Plenarias

Computer algebra systems for the 21st century: new kind of dynamic representations [1]

James J. Kaput

Universidad de Massachusetts - Dartmouth , United States

Resumen. La idea central de la presentación es la extensión de las representaciones, heredadas de los medios dinámicos en el siglo 21, y cómo estas van más allá de lo que anteriormente era posible en términos de construir las grandes ideas de la Matemática del Cambio y la Variación, incluyendo las ideas subyacentes al Cálculo, en formas más accesibles para nuevas poblaciones de estudiantes.

Three Starting-Point Trends and Assumptions

We begin by listing some working assumptions concerning three trends: (1) the evolving importance of the graphical side of quantitative reasoning in tomorrow's society for the great majority of citizens (both technical specialists and the population in general), (2) the changing roles of the technologies that we use in mathematics education, and (3) the changing nature of the technologies that we use in mathematics education. The first trend suggests that we are undergoing a deep evolution in underlying representational infrastructures due to the computational medium. The second involves a widening of the roles of technology from assisting with the manipulation and linking of notations towards supplying links to phenomena that are embodied in the wider world that has existed apart from mathematical notations and from computers to include, or at least tightly link to those phenomena within the cybernetic universe. The third simply reflects the diversification of technologies that is rapidly turning, to include more personal and portable devices that are increasingly networkable. In discussing these trends and our assumptions regarding them, we will offer some concrete examples of more graphically intensive approaches to substantial mathematics intended to illustrate the need for deep review of appropriate content that has historically been approached through extended instruction in formal mathematics with significant application to modeling and making sense of the experienced world postponed or left to others outside mathematics.

If we had space, we would have included an examination of classroom connectivity across diverse hardware systems. This is an area where we are now concentrating our efforts, particularly in integrating desk-top and hand-held technologies described below within a wireless classroom network. We see considerable promise in engaging students in joint construction of and classroom display of mathematical objects, particularly parametrically definable families of objects.

The Evolving Importance of the Graphical Side of Quantitative Reasoning

World-wide, and certainly in the United States, we have heard repeated calls for at least 20 years to integrate algebraic reasoning across all grades, make fuller connections with other mathematical topics, and updating to account for the increasing impacts of computer technologies, including CAS's, and more recently, graphing calculators. The latter recommendations attend to the importance of graphical representation of variable quantities and iterative functions. However, the underlying assumption of these and most recommendations for use of graphical representations is that the primary notation is character-string-based, and that the graphs are either defined by formulas, or approximated by formulas (e.g., linear regression). Mathematical power is assumed to follow from the ability to exploit the syntactical coherence of character string-based notations.

Our assumption is that the ability not only to interpret but to create and manipulate graphical depictions of variable quantities apart from character-string expressions are important skills for most citizens. Consider the Question posed in Figure 1.

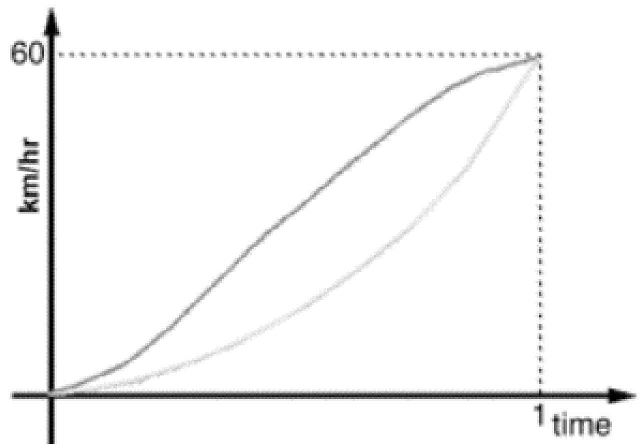


Figure 1. Both the red ca r and the green car reach 60 km/hr after one minute as shown on the two velocity graphs. Are they side by side after one minute or is one ahead?

Now consider this question replaced by one of the form with a similar graph: You are given two job offers, each of which brings you from 68 thousand pesos to 113 thousand pesos annual salary after 4 years, where your monthly salary under the two offers is depicted in the given figure (see Figure 2).

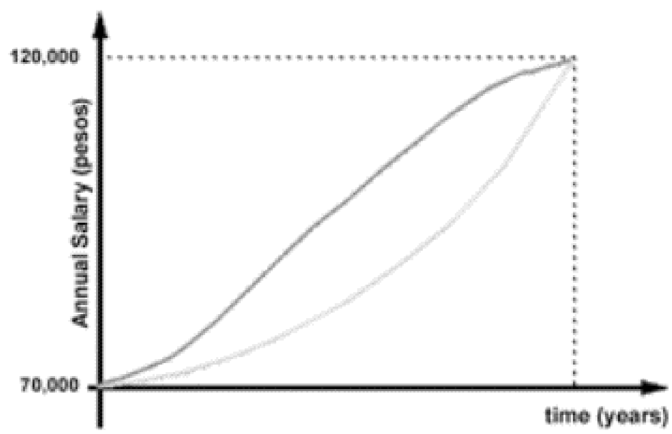


Figure 2. You have two salary offers, each getting you from 70 to 120 thousand pesos in 4 years as shown by the two graphs. Are these equivalent offers or, if not, which is better?

And then consider a follow-up question based on extensions of the given salary graphs so that the two salary graphs extend continuously to the right in such a way that they reverse dominance and so that the area between the two extended pieces is nearly the same as the area between them to the left of the point of intersection: Does the extension of the job offers change the choice of which is the more valuable? (See Figure 3.)

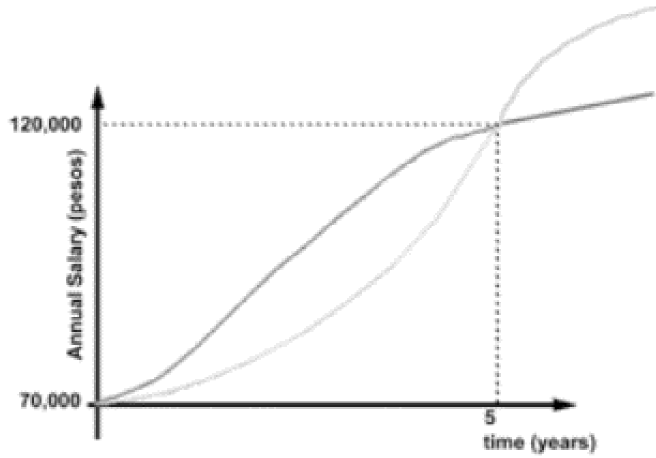


Figure 3. The companies come back with new offers extending for two more years. Are they equivalent or, if not, which one is better—and why?

I wish to draw three inferences from these simple examples:

1. The graphical reasoning—involving areas under or between graphs can be very general, ranging both across contexts and across function-types,

2. The reasoning need not require algebraic notation, and

3. Can link very closely to the kind of knowledge and skill that most citizens should have.

Regarding #1, we normally attribute the generality to the algebraic side of this reasoning, but given the fact that the functions need not have algebraic definitions or origins reveals that the generality may reside elsewhere—in how we approach the mathematics in question and how it is learned. Regarding #2, the reasoning can be purely graphical, and indeed, examination of the reasoning in algebraic contexts shows the algebraic (or numeric) computations of definite integrals typically done in the service of graphical interpretations. Regarding #3, data-defined graphs of functions might also represent competing deficit-reduction proposals, economic data or projections, data regarding toxin or drug concentrations in the human body, accumulation of toxins in the environment, demographic data, competing investment plans, etc. Virtually anything that can be quantified can be graphed and subjected to reasoning about rates and accumulations.

In most countries, including the US, the mathematical instruction needed to learn such skills is postponed till late in the curriculum because it is couched in formalisms requiring lengthy prerequisite study, the net effect of which is to prevent most students from learning them. Newly available representations and instructional approaches exploiting them offer the opportunity to render these skills widely learnable. Note that these skills are not easily described as either algebra or calculus—indeed, I would characterize it as the Mathematics of Change and Variation, the mathematics that formal school algebra and calculus are concerned with. It is also worth remembering that a rather large amount of algebra is taught—and valuable instructional resources are expended—in service of the calculus learning that enables, as a by-product, the kind of reasoning with graphs illustrated in the examples. I suggest that we need to find ways to teach these graphically mediated skills to mainstream students as part of their core curriculum. And secondarily, for students who will work in technical fields requiring more formal methods, some of the same approaches will also serve them well, especially if linked into dynamic Computer Algebra Systems, such as Derive. The next section explores this possibility in more detail in the context of the SimCalc Project.

Illustrations of Graphically-Intensive Approaches to Important and Useful Mathematics

Historical Perspective: Finally, A Dynamic Medium for Graphical Representations

Recall Joseph Lagrange's enthusiasm for coordinate geometry:

As long as algebra and geometry proceeded along separate paths, their advance was slow and their applications limited. But when these sciences joined company, they drew from each other fresh vitality and thenceforward marched on a rapid pace towards perfection (cited in Kline, 1953, p. 159).

For almost the entire 350 years since coordinate geometry was invented, coordinate graphs of quantitative relationships have been instantiated in static, inert media. Perhaps the real promise of graphical mathematics had to await the availability of dynamic interactive media. Now we can manipulate graphs with the fluency once reserved for character-string manipulation. Moreover, we no longer need to worry about closed-form representations of quantitative relationships in order to analyze them in detail, including analyses that relate functions and their derivatives, or functions and their integrals. In particular, we can define and manipulate functions defined piecewise on intervals. As explored in Kaput (2000), there may be an analogy between the invention of alphabetic phonetic writing, which enabled human writing to tap efficiently into the pre-existing and neurophysiologically well-evolved spoken/oral system of meaning-making and communication—and thereby increase both learnability and expressiveness of written language—and the invention of graphical systems of representing quantitative relationships, which tap efficiently into an even more powerful and neurophysiologically well-evolved system of meaning-making, the *visual* system.

The Base Mathematical Object of the New Century is Parametrized – Generality And Structure Are Alternatively Expressed Via Directly Manipulable Dynamic Objects

Before the instantiating medium became dynamic, *graphical* representations were trapped in the particular. And generality (or abstraction, depending on one's assumptions and definitions) was normally expressed through static inscriptions whose values were presumed to range over some set, usually not given explicitly, where the canonical example is that of algebraically defined functions in closed form, e.g., F(X) = 3X^2 + 2X - 5. (It is important to note that not only do X and F(X) stand for variables over sets of numeric values, but the numerals – and operation signs - in this expression likewise stand for generalizations—generalizations across concrete counting or measuring acts.) But, as illustrated by Dynamic Geometry and in the SimCalc examples below, we can now create and interact with more general mathematical objects, in effect, parametrized objects whose values we can directly manipulate. These extensions are of two types, one "algebraic" where, in most currently available CAS's one can directly manipulate the coefficients – or the graphs—within a *family* of functions, rather than a particular function, as in $F(X) = aX^2 + bX + c$. The other, non-algebraic type involves direct graphical manipulation of functions not expressed in closed form, as illustrated in the examples below.

In both situations, as in the dynamic geometric counterpart, we see an upward extension of human capability in abstraction and generalization of mathematical objects and operations supported by the notation system. However, it is not by direct extension of individual human psychological capability to abstract or generalize, but is the result of the culturally defined symbol system. Two alternative analogies may help clarify the changes that are underway. One now standard analogy is to treat the symbol system and its instantiation in the computational medium as a mental prosthetic-extension, enabling humans to reach upward in abstraction to more abstract mathematics. Another is to think of the new symbol systems as lowering the abstraction level of the mathematics to within reach of human capabilities by rendering the notations in which the mathematics is embodied more physically concrete and subject to previously developed human capacity to employ hands and eyes in the service of thinking.

We will now examine some specific representational strategies in more detail that enable us to use the visual system in the service of teaching and learning mathematics of the sort illustrated in the examples above. We invite comparisons with Dynamic Geometry as yet another illustration of these ideas.

Summary and Illustrations of SimCalc Representational Strategies

Here we will summarize the core web of four representational innovations employed by the SimCalc Project, all of which require a computational medium for their realization. Cross-platform software, Java MathWorlds for desktop computers, can be viewed and downloaded at http://www.simcalc.umassd.edu and software for hand-helds (TI-83Plus and Palm Pilot) can be downloaded from http://www.simcalc.com. A version incorporating Derive is in development for the TI-92Plus and will be available in Summer, 2002.

1. **Definition and direct manipulation of *graphically defined* functions, especially piecewise-defined functions**, with or without algebraic descriptions. Included is "Snap-to-Grid" control, whereby the allowed values can be constrained as needed—to integers, for example, allowing a new balance between complexity and computational tractability whereby key relationships traditionally requiring difficult computational and conceptual prerequisites can be explored using whole number arithmetic and simple geometry. This allows sufficient variation to model interesting situations (e.g., see the Sack Race Activity Below), avoid the degeneracy of constant rates of change, while postponing (but not ignoring!) the messiness and conceptual challenges of continuous change.

2. **Direct connections between the above representational innovation and simulations**—especially motion simulations—to allow immediate construction and execution of a wide variety of variation phenomena, which puts phenomena at the center of the representation experience, reflecting the purposes for which traditional representations were designed initially, and, most importantly, enabling orders of magnitude tightening of the feedback loop between model and phenomenon.

3. **Direct, hot-linked connections between graphically editable functions and their derivatives or integrals**. Traditionally, connections between descriptions of rates of change (e.g., velocities) and accumulations (positions) are mediated through the algebraic symbol system as sequential procedures employing derivative and integral formulas—but they need not be. In this way, the fundamental idea, expressed in the

Fundamental Theorem of Calculus, is built into the representational infrastructure from the start, in a way analogous to how, for example, the hierarchical structure of the number system is built into the placeholder representational system for numbers—which dramatically democratized numerical calculation.

4. **Importing physical motion-data via MBL/CBL and re-enacting it in simulations, and exporting function-generated data to drive physical phenomena** LBM (Line Becomes Motion), which involves driving physical phenomena, including cars on tracks, using functions defined via the above methods as well as algebraically. Hence there is a two-way connection between physical phenomena and varieties of mathematical notations. Especially through the importing and then re-animating of students' physical motions, this functionality plays an especially important role in SimCalc instructional materials to anchor the visual experience of the simulations in students' kinesthetic experience.

The result of using this array of functionalities, particularly in combination and over an extended period of time, is a qualitative transformation in the mathematical experience of change and variation. However, short term, in less than a minute, using either rate or totals descriptions of the quantities involved, or even a mix of them, a student as young as 11 or 12 years of age can construct and examine a variety of interesting change phenomena that relate to direct experience of daily phenomena. And in more extended investigations, newly intimate connections among physical, linguistic, kinesthetic, cognitive, and symbolic experience become possible.

Determining Mean Values—Exploiting SimCalc Representational Strategies 1 –4 Above

We now sample some activities that are possible to help illustrate the ways that common mathematical ideas are approached graphically using the representational strategies outlined above. Figure 4 shows the velocity graphs of two functions, respectively controlling one of the two "elevators" on the left of the figure (graphs on the desktop software are color-coded to match the elevator that they control). The downward-stepping, but positive, velocity function, which controls the left elevator, typically leads to a conflict with expectations, because most students associate it with a downward motion. However, by constructing it and observing the associated motion (often with many deliberate repetitions and variations), the conflicts lead to new and deeper understandings of both graphs and motion. The second, flat, constant-velocity function in Figure 4 that controls the elevator on the right provides constant velocity. It is shown in the midst of being adjusted to satisfy the constraint of "getting to the same floor at exactly the same time." This amounts to constructing the average velocity of the left-hand elevator which has the (step-wise) variable velocity. This in turn reduces to finding a constant velocity segment with the same area under it as does the staircase graph. In this case the total area is 15 and the number of seconds of the "trip" is 5, so the mean value is a whole number, namely, 3. We have "snap-to-grid" turned in this case so that, as dragging occurs, the pointer jumps from point to point in the discrete coordinate system. Note that if we had provided 6 steps for the left elevator instead of 5, the constraint of getting to the same floor at exactly the same time (from the same starting-floor) could not be satisfied with a whole number constant velocity, hence could not be reached with "snap-to-grid" turned on.

The standard Mean Value Theorem, of course, asserts that if a function is continuous over an (open) interval, then its mean value will exist and will intersect that function in that interval. But here the step-wise varying function is *not* continuous, and so the Mean value Theorem conclusion fails—as it would if 6 steps were used. However, if we had used imported data from a student's physical motion, then her (continuous) velocity would necessarily equal her average velocity at one or more times in the interval. We have developed activities involving a second student walking in parallel whose responsibility is to walk at an estimated average speed of her partner. Then the differences between same-velocity and same-position begin to become apparent. Additional activities involve the two students in importing their motion data into the computer (or calculator) *serially* (discussed below) and replaying them *simultaneously*, where the velocity-position distinction becomes even more apparent due to the availability of the respective velocity and position graphs juxtaposed with the cybernetically replayed motion.

Note how the dual perspectives of the velocity and position functions, both illustrated in Figure 4, simultaneously show two different views of the average value situation. In the left-hand graph, we see the connection as a matter of equal areas under respective velocity graphs. In the right-hand graph, we see it through position graphs as a matter of getting to the same place at the same time, one with variable velocity and the other with constant velocity. Depending on the activity, of course, one or the other of the graphs might not be viewable or, if viewable, not editable. For example, another version of this activity involves giving the step-wise varying position function on the right and asking the student to construct its velocity-function mean value on the left. This makes the slope the key issue. By reversing the given and requested function types, equalizing areas becomes the key issue. Importantly, by building in the connections between rate (velocity) and totals (position) quantities throughout, the underlying idea of the Fundamental Theorem of Calculus is always at hand.

Another kind of activity that is easy to imagine based on Figure 4 involves approximation of a linearly decreasing velocity from, say 6 floors/sec to 0 floors/sec in 6 seconds (imagine the constant velocity function being dragged into the appropriate downward-sloping linear function ($V(t) = 6 - t$). We systematically refine the staircase and, in an extension of normal area-computation activity, examine how the approximation error relates to the differences in distances traveled by the elevator moving according to the approximating staircase vs. that moving according to the linear velocity function. Actually, when using the SimCalc materials with younger students, the students work first with the step-wise varying velocities. In this case the usual approximation is reversed since the linear function is not yet known to the students—and they are asked to use their available step functions to try to match the motion of an object with linear velocity whose function is hidden (so they adjust their staircases using the differences between the two motions as feedback since they cannot see the graph of the function that they are trying to match—indeed, they initially assume it some hidden step function. With help, they conclude that the “unknown motion” must be linear, and that their staircases can never match it. Furthermore, if the position vs. time graphs of the students’ step-wise varying velocity functions are available, then they see how the refinements of the staircases are reflected in refinements of the associated “polygonal parabola”—and how the polygon approaches a smooth curve.

Of interest in these brief examples is how the mathematical issues can be deep and central to the learning of the mathematics of variation, but yet not require algebraic notation to achieve substantive engagement.

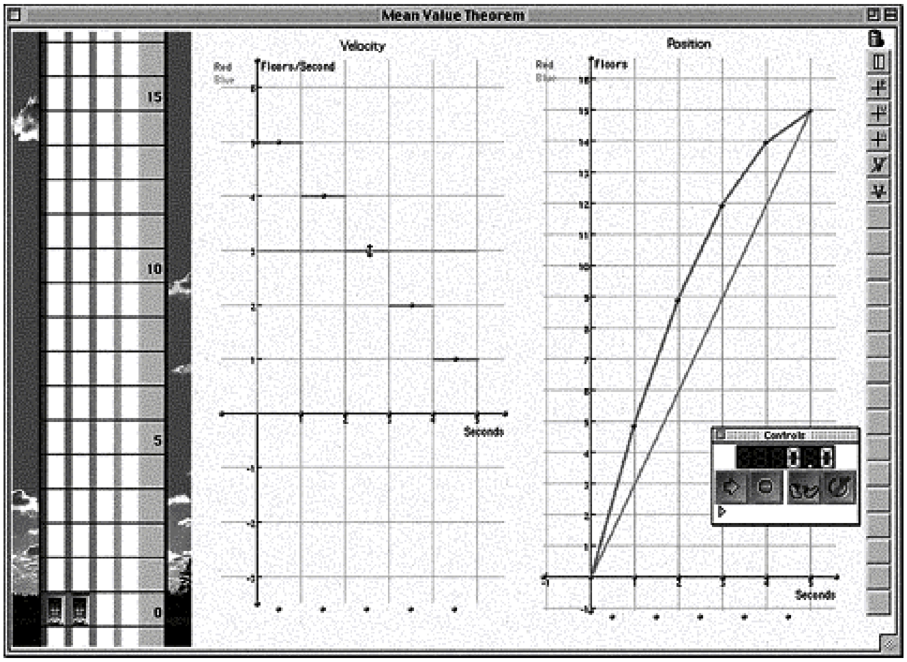


Figure 4. Averages from Both Velocity and Position Perspectives

Basing Mathematical Experience in Physical and Cybernetic Phenomena

Much has been written over the past two decades regarding the educational potential of linking multiple representations of mathematical ideas, especially functions, (including by the author, Kaput, 1986). However, as illustrated so clearly in a detailed study by Schoenfeld and colleagues (Schoenfeld, et al., 1994), multiple, linked representations of functions, even when coupled with carefully designed and supported instruction, can fail to yield stable and robust understanding. The difficulty is rooted in the fact that the representations only refer to each other, and to nothing anchored in the student's wider world of experience. In the words of Anna Sfard (PME-NA, 1995), "The emperor is *only* clothes." Our approach, reflected in Representational Strategies #2 and #4 above, puts phenomena at the center, either physical or cybernetic phenomena (simulations). Put in terms of Figure 5, we link the representations to each other by initially making each refer to common phenomena – they are *about* something other than each other. We put an emperor inside the clothes.

