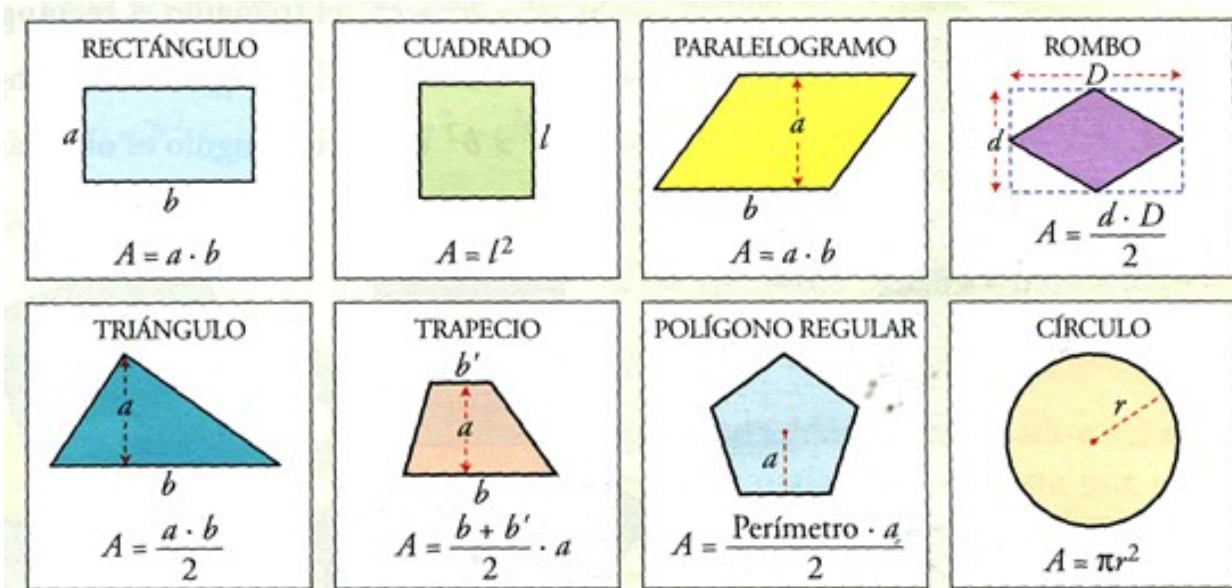
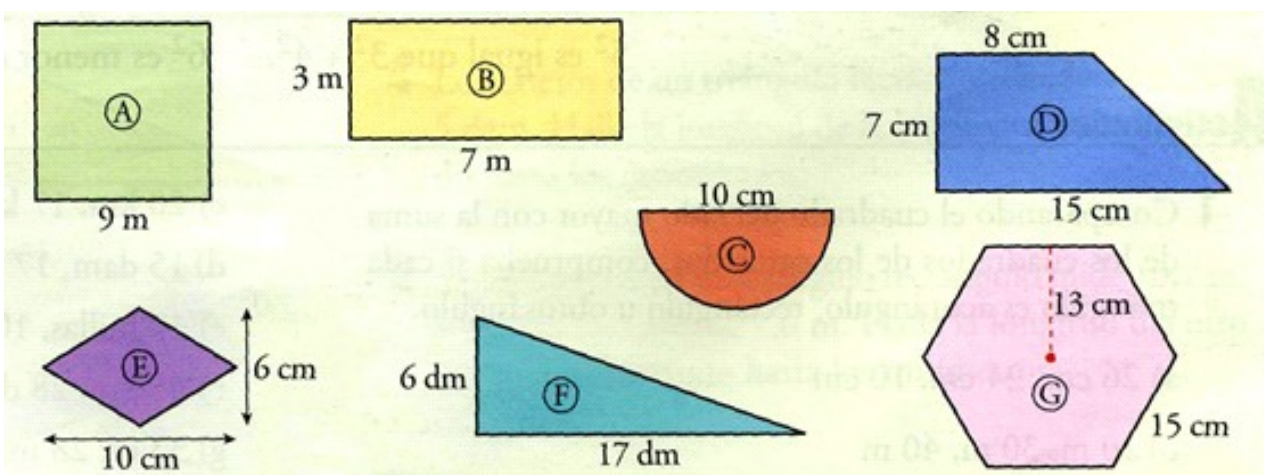


TEMA 8: TEOREMA DE PITÁGORAS. SEMEJANZA.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS



1. Calcula el área de las figuras siguientes:



TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos**. El lado mayor se llama **hipotenusa**.

