sus aplicaciones.

La razón áurea se conoce desde la época de los griegos, quienes además de su aplicación en la matemática, encontraron aplicaciones en otros campos. Para referirse a la razón áurea, también la denominaban la razón dorada, la razón perfecta, o la divina proporción.







Entre algunas de sus aplicaciones están las fachadas de muchos edificios, como por ejemplo la del Partenón, la cual guarda una proporción aproximada a la razón áurea entre las medidas del ancho y alto de sus entradas. (Figura 3)

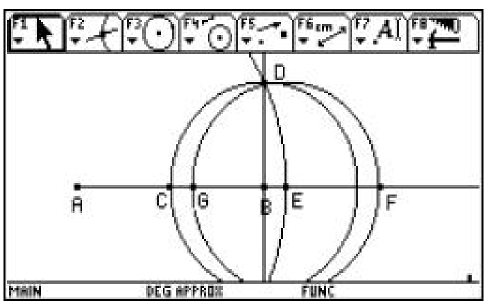
Figura 3

La relación que existe entre una diagonal de un pentágono regular y uno de sus lados es áurea. (Figura 4)

Figura 4

Algo curioso es la presencia de la razón áurea en la naturaleza. Hay enigmáticas conexiones de la espiral de los nautilus (un tipo de caracol) y las espirales de los girasoles, con la razón áurea. (Figura 5)

Figura 5



También los cuerpos humanos exhiben proporciones cercanas a la razón áurea, como puede verse comparando la altura total de una persona con la que hay hasta su ombligo. En el dibujo de la figura 6, Leonardo da Vinci representa las proporciones que podían establecerse en el cuerpo humano, por ejemplo, la proporción áurea.

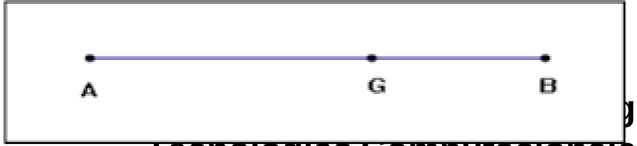
Figura 6

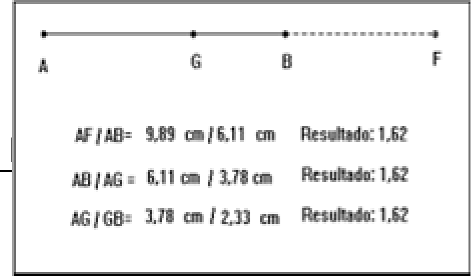
La razón áurea, está íntimamente relacionada con los números de Fibonacci, los cuales entre otras aplicaciones, son de utilidad en la toma de decisiones en la bolsa. En este artículo estudiaremos la relación entre los dos conceptos.

2. Enfoque geométrico

2.1. Definir la razón áurea en un segmento.

Construcción. (Figura 7)





Definir los puntos A y B.

Considerar C punto medio de AB.

Trazar un rayo de origen A que pase por B.

Trazar la perpendicular de AB por el punto B.

Rotar el punto C (con radio BC y centro C) hasta la perpendicular, y llamar a dicho punto D.

Construir la circunferencia de centro A y radio AD. Llamar E al punto de intersección con el rayo AB.

Trasladar el segmento BD, a partir de E. Resultan los puntos F y G.

Figura 7

De esta manera, el punto G divide al segmento AB, en dos segmentos que están en razón áurea.

Ocultando las construcciones auxiliares y mediante las opciones Longitud y Calcular que se encuentran en el menú F6 , se puede verificar que los puntos A, G, B, F, determinan segmentos que están en razón áurea. (Figura 8)

Figura 8

2.2. Construir una MACRO, que divida cualquier segmento en forma áurea.

Considerando la construcción inmediatamente anterior, se oculta el segmento BF. El segmento AB, resulta dividido en razón áurea por el punto G. (Figura 9)

Figura 9

Con el fin de automatizar esta construcción, el usuario puede definir una MACRO, que ahorra construir reiteradamente objetos geométricos.

Mediante la opción F4 + Macro Construction , definir:

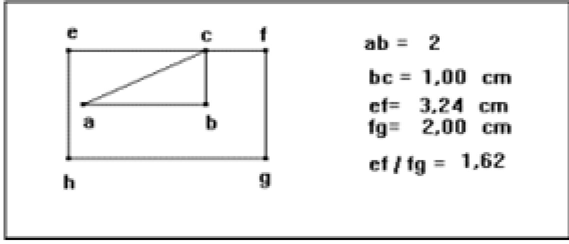
2: Initial objects : Los puntos A y B

3: Final Objects : El punto G

4: Define Macro : Asignar un nombre a la macro, por ejemplo: AUREA1.

El programa está listo para ejecutarse al definir dos puntos, elegir F4 +1 : Execute macro , seleccionar AUREA1 y señalar los puntos construidos. Automáticamente el segmento entre estos puntos queda dividido en razón áurea. Verificar su validez calculando longitudes y planteando las razones correspondientes.

2.3. División sucesiva de un segmento en razón áurea.



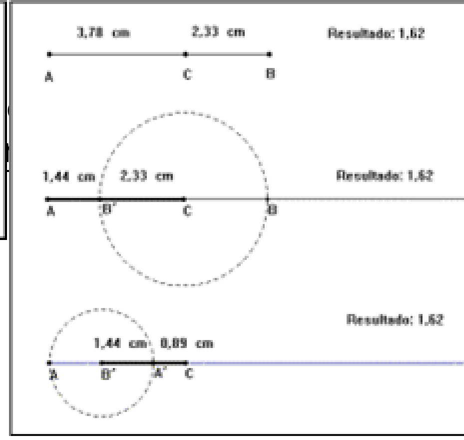


Figura 10

Una vez definida la razón áurea sobre un segmento arbitrario, mediante un simple giro del menor segmento sobre el mayor, se origina un nuevo punto, el cual divide al segmento mayor en razón áurea. Este proceso se puede aplicar indefinidamente.

En la figura 10 se observa el desarrollo de esta idea y se ve que la razón del mayor segmento parcial entre el menor, siempre es áurea.

2.4. Construir un rectángulo áureo cuya base sea un segmento dado. Construir su respectiva macro.

2.4.1. Primera Forma: trazar el triángulo rectángulo ABC, con AB = 2 y BC = 1. Resulta así AC = $5^{1/2}$. Girar AC respecto a C de tal forma que sea paralelo a la base AB. Resulta EC. (Figura 11)

Figura 11

Girar BC respecto a C y obtener F, el cual es colineal a E y C. Se ha formado el lado mayor del rectángulo áureo con longitud $5^{1/2} + 1$.

Se traslada el segmento AB a partir del punto F y perpendicular a EF. A partir de estos dos lados se obtiene el rectángulo áureo EFGH, en el cual los lados EF y FG, están en razón áurea.