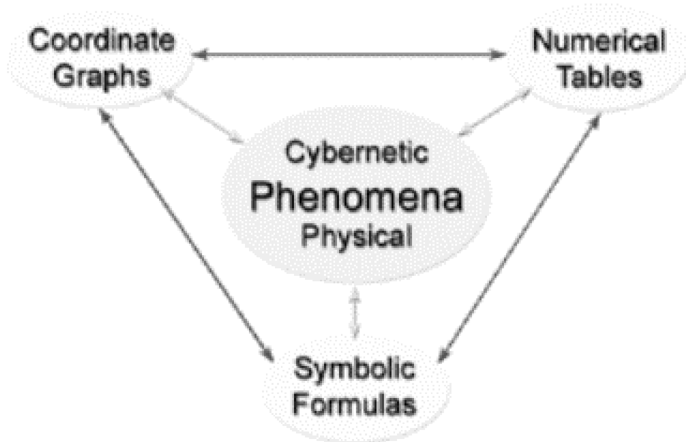


Figure 5. Mathematics Based in Phenomena – Putting an Emperor Inside the Clothes

Distinguishing the Model from That Which Is Modeled

The prior illustrations have focused on motion simulations – cybernetic phenomena. Below we will discuss the use of physical phenomena, emphasized in Representational Strategy #4, but involving parallel software on a different hardware platform. (The matter of parallel software across different platforms will be discussed further in the next section.) By design we normally juxtapose physical and cybernetic data in the same learning experiences rather than treat them separately, in effect combining Representational Strategies #2 and #4. We believe that an important 21st century skill is the ability to understand the connections between simulations and the phenomena that they are alleged to model, and especially the differences between them. As models and simulations become ever more realistic (e.g., embodying virtual reality), it becomes ever more difficult to distinguish model from that which is modeled, and we increasingly are pulled to believe in the models as real – the map is ever more similar to the territory. This hides the assumptions behind the models from view, leading to potentially very dangerous possibilities – as when we come to believe economic or biological models simply because they appear so realistic.

Prior to the computational medium, models and what they were presumed to model occurred in separate realms of human experience, one in the mathematical-semiotic realm and the other in the “external world” realm of whatever was being modeled – physical, social, economic, etc. They were separate in ways that are far less apparent today. Across most fields, models now frequently relate to or are expressed by simulations – in effect, an idealized version of the phenomena being modeled appears inside the synthetic world of the computer, often indistinguishable from the mathematical model itself. Environments which exploit Representational Strategies #2 and #4, such as SimCalc MathWorlds, offer the possibility of making the distinction an explicit object of study in very elementary ways, but also in ways that connect to important mathematical ideas – after all, most of the classic mathematics out of which we build our standard courses in Calculus have their roots in modeling motion and similar phenomena (Kaput, 1994).

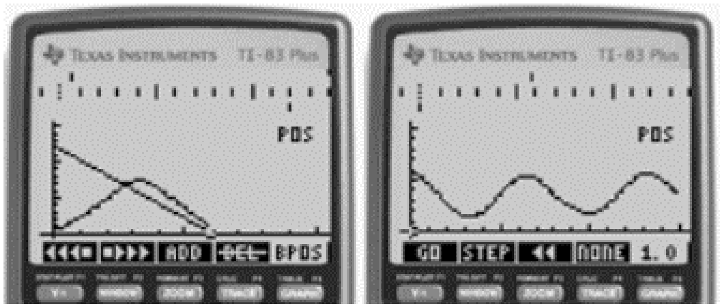


Figure 6

Relating Cybernetic to Physical Phenomena

To illustrate, consider the following three challenges, the latter two of which are reflected in the two parts of Figure 6. These are pictures of screens from a version of SimCalc MathWorlds with the "CBR Animator" running on a TI -83 Plus graphing calculator. The CBR Animator enables the user to import a motion using a data collection device connected to the graphing calculator and then replay that motion perhaps to compare it with a second motion, as in these illustrations.

1. Given the Position vs. time function P(x) = 12-2x which controls the motion of B, walk a motion for A whose position vs. time graph matches that of P(x) as closely as possible, and then explain how the differences between B's graph and A's graph relate to the differences in the motions when you run them side-by-side.

The linearly decreasing function in the left part of Figure 6 is the graph of this function, which controls the motion of B, an object that will move from right to left above the coordinate graphs. The imported motion will control a second object at the top of the screen. Here the activity is relatively straightforward except for the last part, which extends the common matching-motion activity. Issues of continuity, linear vs. non-linear change, starting and ending points in time and position, simultaneous position, and so on, all now have dual status – in the mathematical notion (the coordinate graph) and in the motion simulation, as the imported motion is replayed alongside the algebraically given motion.

2. B has gone to a party and is coming home with a motion controlled by the Position vs. time function P(x) = 12-2x. You stayed home at 0, but now your job is to walk a motion for A starting at 0 that starts at the same time B does, meets B halfway, and then escorts B home. Explain how the differences between B's graph and A's graph relate to the differences in the motions when you run them side-by-side.

A solution to this challenge is given in the left screen of Figure 6. The issues introduced in the previous challenge relating the differences in the graphs to the differences in the motions become even more salient here. Furthermore, the motion in this case has a somewhat more realistic context (albeit a "toy" story nonetheless). Other more elaborate stories, including dances and more dramatic situations, link more complex mathematical functions to students real experiences even more strongly. Some of our curricular activities involve students building their own stories as well.

3. (a) How might you walk in a circle to produce the function whose graph is given in the right hand part of Figure 6? OR: (b) If you walk in a circle while pointing your motion-

detector straight at a wall, what kind of position vs. time graph results?

Here the idea is that a student could hold the data collection device and aim it at a wall (in a perpendicular orientation to the wall) while walking in a circle, basically creating a sine function plus a constant, where the constant depends on the distance between the circle and the wall. It is surprising how difficult question (a) is for many students and teachers who presumably know trigonometry. Even more difficult is the (b) variant of this question. Once one graph has been produced it becomes interesting to create variants of it, physically creating different members of the broad family of functions described by

$$P(x) = A + B \text{ SIN } (Cx + D).$$

We have done versions of this activity using the connectivity and aggregation capability discussed below, where different students are assigned values that systematically vary one of the literal parameters of the generic formula.

It should be apparent from the above examples that by mixing cybernetic and physical phenomena, including phenomena defined by algebraically defined functions, we can bring the differences between them into stark relief while simultaneously addressing core mathematical ideas and skills.

Diversification of Hardware Platforms and Technologies

Parallel Software and Curricula for Graphing Calculators

In the left two pictures of Figure 7 below are partially analogous software configurations for the TI-83Plus illustrated earlier in Figure 4 above—two elevators controlled by two velocity graphs. Instead of the clicking and drag/drop interface of the desktop software, most user interaction is through the SoftKeys that appear across the bottom of the screen which are controlled by the HardKeys immediately beneath them. The left-most screen depicts the Animation Mode, with two elevators on the left controlled respectively by the staircase and constant velocity functions to their right. The middle screen depicts the Function-Edit Mode, which shows a “HotSpot” on the constant-velocity graph. The user adjusts the height and extent of a graph segment via the four calculator cursor keys (not shown), and can add or delete segments via the SoftKeys. Other features allow the user to scale the graph and animation views, display labels, enter functions in text-input mode, generate time-position output data, and so on—very much in parallel with Computer MathWorlds, but without the benefits of a direct-manipulation interface. The right-most screen shows a horizontal motion world with both position and velocity functions displayed (hot-linkable if needed, as with the computer software). This kind of horizontal motion is the same as appears in Figure 6 above.

We have developed a full, document-oriented Flash ROM software system for the TI-83+ and a core set of activities embodying a common set of curriculum materials that parallels the computer software to the extent possible given the processing and screen constraints (96 by 64 pixels—with only 90 by 54 at best available for coordinate graphs). Considering Figure 4 earlier, the parallelism is evident in the Calculator MathWorlds screens shown. We have also developed a prototype version of MathWorlds for the PalmPilot Operating System.

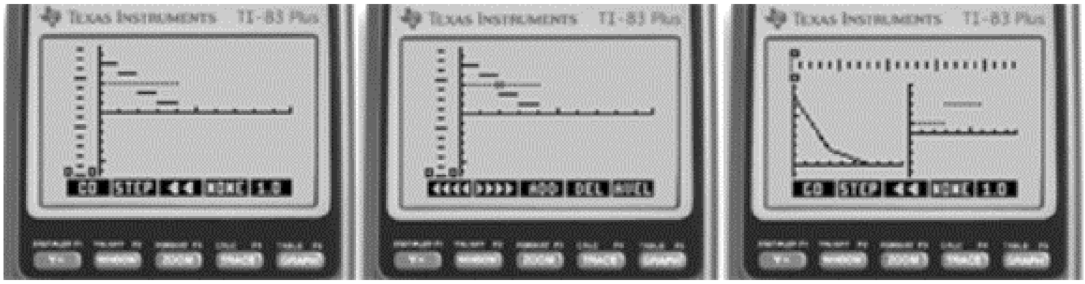


Figure 7. TI-83+ Calculator MathWorlds

We will soon have a version available for the TI-92Plus that includes Derive as a subset, as illustrated in Figures 8 and 9—where screens from a prototype are shown (the final interface will likely be modified). In Figure 8 we see a graphical edit of a piecewise defined function with its piecewise derivative function (two horizontal segments) below on the split screen, and the familiar "elevators" on the left, again, comparable to those above in Figures 4 and 7.

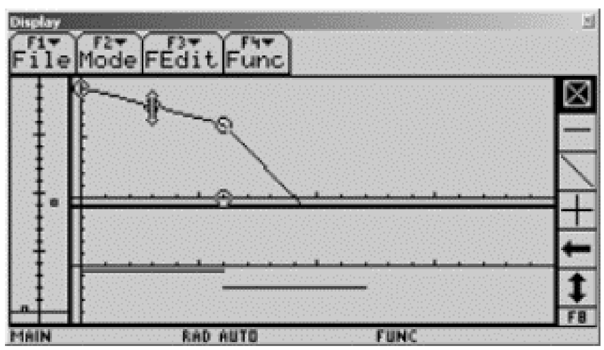


Figure 8. TI-92Plus Calculator MathWorld Graphical Edit Screen and Animation

In Figure 9 below, we illustrate a function edit screen with an algebraically rather complicated function defined using Derive, and its derivative partially viewable below. You will note that this function's domain is specified as the half open interval (0, 3] (and actually, since the left end of the domain is involved, the function is actually defined on the closed interval [0, 3]), and additional functions could be defined for other intervals as needed. Alternatively, the function could be defined globally as usual. Importantly, once a finite domain is specified, the function can be animated in the usual SimCalc MathWorlds way (with a horizontal or vertical motion) and, indeed, it can also control a "meter" – a thermometer-like display to represent non-motion quantities.

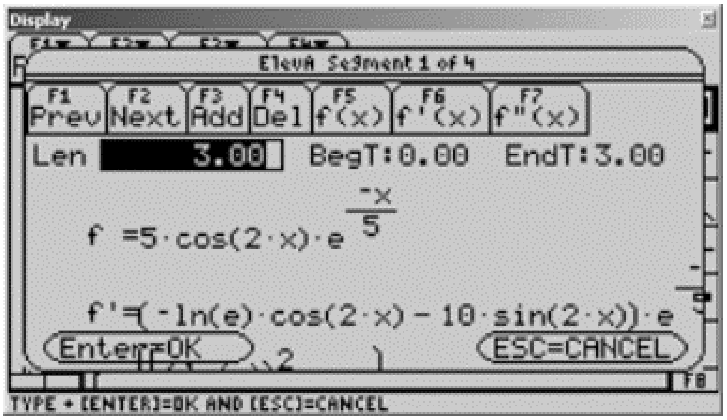


Figure 9. TI-92Plus Calculator MathWorlds Function Edit Screen—Including Derive

In addition, the function's derivatives or integrals can be determined by Derive in Derive's usual ways (the function's first derivative is partially visible on the screen). Functions can also be defined numerically via imported data as with the examples earlier, or internally by the user via a table in the usual ways. Hence we can treat this software either as SimCalc MathWorlds extended by Derive, or as Derive extended by SimCalc MathWorlds. Unlike the more constrained and curriculum-specific versions of MathWorlds for more elementary mathematics, we prefer the latter interpretation for more advanced mathematics, where the educational applications will be largely left open to the users to determine, just as is the case with CAS's in general. In effect *we treat the new software as an extension of a CAS.*

Reflections on the Integration of SimCalc Representational Strategies and a CAS

As suggested earlier, historically, mathematical notations evolved in static, inert media. Hence variation had to be supplied mentally, whether for the function variables or parameters defining function-families. While we cannot concretely illustrate the screen motion of the animations in the static medium of this paper, we trust that the reader can imagine how it provides perceptual support for this mental variation, support that supplants, at a neurophysiological level, the semantics of the needed motion experience as described by, for example, Kosslyn & Koenig in chapter 6 of *Wet Mind: The New Cognitive Neuroscience* (Kosslyn & Koenig, 1992).

It seems that another kind of semiotic support of mental processes and capacities is at work here, broadly analogous to the support that is provided to short-term memory by inert static notations that produce perceptual input that refreshes short-term memory as needed for the task at hand – for example, when we write out sums of several numbers before beginning the summation process, or when we check off items in a list when they have been counted. The difference here is that the motion on the screen (embodied in real time as with any motion) perceptually drives the experience of variation, just as it did *not* need to do for Newton. As Boyer (1959) and Edwards (1979) – reviewed in Kaput (1994) – point out, Newton parametrized most variables with time, so he imagined a particle moving along a line according to whatever conditions defined the motion – conditions that we would now describe in terms of a function.

The computational medium allows us to create dynamic notations that perceptually generate the visual experience of motion, augmentable by physical and kinesthetic experience as discussed above, that in turn can generate the experience of functional variation that we would otherwise need to create through internal mental processes. While these processes can be generated by one who already has the mental structures in place to generate them, they are not necessarily available to one who has no experience with the variation needed. This is the contribution of the computer-generated visual experience that then must be linked by curriculum and pedagogy to the semantics of the more abstract mathematical variation of the calculus of functions, including the two kinds of descriptions of change – rates and totals, "how fast" and "how much" of the quantity in question. Exploiting this power is behind Representational Strategy #2, augmented by #4.

In addition, Representational Strategy #3 that connects rate of change with accumulation – or more traditionally described as the linkage between functions and their derivatives or integrals – can be applied in the context of a CAS, where the accumulated power of the algebraic system as instantiated in the CAS, can be utilized. Given algebraic representation of functions, this linkage has taken the form of serially executable procedures, as embodied in rules for computing derivatives and integrals. However, in the computational medium, we can compute these connections almost instantaneously and hence present functions and their derivatives or integrals side-by-side, as illustrated above. The highly efficient exponential/hierarchical system for organizing quantities (powers of a base, usually ten) and then writing them in extremely compact ways using the combination of Arabic numerals and the placeholder system yielded an extraordinarily efficient, indeed culturally transforming quantitative system for using and computing with numbers based on the representing symbols themselves. Before its appearance, computation was very limited, either to a very small population with larger quantities, or small quantities for a larger population. This dramatically changed when the new number system appeared. To the extent that it was taught by the emerging education system, the new representational system democratized access to numerical computation with large numbers and resulted in an entirely new level of economic activity (Swetz, 1987).

Just as the base ten placeholder system for numbers semiotically and culturally embodied an extraordinary intellectual achievement that became widely available, the idea that the two kinds of descriptions of situations involving variable quantities based on rates of change and accumulation of variable quantities – dual descriptions in terms of how fast and how much – were equivalent, was itself an extraordinary intellectual achievement, glimpsed by the predecessors of Newton and Leibniz, but recognized for its universality only by the two masters. Newton's predecessor, Isaac Barrow, had demonstrated the equivalence in a few important cases, but did not grasp their universality (Boyer, 1959). And it was Leibniz who developed a notation that expressed that universality in algebraic ways – as a "calculus," that is, as a means of computing based on the symbols themselves – that could be communicated to those who understood and could use algebraic notations. But the results of this computing can now be embodied in what amounts to a new visually explicit notation system that includes the derivative and integral simultaneously, just as the base ten placeholder system embodies in a single character string the result of an extremely sophisticated organization of quantities into an exponentially structured hierarchy – the extraordinary intellectual achievement is crystallized into a single semiotic entity available to a suitably educated individual as an object with reference to something outside itself (Moreno, in preparation).

So, in the 21st century, we have a new symbol system for the mathematics of change and variation that extends the existing base CAS and that, by the evidence accumulated to date, is learnable by mainstream students.

A Larger Perspective for This Change in the Nature of CAS's

This change in representational infrastructure is part of a larger evolution due to the computational medium and the fact that it provides a new medium in which to build new systems and re-instantiate old ones. I see three profound levels of consequences of this change:

Level 1: The knowledge produced in static, inert media can become knowable and learnable in new ways by changing the medium in which the traditional notation systems in which it is carried are instantiated—for example, creating hot-links among dynamically changeable graphs equations and tables in mathematics. Most traditional uses of technology in mathematics education, especially graphing calculators and computers using 20th century Computer Algebra Systems, are of Level 1.

Level 2: New representational infrastructures become possible that enable the reconstitution of previously constructed knowledge through, for example, the new types of visually editable graphs and immediate connections between functions and simulations and/or physical data of the type described above. This is the place of the extended CAS.

Level 3: The construction of new systems of knowledge employing new representational infrastructures—for example, dynamical systems modeling or multi-agent modeling of Complex Systems with emergent behavior, each of which has multiple forms of notations and relationships with phenomena. This is a shift in the nature of mathematics and science towards the use of computationally intensive iterative and visual methods that enable entirely new forms of dynamical modeling of nonlinear and complex systems previously beyond the reach of classical analytic methods—a dramatic enlargement of the MCV that will continue through this new century (Kaput & Roschelle, 1998; Stewart, 1990).

Thus Level 1 change is that associated with traditional CAS's. We have been focusing on a Level 2 change related to extensions of CAS's. Level 3 change is beyond the scope of this paper, but the literature on this topic is wide and growing (Cohen & Stewart, 1994; Haken, 1981; Hall, 1992; Holland, 1995; Kauffman, 1993, 1995; Prigogine & Stengers, 1984). In general, however, as we move from Level 2 to Level 3 change, instead of focusing on the teaching of a very small set of representation systems of the sort we have inherited and extended, we will need to focus on the teaching of *how to learn and use* new representation systems, and how to coordinate among them. Not only will students need to learn multiple ways of representing and reasoning with quantitative relationships, but they will need to *learn how to learn* new systems as they emerge.

References

Boyer, C. (1959). *The history of calculus and its historical development*. New York, NY: Dover Publications.

Cohen, J., & Stewart, I. (1994). *The collapse of chaos: Discovering simplicity in a complex world*. New York: Viking Books.

Edwards, C. (1979). *The historical development of the calculus*. New York, NY: Springer-Verlag, Inc.

Haken, H. (Ed.). (1981a). *Chaos and order in nature*. Berlin: Springer-Verlag.

Hall, N. (1992). *Exploring Chaos: A Guide to the New Science of Disorder*. New York:

Norton.

Holland, J. H. (1995). *Hidden order: How adaptation builds complexity.* New York: Addison-Wesley.

Kaput, J. (1986). Information technology and mathematics: Opening new representational windows. *The Journal of Mathematics Behavior, 5*(2), 187–207.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes using old roots. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, (pp. 77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2000). Implications of the shift from isolated, expensive technology to connected, inexpensive, ubiquitous, and diverse technologies. In M. O. Thomas (Ed.), *TIME 2000: An international conference in Mathematics Education* , (pp 1–25). University of Auckland, New Zealand.

Kaput, J., & Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Mathematics for a new millennium* (pp. 155–170). London: Springer-Verlag.

Kauffman, S. (1993). *The origins of order: Self organization and selection in evolution*. New York, NY: Oxford Unive rsity Press.

Kauffman, S. (1995). *At home in the universe: The search for the laws of self-organization and complexity.* New York: Oxford.

Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture.* New York: Oxford University Press.

Kosslyn, S., & Koenig, O. (1992). *Wet mind: The new cognitive neuroscience*. New York: The Free Press.

Prigogine, I., & Stengers, I. (1984). *Order out of chaos* . New York: Bantam.

Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1994). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, (Vol. Vol. 4,). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stewart, I. (1990). Change. In L. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 183–219). Washington, DC: National Academy Press.

Swetz, F. (1987). *Capitalism and arithmetic: The new math of the 15th century.* La Salle: Open Court.

---

[1] N.E. El título en español es *Sistemas algebraicos computacionales para el siglo 21: nuevas clases de representaciones dinámicas*

Argumentación y Formalización mediadas por Cabri-Géomètre

Luis Moreno Armella

Centro de Investigación y Estudios Avanzados

Departamento de Matemática Educativa, México

Resumen. La conferencia girará en torno a tres ideas: (i) organizaciones locales como territorios de argumentación y exploración, (ii) la descontextualización de la argumentación: hacia la demostración y (iii) el territorio digital: las macros como instrumentos de mediación (para demostrar)

Introducción

Cuando examinamos los textos que se siguen, en las facultades de matemáticas, por ejemplo, algo que llama la atención es la insistencia en el rigor. Aún aquellos textos que no pretenden alcanzar un nivel de rigor y formalización, lo confiesan como si se tratara de una falta. Suelen decir, si son textos de cálculo: *esto da una "idea intuitiva", pero en los cursos posteriores de análisis, el lector podrá estudiar la demostración rigurosa del teorema*. El mensaje es inequívoco: hay una matemática, un nivel de pensamiento matemático válido y lo demás son imitaciones. Pasos más o menos en falso que el lector, si tiene suerte, podrá corregir más adelante cuando "mejore" su educación.

¿Qué tanta pertinencia tiene esta posición? ¿Es esto a lo que debe aspirar la educación matemática? Las respuestas considerablemente diversas concitan siempre controversias.

Pude afirmarse, sin dudas, que en las matemáticas, *la demostración ejerce un control epistemológico* de primer orden. David Hilbert escribió en alguna ocasión:

En matemáticas,..., encontramos dos tendencias siempre presentes: por una parte, la tendencia hacia la abstracción que busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes al material de estudio...y la tendencia hacia ***el entendimiento intuitivo*** *que busca alcanzar una relación más inmediata con los objetos de estudio...y que enfatiza el significado concreto de sus relaciones.*

Hilbert comprendía muy bien estas relaciones dialécticas entre la formalización y la construcción del significado matemático. Y aunque insistió en reiteradas oportunidades en ello, casi siempre *ha sido leído* como un formalista. No hay dudas: cada texto conlleva un lector.