En general, adoptaremos la siguiente nomenclatura:

- Llamaremos b y c a los catetos.
- Llamaremos a a la hipotenusa.

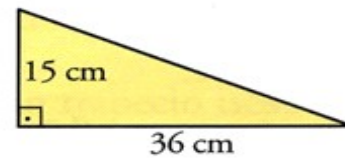
El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

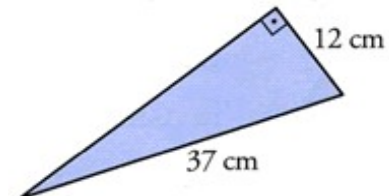
Es decir, el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Y esto es verdad, solamente, si el triángulo es rectángulo.

EJERCICIOS

2. Halla la longitud de la hipotenusa.

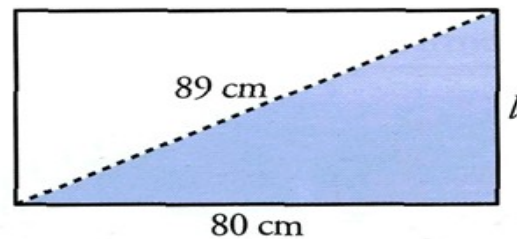


3. Halla la longitud del cateto desconocido.



APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

a) La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcular su área.

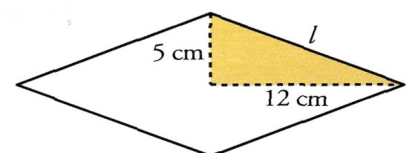


Empezamos por calcular el otro lado:

$$l = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39 \text{ cm}$$

El lado corto mide 39 cm. $A = 80 \cdot 39 = 3120 \text{ cm}^2$

b) Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Hallar su perímetro.

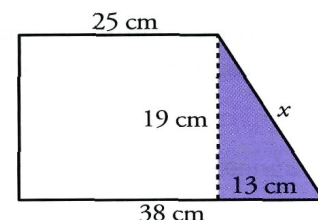


Comenzamos por calcular la longitud de un lado:

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Cada lado mide 13 cm. Perímetro = $4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$

c) Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Hallar su perímetro.



Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:

$$l = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} = 23,02 \text{ cm}$$

El lado oblicuo mide 23 cm. Perímetro = $19 + 25 + 23 + 38 = 105 \text{ cm}$

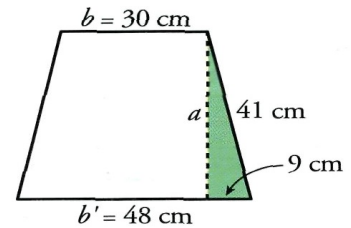
d) Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.

Hemos de empezar calculando su altura, a :

$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

La altura del trapecio mide 40 cm.

$$A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1560 \text{ cm}^2$$



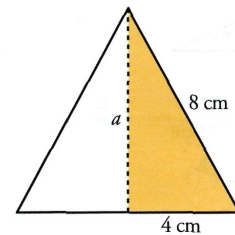
e) Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

Empezamos calculando la altura:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,9 \text{ cm}$$

La altura mide 6,9 cm.

$$A = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$



f) Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.