Cambiando la longitud de la base AB, para que su valor sea 4, por ejemplo, se observa que la razón áurea se mantiene. (Figura 12)

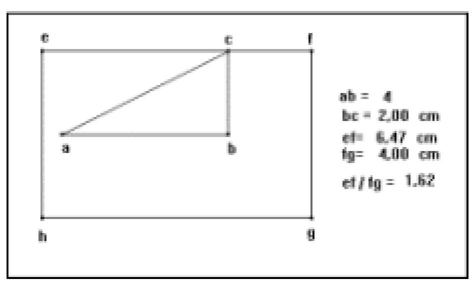


Figura 12

2.4.2. Segunda forma:

Aprovechando la MACRO previamente definida, se divide el segmento dado AB en razón áurea. Se toma como base del rectángulo el segmento inicial AB, y como altura el segmento AC. Se obtiene así el rectángulo áureo ABEF. (Figura 13)

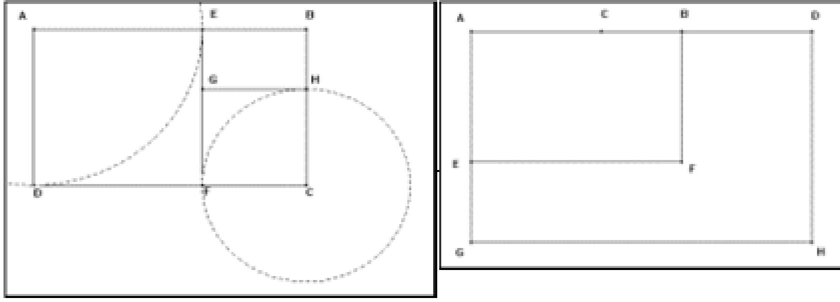


Figura 13

Al construir la razón áurea de un segmento resultan dos soluciones, por lo tanto se puede trazar otro rectángulo áureo: ADHG.

La macro construcción se obtiene al definir como objetos iniciales los puntos A, B y C, en ese orden, y como objeto final el rectángulo áureo.

Secuencia de rectángulos áureos.

Una vez construido un rectángulo áureo, por ejemplo el rectángulo ABCD, a partir de él se puede construir una secuencia de rectángulos áureos contenidos en el inicial. (Figura 14)

AB/AD =	8,47 cm / 5,23 cm	Resultado: 1,62
BC/EB =	5,23 cm / 3,23 cm	Resultado: 1,62
GH/GE =	3,23 cm / 2,00 cm	Resultado: 1,62

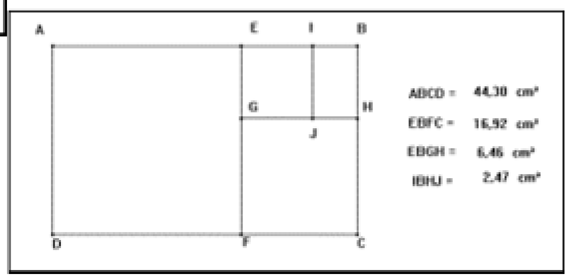


Figura 14

A partir del rectángulo áureo ABCD, se refleja el lado AD, sobre el lado AB, resultando el lado AE. El rectángulo inicial se divide en un cuadrado y un rectángulo, también AUREO!: EBCF. Este nuevo rectángulo se vuelve a dividir y se obtiene otro rectángulo áureo, el EBGH. Este proceso puede continuar indefinidamente.

Con la ayuda de las opciones Longitud y Calculadora, se puede verificar la relación entre los lados de los rectángulos resultantes. En el cuadro 1 se observan algunos resultados obtenidos:

Cuadro 1

Si en la secuencia de rectángulos áureos, examinamos la relación entre sus áreas, se encuentra que éstas forman una progresión geométrica, con razón 2.62, es decir F^2. (Figura 15)

Figura 15

En este caso particular, se obtuvieron los resultados {44.30, 16.92, 6.46, 2.47, ...}. Al dividir los números consecutivos se obtiene: 44.30 / 16.92 = 16.92 / 6.46 = 6.46 / 2.47 = ... 2.62 $= F^2$

Construcción de figuras geométricas a partir de la razón áurea

El Pentagrama Esotérico es un pentágono regular, cuya la razón entre la diagonal y el lado es áurea. Para construirlo, trazar inicialmente el pentágono regular, empleando la opción Polígono Regular, o el procedimiento geométrico tradicional. (Figura 16)

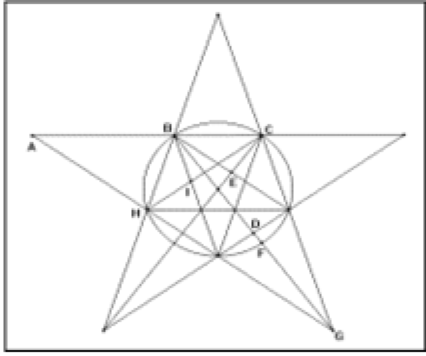


Figura 16

Trazar luego las diagonales del pentágono. Al medir cualquier diagonal y dividir esa longitud entre cualquiera de los lados, se encuentra que dicha razón es la razón áurea. Por ejemplo: $\frac{HC}{BC} = \Phi$

De igual manera se comprueba que:

F = AB/BC = CH/BC = IC/HI = 2DE/EF = EG/2DE = $(EG/EF)^{1/2}$

A partir de los resultados anteriores, resulta importante indagar sobre cuál será el comportamiento de otras figuras geométricas regulares, tales como el hexágono, heptágono, etc.

3. Enfoque variacional

3.1. En un rectángulo áureo estudiar la relación entre su base y su área, y entre su altura y su área.

A partir de un rectángulo áureo, y con la opción F4 + 9: Measurement Transfer, realizar una representación cartesiana de la relación entre la base y el área, obteniendo una curva (F4+A: Locus) , la cual como se verá, es una parábola. Aprovechando el dinamismo de la representación, al variar la base del rectángulo, también varía el área. En la gráfica cartesiana de la figura 17 se observa dinámicamente esta relación.

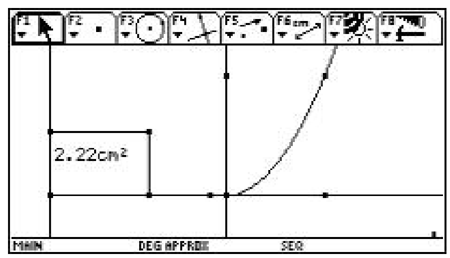


Figura 17

Mediante la opción F6 + Collect data + 2: Define Entry y 1: Store Data , recolectar en una variable del sistema SYSDATA, los valores cambiantes de la base y el área, los cuales se pueden observar en APPS + Data Matrix Editor +1: current . (Figura 18)

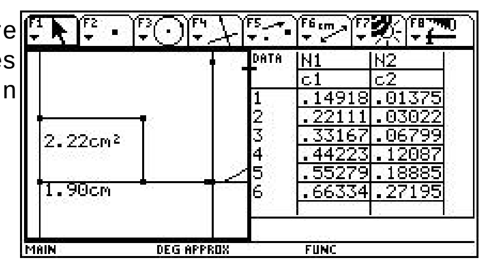
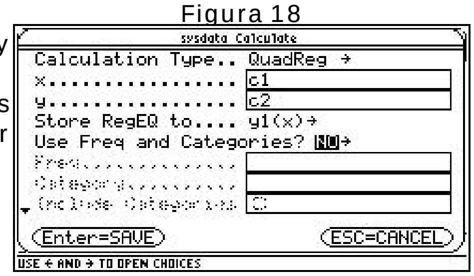


