Sistema con parametro

Esempio 1

Partiamo dall'esercizio a pag. 100

▷▶ **147** Determina il valore del parametro k per il quale il sistema $\begin{cases} kx + y = 3(k-1) \\ (k-1)x - 2y = 4 \end{cases}$ non è determinato. Per tale valore è impossibile o indeterminato? $\left[\frac{1}{3};\ \text{indeterminato}\right]$

Per rispondere alla prima domanda può essere utile utilizzare il metodo di Cramer.

Ricordiamo che se il determinate della matrice dei coefficienti è uguale a 0 allora il sistema non è determinato.

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k-1 & -2 \end{bmatrix} \quad \det(A) = k \cdot (-2) - (k-1) = -3k + 1$$

Per conoscere quando non è determinato imponiamo che il determinante sia =0:

$$\det(A) = 0 \leftrightarrow -3k + 1 = 0 \leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Dunque per $k = \frac{1}{3}$ il sistema non è determinato.

Per rispondere alla seconda parte del quesito, sostituiamo il valore di *k* nel sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\ \left(\frac{1}{3} - 1\right)x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = -2 \\ -\frac{2}{3}x - 2y = 4 \end{cases}$$

Confrontando i rapporti tra i coefficienti osserviamo: $\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4}$ dunque il sistema è indeterminato.

Allo stesso risultato saremmo giunto se avessimo disegnato le due rette; avremmo osservato che coincidono.

Esempio 2

Con riferimento al sistema precedente determiniamo *k* affinché la coppia (2,-1) sia soluzione del sistema

Affinché (2,-1) sia soluzione del sistema, deve essere soluzione di ciascuna delle due equazioni:

$$\begin{cases} k \cdot 2 + (-1) = 3(k-1) \\ (k-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -k = -2 \\ 2k - 2 + 2 = 4 \end{cases} \rightarrow k = 2$$

Esempio 3

▷▶ **148** Dato il sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + y = -2 \end{cases}$ determina i valori dei parametri a e b per i quali esso è determinato, impossibile o indeterminato. $\left[a = b = -\frac{1}{2},\ \text{indeterminato};\ a = b \neq -\frac{1}{2},\ \text{impossibile};\ a \neq b,\ \text{determinato}\right]$

Per rispondere al quesito valutiamo il rapporto tra i coefficienti:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a}{1}; \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b}{1}; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$$

Affinché il sistema sia determinato, allora $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \leftrightarrow \frac{a}{1} \neq \frac{b}{1} \leftrightarrow a \neq b$

Il sistema risulterà indeterminato o impossibile se $a = b$:

- Affinché sia indeterminato $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$. Nell'ipotesi $a = b$, risulta $a = b = -\frac{1}{2}$
- Affinché sia impossibile allora $a = b \neq -\frac{1}{2}$

Esempio 4

▶▶ **165** $\begin{cases} bx + (b-1)y = 5b \\ 2x + y = 8 + b \end{cases}$ $\left[b = 2,\ \text{indeterminato};\ b \neq 2: \begin{cases} x = b + 4 \\ y = -b \end{cases}\right]$

Affrontiamo il sistema con Cramer

$$A = \begin{bmatrix} b & b-1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5b \\ 8+b \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il $\det(A) = b - 2(b-1) = 2 - b$

Sappiamo che

- se $\det(A) = 0 \rightarrow sistema$ è $indeterminato\ o\ impossibile$
- se $\det(A) \neq 0 \rightarrow sistema$ è $determinato\ e\ possiamo\ calcolare\ la\ soluzione$.

Cerchiamo **per quali valori di b il sistema è determinato** $\det(A) \neq 0 \leftrightarrow 2 - b \neq 0 \leftrightarrow b \neq 2$

Dunque

- se $b \neq 2$ il sistema è determinato. Calcoliamo le soluzioni
  $x = \frac{det\begin{bmatrix} 5b & b-1 \\ 8+b & 1 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{5b-(8+b)(b-1)}{2-b} = \frac{5b-8b+8-b^2+b}{2-b} = \frac{-b^2-2b+8}{2-b} = \frac{-(b^2+2b-8)}{2-b} = \frac{-(b-2)(b+4)}{2-b} = \frac{\cancel{(2-b)}(b+4)}{\cancel{2-b}} = b + 4$
  $y = \frac{det\begin{bmatrix} b & 5b \\ 2 & 8+b \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{8b+b^2-10b}{2-b} = \frac{b(b-2)}{2-b} = -b$

Verifichiamo adesso cosa accade nel caso $b = 2$, per fare questo sostituiamo il valore nel sistema: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$; confrontando il coefficienti ricaviamo che il sistema è indeterminato.