Hace ya casi ochenta años, el célebre matemático Maurice Frechet, (cuyo trabajo sobre la axiomatización ––en la topología–– lo pone a salvo de cualquier sospecha) sostuvo, en una conferencia titulada *La Desaxiomatización de la Ciencia* que:

La geometría debería ser despojada de su carácter lógico y formal, de tal modo que se pueda asociar a los conceptos esquemáticos, vacíos de la geometría axiomática, objetos de la realidad accesibles a la experiencia. (Frechet, 1925)

Como Frechet, la educación matemática ha hecho suyo este problema. Desde hace largo tiempo hemos visto aparecer libros que intentan ser un ejercicio sobre el pensamiento visual; otros se proponen iniciar a los estudiantes en el estilo abstracto de las matemáticas. Pero aún estos últimos textos, abren la ventana a otro paisaje matemático. Suelen afirmar que, contrariamente a lo que suele pensarse, las matemáticas no tratan de demostraciones y lógica exclusivamente, así como la literatura no trata tan sólo de la gramática. Las matemáticas están constituidas por ideas e intuiciones fascinantes sobre los números, sobre la geometría, y, *en última instancia, la intuición y la imaginación son tan valiosas como el rigor*.

Matemáticos célebres y educadores han sido pues, sensibles a la dialéctica intuición/rigor en el seno de las matemáticas. De hecho, todo esto lo podemos encontrar casi como en nuestros días, en las matemáticas griegas.

En aquella cultura, por lo menos en la forma tradicional de interpretarla, la coronación de las matemáticas está constituida por *Los Elementos* de Euclides. Debido al éxito tan apabullante de esta obra, solemos olvidar las tensiones que surgieron en el interior de la comunidad matemática griega en diferentes momentos históricos. Por ejempb, Arquímedes, –considerado como el mayor de los matemáticos griegos– formuló su punto de vista en los siguientes términos:

Mediante el método mecánico logré entender ciertos resultados, ***aunque posteriormente tuviesen que ser demostrados geométricamente...Pero es mucho más fácil poder dar una demostración de una situación, después de haberla comprendido mediante el mencionado método que intentar demostrarla sin ningún conocimiento previo****. Es debido a estas razones por las que, sobre teoremas sobre volumen de un cono y una pirámide...demostrados originalmente por Eudoxio, hay que dar un crédito considerable a Demócrito, quien* ***los enunció por primera vez aunque sin demostración alguna de ellos****.* (énfasis nuestro)

En este texto Arquímedes devela una intencionalidad: distinguir entre la demostración y los *experimentos matemáticos,* que nos permiten reconocer *hechos matemáticos* dentro de una teoría.

Se dice que Platón reaccionó con indignación al conocer el método mecánico de Eudoxio (precursor del método de Arquímedes) porque representaba “una corrupción de la geometría” (Peitgen et al. 1992). En efecto, en lugar de razonar a partir de los objetos inmateriales, producto del intelecto puro, (i.e.: de los objetos conceptuales de las matemáticas). Eudoxio se apoyaba en objetos materiales y en la percepción sensorial de los mismos.

Los ejemplos, sin duda, pueden multiplicarse. Me he querido referir a este pluralismo epistemológico de la matemática, para aportar mayor pertinencia a un tema de actualidad y de la mayor importancia para la educación matemática: *las relaciones entre la cognición y la lógica.*

Vamos a llevar el problema de las relaciones entre la cognición y la lógica al ámbito de *una didáctica que tome en cuenta la mediación de las herramientas informáticas.*

El papel de las herramientas informáticas en la didáctica de las matemáticas.

Nuestro propósito consiste en estudiar este problema desde perspectivas que han resultado fructíferas en la investigación didáctica. La primera de estas perspectivas se refiere a la *ejecutabilidad de las representaciones computacionales.*

A partir de dicha ejecutabilidad, se ha generado un nuevo realismo matemático (Balacheff & Kaput, 1996). En efecto, los “objetos” que aparecen sobre una pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material. Por ejemplo, podemos trazar una parábola (dibujada por el desplazamiento del punto Q) al desplazar el punto P sobre la recta d. (Figura 1)

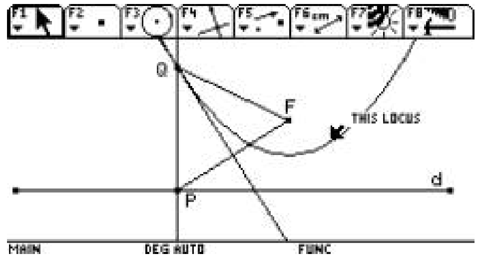


Figura 1

Una vez construida la cónica, su existencia ha dejado de ser virtual: el desarrollo constructivo no ha ocurrido en la imaginación del operador ––que trata de imaginar las consecuencias de una definición––, sino sobre la pantalla y bajo el control del universo interno matemático que vive en el interior del instrumento informático. Lo que tenemos sobre las pantallas son, en consecuencia, *modelos manipulables de objetos matemáticos.* Tal vez lo que tengamos sean *nuevos objetos matemáticos que tienen como característica la manipulabilidad* (ejecutabilidad de sus representaciones).

Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la *exploración* y la *sistematicidad* ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación. La exploración respeta explícitamente las reglas sintácticas del medio ambiente. Los sistemas de representación permiten instalar aspectos de nuestro pensamiento en un medio estable y ejecutable, en el caso de las computadoras. Estos medios llegan a ser parte integral de nuestros recursos intelectuales y expresivos. Permiten, además, generar una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas, y traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud.

Las herramientas computacionales modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático. Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en u n entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras (dragging) conservando relaciones estructurales de las mismas, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones informáticas, que contribuye al realismo de estos objetos geométricos.

El territorio de la exploración y la argumentación

Las experiencias didácticas, a nivel internacional, con relación al uso de las herramientas informáticas en la educación, sugieren que la capacidad computacional de las herramientas informáticas *amplía el rango de los problemas que son susceptibles de ser abordados por los estudiantes*. Para sustanciar esta tesis, vamos a considerar un ejemplo: Dado un triángulo ¿es posible siempre inscribir en él un triángulo equilátero?

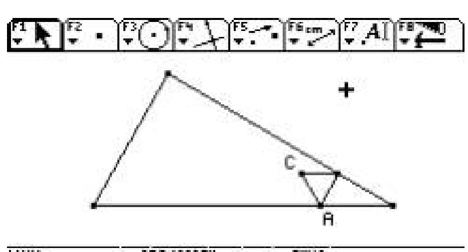


Figura 2

La construcción se hace de tal manera que cuando se desplaza el punto A (figura 2) sobre el lado correspondiente del triángulo los vértices restantes se mueven trazando siempre un triángulo equilátero. La línea de argumentación, producto de la ejecutabilidad de la representación, se basa en la determinación de la trayectoria seguida por el vértice C cuando desplazamos el vértice A.

¿Cómo argumentar que la trayectoria es una recta?

La respuesta a esta pregunta, en el *dominio de abstracción* en el cual estamos trabajando, exhibe los recursos que Cabri pone a disposición del estudiante. Por ejemplo, se construye otro triángulo equilátero DEF de tal suerte que el lado DE sea paralelo al lado AB del triángulo ABC (figura 3). Ahora bien, la exploración anterior sugiere que los puntos V, C y F son colineales. Mediante la propiedad “check property” se puede verificar que así es.

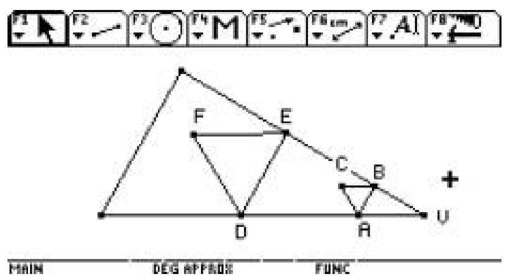


Figura 3

Las exploraciones sobre el objeto electrónico que tenemos sobre la pantalla generan experiencias que sugieren la presencia del universo interno; de un mecanismo que controla el comportamiento de los objetos electrónicos, e indica vías hacia la formalización del argumento.

Como este, muchos otros problemas geométricos pueden abordarse para movilizar los recursos de Cabri. En la pantalla viven objetos geométricos que hay que entender como objetos dinámicos, como estados transitorios dentro de un proceso evolutivo. Podemos decir que este es un *teorema situado.*

Ahora bien, la argumentación desarrollada dentro de un cierto contexto, como el que acabamos de considerar, permite acceder a un cierto nivel de formalización que empieza a desvincular el hecho matemático de dicho contexto, pues la argumentación se va modelando de acuerdo a las características del universo interno. Así se inicia la *descontextualización de la argumentación.*

El territorio digital: las macros como herramientas de reificación

Las macro-construcciones se encuentran entre los principales recursos estructurantes de Cabri. A partir de determinados objetos iniciales se construyen

ciertos objetos finales que constituyen el propósito de la construcción. A la macro le ponemos un nombre. Y cuando invocamos ese nombre activamos una construcción. Podemos decir entonces que una macro es una acción geométrica encapsulada, reificada . Una acción geométrica cristalizada . Es decir, una macro es como un signo. Invocar ese signo despliega al referente, en este caso, al objeto final .

Todas las instrucciones que se dan a la calculadora para definir una macro, provienen del universo interno y están mediadas por las construcciones "apriori" de Cabri (las que están en los menús), que también obedecen al universo interno. Tales instrucciones funcionan como un mecanismo de mediación entre quien explora y el universo interno. Por lo tanto, una macro genera objetos geométricos válidos dentro del universo Cabri.

Por ejemplo, si construimos un triángulo equilátero con regla y compás y encapsulamos la construcción en una macro, cuando invoquemos la macro (cuyo objeto inicial puede ser un segmento) obtendremos triángulos equiláteros genuinos dentro del universo Cabri. Podemos afirmar entonces, que las exploraciones y la justificación coexisten en el entorno Cabri, tal y como quiere la epistemología. De hecho, a medida que se desarrolla una actividad de exploración, se va modificando la manera de concebir al objeto de estudio, en gran medida debido al proceso de "parsing" (un análisis sintáctico, hecho posible por la ejecutabilidad de las representaciones informáticas) al que se le somete. Entonces la construcción del objeto, del concepto, y su manipulación formal (¿la discretización de la justificación?) son coextensivos. Vamos a ilustrar estas ideas con un teorema que suele atribuirse a Napoleón Bonaparte.

Dado un triángulo, se construyen sobre sus lados triángulos equiláteros usando como lados los lados respectivos del triángulo original. Posteriormente, se unen los baricentros de los triángulos equiláteros. El teorema afirma que ese nuevo triángulo siempre es equilátero.

Podemos ilustrar la situación con la figura 4:

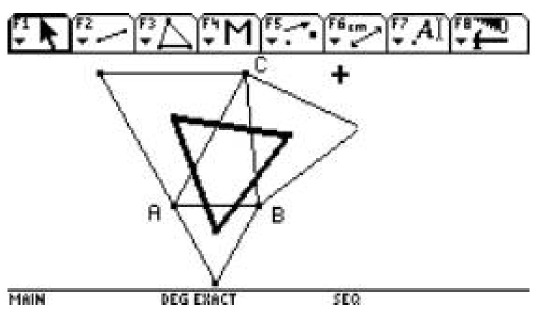


Figura 4

El triángulo de Napoleón está representado con trazos más gruesos. ¿Cómo pueden acercarse los estudiantes a este resultado? La medición juega un papel importante en las estrategias de validación a las que recurren los estudiantes. A partir de su experiencia previa con los recursos de Cabri, los estudiantes han medido los lados del triángulo de Napoleón y han *verificado* que cuando se desplazan los vértices del triángulo original, los lados del triángulo de Napoleón siguen teniendo la misma longitud (aunque esta longitud cambie). A partir de experiencias de este tipo, no resulta fácil convencer a los estudiantes de la necesidad de refinar la línea argumentativa. La medición parece aportar un nivel de evidencia suficiente. De manera que el problema didáctico de *cómo crear la necesidad de la demostración* recibe aquí un fuerte desafío. Nótese la diferencia entre el plenteamiento del problema en Cabri y cuando lo hacemos con papel y lápiz. En este último caso no podemos exhibir la concordancia de las medidas de los lados cuando el triángulo original se va modificando. De manera que la argumentación basada en la medición pierde mucho de su sentido. Resaltemos un hecho implícito en esta observación: la argumentación es sensible a los medios expresivos que suministra el entorno y también, de manera central, a la naturaleza del objeto manipulado.

Vamos a discutir ahora un acercamiento al problema que se apoya en las macros para construir el centroide del triángulo y para construir un triángulo equilátero. En la figura anterior los vértices del triángulo de Napoleón son los centroides de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados. Ahora bien, si tomamos dos de ellos como objetos iniciales de la macro para construir triángulos equiláteros el tercer vértice parece coincide con el centroide. Esto se desprende del mensaje *which object?* , indicando con ello que en la posición que ocupa el centroide parece haber otro punto. (Figura 5)

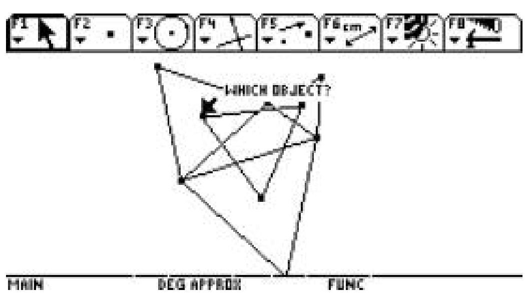


Figura 5

Al pulsar ENTER recibimos la respuesta que se obtiene en la figura 6:

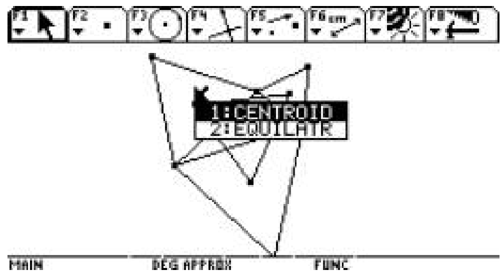


Figura 6

A parentemente, la misma posición está ocupada por dos puntos distintos: un centroide y un vértice del triángulo equilátero. Esta ambigüedad se mantiene, no importa cómo deformemos el triángulo original, dando lugar con ello, a una conjetura argumentada . Parece que estamos ante un hecho matemático sólido. Tal vez las dudas sobre este argumento provengan del hecho que Cabri, ante una situación de ambigüedad emita el mensaje: ¿cuál objeto? Por ejemplo, en una situación como la siguiente colocamos dos puntos en posiciones contiguas y señalamos. Lo que ocurre se observa en la pantalla de la figura 7.

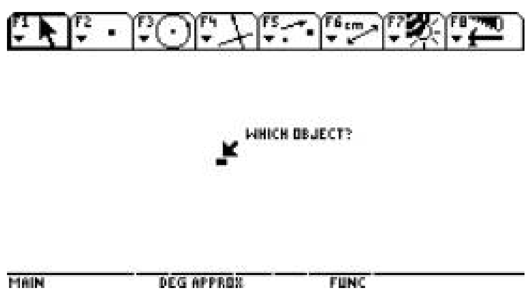


Figura 7

¿No sería algo como esto lo que está ocurriendo en el caso del punto *equilatr*, vértice de un triángulo equilátero y *centroid*, centroide de un triángulo que parecen ocupar una misma posición? hay razones para pensar que no pero, a juicio nuestro, lo más importante es que la situación presentada genera *la necesidad de establecer una demostración* . Esta necesidad no es algo menor: estamos hablando de una necesidad de carácter epistemológico, de algo que involucra la naturaleza misma de los objetos de la exploración.

Vamos a concluir con una síntesis de varias ideas centrales que han ido apareciendo a lo largo de la reflexión presentada en las páginas anteriores. Hemos considerado el proceso de argumentación desde la mediación de los instrumentos computacionales. Debe enfatizarse que nuestro interés reside en la construcción del conocimiento matemático *en la escuela*. Esto es importante porque implica considerar las características particulares de esta forma de (re)-construcción. Hay un territorio de la demostración que indica, meridianamente, que este problema de argumentar, de demostrar, no puede ser considerado al margen del problema de la contextualización del conocimiento. La medición nos permite acercarnos *perceptualmente* al problema de la argumentación. Este tratamiento es posible, porque estamos trabajando en un ambiente dinámico. Es el momento en que debe tomarse en cuenta *la transición a la teoría*.

Es *inevitable* que al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una *nueva actividad matemática* que, a su vez, genere una re-organización del conocimiento de los estudiantes. Debemos apresurarnos a decir que este paso es lento y complejo. Por esto, tiene sentido desde una perspectiva curricular, examinar a fondo el papel de la calculadora como instrumento de amplificación dentro de un curriculum establecido.

La re-organización no puede separarse de la amplificación. Son las dos caras de una moneda.

A este respecto Dörfler (1993, p. 165) ha señalado que:

> *Si la cognición se ve como una propiedad del individuo entonces la metáfora de la amplificación es altamente sugestiva... pues son nuestras capacidades cognitivas las que se amplían sin sufrir cambios cualitativos.*
>
> *Pero si vemos la cognición como un sistema funcional que comprende al individuo y todo su entorno físico y social... se abre la posibilidad de reconocer que las nuevas herramientas tienen un impacto transformador profundo en la cognición....*

La reflexión en torno a los procesos de amplificación y re-organización también puede darse desde la perspectiva de la transición de herramienta a instrumento matemático que sufren los computadores y las calculadoras (Rabardel, 1995).

Por otra parte, es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas o, en cambios con respecto a la calidad de su argumentación. Cuando hablamos de las calculadoras, diremos que *la calculadora se ha tornado un instrumento matemático* cuando tiene efectos de re-organización conceptual. En ese caso estaremos ante los efectos estructurantes de la herramienta sobre la acción.

Algunos autores se han preocupado por caracterizar el origen de esa transformación. Es decir, se han interesado por la génesis instrumental de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995). En dicha génesis se combinan dos procesos:

i) El sujeto se adapta a la herramienta.

ii) El sujeto adapta la herramienta a sí mismo.

Estos procesos ocurren mediante la producción de *esquemas de uso*, orientados a las acciones directamente vinculadas a la herramienta. Estas acciones del estudiante están condicionadas por la naturaleza de la herramienta misma. El uso sostenido de la herramienta estabiliza los esquemas de uso. Dichos esquemas permiten atribuir un significado a los objetos (matemáticos) en función de la orientación de la actividad y de las tareas a desarrollar. A partir de allí, el empleo de las herramientas (ahora instrumentos) queda controlado por los esquemas.

Referencias

Dorfler W. (1993) *Computer Use and Views of the Mind* en Learning from Computers: mathematics Education and Technology,Keitel, C. & Ruthven, K. (eds), Springer-Verlag, Nato Asi Series, 121.

Balacheff N.& Kaput J. (1996) *Computer-Based Learning Environment in Mathematics.* En Bishop, A.J. et al, *International Handbook of Mathematical Education* , 469-501.

Moreno L. (2001) *Cognición, Mediación y Tecnología*. Avance y Perspectiva, vol. 20, pp. 65-68.

Peitgen et al. (1992) *Fractals for the Classroom* , vol. 1 (Introducción de B. Mandelbrot). Springer-Verlag & NCTM.

Rabardel P. (1995) *Les Hommes et les Technologies* . Armand Colin, Paris.

Descartes...el regreso

Jean-Marie Laborde

Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia

Resumen. Los computadores se han convertido en una herramienta tecnológica de uso cotidiano para el matemático, en cuanto le ayudan a modelar y a pensar. Ahora es posible comprobar fácilmente una conjetura para apoyar o rechazar hipótesis, por ejemplo, haciendo que el computador lleve a cabo cálculos que de otra forma serían irrealizables. Muy frecuentemente esto se hace interactuando con simulaciones numéricas y/o CAS (Computer Algebra Systems). En esta presentación se mostrará cómo Cabri, originalmente un ambiente computacional desarrollado para interactuar dinámicamente con objetos geométricos, es (o puede ser) usado en muchos casos, para realizar tareas que las personas hacían usando sistemas numéricos y/o algebraicos. Expondremos ejemplos ilustrativos donde, operando con objetos matemáticos bajo manipulación directa, Cabri se usa en una forma muy poderosa en álgebra, cálculo, cinemática, mecánica y/o física.

La geometría dinámica está basada en la geometría de Euclides, a la cual se agrega el concepto de movimiento y otros principios de diseño como el de continuidad, explicitación del infinito, reversibilidad o ergonomía cognoscitiva, clases de invarianza y muchos otros en los cuales no voy a profundizar.

Durante gran parte del desarrollo de la geometría hasta su edad de oro , que podemos considerar data del siglo diecisiete, se ve la geometría como una herramienta para el debate intelectual. Por ejemplo, los elementos de Euclides se constituyeron fundamentalmente en un juego mental sin una perspectiva hacia el aprendizaje o sin la pretensión de hacer de la geometría algo útil; era más una actividad para el espíritu. Sin embargo, aparece en este siglo, el aspecto práctico de la geometría. Para los arquitectos, constructores, físicos, e incluso para los pintores, la geometría tiene gran aplicación. Conocemos por ejemplo el desarrollo de la perspectiva que nació con los problemas planteados por la representación de la naturaleza a los que se enfrentaron los pintores de la época. Pero este desarrollo también tiene algunas limitaciones que frenaron su perfeccionamiento. Entre ellas, mencionaremos limitaciones de tipo teórico como la imposibilidad de ciertas construcciones e igualmente limitaciones de tipo práctico como la mediocridad de la calidad de los trazados.