Figura 18

Con el fin de determinar el tipo de relación funcional entre la base y el área, en el menú F5 Calc , seleccionamos QuadReg (Regresión cuadrática) e indicamos las columnas C1 y C2, como las variables a relacionar. Almacenamos la relación en una función, por ejemplo y1(x). Al confirmar con ENTER , se obtiene:



Y1(x) = 0.618034X = (1/ F)x^2 (Figura 19)

Figura 19

Los coeficientes b y c son prácticamente cero. (Figura 20)

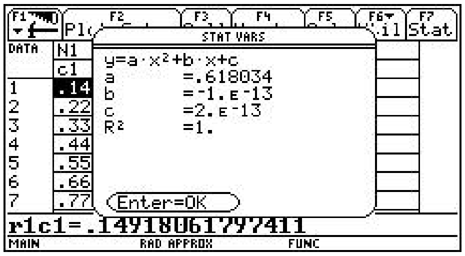


Figura 20

Mediante la opción ¨ Y=, observar la relación funcional entre las dos variables, la cual se puede graficar en el rango deseado y también calcular algunos elementos propios de una curva, como máximos, mínimos, puntos de inflexión, ceros, etc. También se puede generar una tabla de valores con los incrementos que se quiera. (Figura 21)

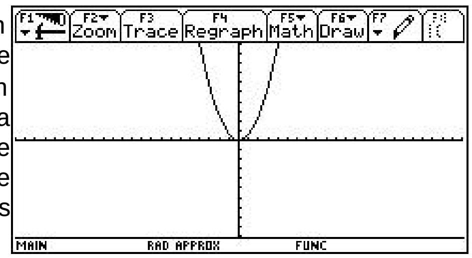


Figura 21

Representación gráfica con la ventana estandar

Con la opción F3 Trace , recorrer la gráfica y observar las coordenadas de los puntos para corroborar su relación.

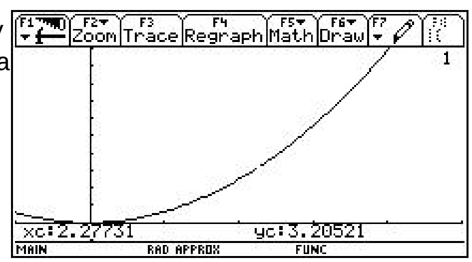


Figura 22

Por medio de ¨ TblSet y ¨ TABLE, se puede configurar y obtener una representación numérica de la función. (Figura 23)

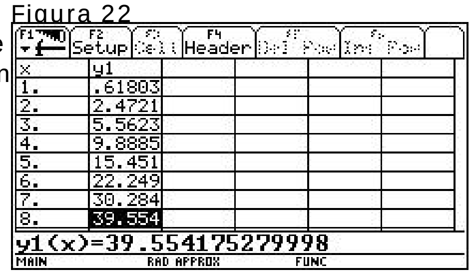


Figura 23

Sugerimos al lector analizar la relación entre la altura y el área de un rectángulo áureo.

Segunda sesión

4. Enfoque aritmético

4.1. La razón áureaF y su inversa F ´.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, se puede verificar que: F^2 - F – 1 = 0

Resolviendo la ecuación se obtienen dos valores que la satisfacen, la razón áurea y su inversa. (Figura 24)

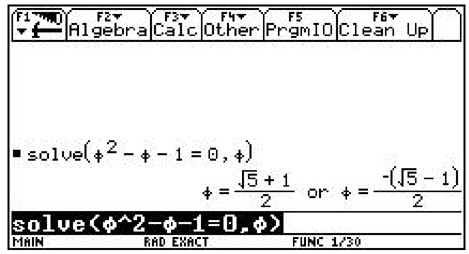


Figura 24

Por lo tanto las relaciones entre F y F ´ son: F . F ´ = -1 y F + F ´ = 1

4.2. Construcción de una función recursiva que permita conseguir aproximaciones al número áureo, mediante fracciones continuas simples:

Variables en el editor HOME:

Examinemos la relación entre la razón áurea F y la fracción simple continua [1;1,1,1,1,...]. (Figura 25)

Figura 25

Como F^2 = F + 1, dividiendo entre F, resulta F = 1 + 1/ F. Y reemplazando a F en el segundo miembro, se obtiene: F = 1 + 1+/(1 + F).

Continuando el proceso, se encuentra que F es equivalente a la fracción continua simple [1;1,1,...].

Examinemos esta relación en la TI 92:

En la pantalla HOME , mediante la instrucción STO>, almacenamos inicialmente 1 en F , quedando en memoria el valor 1. En un segundo paso, almacenamos 1+ 1/ F en F, quedando en memoria el valor 2. Al repitir el segundo paso en forma reiterada, se genera la fracción simple y continua [1;1,1,1,1,...], proceso que genera una secuencia de valores que se aproximan a la RAZÓN ÁUREA!. (Cuadro 2)

INSTRUCCIÓN	OPERACIÓN	RESULTADO
1 STO> F	1 = 1	1
1+ 1/ F STO> F	1 + 1/1 > F	2

INSTRUCCIÓN	OPERACIÓN	RESULTADO
1+ 1/ F STO> F	1 + ½ > F	3/2 = 1.5
1+ 1/ F STO> F	1 + 1/(3/2) > F	5/3 = 1.66666
1+ 1/ F STO> F		1.6
1+ 1/ F STO> F		1.625
1+ 1/ F STO> F		1.615384615
1+ 1/ F STO> F		1.619047619
1+ 1/ F STO> F		1.617647059
1+ 1/ F STO> F		1.618181818

Cuadro 2

Función Recursiva:

La representación anterior da pistas para generar una secuencia de números, a partir de cada término inmediatamente anterior.

Acceder a la opción MODE , activar GRAPH / SEQUENCE , para entrar en el modo de sucesiones o series. Mediante ¨ Y=, activar el editor de funciones e ingresar:

U1 = 1 + 1 / U1(N – 1)   Término enésimo de la sucesión

Ui1 = 1   Primer término

Obtener su gráfica, primero en zoomstandard y luego para los 20 primeros términos. (Figura 26)

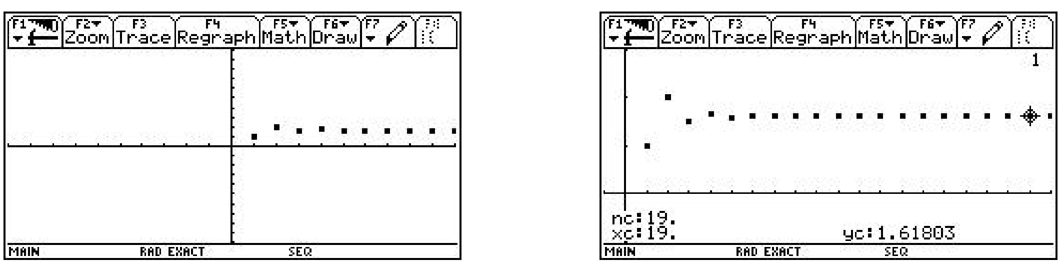


Figura 26

La figura 27 muestra dos registros numéricos:

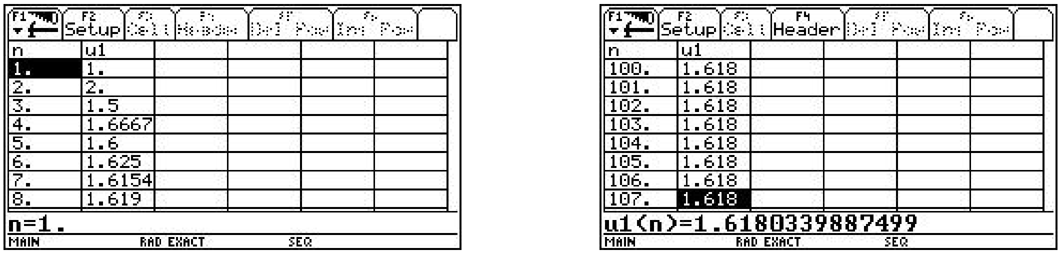


Figura 27

Observar que los términos se acercan a la razón áurea. Un problema de este proceso es que consume mucha memoria y a medida que se calculan términos más alejados el proceso se vuelve más lento.

Una Función

También se pueden definir funciones propias en la TI 92, para lo cual se emplea la opción Define.

En la pantalla HOME, digitamos:

Define Fcs(n) = When(n = 1, 1, 1 + 1/Fcs(n-1)). (Figura 28)

Fcs es un nombre arbitrario para la función.

La sintaxis indica que cuando n=1, el valor de la función es 1 y en otro caso se calcula mediante la expresión 1 + 1/Fcs(n-1).

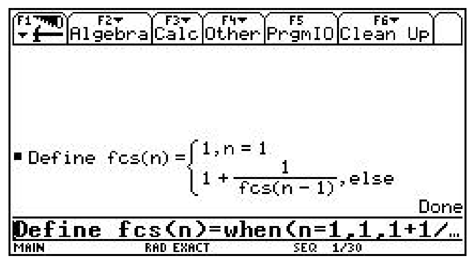


Figura 28

En la figura 29 se aprecian algunos resultados.

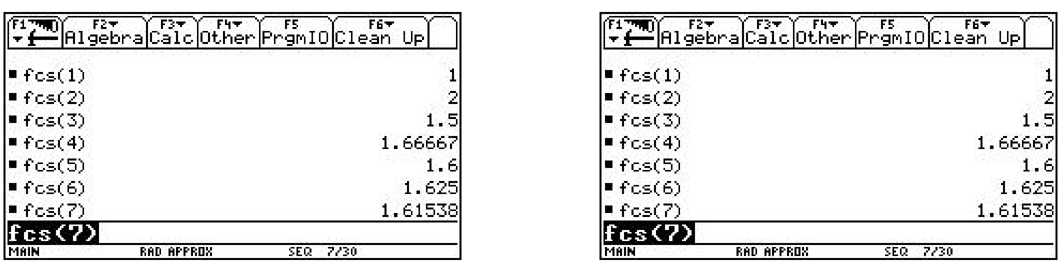


Figura 29

Determinar fcs para: 15, 20, 25, 30, 50, 100. Con base en los resultados, formular conclusiones.

Un Programa:

Determinar la relación entre la razón áurea y las fracciones continuas simples, mediante la opción APPS / Program Editor / New / progfcs, e ingresar la lista de instrucciones, como aparece en la figura 30.

Figura 30

En el cuadro 3 se indica el significado de cada instrucción:

SINTAXIS	DESCRIPCIÓN
Progfcs( )	*Nombre del programa*
Prgm	*Identificador de un programa*
Request “ingrese un entero n”, n	Ventana de dialogo y captura del valor de n
Expr(n) STO> n	*Almacena el valor capturado en n*
1 STO> raurea	*Almacena 1 en raurea*
F or i , 1, n , 1	*Inicio Ciclo for*
1 + 1/ raurea STO> r aurea	*Expresión a evaluarse en el ciclo*
Endfor	*Fin ciclo for*
Disp raurea	Presentar por pantalla el valor de raurea
EndPrgm	*Fin del programa*

Cuadro 3

El siguiente paso es ejecutar el programa, para lo cual vamos a pantalla HOME y digitamos:

Profcs()

El programa pide escribir un entero que indica la imagen de la función que se desea observar. En el caso que se presenta en la figura 31 se digitó el número 1, y el resultado es 2.

Figura 31

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c+\ldots}}}$$

En la pantalla de la figura 32 se han calculado los 8 primeros valores de la fracción continua simple.

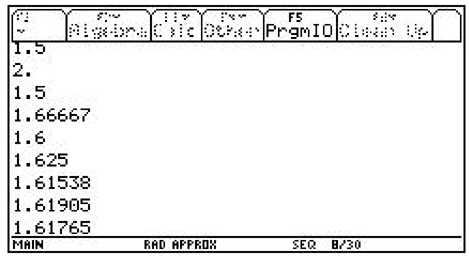


Figura 32

4.3. Construcción de una función recursiva que permita aproximar la razón áurea utilizando radicales continuos o raíces cuadradas anidadas.

Un radical es continuo si es de la forma:

En particular a, b, c, ..., pueden ser iguales, y en este caso si su límite es L, aplicamos la relación $N = L^2 - L$ para determinar la forma que toma el radical.

Si se desea un radical continuo que converja a 3, aplicando la relación, se obtiene: $N = 3^2 - 3 = 6$ de donde resulta la igualdad $3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$

Aplicando lo anterior a la razón áurea, se obtiene: $N = F^2 - F = (F + 1) - F = 1$

El radical continuo asociado a la razón áurea es:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Con esta nueva relación, se puede hacer un trabajo similar al de las fracciones continuas simples. A continuación se indica en forma resumida este aspecto.

Variables en el editor HOME:

Almacena 1 en F: 1 STO> F 1

Almacenar $(1 + F)^{½}$ en F: $(1 + F)^{½}$ STO> F 1.4142...

Al continuar este proceso de almacenamiento se aproxima a la razón áurea.

Una función recursiva:

En modo SEQUENCE , en el editor de funciones, ingresar:

$U1 = (1 + U1(N - 1))^{1/2}$

Ui1 = 1

La figura 33 muestra una de sus gráficas y una representación numérica:

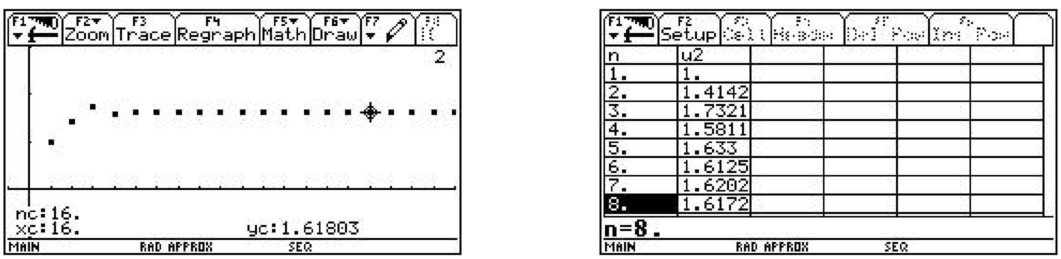


Figura 33

Una Función definida por el usuario.