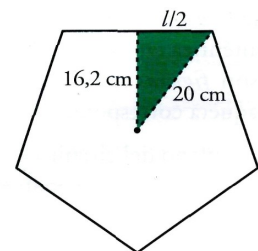
Primero, calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16,2^2} = \sqrt{137,56} = 11,7$$

El lado del pentágono mide: $11,7 \cdot 2 = 23,4 \text{ cm}$

Perímetro = $23,4 \cdot 5 = 117 \text{ cm}$

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16,2}{2} = 947,7 \text{ cm}^2$$



EJERCICIOS

4. El lado de un rombo mide 8,5 m, y una de sus diagonales, 15,4 m. Calcula su área.

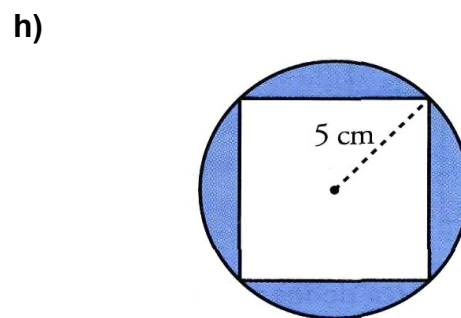
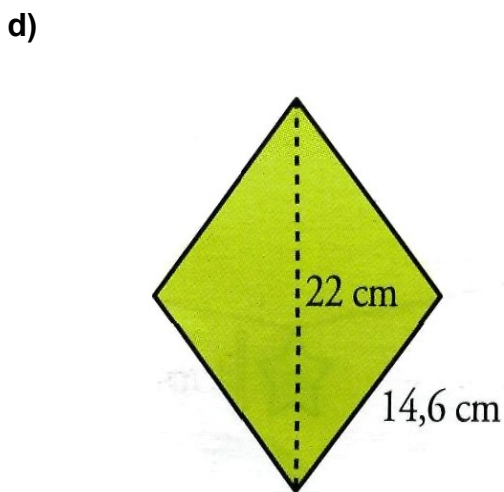
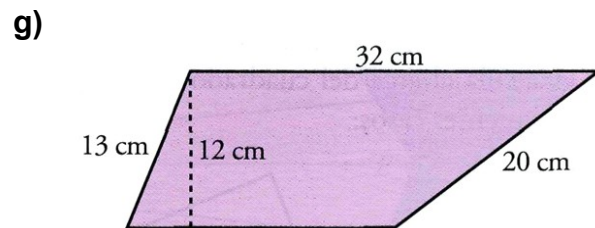
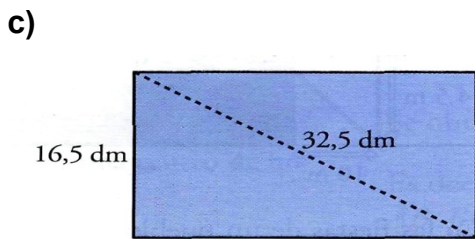
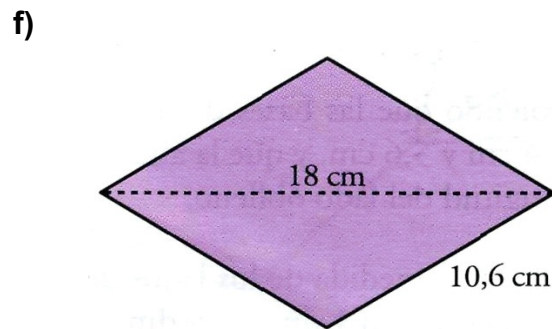
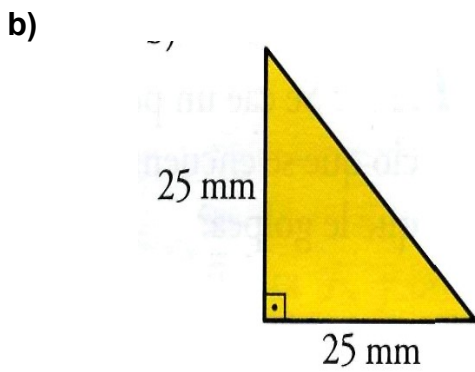
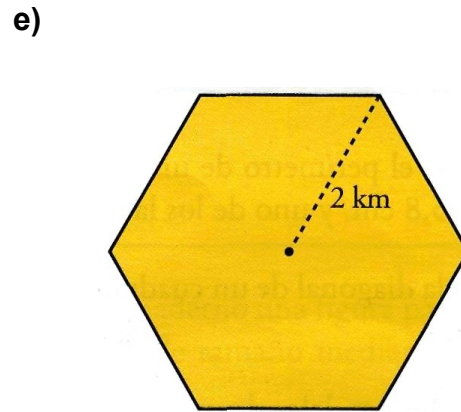
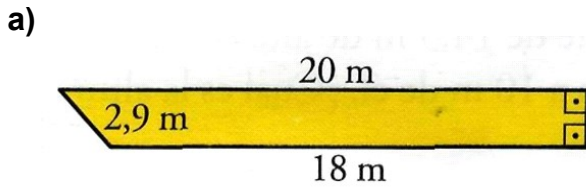
5. Halla el área de un triángulo equilátero de 54 cm de perímetro.