Para ilustrar estas ideas, y a propósito de las construcciones imposibles con regla y compás, quisiera citar algunos ejemplos como el de la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, entre otros. Estas construcciones son imposibles si nos limitamos al uso de la regla y el compás, pero mostraré cómo es posible realizarlas, con la ayuda de *Cabri Géomètre.* Realizaremos por ejemplo, la construcción de la trisección del ángulo.

Trisección del ángulo

Consideremos la figura 1 en la que se muestran los segmentos *OA* y *OB*. Deseamos construir dos semirrectas que dividan en tres ángulos congruentes al ángulo *AOB.* En el siglo XIX se demostró que con regla y compás era imposible trisecar el ángulo, pero con las herramientas del programa de geometría dinámica, se puede hacer muy bien.

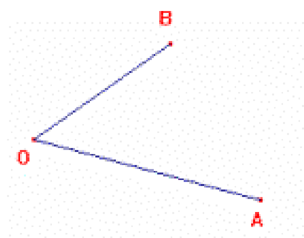


Figura 1

Tracemos la semirrecta *OB* y construyamos un círculo con centro *O* que pasa por *A*. Llamemos *C* al punto de corte de la circunferencia con la semirrecta *OB* (Figura 2).

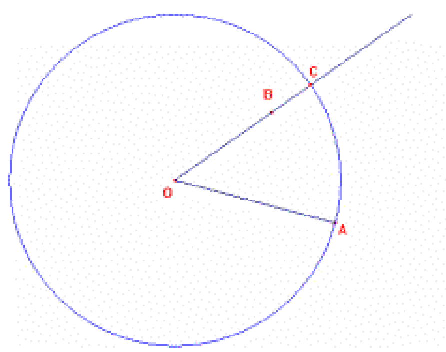


Figura 2

Si logramos dividir el arco *AC* en tres partes iguales, se podrá hacer la trisección del ángulo. Construyamos el arco *AC*. Para esto tracemos la mediatriz del segmento *AC*, determinemos su punto de intersección con la circunferencia y tracemos el arco *AC* que pasa por este punto de intersección. (Figura 3)

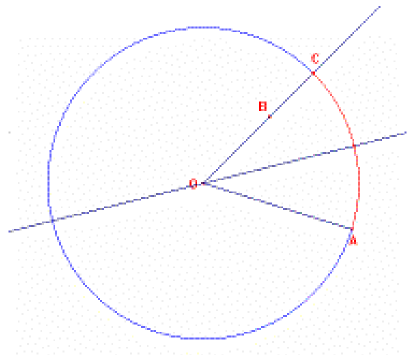


Figura 3

Ahora calculemos la longitud del arco *AC* y dividamos dicho valor por tres. Al transferir esta medida sobre el arco, se marca un punto que corresponde a la tercera parte de su longitud. Llamamos *D* a dicho punto y trazamos la semirrecta *OD*, que es la primera trisectriz. Para trazar la otra trisectriz se halla el simétrico de *D* con respecto a la mediatriz de *AC*. Llamemos *E* a dicho punto y tracemos la semirrecta *OE*. Dicha semirrecta es la segunda trisectriz [1] (Figura 4).

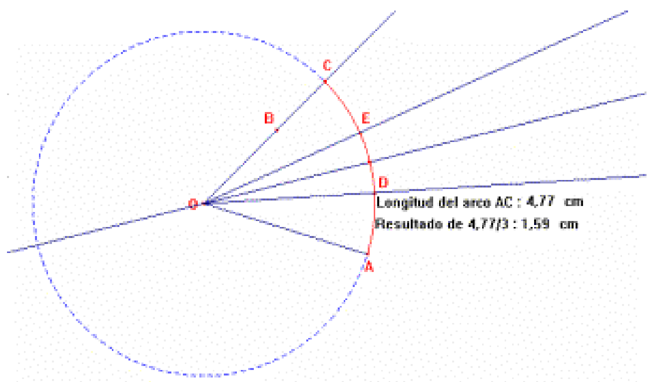


Figura 4

Para utilizar esta construcción en cualquier ángulo y poder experimentar con ella, se construye una macro. Como objetos iniciales tomamos el punto *A*, el punto *O* y el punto *B* y como objetos finales las semirrectas que trisecan el ángulo. Denominemos esta macro como *tris* y apliquémosla a cualquier triángulo.

Sabemos que las bisectrices concurren en un punto común, pero ¿qué ocurre con las trisectrices? Esta inquietud surge con base en la exploración de un matemático llamado Morley. El construyó las trisectrices de los ángulos de un triángulo (Figura 5).

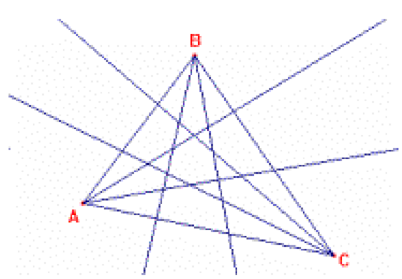


Figura 5

Morley se interesó por el pequeño triángulo determinado por algunas de las intersecciones de las trisectrices (Figura 6). Al deformar el triángulo inicial, los ángulos internos del triangulo pequeño mantienen siempre la medida de 60°. Se necesitaron 15 años para que los matemáticos demostraran por primera vez este teorema, que hoy en día sigue siendo objeto de desarrollo algebraico en matemáticas.

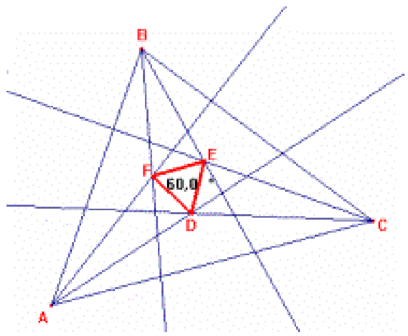


Figura 6

La trisección del ángulo es un ejemplo de construcción imposible de realizar con regla y compás, pero que podemos lograr con la geometría dinámica.

Construcción de cónicas

A propósito de la limitación a la cual me refería anteriormente, relacionada con la mediocridad de la calidad de los trazos, voy a tomar como ejemplo un dibujo de Durero, quien es considerado uno de los primeros “dibujantes” que “construyó realmente” una cónica. Sabemos que desde los griegos se considera una cónica como la intersección de un cono con un plano. Entonces, dependiendo de la posición relativa de este plano, se obtienen curvas de formas diferentes, que los griegos denominaron elipse, hipérbola o parábola. Pero las obras griegas desaparecieron y desafortunadamente no tenemos los originales.

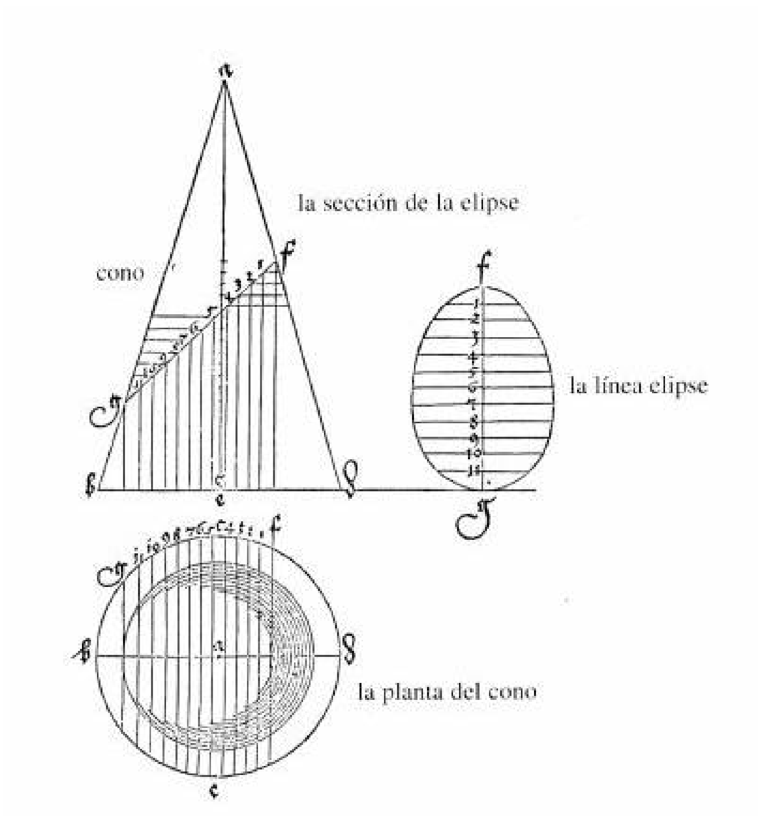


Figura 7

Durero fue entonces uno de los primeros, llamémoslo pintor, matemático, geómetra, que encontró una construcción de este objeto. Dibujó lo que tenía en mente y construyó una forma más afilada en la parte alta que en la parte baja, es decir, terminó dibujando un huevo. El hizo todos estos trazos a mano. (Figura 7)

Con *Cabri Géomètre* podemos realizar este tipo de construcción. Obviamente la figura construida es dinámica, es decir, los puntos se pueden arrastrar o desplazar. Pedimos a *Cabri Géomètre* que dibuje una cónica pasando por cinco de los puntos. Se obtiene un objeto simétrico, con dos ejes de simetría: uno vertical, del cual Durero estaba convencido, y uno horizontal que no aparece en su dibujo original [2] . (Figura 8)

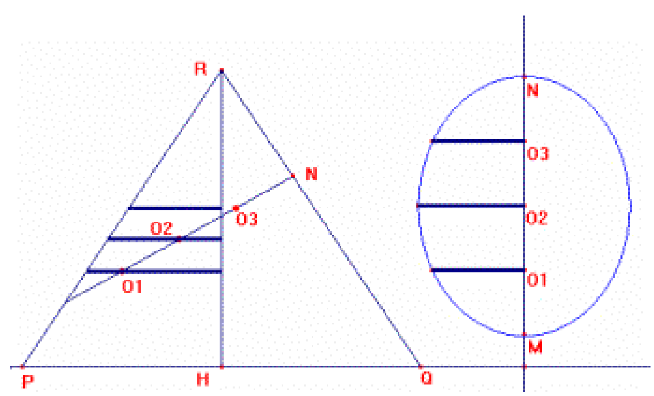


Figura 8

Refracción

Consideremos ahora el ejemplo de la refracción. Los griegos ya se habían dado cuenta que al sumergir un objeto en el agua, se tiene la impresión de que el objeto se rompe. Si es un palo por ejemplo, uno tiene la impresión de que el palo se rompe en el punto en el que entra en contacto con el agua.(Figura 9)

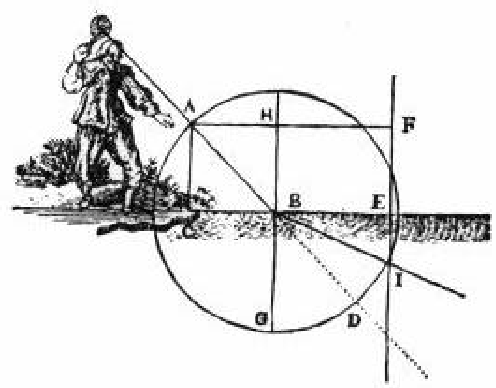


Figura 9

Este fenómeno intrigó muchísimo a los físicos y a los geómetras encontrándose entre los precursores de su estudio, personajes como Arquímedes, Ptolomeo, Ibn Al Sahl, Kepler y Galileo y entre los estudiosos modernos a Snell y Descartes. Los llamo modernos, porque en ese momento se estaba inventando en Holanda el lente astronómico y la refracción era un tema crucial. Uno de estos lentes fue trasportado a Italia, gracias al cual Galileo, que no temía mirar al cielo a través de un tubo, se sorprendió al ver satélites como los de Júpiter. En ese momento logró concebir la confirmación de su idea, es decir, que la tierra giraba alrededor del sol y no lo contrario.

Veamos en Cabri Géomètre la modelación de la refracción esférica (Figura 10). Consideremos una superficie que separa el aire del agua (no es totalmente recta para indicarles precisamente que nos interesa el fenómeno de los lentes como los que se utilizan para construir los aparatos astronómicos) y un rayo luminoso (incidente) que llega al punto *I* y que cambia de dirección. Descartes imaginó una construcción geométrica como la siguiente para representar este fenómeno: se trazan dos circunferencias de radios n1 y n2 con centro en *I*. Se prolonga el rayo incidente hasta la intersección con la primera circunferencia y el punto de corte se proyecta sobre la segunda circunferencia. Al unir *I* con este último punto se obtiene el rayo refractado.

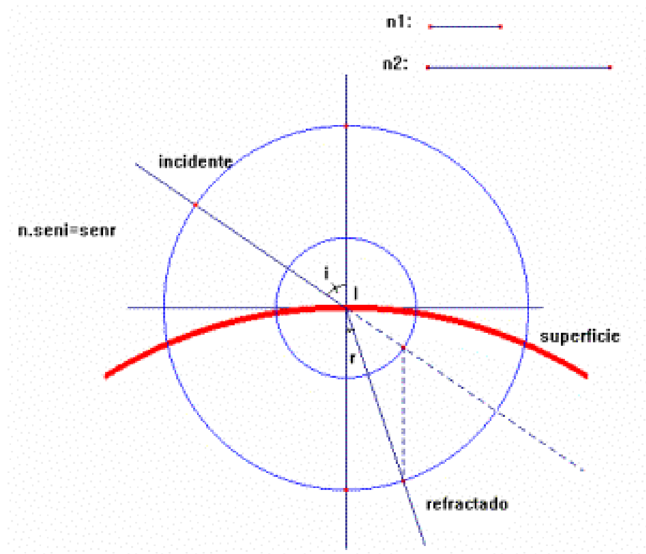


Figura 10

Descartes puso en práctica esta modelación para desarrollar los problemas de refracción en lentes esféricas.

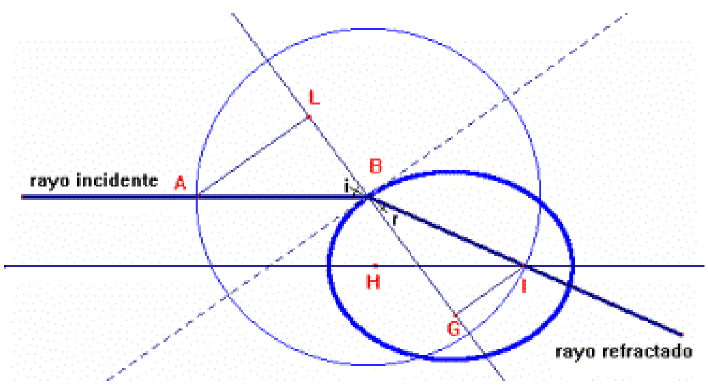


Figura 11

Quiso demostrar, sobre la base de su construcción, (Figura 11) que los segmentos *AL* y *GI* deben conservar la misma proporción sea cual sea el punto *B* (punto de contacto del rayo incidente con la superficie), probando así que para un lente elíptico todos los rayos incidentes que provienen del infinito y que son paralelos al eje focal, van a pasar por el punto *I* (foco de la elipse) [3] .

La siguiente es la construcción original de Descartes tomada de su libro La Dióptrica [1] [4] (Figura 12)

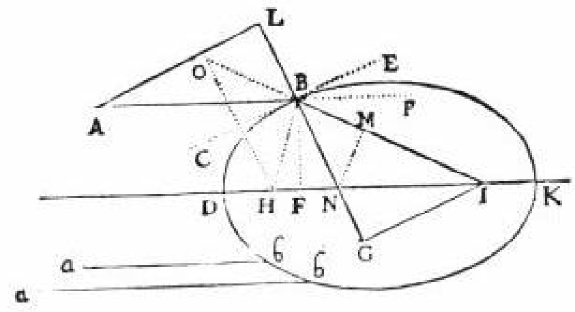


Figura 12

La construcción inicial propuesta por Descartes es un caso particular ya que si desplazamos el punto *B*, el punto *O*, que parecía pertenecer al segmento *AL* en la construcción, no necesariamente pertenece a éste. (Figura 13)

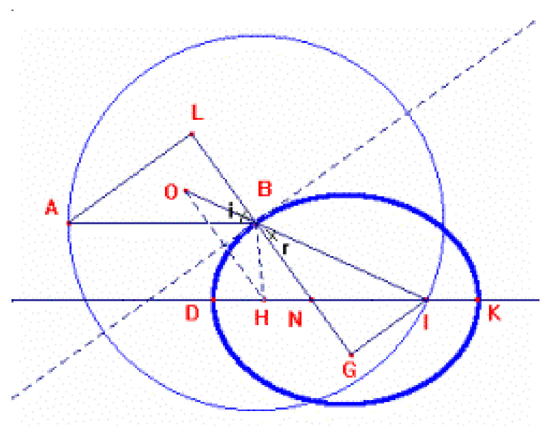


Figura 13

Reconstruiremos aquí la demostración de Descartes animándola en Cabri [5] . La demostración consiste en remplazar de manera continua los segmentos *AL* y *GI* por segmentos proporcionales hasta llegar a una razón de segmentos que no dependa de B. Cuando se arrastran los segmentos *AL* y *GI* desplazando a *L* y a *G* sobre la normal (recta *LG*), no cambia su razón, porque estos barren los triángulos *BLA* y *NGI*, cuyos lados *BA*, *NI* y *AL, IG*, son respectivamente paralelos (Figura 14).

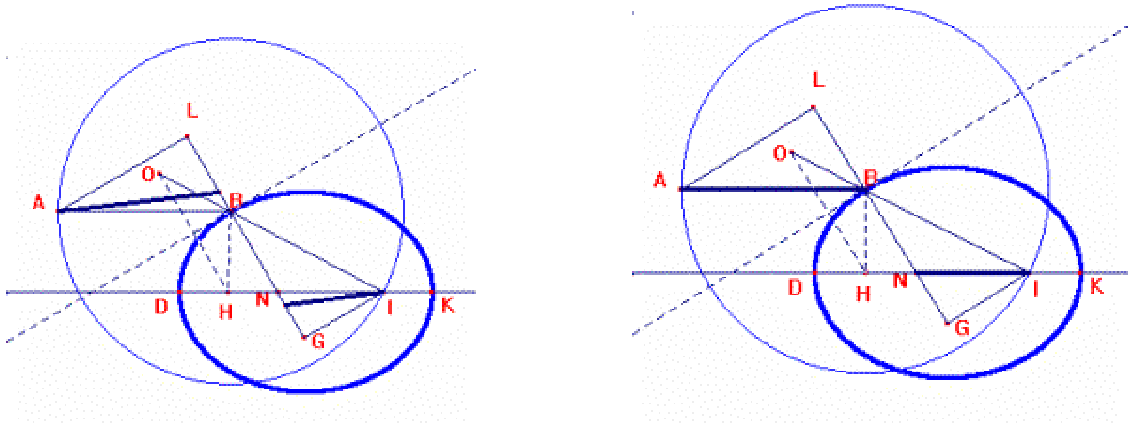
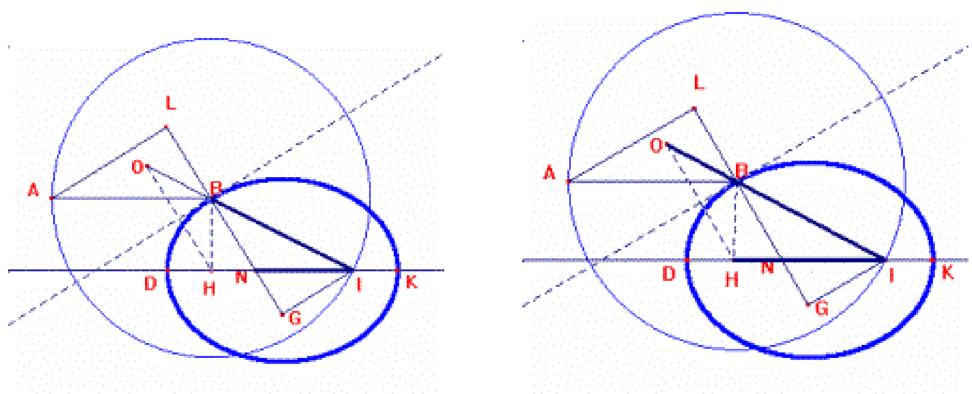


Figura 14. *AL / IG = AB / IN*

Podemos rotar el segmento *AB* alrededor de *B* y superponerlo sobre *BI* (por construcción, *BA* es congruente con *BI*). Si se prolongan los segmentos *IB* e *IN* hasta hacer coincidir sus vértices con *O* y con *H* respectivamente (Figura 15) la razón entre ellos se sigue conservando, gracias al teorema de Tales (*OH* es paralelo con *BN*). De esta manera comparar *AL* con *IG* equivale a comparar *IO* con *IH.*



AB/IN=IB/IN *IB/IN=IO/IH*

Figura 15.

Al construir el simétrico de *OB* con respecto a la tangente, coincide con el segmento *HB* (Figura 16). Por lo tanto la razón entre *AL* y *GI* es la misma que entre *HB* + *BI* y *HI*.

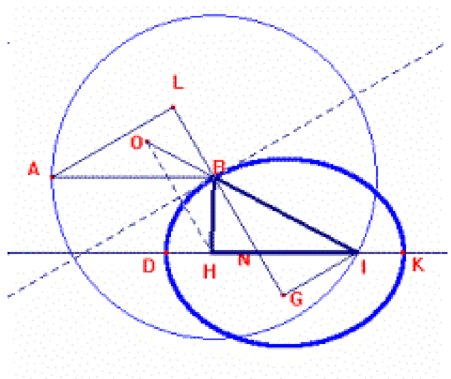


Figura 16. *IO/IH = (IB +BH) / IH*

Como *B* está sobre una elipse, *IB + BH* e *IH,* son constantes (es decir, independientes del punto B sobre la elipse). De esta manera se ha reemplazado la razón entre los segmentos iniciales *AL* y *GI,* que aparentemente depende de B, por la razón *(IB +BH) / IH* , que depende de la elipse y de su diámetro, es decir, de su excentricidad.