Define Rcs(n) = When(n = 1, 1, $(1 + Rcs(n-1))^{1/2}$) (Figura 34)

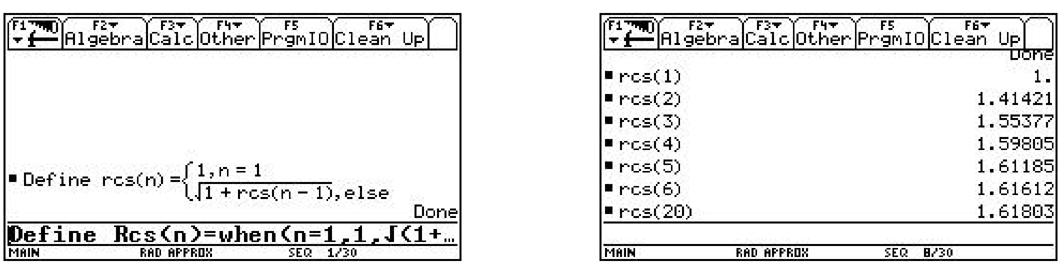


Figura 34

Un programa

ProgRcs( )

Prgm

Request "INGRESE UN ENTERO N", n

Expr(n) à n

1 à raurea2

For i, 1, n, 1

$(1 + \text{raurea2})^{1/2}$ à raurea2

EndFor

Disp raurea2

EndPrgm

Digitar el programa, calcular algunos resultados y comparar con los obtenidos con fracciones continuas simples.

Enfoque analítico

Abordar el estudio de la secuencia de Fibonacci, por medio de las diferentes representaciones desarrolladas en el numeral anterior.

Ejemplos:

Función recursiva. (Figura 35)

U1 = U1(N – 2) + U1(N – 1)

Ui1 = {1, 1}

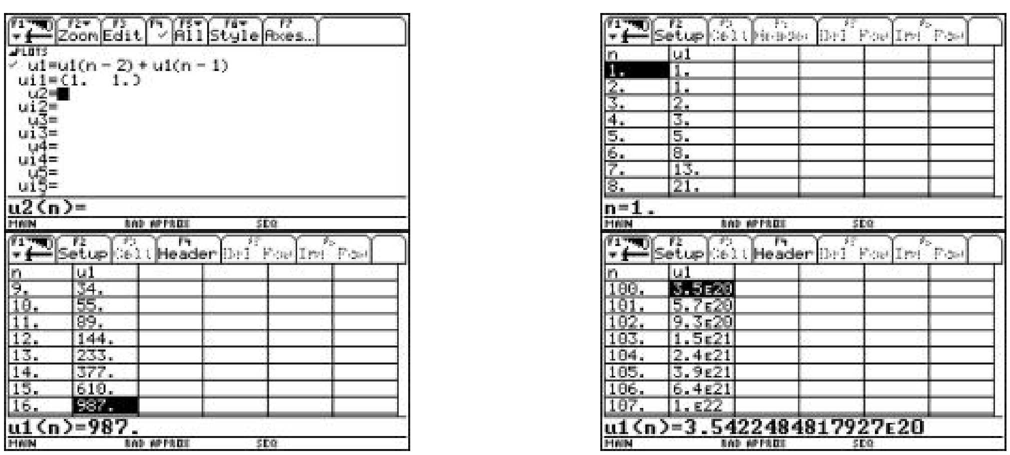


Figura 35

Función de usuario:

Define Fib(n) = when(n<3, 1, Fib(n - 1) + Fib(n - 2))

Si las Potencias de F, están dadas por:

$F^0 = 1$

$F^1 = F$

$F^2 = F + 1$

$F^3 = 2F + 1$

$F^4 = 3F + 2$

$F^5 = 5F + 3$

Etc.

- establecer la relación existente entre las potencias sucesivas de la razón áurea y la secuencia de Fibonacci.

- definir la secuencia de dos números de Fibonacci consecutivos.

- examinar las secuencias anteriores en rangos arbitrarios

- determinar el límite en el infinito del cociente de números de Fibonacci consecutivos:

Lim Fib(n+1) / Fib(n)

N à8

Ecuación de Ramanujan

Mediante el uso de las diferentes representaciones que permite la TI 92 , abordar el estudio de la ecuación de Ramanujan, la cual curiosamente contiene la razón áurea.

$$\frac{1}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\frac{e^{-6\pi}}{1+\ldots}}}} = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]\cdot e^{\frac{2\pi}{5}}$$

La derivada como razón de cambio - Simulación (2 sesiones)

Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander

Nivel . intermedio

Objetivos.

- Utilizar la simulación en Cabri como un modelo de representación visual que permita comprender el concepto de derivada como razón de cambio.

- Utilizar otras aplicaciones de la TI 92 para el análisis y la comprensión de los conceptos del problema planteado.

Descripción general del taller. Partiendo de un problema de razones afines simulado en la calculadora, se realiza un análisis de la variación para llegar a la representación gráfica y algebraica de la función que relaciona las variables del problema. A través de la recolección y el análisis de datos, se llega a una aproximación del concepto de derivada como razón de cambio. Si el tiempo lo permite se trabajará la construcción de la simulación.

Conocimientos previos .

Conceptos de función y límites.

Manejo del Cabri y otras aplicaciones de la calculadora TI 92

Programación.

Primer día : iniciación del desarrollo del problema.

Segundo día : continuación del desarrollo del problema, construcción de la simulación.

Desarrollo del taller.

Planteamiento del problema

Una alberca de 4m de largo, 1.10 m de ancho, 2m de profundidad en un extremo y 0.5m en el otro se está llenando de agua.

Abra el archivo **alberca [1]** y responda las siguientes preguntas:

a. Anime el tiempo durante 15 segundos aproximadamente empezando en 0.0 y describa lo que observa.

¿Cuáles son las magnitudes variables en el problema? ¿Estas magnitudes siempre varían hasta llenarse la alberca?

b. Realice una tabla determinando el valor de la profundidad (p), el largo (l) y el volumen (V) cuando el tiempo (t) es igual a: 1s, 5s, 9s, 12s, 14s, 15s.

c. Utilizando la opción de agrupar datos, construya una tabla con los valores de t, p, l y V en las columnas C1, C2, C3, C4 respectivamente para 0 £ t < 15.

· ¿Qué relación existe entre la profundidad y el largo de la alberca?

· ¿Esta relación se mantiene durante todo el tiempo en que dura llenándose la alberca?

· ¿Cuál es el valor de p, l, y V en la tabla cuando t = 1, 5, 9, 12, 14, 16 segundos?

· ¿Qué sucede con el largo y el volumen cuando t ^{3} 9?, ¿cómo interpreta este hecho?

d. En la calculadora defina la relación entre el largo y la profundidad y cópiela en plot 1. Visualice los datos en el editor gráfico.

e. Exprese algebraicamente el largo en función de la profundidad. Según esta expresión, ¿Cuál es el largo cuando p = 1.6?

f. Represente gráficamente esta función. ¿Cuál es el dominio y el rango?

g. En la calculadora defina (F2-F1) la relaciones entre profundidad-tiempo, largo-tiempo y visualice los datos. Halle las expresiones algebraicas que representan el largo en función del tiempo y la profundidad en función del tiempo. Represente gráficamente estas funciones. ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de ellas?

h. Exprese algebraicamente el volumen en función de la profundidad y en función del tiempo. Represente gráficamente esta función y determine su dominio y rango.

Revise la tabla de los datos obtenida en el literal c.

a. Analice la variación de la profundidad con respecto al tiempo y describa lo que observa.

b. Realice los siguientes cálculos para los intervalos de tiempo dados y complete la tabla 1.

Intervalo de tiempo Δt	Δp	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
(0.95 , 1)		
(0.96 , 1)		
(0.97 , 1)		
(0.98 , 1)		
(0.99 , 1)		
(1 , 1.05)		
(1 , 1.04)		
(1 , 1.03)		
(1 , 1.02)		
(1 , 1.01)		

Tabla 1

¿Aproximadamente cuál es la razón de cambio de la profundidad con respecto al tiempo alrededor de 1s?

c. Para ser más exacto, tome más datos alrededor de t =1 de la siguiente manera:

· Borre los datos tomados anteriormente en el archivo SYSDATA.

· Cambie el tiempo a 0.990.

· Seleccione el tiempo, la profundidad, el volumen y registre los datos en SYSDATA, hasta que el tiempo sea 1.010. (Δt = 0.001).

Halle la razón de cambio entre la profundidad y el tiempo para Δt = 0.001 de la siguiente manera:

- Ubíquese en C5 y escriba C5 = shift(C2,1). Compare las columnas C5 y C2. ¿Qué observa?

- Ubíquese en C6 y escriba C5 -C2.

- Halle la razón entre la variación de la profundidad y la variación del tiempo 0.001 ubicándose en C7 y escribiendo C7= C6/0.001.

¿Aproximadamente a qué valor tiende esta razón alrededor de 1?

d. Repita el anterior proceso variando el tiempo desde 0.9990 hasta 1.0010 (Δt = 0.0001). ¿Aproximadamente a qué valor tiende la razón de cambio entre la profundidad y el tiempo (rapidez) alrededor de t = 1?

e. ¿Cuál es la razón de cambio entre la profundidad y el tiempo para t =1 cuando Δt tiende a cero?

f. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando tiene 1mt de profundidad en el extremo más hondo? (razón de cambio de la profundidad con respecto al tiempo)

g. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando tiene 1.7m de profundidad en el extremo más hondo?

h. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen cuando la profundidad es de 1.7 m?

Construcción de la simulación

Archivo *alberca*

Construcción del sólido

· Edite los números 4, 2, 1.5, 1.1 y 1.0 (Medidas de la alberca y el tiempo)

· Represente una semirrecta vertical en el lado izquierdo de la pantalla.

· Transfiera sobre la semirrecta las medidas 2 y 1.5.

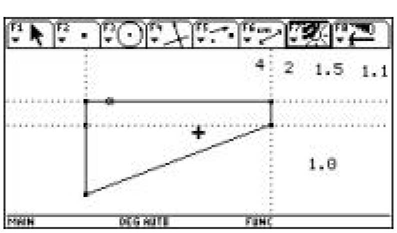
· Trace un segmento desde donde inicia la semirrecta hasta el punto que representa la longitud de 1.5 y otro segmento desde este punto hasta el punto que representa la longitud 2.

· Trace una perpendicular a la semirrecta o al segmento desde este último punto.

· Trace una semirrecta desde el punto que representa la longitud 2 sobre la recta perpendicular y oculte el punto que queda sobre la recta y la semirrecta.

· Transfiera el número 4 a la semirrecta horizontal y trace una perpendicular a ésta desde el punto transferido.

· Trace una perpendicular desde el punto superior del segmento de longitud 1.5 a este segmento o a la semirrecta inicial. (Figura 1)



· Halle el punto de intersección entre estas dos perpendiculares y ocúltelas con la semirrecta horizontal.

· Trace el cuadrilátero con vértices en el inicio de la primera semirrecta horizontal, el punto que representa la longitud 2, el que representa la longitud 4 y el punto de intersección de las dos perpendiculares.

· Trace una semirrecta desde el vértice superior izquierdo con una inclinación respecto a la horizontal de aproximadamente 45 grados y transfiera sobre ella el número 1.1.

· Trace un vector desde el inicio de la anterior semirrecta hasta el punto que representa la longitud 1.1.

· Traslade el cuadrilátero en la dirección del vector y oculte la semirrecta y el vector.

· Una con segmentos cada vértice del polígono y su respectiva imagen.

· Represente a trazos el polígono imagen y el segmento que une el vértice inferior izquierdo con su imagen

· Trace un segmento desde el vértice superior izquierdo hasta el superior derecho del polígono imagen y otro desde este punto hasta el vértice inferior derecho.

Simulando el agua

· Calcule la raíz cuadrada del número 1.0 (que va a representar el tiempo) y divídalo entre dos. (Figura 2)

NOTA: si quiere que la variación de la profundidad con respecto al tiempo sea constante tome el tiempo y multiplíquelo o lo divídalo por una constante (esto para que la variación no sea un centímetro por cada unidad de tiempo).

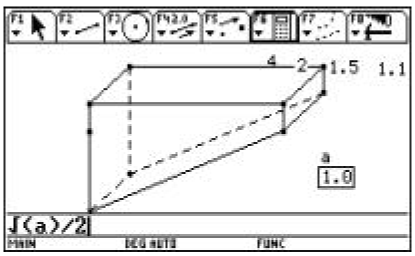


Figura 2

· Marque un punto en algún lado de la pantalla y transfiera el anterior resultado a este punto. Luego, con la opción compás, transfiera esta medida al segmento de longitud 1.5 y halle la intersección entre este segmento y la circunferencia formada. (Figura 3)

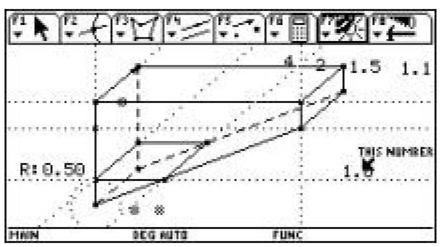


Figura 3

· Trace una perpendicular al segmento por este punto y halle la intersección entre la perpendicular y el lado del cuadrilátero.

· Trace paralelas al segmento que representa el ancho de la alberca (medida 1.1) que pasen por los dos últimos puntos.

· Halle las intersecciones de estas rectas con los lados del polígono imagen.

· Trace el cuadrilátero que tiene como vértices estos últimos cuatro puntos.

· Oculte las rectas, la circunferencia y los puntos transferidos.