Trayectoria de los planetas

Consideremos otro problema muy importante para la historia de la humanidad referente a la trayectoria de los planetas. Newton estableció que el desplazamiento de un planeta de un punto *M* a un punto M_1, se lleva a cabo en un determinado período de tiempo, pero que cuando avanza de *M* a M_1 el planeta es sometido a una fuerza de atracción hacia el sol, lo que implica que en lugar de ir en línea recta, llegará a un punto s_1 determinado por la suma de los vectores corespondientes. Representemos esto en *Cabri Géomètre.* (Figura 17)

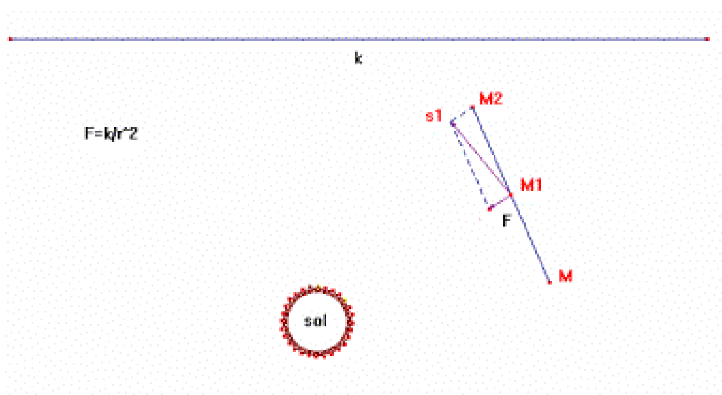


Figura 17

El punto *M* representa la posición de un planeta en un instante dado y M_1 representa la posición del planeta un instante después. F representa la fuerza dirigida hacia el sol, la cual se calcula por medio de la fórmula $F = k/r^2$ siendo r la distancia de M_1 al sol. En consecuencia, un instante después, el planeta va a encontrarse, no en M_2, sino en s_1, punto correspondiente a la suma de los vectores. Para llegar a la fórmula, Newton hizo sus dibujos en una gran hoja de papel en el piso y experimentó fórmulas como F = k/r, F = kr hasta llegar a $F = k/r^2$.

Veamos esta figura en la que se repite cinco veces la construcción, para tener una aproximación gráfica de la trayectoria del planeta [6] (Figura 18).

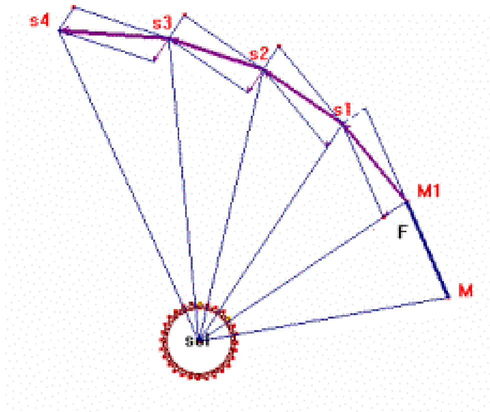


Figura 18

Aquí por ejemplo (Figura 19) repetí la construcción muchísimas veces. Si la velocidad inicial no es muy grande, la curva retorna sobre si misma y se podría construir una cónica. Esto fue precisamente lo que hizo Newton. Encontró que la cónica se sobrepone de manera bastante precisa sobre su dibujo y dedujo entonces que la ley de la atracción universal expresada como k/r^2, era compatible con las observaciones de Kepler, quien afirmó que la trayectoria de los planetas se hacía sobre elipses. A su vez Newton, una vez más, reencontró esta coherencia de modelo sobre las bases de sus dibujos de naturaleza geométrica.

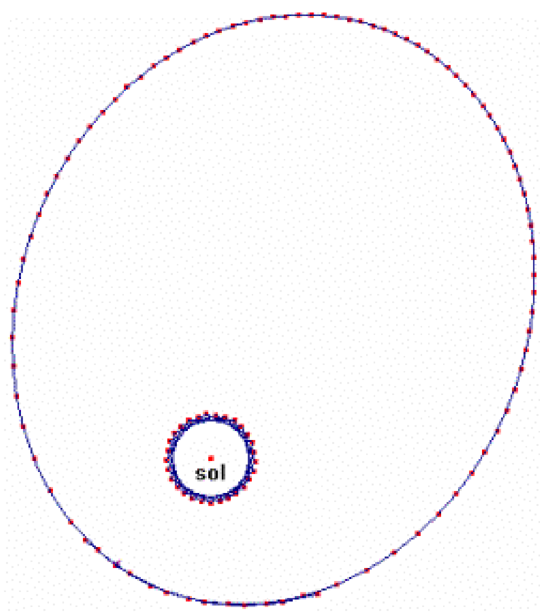


Figura 19

Podemos ir un poquito más allá de la primera ley de Kepler, analizando las áreas barridas por un planeta en lugar de su posición de un instante a otro. Consideremos los triángulos de la figura 20 y calculemos sus áreas.

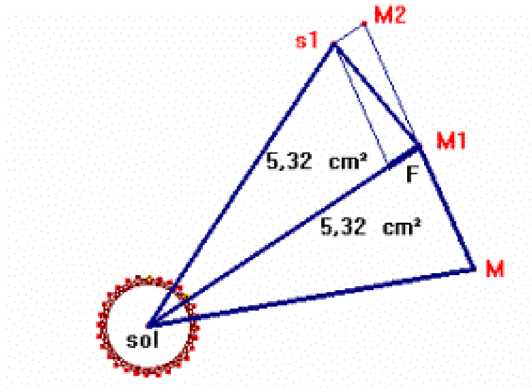


Figura 20

Si se arrastra el punto *M*, recorriendo la trayectoria *M*, M_1, s_1, se observa que las áreas de los triángulos siempre serán las mismas. Esto le reafirmó a Newton la tercera ley de Kepler la cual afirma que los planetas recorren áreas iguales en intervalos iguales de tiempo.

Veamos lo que se puede hacer con *Cabri Géomètre*. Haré una demostración similar a la realizada con la elipse de Descartes. Vamos a comparar el triángulo SMM_1 con el triángulo SM_1s_1 (Figura 21)

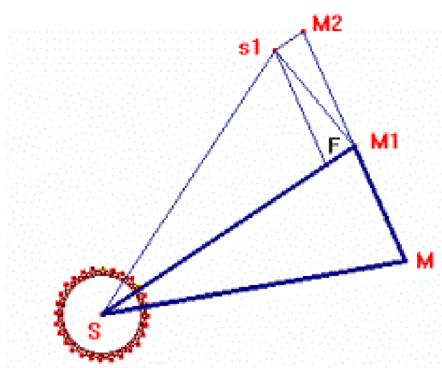


Figura 21

Desplacemos el triangulo SMM_1 de forma que MM_1 se deslice sobre la misma recta que la contiene (Figura 22). Los segmentos MM_1, y $M'M_1'$ son congruentes ya que el planeta recorre la misma distancia en un mismo periodo de tiempo. Entonces el triangulo SMM_1 y el triángulo $SM'M_1'$ tienen la misma área.

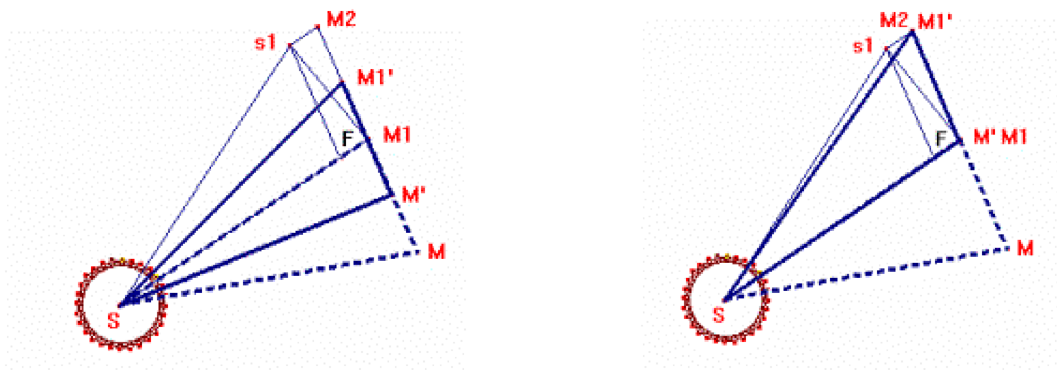


Figura 22

Finalmente se desplaza $M_1{}'$ sobre el segmento M_2s_1 que es paralelo a SM_1, es decir el vértice M' se mueve paralelamente al lado SM_1 y por lo tanto su área no cambia. (Figura 23)

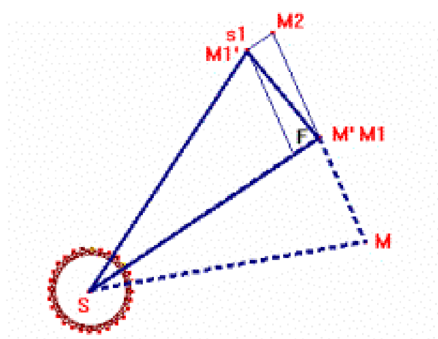


Figura 23

En consecuencia, el área de triángulo SMM_1 es igual al área del triángulo SM_1s_1.

Esta es una demostración puramente geométrica de la ley de las áreas, la cual normalmente se hace en el marco de un curso de cálculo o de análisis.

Un problema de densidad

Voy ahora a plantear un problema que es contemporáneo y que no siempre tiene una solución general: *¿cómo coloca, en el plano, once círculos iguales de la forma más densa posible*?

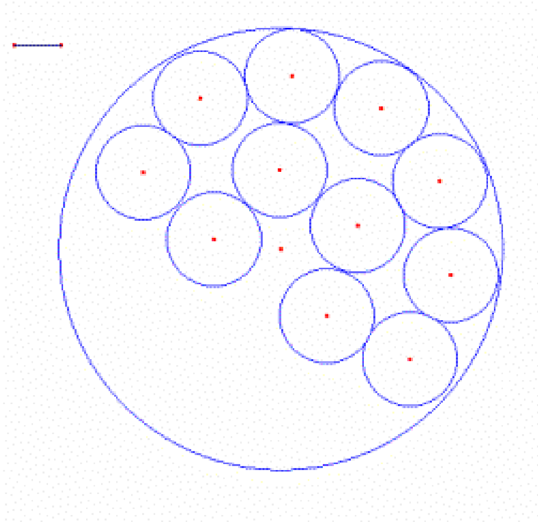


Figura 24

Supongan que tienen once monedas circulares del mismo valor y que quieren organizarlas de manera que ocupen el menor espacio posible. Una forma de hacerlo sería colocando once monedas, de manera que queden dentro de una circunferencia (Figura 24). La disposición más densa posible se logrará cuando el radio de la circunferencia que contiene las monedas sea el menor posible. Entonces, el problema consiste en realizar la construcción de esa disposición.

Un matemático llamado Kravitz, conjeturó que la disposición más densa posible de once piezas en un círculo, solo era factible cuando se realizaba de la forma representada en la figura 25. Esta es una conjetura de 1967, que fue probada en 1969 y que se puede *verificar* en Cabri.

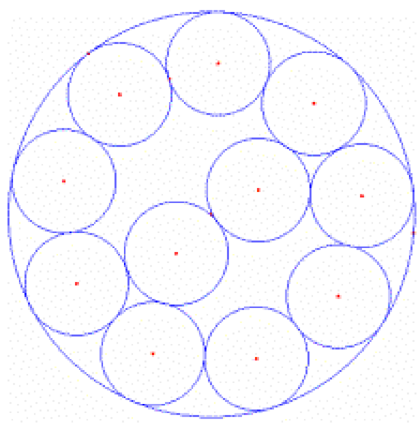


Figura 25

A mano es muy difícil realizar esta construcción pero veamos cómo se realiza con nuestro programa. Construimos nueve circunferencias de igual radio (pequeño) secuencialmente tangentes e interiormente tangentes a una circunferencia de radio bastante grande de manera que la longitud de éste se pueda controlar, y dos circunferencias más de centros *B* y *B'* como en la figura 26 [7] .

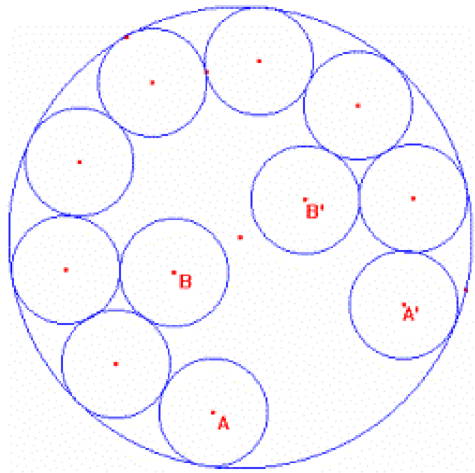


Figura 26

Lo que es extraordinario es que al disminuir el radio de la circunferencia grande paredera que ya no hay espacio entre las circunferencias con centros *B* y *B'* cuando todavía lo hay entre las de centros *A* y *A'*. La distancia entre los centros *B* y *B'* se acercará a 2 al disminuir el radio de la circunferencia grande, pues hemos tomado el radio de las circunferencias pequeñas como 1. ¿Qué pasará con la distancia entre los centros *A* y *A'* ? Veremos que a medida que la distancia entre B y B' se acerca a 2 sucede lo mismo con la distancia entre A y A'.

El mecanismo para lograr esto con precisión, se basa en un principio de *palancas.* Trazamos un segmento *MN* horizontal y un segmento *PQ* vertical que intercepte en *R* a *MN* cerca a *N* (Figura 27). Al mover *M* verticalmente el desplazamiento de *R* es muy pequeño.

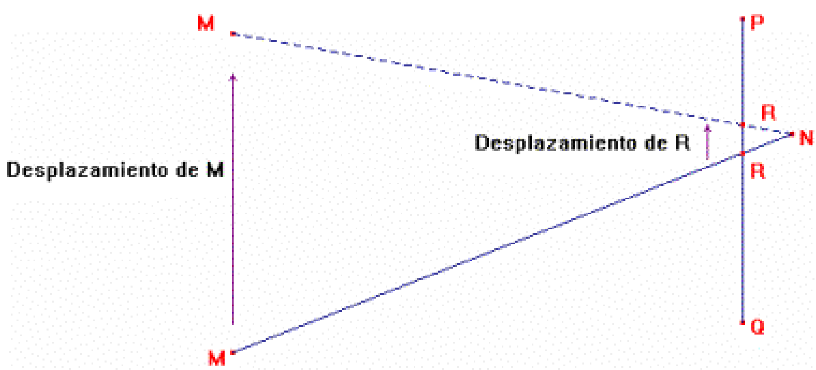


Figura 27

El desplazamiento de R será mucho menor entre más cerca esté N de R y más lejos esté M de R. Además, con una combinación de palancas se logran obtener desplazamientos casi imperceptibles de un punto, con lo que se incrementa la precisión (Figura 28).

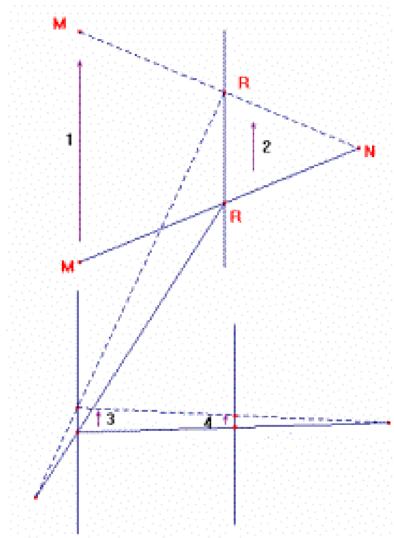


Figura 28

Integrando el sistema de palancas a la construcción, se puede obtener simultáneamente una distancia de 2cm entre los puntos A, A' y B, B', con una precisión de nueve cifras decimales. He podido cambiar la posición de los círculos y asegurarme como matemático de que este fenómeno extraordinario ocurre, es decir, que las cuatro monedas estarán una junto a la otra, algo bastante inesperado y sorprendente. Este es un tipo de modelación geométrica que se puede lograr gracias a la increíble precisión del sistema y que muchos denominan la certeza absoluta. (Figura 29)

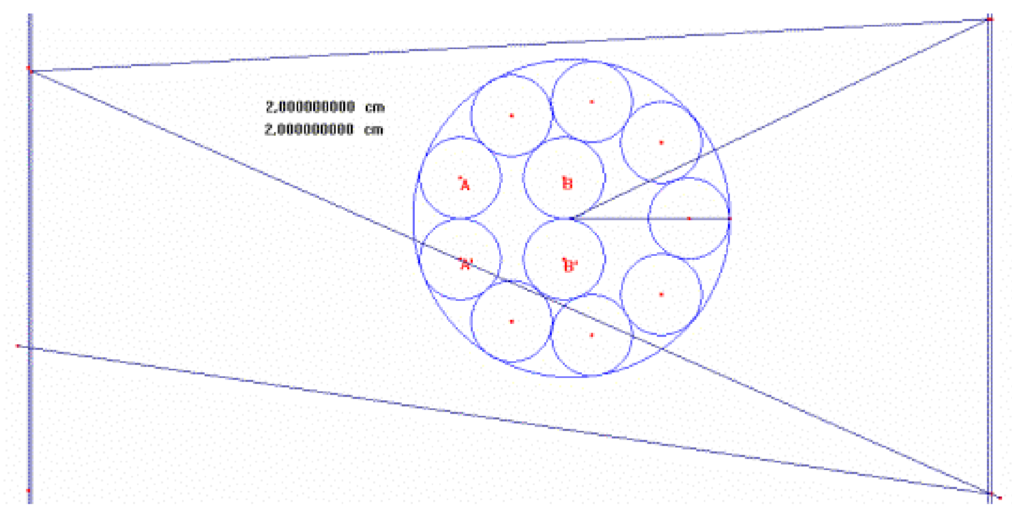


Figura 29

Como conclusión, retomaré las principales ideas expuestas en esta conferencia:

La edad de oro de la geometría estuvo determinada por los trabajos de grandes geómetras de la antigüedad como Tales, Pitágoras, Euclides y Descartes, entre otros.

El inicio de la decadencia, empieza con Descartes y su geometría analítica, es decir, con la preferencia que se da al enfoque simbólico y al formalismo algebraico, en oposición al enfoque visual e intuitivo. Esta decadencia es perceptible aun hoy en día en la evolución de los programas escolares de geometría en algunos países.

Hoy en día tenemos la posibilidad de vivir un renacimiento gracias al surgimiento de herramientas como la geometría dinámica con la que es posible dimensionar la potencia de la expresión geométrica en la historia. Ejemplos como la gravitación universal, la refracción, el movimiento de los planetas y muchos otros fenómenos, se constituyen en una posibilidad de desarrollo de los conocimientos en los campos de la física y la matemática y representan una inversión del movimiento iniciado por Descartes y por sus sucesores.

Es importante anotar que los fundamentos matemáticos en los que se basa el *Cabri Géomètre* y que hacen posible su aplicación, se soportan en la geometría analítica de Descartes, ya que se necesitan desarrollos algebraicos y algorítmicos para la informática. Esto me hace pensar que Descartes realmente ha regresado al origen del futuro de la geometría, es decir, que la geometría dinámica es el cálculo del futuro.

Bibliografía

Descartes R (1981) *Discurso del Método, Dióptica, Meteoros, y Geometría,* Ediciones Alfaguara, Madrid.

Durero A (2000) *De la medida,* Edición de Jeanne Peiffer, Ediciones Akal, Madrid.

Apéndice

Construcción de la elipse de Durero

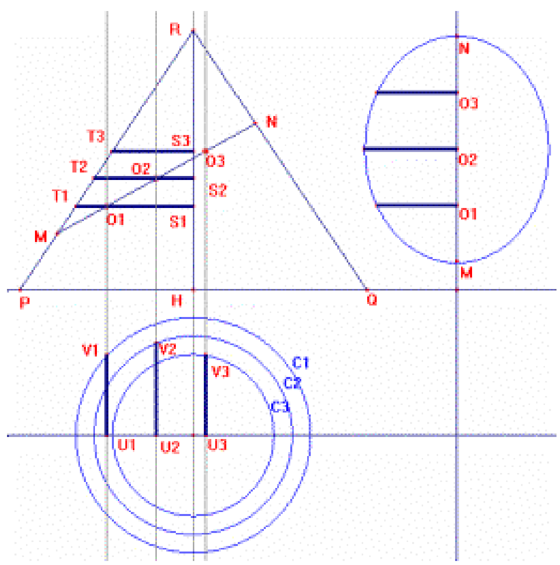


Figura 30

Construya una recta horizontal *AB* y un triángulo isósceles *PQR* con base *PQ* sobre *AB* (vista de frente del cono). Construya el segmento *MN* con vértices en los segmentos *RP* y *RQ* (plano de corte del cono). Tomando puntos medios sobre *MN* construya los puntos O_1, O_2 y O_3 y los segmentos S_1T_1, S_2T_2 y S_3T_3 perpendiculares al eje *RH* del cono que pasan por O_1, O_2 y O_3

respectivamente (radios de las circunferencias horizontales que contienen los puntos O_1, O_2 y O_3). Con centro en el eje RH construya circunferencias C_1, C_2 y C_3 de radios S_1T_1, S_2T_2 y S_3T_3 respectiva mente, y las medias cuerdas U_1V_1, U_2V_2 y U_3V_3 determinadas por rectas paralelas al eje RH que pasan por O_1, O_2 y O_3 , respectivamente. Usando el compás reproduzca MN y los puntos O_1, O_2 y O_3 en una recta paralela a RH. Perpendicularmente a esa recta reconstruya las medias cuerdas U_1V_1, U_2V_2 y U_3V_3 con extremos O_1, O_2 y O_3 respectivamente. Construya la cónica que pasa por M, N y los extremos de estos segmentos (ver la figura 30). ¡Justifique los pasos de esta construcción!