· Trace una semirrecta desde el vértice inferior derecho sobre el polígono y oculte el punto que se formó.

· Cambie el número que representa el tiempo a 11 y calcule la diferencia entre el tiempo y 9 y divídalo entre 10: (11-9)/10.

· Transfiera este resultado hasta la última semirrecta y trace una perpendicular a ella por este punto.

· Halle la intersección entre la perpendicular y el segmento del lado izquierdo del polígono de longitud 0.5.

· Por este punto trace una paralela al segmento de longitud 1.1 y otra paralela por el punto transferido a la semirrecta vertical.

· Halle la intersección de estas paralelas y el polígono imagen.

· Trace el polígono que tiene como vértices estos últimos cuatro puntos.

· Oculte las rectas y la semirrecta.

Calculando el volumen

· Calcule la distancia entre los dos puntos que representan la profundidad de la alberca cuando esta es mayor que 1.5 y llámelo (p =).

· Calcule la longitud entre los dos puntos del polígono que representan el largo de la alberca y llámelo (l =). (Asegúrese que sean los vértices del polígono).

· Calcule el volumen (V =) para p mayor que 1.5 como la suma de 3.3 y el producto de 1.1 por 0.20 por l = 4.00cm. (Figura 4)

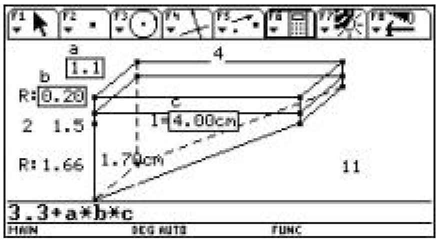


Figura 4

· Oculte los resultados R:0.20 y R:1.66 y mueva los valores editados inicialmente a cada uno de los lados del sólido que representa la alberca.

· Cambie el número que representa el tiempo a 1.0.

· Calcule la distancia entre los dos puntos que representan la profundidad de la alberca cuando esta es menor que 1.5 y llámelo (p =).

· Calcule la longitud entre los dos puntos del polígono que representan el largo de la alberca y llámelo (l =). (Asegúrese que sean los vértices del polígono).

· Calcule el volumen (V =) para p menor que 1.5 como el producto de 1.1 por p =0.50cm por l =1.33cm y divídalo entre 2.

· Oculte los objetos que considere necesarios para visualizar mejor la simulación y engruese las líneas del polígono inicial (cara frontal) los segmentos de la cara superior y de la lateral derecha. (Figura 5)

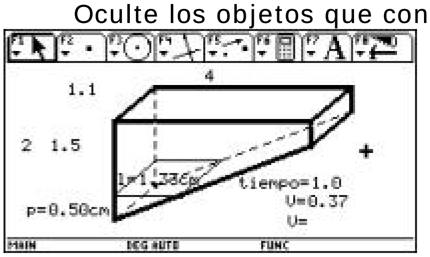


Figura 5

· Cambie el número que representa el tiempo a 0.0 y anime este valor.

Una aproximación a las nociones de área y perímetro en el ambiente de geometría Cabri (2 sesiones)

Diego Garzón Castro

Octavio Augusto Pabón Ramírez

Edinsson Fernández Mosquera

Universidad del Valle

Nivel. Intermedio

Objetivos.

- Abordar sistemáticamente la resolución de situaciones problemáticas relacionadas con problemas de área y perímetro, abordadas tanto en el ambiente de lápiz y papel como en el ambiente de geometría Cabri.

- Proporcionar algunos elementos de discusión que posibiliten la formulación de propuestas de intervención en el aula que permitan que los alumnos sean capaces de utilizar productivamente y de forma diferenciada los conceptos de perímetro, área y sus medidas.

- Generar una discusión en torno a las competencias relacionadas con el concepto de conservación del área, la aproximación de áreas de superficies mediante la triangulación o la cuadrícula, la iteración de la unidad entre otros. Contempla en este sentido aspectos como: precisión, uso de unidades, medidas directas e indirectas, estimación.

Descripción general del taller. En una primera instancia se aborda una discusión didáctica relativa a los problemas de la enseñanza de las nociones de área y perímetro. En tal sentido, se discute sobre la confusión entre perímetro y área, a la luz de una metodología tradicional basada en el dibujo. Como alternativa se retoman actividades que las investigaciones han mostrado como potentes para distinguir el área del perímetro, a saber:

- Ejemplos de figuras que a pesar de dimensiones engañosas, tengan la misma área (tales como paralelogramos de la misma base y altura).

- Ejemplos de figuras que a pesar de engañosas coincidencias en sus dimensiones lineales, tengan distinta área (como el rombo obtenido por flexión del cuadrado).

Estas dos ideas se pueden trabajar con mecanos, cuerdas y figuras en cartulina.

- Con una cuerda de una longitud dada (fija), construir diferentes figuras (perímetro constante).

- Con un número fijo de cuadrados o triángulos hechos en cartulina, construir diferentes polígonos (área constante).

En un segundo momento del taller se realiza el trabajo con la calculadora TI 92 a partir de una secuencia de situaciones en el ambiente Cabri:

- Construir rectángulos de igual perímetro y observar que sucede con el área cuando se modifica la forma del rectángulo.

- Construir rectángulos de igual área y de la misma forma observar lo que sucede con el perímetro.

Conocimientos previos. Conocimientos básicos de geometría y manejo básico de la TI 92 .

Programación.

Primer día : fundamentación teórica. Trabajo en grupo en ambiente de lápiz y papel. Trabajo con la calculadora.

Segundo día : fundamentación teórica. Trabajo en grupo en ambiente de lápiz y papel. Trabajo con la calculador

Desarrollo del taller.

Trabajo con la calculadora TI – 92 y el Programa CABRI

Utilizando el programa Cabri de la Calculadora TI 92 , desarrolle las siguiente actividades

1. Calcular el área de la superficie S1 de la figura 1 tomando como unidad de área U1"

Sugerencia:

Utilice la opción rejilla de puntos del programa CABRI

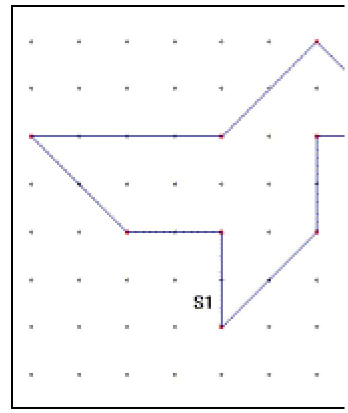
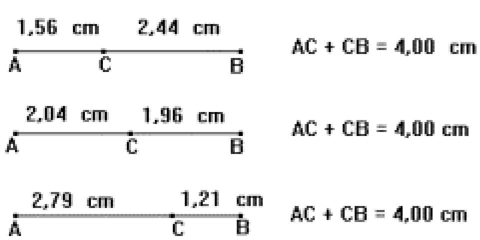


Figura 1

2. Construir rectángulos de igual perímetro y observar qué sucede con el área cuando se modific del rectángulo.

3. Construir rectángulos de igual área y de la misma forma observar lo que sucede con el perímetro.

Para construir rectángulos de igual perímetro se sugiere fijar un cierto valor para el perímetro, o sea para la su lados: *Perímetro = 2a + 2b, con a y b como lados del rectángulo.* Fijar el perímetro significa mantener fija los lados a y b. Para esto, se construye un segmento AB y un punto C móvil sobre ese segmento.



Si se toman a AC y CB como lados de un rectángulo, se tiene una suma de dos de sus lados fija e igual a AB, y u perímetro fijo igual a 2 x AB. Al mover un punto C sobre el segmento AB se obtienen diferentes medidas para los un rectángulo, conservando el perímetro fijo.

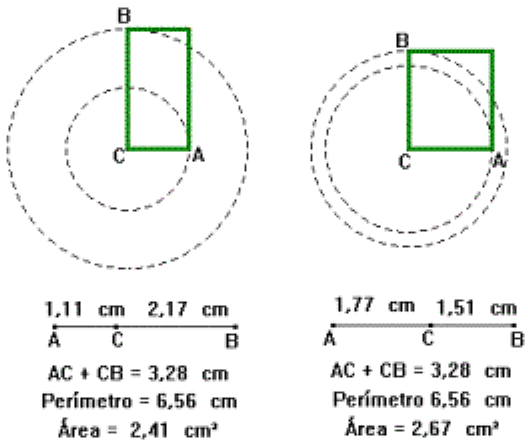
Ahora vamos a construir rectángulos cuyos lados sean AC y CB:

§ A partir de dos segmentos AC y CB construidos perpendicularmente, construir dos círculos concéntricos, AC y CB (utilice la herramienta compás).

§ Construir un rectángulo sobre dos radios perpendiculares,

§ Calcular el perímetro de ese rectángulo.

§



Mover el punto C que está sobre el segmento AB construido inicialmente y observar lo que sucede.

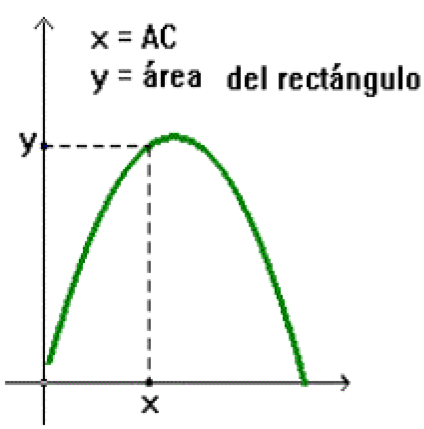
Figura 2

Observar la variación del área del rectángulo.

· Para C próximo a A el área es casi cero.

· A medida que C se aleja de A, el área va aumentando.

· El área obtiene su mayor valor en el cuadrado.



·
A medida que C se aproxima a B el área va disminuyendo.

3. Construir rectángulos de igual área.

Para fijar un valor del área de un rectángulo, precisamos fijar el producto de sus lados, pues como sabemos:

Área = a. b, con a y b como lados del rectángulo

Pero ¿cómo se puede construir un producto constante? Para esto se va a utilizar el siguiente teorema: Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se interceptan en un punto P, el producto PA . PB es igual al producto PC . PD. (Figura 3)

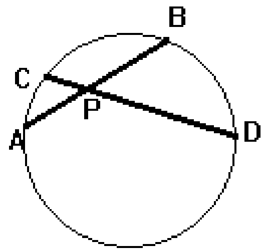


Figura 3

A partir de este teorema se pueden construir rectángulos de la misma área. Basta seguir una construcción como la siguiente:

- Construir una circunferencia y un punto P fijo en su interior.
- Construir un punto A sobre la circunferencia.
- Construir una cuerda AB que pase por el punto P (construya inicialmente una recta AP y después la cuerda). (Figura 4)

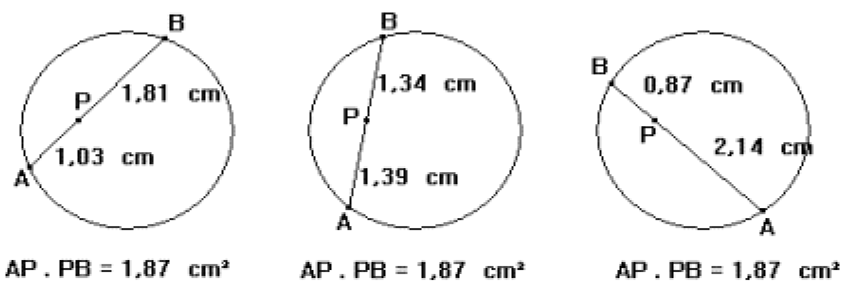


Figura 4

Se puede construir ahora un rectángulo:

- Usando los segmentos PA y PB ya construidos, construir dos circunferencias concéntricas de radios PA y PB (utilice la herramienta compás)
- Construir un rectángulo sobre dos radios perpendiculares;
- Calcular el área de este rectángulo
- Mover el punto A construido sobre el círculo y observar lo que sucede con el área del rectángulo construido. (Figura 5)

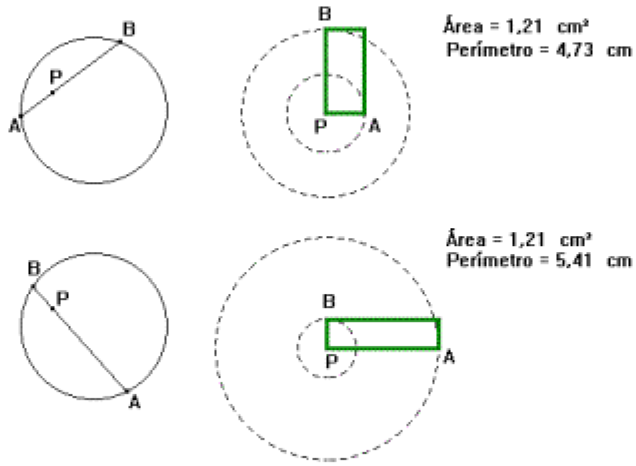


Figura 5

El gráfico de la figura 6 da una variación del perímetro del rectángulo en función de la distancia de A a P.

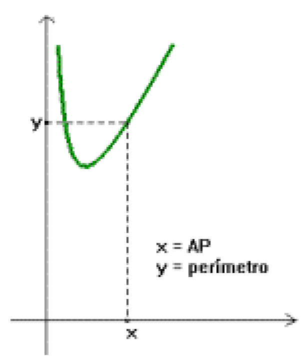


Figura 6

Algunas preguntas que pueden plantearse son:

- ¿Cuándo el perímetro es mínimo?
- ¿Cuándo el perímetro es máximo?

Para concluir

Una División Premiada. Un granjero planea dividir un terreno de forma triangular entre su hijo y hija. Como él quiere ser escrupulosamente justo, le gustaría que los dos pedazos en que se divida el terreno tengan no solo áreas iguales sino también perímetros iguales. ¿Dónde debe dibujar la línea divisoria?

Fuente: El MathTrek de Ivars Peterson

---

[1] En el archivo *alberca* se encuentra la simulación en la que se llena una alberca con agua. Este archivo se describe en la parte final del taller.