Construcción de la elipse de Descartes (Ley de la refracción)

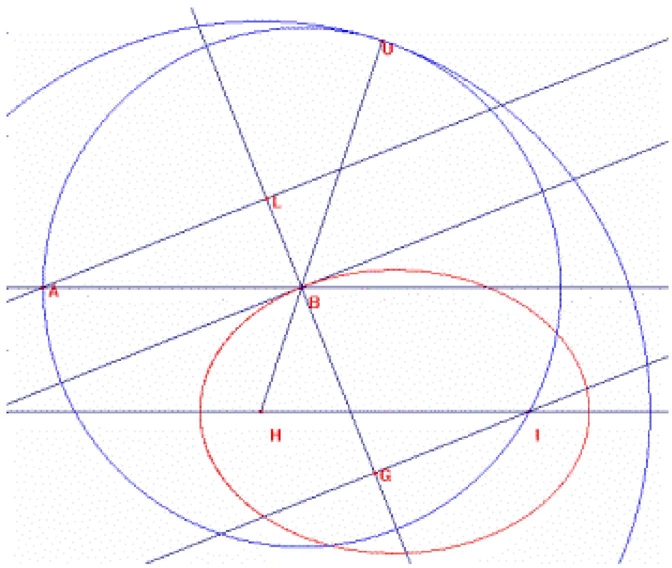


Figura 31

Sobre una recta horizontal (figura 31), represente dos puntos *H* e *I*, focos de la elipse, y una circunferencia con centro en *H* que contenga a *I*. Tome un punto *U* sobre esa circunferencia y construya la mediatriz *m* de *IU* (recta tangente a la elipse). El punto de intersección entre esta mediatriz y el segmento *HU* es el punto *B*. Construya una circunferencia con centro en *B* y que pase por *I* y trace una recta paralela a *HI* que pase por *B* que corta a esa circunferencia en el punto *A* (*AB* es el rayo incidente; *BI* es el rayo refractado). Construya la recta perpendicular a *m* por *B* y dos rectas perpendiculares a esta última por *A* e *I*. Los puntos de intersección con la perpendicular serán *L* y *G*. La elipse se obtiene como lugar geométrico de *B* con respecto a *U*. ¡Justifique los pasos de esta construcción!

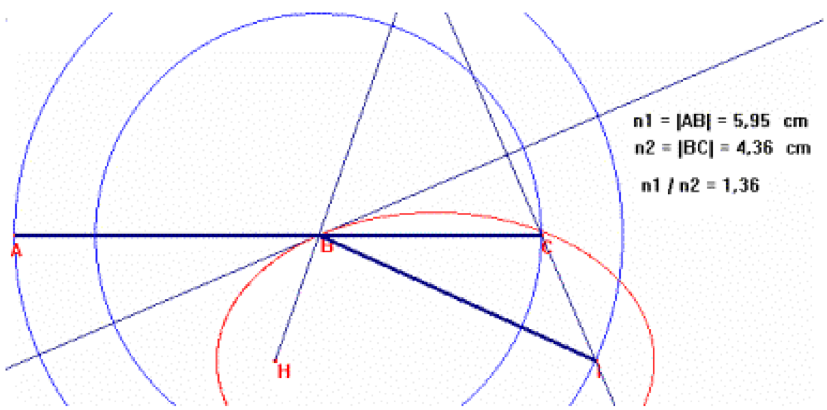


Figura 32

Hay una verificación de la ley de la refracción en la elipse en el ambiente Cabri (figura 32). Consiste en Construir las circunferencias de radios n_1 y n_2 con centro en *B*. Calcular el cociente *n1/n2* y verificar que se mantiene constante al variar *B* sobre la elipse. La circunferencia de radio *n1* es la definida por *AB* y la de radio *n2* por *BC*, donde *C* es el punto de intersección entre la recta *AB* y la perpendicular a m que pasa por *I*.

Construcción de la trayectoria de Newton

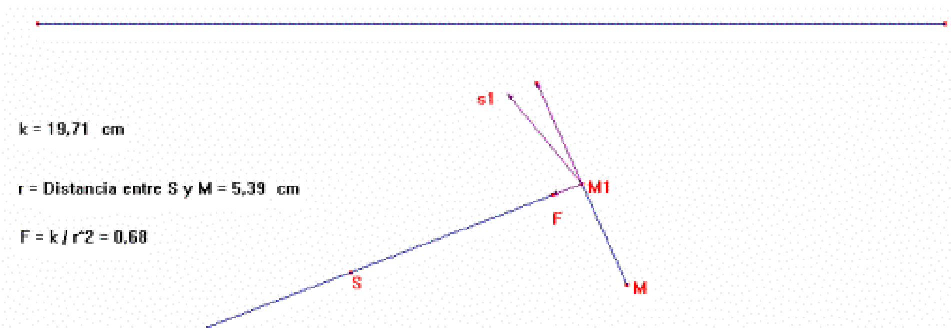


Figura 33

Trace un segmento horizontal y tome su longitud *k* (Figura 33). Represente un punto S y un segmento MM_1. Encuentre el simétrico *M'* de *M* con respecto a M_1 y construya el vector M_1M'. Encuentre la distancia *r* entre *S* y M_1 y calcule $F = k / r^2$. Transfiera *F* a la semirrecta M_1S y construya el vector *F*. Sume el vector M_1M' con *F*. El extremo es s_1. Con estos elementos puede definir la macro con objetos iniciales *S*, MM_1, el segmento inicial y con objeto final el segmento M_1s_1.

Construcción de la disposición de las monedas

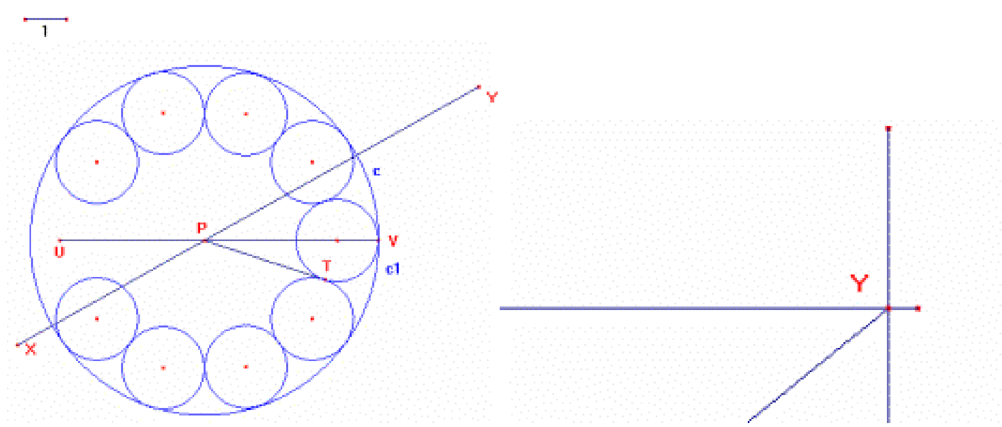


Figura 34

Construya un segmento de longitud 1 usando el editor numérico. Trace dos segmentos *UV* y *XY* como en la figura 34 y trace la circunferencia *c* con centro en *P* y radio *PV* (puede ver que el radio de la circunferencia está controlado por el punto *Y*). Usando el compás construya la circunferencia c_1 de radio 1 tangente a la circunferencia *c* en el punto *V*. Construya el segmento *PT* tangente a c_1 en *T*. Usando alternadamente los segmentos *PV* y *PT* como ejes de simetría construya ocho circunferencias más de radio 1 tangentes a *c*. El resto de la construcción es fácil de obtener. Para controlar el tamaño de c de manera precisa puede introducir una palanca en Y transfiriéndolo al punto de intersección de dos segmentos.

---

[1] N. R. Este procedimiento puede parecer profano para muchos geómetras y amantes de la geometría. Sin embargo, la posibilidad de hacer lo que explica el profesor Laborde con una precisión asombrosa dada por el programa, tiene un potencial grandísimo en términos de la exploración, aspecto que el profesor menciona a continuación.

[2] Para la construcción ver el apéndice.

[3] N. R. Considerando los triángulos *ALB* y *GIB*, obtenemos las siguientes relaciones: *AL* = *AB* sen *i* y *GI* = *BI* sen *r*. Por lo tanto, *AL* / *GI* = *AB* sen *i* / *BI* sen *r* = sen *i* / sen *r*, debido a que los segmentos *AB* y *BI* son congruentes (por construcción). Demostrar que sen *i* / sen *r* es constante al variar el punto B (ley de refracción), es equivalente a demostrar que *AL* / *GI* es constante, independiente de la posición del punto *B*.

[4] N. R. En el apéndice daremos los detalles suficientes para que el lector pueda rehacer esta construcción.

[5] N. R. En la narración de la demostración aparecen palabras como *arrastrar* que no son usuales en una demostración formal. Le recordamos al lector que lo que hace el profesor Laborde es una lectura dinámica de la demostración original de Descartes en el ambiente Cabri.

[6] Ver apéndice para la construcción

[7] Ver apéndice para esta construcción

El Proyecto de "Incorporación de Nuevas Tecnologías al currículo de Matemáticas de la Educación Media" y sus avances

Ana Celia Castiblanco Paiba

Coordinadora general del Proyecto
"Incorporación de Nuevas tecnologías al Currículo

de Matemáticas de la Educación Media de Colombia"

Ministerio de Educación Nacional

Resumen. La conferencia gira alrededor del proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas* que el Ministerio de Educación viene desarrollando desde hace dos años, con colegios públicos y universidades de Colombia. Además de la presentación de los objetivos, líneas de acción y componentes, se hace un

reporte del impacto de la Fase Piloto del Proyecto en el Sistema Educativo, que permite afirmar su pertinencia dentro de las políticas de mejoramiento de la calidad de la educación matemática en nuestro país.

1. Cómo surgió el proyecto

El proyecto que hoy presentamos a la comunidad educativa, es el resultado de un proceso de construcción participativa que se viene adelantando en el país para orientar la educación matemática colombiana, convocado por el Ministerio de Educación Nacional en desarrollo de las políticas propuestas por la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994) y del interés de un amplio grupo de educadores matemáticos.

Dentro de este proceso, en 1996 se inició la construcción de los *Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas,* con la participación de docentes e investigadores de diversas instituciones educativas colombianas. Estos fueron publicados en julio de 1998.

En estos lineamientos se tuvieron en cuenta los desarrollos y avances sobre el conocimiento curricular acumulado desde años atrás en el país, lo cual permitió partir de nuestro contexto. En ellos se resalta la importancia de procesos que contribuyan al aprendizaje de los alumnos tales como el razonamiento, el planteamiento y la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración y comparación de procedimientos; también se resalta la importancia de los contextos como ambientes que dan sentido al aprendizaje de los alumnos y se reconoce el papel fundamental de las nuevas tecnologías para dinamizar y propiciar esos cambios en el currículo de matemáticas.

La formulación de estos lineamientos nos planteó la necesidad de profundizar sobre el papel de las nuevas tecnologías y su incorporación al Currículo de Matemáticas. Para esto se inició entonces un proceso de consulta, reflexión, discusión y de búsqueda de estrategias, de posibilidades y de recursos para incorporar las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas en las instituciones educativas colombianas, liderado por el Ministerio de Educación.

La primera acción que se adelantó al respecto durante 1998 fue el desarrollo de un proyecto con apoyo de la OEA, que contó con la participación de expertos de Gran Bretaña, México y Chile y Colombia, de Facultades de Educación e instituciones de Educación Básica y Media, que tenía como propósito conocer experiencias nacionales e internacionales en curso y construir unas orientaciones iniciales para el trabajo con la tecnología. La reflexión teórica se acompañó del desarrollo de una experiencia exploratoria en cuatro colegios de Educación Media, en los que se trabajó con calculadoras gráficas y el software de Geometría dinámica CABRI. Como resultado de este proyecto el Ministerio publicó el documento *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas.*

El trabajo y la interacción propiciada en el grupo que participó en esta primera experiencia, nos mostró la importancia de las herramientas tecnológicas en nuestro quehacer como docentes de matemáticas y la necesidad de hacer grandes esfuerzos para buscar la mejor manera de hacer uso de ellas; nos planteó unos retos comunes, nos mostró implicaciones y requerimientos de la incorporación de estas tecnologías en nuestras instituciones escolares y al mismo tiempo nos dio algunas pautas e insumos para dimensionar un proyecto nacional que, liderado por el Ministerio de Educación, uniera esfuerzos de Facultades de Educación, de Secretarías de Educación y de colegios.

Fue así como en mayo y junio de 1999 se realizaron dos encuentros, uno en Bogotá y otro en Santa Marta, orientados por el Ministerio y con la asesoría del Dr. LUIS MORENO ARMELLA, del CINVESTAV-IPN de México, en el que participaron educadores matemáticos de universidades, instituciones de Educación Básica Secundaria y Media y Secretarías de Educación de 17 departamentos colombianos para delinear los pasos a seguir en la puesta en marcha de este proyecto y las principales líneas de desarrollo del mismo. En estos eventos también se concertaron las fases de ejecución, se inició la consolidación de un equipo de trabajo que junto con el MEN coordinara la experiencia a nivel nacional y regional y se determinaron las tareas requeridas para la preparación del proyecto.

De esta manera surgió el proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*, como una estrategia posible y viable para mejorar la calidad de la educación matemática colombiana, modernizar los ambientes escolares, aprovechar el potencial educativo de las tecnologías de información y comunicación y promover su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje, políticas que actualmente impulsa el sistema educativo colombiano.

2. Breve descripción del proyecto

El proyecto está dirigido por el Ministerio de Educación Nacional, con la asesoría del Dr. Luis Moreno Armella, la coordinación regional de los departamentos de matemáticas de las Facultades de Educación y de Ciencias de Universidades y de algunas Secretarías de Educación y la puesta en práctica de la experiencia con tecnología en el aula en instituciones de Educación Básica Secundaria y Media, incluyendo Escuelas Normales Superiores.

Hasta el momento se ha desarrollado a través de dos fases, que esperamos no sean las únicas:

Fase piloto: de marzo del año 2000 hasta diciembre del año 2 001

Fase de expansión y profundización: desde octubre del año 2001 hasta diciembre del año 2002

2.1 Objetivos Generales

§ Mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y la capacidad de aprendizaje mediante los recursos expresivos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas.

§ Consolidar una comunidad de docentes comprometidos con la diseminación de la cultura informática.

2.2 Objetivos Específicos

Para la Fase Piloto

• Implementar el uso de calculadoras gráficas basado en un modelo pedagógico, con el propósito de construir ambientes de aprendizaje con tecnología.

• Diseñar una estrategia para incorporar gradualmente el uso de la tecnología en el sistema educativo colombiano.

Para la Fase de Expansión y Profundización

• Profundizar en la comprensión del papel de la tecnología y su impacto en el currículo escolar, para fortalecer la experiencia y la capacitación del grupo de docentes que serán los futuros multiplicadores en las regiones.

• Ampliar el número de docentes responsables de la implantación de la cultura informática a nivel regional y el número de instituciones beneficiadas.

• Generar condiciones de sostenibilidad a nivel institucional y regional que garanticen la continuidad del proyecto.

• Sistematizar estrategias de formación y seguimiento, fortaleciendo los núcleos regionales para sentar las bases de una generalización de las experiencias, buscando autonomía.

2.3 Ejes, Componentes y Líneas de Acción

El proyecto como un sistema complejo tiene ejes, componentes y líneas de acción, que interactúan y se relacionan entre sí, afectándose mutuamente en su marcha.

Se definen tres ejes fundamentales: desarrollo académico, gestión y sostenibilidad.

(Figura 1)

Sostenibilidad **Gestión**

Figura 1

El desarrollo académico es el eje fundamental del proyecto. Lo colocamos en el eje vertical, pues es el que nos permite avanzar en cuanto a nuestros objetivos de mejoramiento de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. Pero los otros dos ejes constituyen los cimientos de este trabajo, sin los cuales el desarrollo académico no podría darse.

Gestión

En el eje de la gestión se agrupan los aspectos que tienen que ver con la instalación y el mantenimiento de las condiciones mínimas para la buena marcha del proyecto. De esta manera la dinámica se articula en torno a la búsqueda de condiciones de infraestructura para el desarrollo del proyecto, la administración apropiada del uso de las calculadoras, el control y el mantenimiento de las mismas, la socialización del proyecto a otras instancias académicas y el cumplimiento de los compro misos adquiridos.

Sostenibilidad

El eje de la sostenibilidad apunta a la identificación de las condiciones que harán posible la apropiación del Proyecto por parte de las instituciones educativas y la planificación a corto, mediano y largo plazo de acciones que permitan asumir con autonomía el proyecto. La dinámica de la sostenibilidad es un factor determinante para la evaluación del proyecto en términos de la prospectiva que éste tiene y de la manera como se va construyendo su futuro en las diversas instituciones:

En colegios: en la medida en la que el área de matemáticas se apropie del proyecto.

En universidades: al vincular el recurso tecnológico en la formación inicial y permanente de los docentes.

En las regiones: con la inclusión del trabajo con nuevas tecnologías dentro de los planes de desarrollo educativos regionales, acuerdos entre secretarías de educación municipales y departamentales con las universidades para precisar planes de capacitación de docentes, buscar estrategias para incorporar el proyecto a los municipios.

Desarrollo académico

El desarrollo académico atiende a la reflexión sobre el mejoramiento de la Práctica Educativa en términos de la apropiación del Marco Teórico, la planificación de las actividades, la sistematización de observaciones, la comunicación de resultados, aspectos que dan cuenta del proceso de reconceptualización de las matemáticas que sabemos y que enseñamos. Se destacan cuatro componentes:

1) *Desarrollo Curricular*

Se espera dar aportes para la elaboración del currículo y para su puesta en práctica en el aula, profundizando en aspectos como estrategias pedagógicas basadas en resolución de problemas, el diseño de actividades de aula y evaluación del desempeño del alumno incorporando los recursos tecnológicos.

El proyecto está llegando a diversos grupos culturales y etnias del país, por lo cual el diseño del currículo parte de la realidad y de esa heterogeneidad, permitiendo la flexibilidad. No se está imponiendo un modelo sino que se están teniendo en cuenta las posibilidades y características específicas de cada región o institución. Así, se tienen desarrollos curriculares diferentes que atienden a las particularidades de los contextos regionales y al replanteamiento de una nueva propuesta curricular

2) *Formación de docentes*

Esta es la componente fundamental del proyecto, en donde hemos puesto el mayor énfasis porque reconocemos que es sobre esta componente que gira la posibilidad de hacer los cambios que esperamos. A través de esta formación, buscamos no sólo que el docente profundice en sus conocimientos sino que cuestione sus prácticas educativas para que evolucione en su visión sobre lo que son las matemáticas, sobre la actividad matemática en la escuela y sobre para qué se enseña matemáticas, entre otras.

Un aspecto central de esta formación es la estrategia de trabajo que vincula la universidad con los colegios, estrategia que rompe con el aislamiento universidad-colegio y que permite articulación y proyección de las actividades y programas de las Facultades de Educación hacia la Educación Básica y Media. Esta formación es permanente, intensiva y continuada, centrada en la reflexión sobre la propia práctica de los docentes en el salón de clase y las posibilidades del recurso tecnológico. Se busca la conformación de grupos de estudio regionales, de manera que se enriquezca permanentemente la reflexión teórica y la experiencia práctica. Por medio de seminarios intensivos y continuos se dinamiza el uso de la tecnología y la reflexión sobre sus potencialidades educativas, dejando a los equipos regionales la tarea de adaptar a sus condiciones locales las ideas trabajadas.

3) *Producción de materiales de apoyo para el docente.*

La experiencia nos ha mostrado que para que una reforma curricular tenga éxito, se requiere además de un plan de formación, proporcionar a los docentes materiales de apoyo. En nuestro proyecto los docentes disponen de materiales de apoyo basados en el uso de la tecnología, específicamente en la integración de las calculadoras gráficas y algebraicas al currículo. Muchos de estos materiales son fruto de la construcción colectiva de docentes y coordinadores y del trabajo sistematizado y evaluado que han realizado en el aula.

4) *Investigación Pedagógica*

La investigación pedagógica se vincula de dos maneras: en la evaluación del mismo proyecto como autorregulación del proceso seguido con enfoque sistémico y en la investigación en el aula.

Población beneficiada

La población seleccionada para desarrollar el proyecto (Figura 2) pertenece a 24 departamentos, 120 colegios y 23 universidades. Son en total 500 docentes y 18000 estudiantes. En el cuadro 1 se discrimina la población beneficiada por fases, departamentos, universidades, docentes y alumnos.

Figura 2. Las áreas sombreadas corresponden a los departamentos que participan en el proyecto.

	Departamentos	Colegios	Universidades	Docentes	Alumnos
Fase Piloto	17	60	16	120	6000
Fase Expansión	7	60	7	380	12000
Total	24	120	23	500	18000

Cuadro 1

Dotación

En el cuadro 2 se enumeran las herramientas tecnológicas entregadas por el Ministerio a los colegios del proyecto.

	Fase Piloto	Fase de Expansión	Total
Calculadoras TI 92	1300	1540	2840
CBR	240	240	480
CBL	240		240
View Screen	60	62	122
Graph Link	60	85	145

Cuadro 2

3. Puesta en marcha o desarrollo del proyecto

Más que presentar una visión del proyecto como un proceso lineal en el que todo se tenía previsto de antemano, queremos presentar su evolución, la construcción del camino por el que deberíamos andar. Queremos así resaltar su carácter vivo y cambiante, presentando nuestra forma de ver y experimentar el proyecto, desde una mirada tanto retrospectiva como prospectiva.

Se destaca la dinámica de crecimiento tanto académica como de los recursos humanos y físicos y cómo a partir de unos supuestos iniciales y de una agenda construida colectivamente, se fueron estructurando acciones regionales y nacionales las cuales permitieron que el proyecto creciera más allá de nuestras mismas expectativas y se tuviera la confianza en su rotundo éxito.

El desarrollo del proyecto implicó necesariamente la articulación de sus ejes y componentes en diferentes acciones a todos los niveles, las cuales se pueden enmarcar en los siguientes frentes o ámbitos de trabajo, que fueron desarrollándose simultáneamente:

§ Sensibilización y generación de condiciones iniciales.

§ Construcción y consolidación de referentes teóricos y conceptuales.

§ Incorporación gradual del uso de las calculadoras en la clase de matemáticas.

§ Documentación de la actividad matemática de los estudiantes en presencia de la tecnología.

1) *Sensibilización y generación de condiciones iniciales*.

Las primeras acciones realizadas estuvieron encaminadas a la reflexión y estudio sobre el proyecto para interiorizar su envergadura, adquirir una visión global del mismo y a crear algunas condiciones individuales e institucionales para ganar confianza y seguridad antes de iniciar su desarrollo en el aula.

Se realizaron actividades como las siguientes:

- Un curso de formación inicial de los docentes que se centró en: conocer el manejo técnico de las herramientas computacionales, la fundamentación conceptual del uso de la tecnología y la resolución de problemas con tecnología, para los diferentes aspectos del currículo de matemáticas.

- La conformación de grupos de estudio regionales para lograr gradualmente un mayor dominio y destreza en el uso y manejo de la calculadora, para el estudio de los documentos sobre teoría didáctica. Estas reuniones continúan realizándose semanalmente y poco a poco se han ido incorporando otros docentes tanto de las universidades como de otros colegios.

- La interacción vía correo electrónico a través de una lista de discusión que la Hemeroteca Nacional del ICFES, se puso a disposición del proyecto para fomentar la reflexión y la comunicación entre los equipos de trabajo.

- La adecuación de condiciones físicas y administrativas para la instalación del proyecto en los colegios como la consecución de salones especiales, compra de un retroproyector, constitución de pólizas de seguridad para las herramientas, gestiones para lograr la disponibilidad de tiempo dentro de la carga académica del docente para desarrollar el proyecto.

El proyecto fue rápidamente acogido por las instituciones participantes y se generó una intensa dinámica de trabajo a su alrededor. En las universidades se realizaron gestiones de reconocimiento y apoyo efectivo encaminadas a su socialización y a la formulación de proyectos de investigación alrededor de la temática.

2) *Construcción y consolidación de referentes teóricos y conceptuales.*

El proceso de construcción del marco teórico para orientar el trabajo con la tecnología comenzó a partir de los primeros cursos de formación y se fue ampliando a través de los diferentes seminarios y encuentros presenciales y virtuales, de la reflexión en los grupos de discusión y en la medida en que los docentes intentaron diseñar actividades de aprendizaje y llevarlas al aula. Se adelantaron diversas discusiones, orientadas por el asesor del proyecto, con el propósito de desarrollar un marco conceptual compartido por todos los participantes.

Un primer elemento teórico fue **el principio de mediación instrumental,** que plantea que todo conocimiento está mediado por los instrumentos de que se dispone. En este sentido, la reflexión giró alrededor del cambio en los ambientes de aprendizaje al disponer de las herramientas computacionales con características de dinamismo, interactividad y posibilidades de manipulación diferentes a las usadas hasta el momento.

En el proceso de interacción con la calculadora y la exploración de las posibilidades de conexión entre los distintos campos de la matemáticas, vimos que otro aspecto importante a considerar era el papel de **los sistemas de representación** en el aprendizaje y comprensión del conocimiento matemático. Dado que la calculadora es una fuente de diversas representaciones y que éstas tienen la característica de ser **ejecutables**, tenemos un mejor instrumento para estructurar el conocimiento de nuestros estudiantes. El suministro de estos sistemas de representación ocurre a través de la *mediación instrumental*

Un tercer aspecto que nos dio luces para orientar el trabajo con la tecnología fue la reflexión sobre **las situaciones problemáticas.** Un análisis cuidadoso de las primeras actividades propuestas nos llevó a reconocer, en discusiones generadas durante diferentes seminarios, la necesidad de articular el ambiente de resolución de problemas para lograr un uso efectivo de la herramienta tecnológica. Este hecho nos llevó a profundizar sobre **la construcción de situaciones problema** como promotoras del aprendizaje, que permiten acceder a diversos conceptos y que dan sentido al aprendizaje de los estudiantes al dinamizar y enriquecer sus estructuras conceptuales.

Pensar en construir ambientes de situaciones problema nos condujo también a estudiar a fondo la dinámica entre la **exploración y la sistematización,** como estrategia didáctica para promover el aprendizaje*.* La calculadora es un instrumento maravilloso para explorar acerca de propiedades y conceptos matemáticos y a la vez para sistematizar dichas exploraciones accediendo así a la cultura matemática.

Explorar para organizar, organizar para tener mejores herramientas de exploración. Cada nivel de sistematización nos coloca en un nuevo nivel de exploración. Mayor exploración, mejor sistematización, mejor red conceptual para e xplorar.

evaluación y el desempeño de los alumnos en presencia de herramientas tecnológicas computacionales. Destacamos, entre otros, los siguientes aspectos:

- el desarrollo de la fluidez algorítmica, entendida como la manera en que el estudiante aborda y trata los algoritmos y en la manera como enfrenta los problemas.

- la fluidez conceptual que tiene que ver con el desarrollo conceptual y la sociedad cognitiva que va alcanzando el alumno con la calculadora y cómo va progresando en el proceso de matematización. Se trata de ver cómo va evolucionando su red conceptual.

La precisión de los elementos teóricos que orientarían el trabajo en las aulas y la unificación de criterios para llevar a la práctica el trabajo con las situaciones problema, se han visto como una oportunidad para reconocernos como colectividad de aprendizaje, en la que todos aprendíamos de la interacción y en la que se hacía evidente un crecimiento del grupo a nivel académico y humano, especialmente en lo que tenía que ver con la comunicación, con la conceptualización común, con los acuerdos sobre la planeación de las actividades, con el trabajo en el aula y con la documentación del proyecto.

Estos referentes han sido determinantes para centrar nuestra atención en aspectos fundamentales de nuestra formación en didáctica de las Matemáticas y para re-dimensionar el proyecto como un espacio de reflexión acerca del avance de la Educación Matemática en nuestro país. Nos sirvieron para comprender que lo más importante no era en sí el uso de la calculadora sino la reorganización conceptual de nuestro currículo, teniendo en cuenta los Lineamientos Curriculares. El currículo tendría que cambiar para potenciar situaciones problemáticas novedosas en donde la calculadora actuaría como mediadora instrumental.

Este marco ha cumplido dos funciones centrales: determinar los hechos de la práctica que debemos observar y servir de control para la evaluación de tales hechos. En este sentido produce un efecto de convergencia entre la teoría y la práctica para que no se den cada una por separado.

3) Incorporación gradual del uso de las calculadoras en la clase de matemáticas

El proceso de llevar las calculadoras al aula fue lento (pero seguro), se hizo con ritmos diferentes y se fue cualificando en la medida en que el grupo fue avanzando en la comprensión de los elementos del marco teórico. Este proceso implicaba cambiar de un modelo pedagógico rígido centrado en los contenidos y en la enseñanza, a un modelo flexible centrado en la resolución de problemas y en el aprendizaje de los alumnos.

Se observaron los siguientes momentos en el proceso de incorporar la calculadora al aula:

1. Uso de la calculadora por los profesores para mejorar el desarrollo de su exposición, utilizándola para reemplazar el tablero. El profesor hacía el trabajo y se lo mostraba a los

alumnos. En este momento no hubo modificación del modelo pedagógico y el protagonista seguía siendo el docente.

2. Uso de las calculadoras por los estudiantes en las clases regulares de matemáticas, sin variar en esencia el trabajo que se venía realizando sin ellas. Se intentó continuar con una clase lineal, controlada por el profesor, en la que todos debían poner atención. La calculadora era empleada por los estudiantes para ejecutar unas instrucciones y verificar aquello que el profesor había explicado.

3. Uso de las calculadoras por los estudiantes para realizar algunas exploraciones, siguiendo talleres diseñados instruccionalmente. La actividad de los alumnos se centraba en ejecutar acciones propuestas en la guía, siguiendo el orden establecido.

4. Uso de la tecnología por los estudiantes en grupos de trabajo a partir de una situación problema. Los alumnos formulaban conjeturas y las ponían a prueba, buscando diversas estrategias y argumentando las ventajas de cada una. Se comienza a ver cómo la calculadora incide en la transformación del modelo pedagógico.

Los acercamientos iniciales contribuyeron a impulsar la reflexión sobre la comprensión del proyecto y sus estrategias de desarrollo, seguimiento y evaluación. En particular, un punto importante que identificamos en ese momento del proceso fue que la implementación en la práctica, de las teorías que se comparten, es un proceso mucho más lento que los acuerdos sobre la teoría, porque hay una fuerte influencia de las concepciones con las que tradicionalmente se ha ejercido la práctica en el aula. Como el marco teórico del proyecto replantea las prácticas tradicionales, su proceso de asimilación efectiva es un proceso gradual. Por eso es en el cuarto momento en donde reconocemos un rediseño curricular.

4) *Documentación de la actividad matemática de los estudiantes*

Otro ámbito de trabajo que nos ocupó desde el principio del proyecto fue el de la observación de los avances de los estudiantes colombianos en el aprendizaje de las matemáticas en presencia de la tecnología y la consolidación de los procesos de observación y sistematización de las experiencias en el aula que nos permitan dar cuenta de la articulación que pueden lograr los estudiantes entre sus comportamientos cognitivos y los instrumentos tecnológicos puestos a su alcance.

Esto nos ha llevado a la necesidad de fortalecer el componente investigativo del proyecto, profundizando en la evaluación del desempeño matemático de los alumnos en presencia de la calculadora.

4. Avances en el proceso de evaluación del proyecto

Al considerar el proyecto como un sistema dinámico y complejo, su evaluación se entiende como un mecanismo de autorregulación. En ese sentido, es una evaluación de proceso, que no solamente pretende dar cuenta de los logros del proyecto, sino que va dando pautas para el mejoramiento de su marcha, al ir proporcionando estrategias de desarrollo constante que auto organizan y regulan su dinámica.

La evaluación contempla dos niveles:

- **Nivel global** que documenta el impacto del proyecto en el Sistema Educativo mostrando la dinámica del mismo y las tensiones que ha generado en la comunidad, tensiones que permiten avanzar hacia la transformación de la enseñanza de las matemáticas con el apoyo de las herramientas computacionales

- **Nivel Local** que documenta el impacto del proyecto en el **diseño curricular** para la clase de matemáticas, cuya meta es la implementación de un modelo didáctico aplicable en el aula.

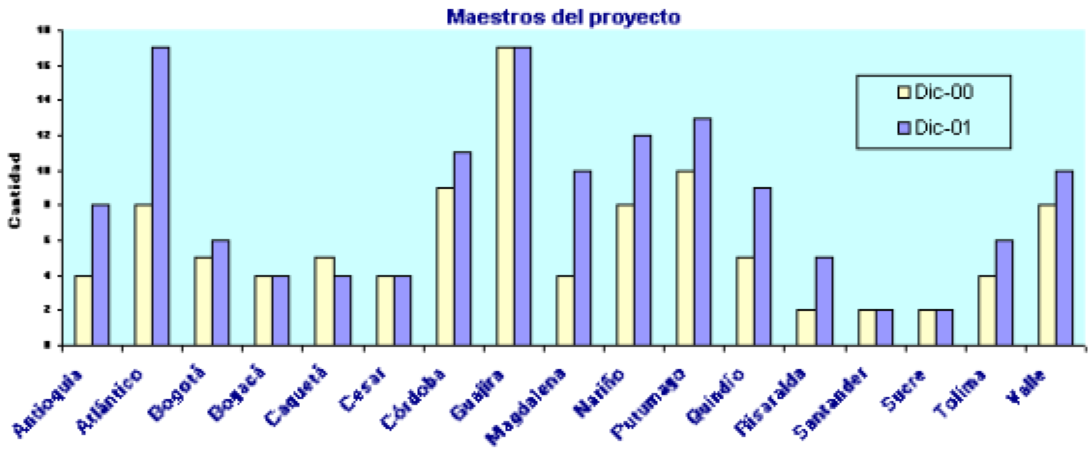
La información se recogió a través de encuestas, cuestionarios, informes periódicos de los coordinadores, informes de las visitas de asesoría y seguimiento, conclusiones de los seminarios de asesoría, informes trimestrales del MEN, actas de las reuniones de los equipos regionales y del equipo coordinador del MEN, videos de clases, actividades diseñadas por los docentes, talleres y ejercicios propuestos por los coordinadores, apreciaciones informales de algunos profesores y entrevistas abiertas a docentes y alumnos.

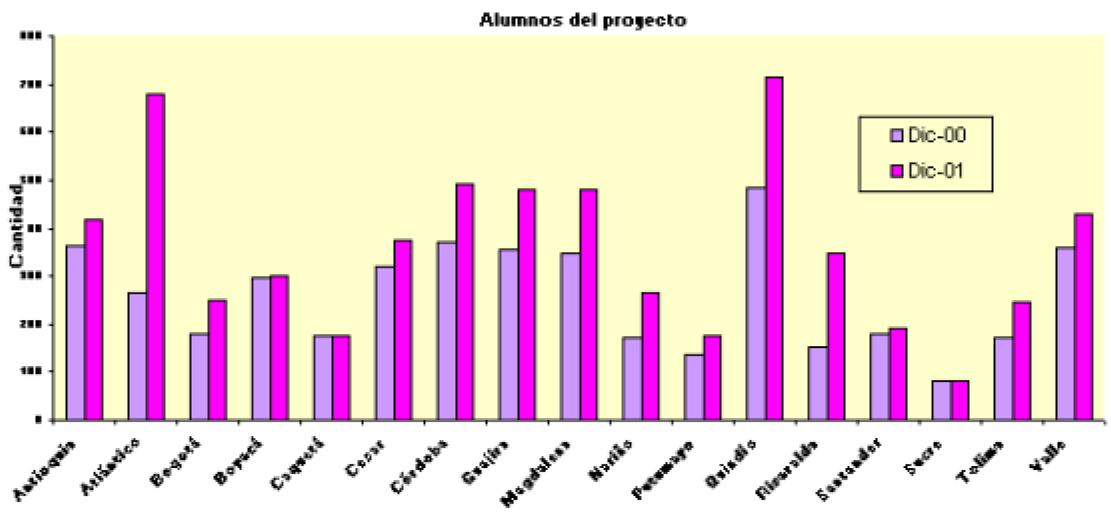
En este momento estamos haciendo la sistematización de los resultados de esta evaluación, que serán publicados próximamente por el Ministerio, pero ya puedo mencionar con satisfacción algunos logros en lo global y en lo local.

Dentro de los **logros a nivel global** tenemos los siguientes:

1. La población beneficiada se ha ampliado notablemente.

Aunque esa no era una meta de la fase piloto del proyecto, la motivación causada por la presencia de la tecnología en los colegios y el trabajo realizado por docentes y coordinadores regionales para socializar el proyecto en su comunidad, produjo un efecto de crecimiento importante que permite evidenciar el efecto multiplicador del uso de los recursos.





2. Ha habido una dinámica de evolución de las concepciones sobre el proyecto

- Al principio la razón que motivó a los docentes a participar fue el alto grado de interés personal y académico que los comprometió a actualizarse y a continuar su proceso de formación.

- En una segunda etapa, cuando ya había transcurrido más o menos un año de su participación, las expectativas sobre el proyecto se concentraron alrededor de sus metas, es decir, la transformación del currículo, la modificación de las prácticas pedagógicas y el uso de la calculadora en la clase de matemáticas como instrumento mediador.

- En una tercera etapa, gracias al camino recorrido, se muestra cómo el proyecto es una oportunidad de desarrollo educativo para las regiones y se adelantan acciones para lograr mayor cobertura en las instituciones y para gestionar su expansión en las regiones.

3. El proyecto ha tenido gran ingerencia en los avances académicos de las instituciones educativas participantes y con ello ha llevado a cabo un importante papel de toma de conciencia en la comunidad educativa de la necesidad de incorporar la tecnología al currículo de matemáticas. Es así como las universidades participantes han generado

diversos proyectos de investigación y programas académicos alrededor del trabajo en el aula con tecnología teniendo en cuenta el marco teórico del proyecto. Se han abierto diplomados, especializaciones y maestrías con énfasis en el trabajo del proyecto y se ha incorporado el uso con las tecnologías en el currículo de las licenciaturas de las facultades de educación.

4. Se ha estructurado un plan de formación de docentes que va más allá de un curso de capacitación inicial. Se ha acompañado a los profesores a través de:

- Tres seminarios nacionales intensivos de fundamentación conceptual, dominio de la herramienta tecnológica y resolución de problemas.

- Un curso nacional de profundización en el manejo de la calculadora.

- Cinco seminarios nacionales de asesoría, seguimiento y evaluación del proyecto.

- Diez cursos regionales de formación organizados por los coordinadores de las Universidades.

- Dos visitas de seguimiento y asesoría efectuadas por el equipo del Ministerio a cada Departamento.

- Conversatorio permanente sostenido a través de la lista de discusión.

Un resultado a destacar de este proceso de formación es el haber logrado producciones escritas de los profesores, dando un gran salto de la oralidad a la escritura. La participación en este Congreso de 9 profesores de diversos colegios y 13 profesores universitarios con comunicaciones ponencias y talleres es un reflejo de este avance.

Con el apoyo de las universidades se han consolidado grupos de estudio regionales conformados por profesores del departamento de matemáticas de las mismas, estudiantes de las licenciaturas y docentes de secundaria, creando un espacio para el análisis y la discusión de diferentes temas de la didáctica de las matemáticas, incluido el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. De esta manera se ha conformado una infraestructura humana y académica en los 24 departamentos para lograr la instalación de una base de la cultura informática en la escuela y contribuir con el mejoramiento de la calidad de la educación matemática.

5. Se han producido materiales de apoyo para docentes, los cuales se han constituido en insumos valiosos para el estudio teórico -práctico del trabajo con la tecnología.

- Publicación y entrega de 5000 ejemplares del documento *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* el cual contiene los documentos, artículos, conferencias, talleres y cursos que fueron la base para la formación de los docentes en la primera fase.

- Elaboración de 3 CD´s y entrega de más de 500 copias de los mismos, con documentos de apoyo.

- Publicaciones regionales y artículos en revistas.

- Está próximo a publicar un manual sobre el desarrollo del proyecto que dará orientaciones a personas y entidades responsables de la educación a nivel regional sobre cómo poner en marcha proyectos de esta naturaleza.

6. Se ha constituido una red de comunicaciones para fortalecer los procesos de formación y autoformación y la discusión e interacción entre los grupos de trabajo, aprovechando recursos tecnológicos como: correos electrónicos personales, correos electrónicos adscritos a la lista discusión asignada por la Hemeroteca Nacional del Icfes, foros de discusión, acceso a bibliografía y posibilidades de intercambio académico a través de la página web del proyecto.

Dentro de los **logros en el nivel local** puedo mencionar:

1. Se ha avanzado en la construcción de un modelo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en presencia de las tecnologías computacionales, el cual incorpora la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y los aspectos cognitivos que intervienen en el aprendizaje.

2. Se ha avanzado en la identificación de procesos y desempeños que tienen lugar en el aula cuando los alumnos trabajan con la calculadora para:

- potenciar el desarrollar nuevas estrategias de resolución de problemas,

- enriquecer la habilidad expresiva y argumentativa al justificar el comportamiento de objetos matemáticos visualizados en la calculadora y al verificar y contrastar sus hipótesis,

- mejorar habilidades de comunicación, enriquecido la habilidad expresiva,

- explorar nuevos temas de las matemáticas,

- usar diversas representaciones en forma simultánea propiciando las conexiones matemáticas,

- desarrollar estrategias de trabajo colaborativo en en el que la participación individual y el respeto por las ideas de los demás juegan un papel importante en la construcción de conocimientos,

- adquirir seguridad al expresar sus ideas frente a sus compañeros,

- cambiar sus concepciones sobre la matemática. Ya no se ven como una ciencia compleja y acabada sino como un conocimiento en permanente construcción del cual ellos pueden ser partícipes,

- superar el temor hacia las matemáticas, en especial aquellos estudiantes que han tenido dificultades.

5. Conclusión

En síntesis, desarrollar un p royecto de incorporación de una nueva tecnología es un proceso complejo y lento que exige una dinámica gradual. Para que la nueva tecnología realmente impacte el currículo y los ambientes de aprendizaje es necesario que ésta llegue al aula acompañada de:

· un plan estructurado de formación permanente de docentes en el uso de la herramienta tecnológica y la fundamentación teórica conceptual y metodológica.

· la cooperación intra e inter institucional que convoque voluntades en pro de metas comunes y se sustente en el trabajo colectivo.

· materiales de apoyo producto de experiencias llevadas a cabo en el contexto de realización de la incorporación.

· un alto grado de motivación y compromiso personal y profesional por parte de los maestros y directivos de las instituciones que se dispongan a introducir la tecnología.

· gestión encaminada a la consecución del equipamiento tecnológico a la adecuación de la infraestructura necesaria.

Cuando uno quiere hacer las cosas encuentra un camino…. cuando no quiere, encuentra una disculpa ….

El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías

Carlos Eduardo Vasco

Proyecto Zero, Universidad de Harvard

Resumen . Esta conferencia trata inicialmente sobre la ubicación del pensamiento variacional y la modelación en la situación curricular actual de la educación básica y media después de la Ley 115 de 1994, en particular, en los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas. Se explica la propuesta anterior por sistemas, en particular los sistemas analíticos, tal como se propusieron para la educación matemática en la básica secundaria y la propuesta actual sobre los cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, estocástico y variacional. Se señala qué no es y qué es este último tipo de pensamiento y se proponen diversas maneras para desarrollarlo. Posteriormente el pensamiento variacional se relaciona con las nuevas tecnologías en la educación y, en particular, con la meta de aprender a modelar matemáticamente procesos que ocurren en la realidad. Para ello, se señala qué no es y qué es un modelo en general y un modelo matemático en particular, y se caracteriza la modelación matemática de procesos de la realidad circundante. Se proponen diversas maneras de practicar la modelación matemática y se enfatiza el papel que pueden tener en ella las nuevas tecnologías.

Antecedentes

Lineamientos generales del currículo

A comienzos de 1994, la Ley General de Educación (ley 115), le quita al Ministerio de Educación Nacional la potestad curricular para fijar centralmente los programas de las áreas fundamentales y obligatorias estipuladas en la ley. En los Art. 78 y 148 se estipula que el Ministerio de Educación Nacional debe únicamente expedir “los lineamientos generales de los procesos curriculares” y “los indicadores de logros para cada grado de los niveles educativos” de la educación formal. Así pues, esos artículos le ordenan al Ministerio fijar lineamientos generales de los procesos curriculares e indicadores de logro, sin precisar qué son estos últimos.

Después de dos años de reuniones realizadas en el Ministerio de Educación bajo la coordinación de Ana Celia Castiblanco Paiba, en el año 1998 se publicaron los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas. En dichos documentos se enfatiza en una potentes idea central: el propósito de las matemáticas no es tanto el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: numérico , espacial, métrico, estocástico y variacional, a través de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

El dominio de los sistemas matemáticos no es pues ya el propósito central del currículo de las matemáticas escolares como lo propuse durante los veinte años de la renovación curricular, desde 1978 a 1998. En los lineamientos, los sistemas matemáticos se ubican en su lugar apropiado como herramientas de las que se puede valer el pensamiento matemático respectivo y como medios potentes que ayudan a desarrollarlo y a refinarlo. Ahora, el propósito central es el desarrollo de los cinco tipos de pensamiento matemático enumerados. El paso de los sistemas concretos y familiares para los alumnos a los sistemas conceptuales y simbólicos que se proponía en la renovación curricular, se concreta ahora en el proceso de modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana.

La propuesta de trabajo por sistemas de la Renovación Curricular de 1974 a 1993

Los sistemas numéricos, geométricos, métricos y estocásticos se señalaban como los cuatro pilares de la educación matemática en la básica primaria, y los sistemas analíticos se agregaban para la básica secundaria, de sexto a noveno grado (no había programas de educación media, grados 10 y 11). Había además tres sistemas instrumentales: los lógicos, los conjuntistas y los sistemas generales de relaciones y transformaciones.

La idea principal es que los sistemas analíticos son colecciones de funciones, transformaciones u operadores con sus operaciones y sus relaciones. Los números naturales, racionales o reales, o los puntos de la línea, el plano o el espacio *no* son elementos del universo de los sistemas analíticos. En ese sentido, los sistemas analíticos son apenas un tipo particular de sistemas generales cuyos objetos son transformaciones, operaciones, operadores o funciones tomadas activamente, no como relaciones y mucho menos como conjuntos de parejas. Usando una metáfora zoológica, podemos decir que los objetos de los sistemas analíticos son monstruos que tragan y transforman números, pero no son números. Desde el punto de vista de Anna Sfard, son reificaciones de procedimientos o algoritmos de operaciones.

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue un paso adelante muy significativo, pues establece el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y en su utilización socialmente más poderosa: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para "resolver problemas" que apenas son ejercicios escolares y no verdaderos problemas abiertos y retadores. Una de las dificultades que se ha encontrado en la interpretación de los lineamientos curriculares del área de matemáticas es que no es muy claro qué se debe entender por "pensamiento variacional". Intentemos acercarnos a ese concepto.

El pensamiento variacional

Qué no es

El pensamiento variacional no consiste en saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no se mueven ni hacen nada. Eso estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero precisamente la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada.

Tampoco es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como *ba*, pr^2, o de las leyes matemáticas de la física, como $f = ma$, V=IR, o $s = 1/2gt^2 + v_0t$. Más aún, esas leyes, entendidas sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas.

Tampoco se trata de dibujar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica. En la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$, por ejemplo, la parábola, en puntos cercanos al origen, no deja ver características importantes tales como: el cero y el uno se quedan quietos, los negativos saltan al lado de los positivos, los números mayores que uno se agrandan y se agrandan cada vez más drásticamente en la medida en que son más grandes, los números menores que uno se achican y que se achican cada vez más drásticamente en la medida en que son más pequeños. Eso sí sería pensamiento variacional, pero saberse las gráficas de las funciones usuales no lo es. Más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional.

Qué es

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

Tiene pues un momento de captación de lo que cambia y lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de modelos mentales cuyas variables internas interactúen de manear que reproduzcan, con alguna aproximación, las covariaciones detectadas; luego tiene un momento de echar a andar o "correr" esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar; y finalmente, el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.

Sólo cuando hay tecnologías socialmente disponibles, como las palabras, dibujos y otros símbolos, hay un momento de formulación simbólica del sistema mental por medio de algún simbolismo con su tecnología respectiva, simbolismo que puede ser verbal, gestual, pictórico o simbólico -formal y no sólo esto último, como suele equivocadamente creerse. Esta formulación permite objetivar el modelo mental, calcular con la representación tecnológicamente disponible, y continuar con los momentos de comparación y reformulación del modelo.

El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

Pongamos un ejemplo. El profesor sostiene una pelota de caucho en cada mano, y las lanza al aire alternativamente, sin hacer malabares. El estudiante trata de percibir la variación de cada una en el tiempo, y luego la covariación de una con otra. Nota que la una se mueve mientras la otra está quieta. Puede reproducir mentalmente el movimiento que hace el profesor, lanzar las pelotas al mismo ritmo, a la misma altura que él y hasta se animaría a hacerlo con dos pelotas reales. Algo tiene que estar pensando para poderlo hacer. Algún modelo imaginativo tiene que tener en la cabeza para poder imitarlo. Trata de precisarlo verbalmente. Trata de pintar unos ejes de coordenadas y de escribir unas ecuaciones. Ahí viene el problema. La representación pictórica es estática. Las fórmulas son difíciles. Los ensayos fracasan. El pensamiento variacional se queda atascado y viene el desánimo y el abandono de la tarea.

El pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también del pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones.

Para mí, el principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. Al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional.

Por eso podemos decir que el pensamiento variacional incluye la modelación, que veremos más detalladamente en seguida. Por lo tanto, podemos esquematizarlo en varias fases o momentos, no necesariamente secuenciales y con muchos caminos de realimentación entre esas fases o momentos:

- M omento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece
- Momento de creación de un modelo mental
- Momento de echar a andar el modelo
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado
- Momento de revisión del modelo

Si hay una tecnología socialmente disponible que permita hacerlo, habría también otros momentos:

- Momento de formulación simbólica
- Momento de calcular con esa formulación
- Momento de comparar los resultados con el proceso mo delado
- Momento de reformulación del modelo

Ya veremos más adelante cómo las nuevas tecnologías informáticas permiten nuevos momentos muy potentes para la modelación contribuyendo al desarrollo del pensamiento matemático.

Cómo se desarrolla

El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras:

- Con el pensamiento numérico, si se fija la atención en la manera como varían los números figurados pitagóricos, como la variación de los números cuadrados; con los intentos de captar patrones numéricos que se repiten, como 3, 6, 9, 12, o 3, 9, 27, 81, o 3, 5, 7, 11.
- Con el pensamiento espacial, o mejor espacio -temporal.
- Con el pensamiento métrico en cuanto a la diferenciación entre magnitudes,

cantidades de magnitudes, medición anumérica, ordenación de cantidades de magnitudes y medición numérica.

- Con el pensamiento proporcional tradicional, con tal de que no se defina una proporción como la igualdad de dos razones, pues eso es estático y se refiere a la representación de la proporción, no a la covariación entre las magnitudes que se identifican como proporcionales. Se pueden desarrollar notaciones más acordes con la covariación. En el programa de la renovación curricular propuse que se trabajara primero la correlación positiva o negativa, y luego se viera que la proporcionalidad directa entre cantidades (como anotó acertadamente en su tesis Edgar Guacaneme), es sólo un tipo muy específico de covariación positiva, y que la proporcionalidad inversa es sólo un tipo muy específico de correlación negativa entre cantidades absolutas o no-negativas. En esa notación se pueden usar flechas diagonales con la punta hacia arriba o hacia abajo para indicar que si una aumenta, la otra aumenta o disminuye.

- Con las representaciones gestuales (Seymour Papert; "body-syntonic mathematics" o "matemáticas sintónicas con el cuerpo"); por ejemplo, subir y bajar el dedo para el movimiento circular y el armónico simple, la mano extendida para las derivadas y para el aumento o disminución de la pendiente, lo que permite entender el test de las primeras derivadas y entender el test de la segunda derivada mucho mejor que cualquier fórmula.

- Con representaciones de máquinas y circuitos.

- Con reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares. Aquí es muy poderosa la pantalla del computador o la calculadora graficadora.

- Con la atención a las variaciones implícitas en el pensamiento espacial, o mejor, espacio-temporal, que es el pensamiento geométrico tomado dinámicamente, no en la forma estática de la geometría euclidiana tradicional. Por ejemplo, atender a la variación del área de un triángulo en posición estándar con el cambio del largo de la base, con el cambio de altura, con el cambio de la posición del vértice a lo largo de una paralela a la base, o con el cambio de la posición de la base a lo largo de la recta en donde está el segmento inicial, mientras se mantiene el vértice fijo.

- Con las representaciones sagitales de la desacreditada "matemática moderna" ("New Math"), en las cuales se ve más claramente a dónde van los puntos o números del dominio que en la representación cartesiana.

- Con el papel cuadriculado, el milimetrado y el ajuste de curvas.

- Con el estudio de las esplinas cúbicas, que permiten ajustar no sólo el punto de empalme sino la primera derivada en ese punto, para producir gráficas suaves a la vista (no "suaves" en el sentido de C-infinito, sino sólo en el sentido de C-uno).

- Con el estudio de las funciones exponenciales, logarítmicas y logísticas. Aquí también es clave el uso de la tecnología electrónica, para utilizar los potentes menús de ajuste de curvas ("curve fitting") en los paquetes matemáticos como Isetl, Derive, Maple o Mathematica.

La modelación

Qué no es

No es aprender a caminar en la pasarela.

No es armar modelitos de balso o de cartón, aunque eso ayuda.

No es dibujar, pintar o modelar en arcilla y plastilina, aunque eso ayuda.

No es aprenderse fórmulas de modelos ya inventados y probados por otros, aunque eso puede ayudar o estorbar, como se dijo arriba a propósito de los modelos usuales de la física matemática.

Qué es

La modelación es pues el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad.

Resalto que es un arte, no una ciencia. Como en la epistemología de las ciencias naturales, para repetir a Karl Popper, no se sabe cómo es la lógica de la invención de modelos, pero sí hay una lógica de la puesta a prueba, la justificación y el refinamiento o abandono de los modelos. No hay pues una lógica de producir modelos matemáticos, pero sí la hay para ponerlos a prueba, ajustarlos, compararlos y generalizarlos o descartarlos.

Para mí, los dos libros clásicos sobre modelación son el Maki & Thompson (1973) para situaciones de las ciencias sociales y biológicas y el de Gentner & Stevens (1983) para los aspectos cogntivos. Pero la producción de libros sobre modelación matemática es muy grande y la lista interminable. Basta hacer una búsqueda en *barnesandnoble.com* o en *amazon.com* bajo el nombre de "modelación matemática" para darse cuenta de la abundancia de literatura sobre modelación matemática desde la primaria hasta los postgrados. Si buscan en una base de datos como el ERIC con la palabra clave "mathematical modeling" con una sola "L" van a encontrar literatura distinta de si buscan "mathematical modelling" con doble "L".

Si se hace una búsqueda en la base de datos ERIC en los últimos diez años, se ve también la cantidad de artículos publicados en este tiempo sobre la modelación matemática en la primaria, la secundaria y la universidad. En los Estados Unidos hay una entidad llamada "COMAP", dirigida por Solomon Garfunkel y Henry Pollack en la cual se ha trabajado persistentemente en la modelación matemática en las escuelas y colegios. El proyecto se llama "MMOW": Mathematics: Modeling our World. En Latinoamérica, la persona que más seriamente ha tocado el tema de las que yo conozco es la vice-presidenta del CIAEM, quien ahora organiza el XI CIAEM en Blumenau, Brasil, en julio de 2003, Maria Salett Biembengut. Ella hizo su tesis de maestría en 1990 en Rio Claro, Brasil, sobre la modelación matemática como método de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria y secundaria, y luego su tesis doctoral en 1997 en Florianópolis sobre la calidad de la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería, en la que desarrolla una propuesta metodológica y curricular para reorganizar la enseñanza de las matemáticas alrededor de la modelación matemática en las carreras de ingeniería. De su libro Biembengut (1999) tomé algunas ideas de lo que es la modelación.

Las revistas que más consistentemente han publicado artículos sobre este tema desde los años 80 son el *International Journal for Mathematical Education, Science and Technology*

IJMEST y la revista canadiense *For the Learning of Mathematics.*

Cómo se desarrolla

Como todo arte, el arte de la modelación matemática se aprende haciéndolo. Afortunadamente hay muchas propuestas de modelos de diferentes tipos para aplicarlos a distintos tipos de procesos, y muchos casos y problemas que estimulan a la modelación a muy distintos niveles.

La investigación sobre la manera como los alumnos de distintas edades producen e interpretan modelos matemáticos es apenas incipiente. Hay muchas propuestas en todos los niveles educativos, generalmente muy asociadas a la disponibilidad de nuevas tecnologías. En particular, el programa Excel de Microsoft ha sido utilizado con mucha frecuencia para la modelación, lo cual nos debería impulsar a cambiar la notación de la mal llamada “álgebra de bachillerato”, pues es muy distinta a la que se utiliza en las hojas de cálculo o “spreadsheets”.

Pero programas como Isetl, Maple, Derive y Mathematica tienen muchas herramientas para plantear, transformar y graficar resultados de distintos modelos. En cursos más avanzados, las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales proporcionan las herramientas más poderosas para modelar. La manera actual de visualizar las ecuaciones diferenciales como campos vectoriales en el plano, permite un acercamiento al pensamiento variacional que no era posible antes del desarrollo de los programas graficadores en colores y los procesadores y coprocesadores de alta velocidad.

El uso de las nuevas tecnologías

La cautela con las nuevas tecnologías en la Renovación Curricular

Yo soy un entusiasta de los computadores desde su difusión comercial en los años sesenta. En la Universidad de Saint Louis, Missouri, trabajé mi tesis doctoral con un enorme IBM 1620, que ocupaba toda una sala pero sólo tenía 64 K de memoria, menos que cualquier agenda electrónica de propaganda. Con ese computador, en 1967 y 1968 hice una de las primeras tesis en cálculo algebraico asistido por computador (“Computer Assisted Algebra”). Me volví más entusiasta de ellos desde los primeros computadores personales, los Apple I y II, los Commodore, los Amiga y los primeros PC 186, 286 y 386. Compré en 1985 uno de los primeros MacIntosh Plus, que todavía funciona después de 17 años.

Pero he sido acusado por algunos colegas de detener el uso de los computadores en la educación pública. Las razones para que haya circulado esa acusación pueden ser distintas. En primer lugar, en los programas de la renovación curricular en el área de matemáticas, desarrollados con mi asesoría en el MEN de 1978 a 1984, cuando se expidió el Decreto 1002 que promulgaba esos programas de primero a quinto grado, yo me opuse a poner contenidos y objetivos que requirieran el uso de computadores, pues los programas iban a ser obligatorios para todo el país, y en ninguna escuela pública que yo conociera había todavía computadores. Optamos por preparar algunos contenidos con actividades que fácilmente pudieran transferirse a computadores, para no avergonzar ni irritar a los maestros que no tenían ningún acceso a ellos.

Otra razón puede ser mi oposición a gastar dineros ordinarios del presupuesto para comprar computadores o calculadoras; para ello existían otros fondos, y además había que atender primero a los problemas de electricidad de las escuelas y colegios oficiales, y sobre todo, a los problemas de la seguridad de los equipos. Infortunadamente, la realidad me dio la razón. Todos los equipos de computación que se compraron en el MEN en esos años de 1978 a 1988, inclusive los que se compraron para la sede central del CAN, o resultaron inútiles, o se los robaron, o no hubo cómo repararlos después del primer daño.

Pero también había razones académicas para mi escepticismo, derivadas de la investigación. La principal era que los maestros no sabían ni querían utilizar los computadores. Todavía la mayoría se resiste a hacerlo, y más todavía en matemáticas, creo que más que todo por el temor de que sus alumnos resulten sabiendo más que ellos.

La segunda razón era que si se utilizaban los computadores, se hacía en forma que apenas repitieran lo que se podía hacer con otros materiales, con los cuales se podía trabajar más fácilmente, más eficazmente y con menos costos. Con Jim Kaput y otros colegas en Harvard en 1985 a 1989 analizamos algunos juegos de computador, y vimos que en general eran más eficaces los mismos juegos en cartón o plástico que en la pantalla.

Sólo cuando Jim Kaput desarrolló a partir de 1985 la teoría y la práctica de las representaciones múltiples ligadas, por ejemplo, dividiendo la pantalla en cuatro ventanas para ver la representación algebraica, la tabular, la gráfica cartesiana y una representación icónica de la situación de proporcionalidad directa o función lineal, se empezó a ver lo que se podía hacer en computador que no se podía hacer de ninguna otra manera.

Cuando Judah Schwartz y Michal Yerushalmi desarrollaron en 1985 el "Geometric Supposer", antecesor del "Geometry Sketchpad" y del "Cabri Géomètre", se pudo ver la potencia de los computadores para la exploración geométrica en los colegios y escuelas. Por eso me opuse a que se gastara dinero en equipos que no tenían las capacidades gráficas para montar un buen software matemático y no tenían garantías de servicio, protección, compra de licencias de software e insumos de impresión.

La convicción de que no hay "Camino Real" para las matemáticas

Pero el problema principal de los computadores y las calculadoras graficadoras es que se les atribuyó cualidades mágicas para resolver todos los problemas de la educación matemática. Pronto se vio que sí aumentaban la motivación de los estudiantes para interactuar con los computadores y calculadoras, pero que la conceptualización matemática volvía a quedar rezagada. La facilidad de cálculo y el tamaño y resolución de las pantallas mostró que lo único que se hizo fue cambiar unos problemas por otros, unas preconcepciones por otras, y unos tipos de errores por otros.

Para ello se conocen ya algunas estrategias que sirven para aumentar el aprovechamiento de las calculadoras y los computadores. La más importante de ellas es la de estimar el resultado antes de pedirle al programa que lo calcule. "Piense antes de apretar".

Otras son más sutiles e ingeniosas. Yo averiguo por ejemplo cuál es el rango de la calculadora o el programa de computador. Supongamos que el rango es desde -1.0×10^{-99} hasta $+1.0\times10^{-99}$. Entonces pido evaluar $10^{-50}\times10^{50}\times10^{-50}$, lo cual da 10^{-50}, y luego evaluar $10^{-50}\times10^{-50}\times10^{50}$, que debería dar lo mismo, pero da cero.

Los problemas alrededor del uso de la tecnología han sido estudiados por los colegas de "una empresa docente", y aparecen ya en distintos artículos internacionales, como el de Michèle Artigue. Se verifica una y otra vez que los estudiantes rechazan las demostraciones más ahora que antes, lo que es preocupante, y prima la verificación empírica sobre los intentos de falsación, para hablar en la terminología de Karl Popper. Como consecuencia de ello, por ejemplo, los límites y la continuidad desaparecen ante la pretendida evidencia del contacto de las curvas en la pantalla. El Profesor Iván Castro ha tematizado el problema de la verificación empírica usando construcciones fractales para que los estudiantes “crean” que la diagonal del triángulo rectángulo isósceles de cateto uno mide dos unidades, o que la razón del diámetro a la circunferencia de radio unitario, que debería ser p, mide también dos unidades. Las construcciones ciertamente tienen como límite la diagonal del triángulo o el diámetro de la circunferencia, y los alumnos concluyen acerca de la invariancia de la longitud de las distintas curvas fractales.

Por ello sigo siendo escéptico del uso de los computadores y las calculadoras, a menos que tengan una alta calidad y vengan acompañadas de una formación continuada de los educadores que las utilizan, como afortunadamente ocurre en el presente proyecto.

Las nuevas potencialidades de las tecnologías electrónicas para desarrollar y refinar el pensamiento variacional y la modelación

Esas dificultades y esas reservas no obstan para que yo siga siendo un entusiasta de los computadores y las calculadoras de alta calidad y velocidad, alto poder gráfico y facilidad de manejo. Su potencial es inmenso, especialmente ahora con el advenimiento de poderosos paquetes de software para modelación, para graficación pseudo-tridimensional, para tutorías interactivas y para simulación.

Las ventajas de la tecnología aparecen cuando después de las fases usuales del pensamiento variacional, una vez se formula simbólicamente el modelo, ya no es difícil programarlo en el computador o la calculadora. Entences se puede “correr” o ejecutar, parametrizarlo, cambiarlo y recalcular fácilmente los valores que van tomando las variables. Además, como lo propuso Jim Kaput hace más de quince años, la tecnología permite enlazar distintos modelos y representaciones.

Pero para lograr extraer a las nuevas tecnologías todo ese potencial, no bastan cursillos y conferencias al estilo de la mal llamada “capacitación”. Hacen falta programas largos, con un fuerte componente investigativo, de tipo taller presencial, con buen seguimiento y materiales de apoyo. Por ello, los costos del hardware y el software y los costos de los cursos y talleres de formación permanente son muy altos. Esto nos exige motivar muy bien dichos gastos con el logro de desempeños muy superiores en los estudiantes del proyecto con respecto a los que siguen otras estrategias metodológicas que requieran mucho menor inversión.

La actitud apropiada no es pues la del deslumbramiento y la exageración, sino la de la apropiación laboriosa y creativa, la de la investigación cognitiva, socio -afectiva y evaluativa seria y permanente y la de la reserva crítica que acompañe el entusiasmo y la diversión que permite el uso de estas tecnologías, especialmente en el desarrollo del pensamiento variacional y de las capacidades de modelación matemática por parte de los estudiantes de todos los grados escolares.

Referencias

Biembengut M, (1999) *Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática,* Blumenau, SC: FURB.

Gentner D and Stevens A, (Eds.) (1983) *Mental models*. Hillsdale, NJ: Lawrence

Erlbaum.

Maki D and Thompson M, (1973) *Mathematical models and applications.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice -Hall.