6. Halla el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 70 dm y 134 dm, y el lado oblicuo, 85 dm.

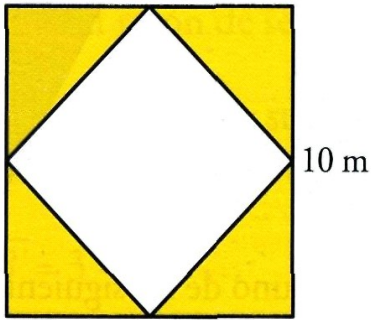
7. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 3,2 m y 6,4 m, y su altura, 6,3 m.

8. Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado.
 (Recuerda que en un hexágono regular, el lado mide igual que el radio).

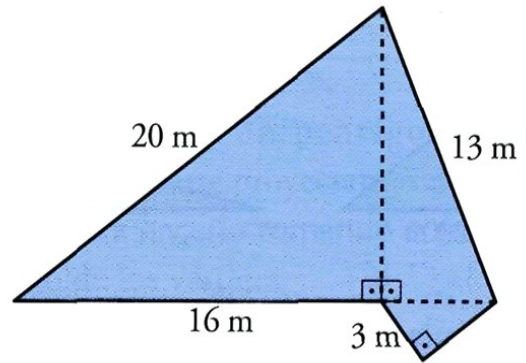
9. En cada una de las siguientes figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que calcular el valor de algún elemento (lado, diagonal, apotema, ángulo, ...). Si no es exacto, halla una cifra decimal.



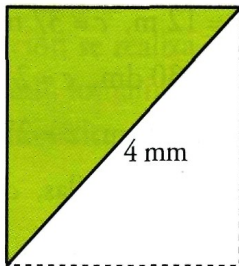
i)



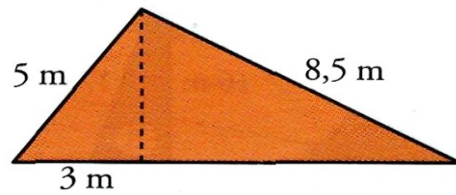
k)



j)

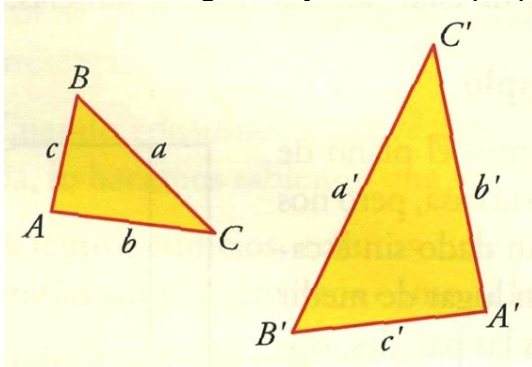


l)



SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Lo mismo que los demás polígonos, dos triángulos semejantes tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales:

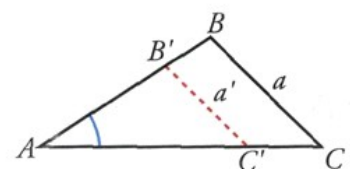


Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si:

- $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Triángulos en posición de Tales

Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el \hat{A} . Es decir, el triángulo pequeño está "encajado" en el grande. Además, los lados opuestos a A son paralelos. Por eso, decimos que estos dos triángulos están en **posición de Tales**.



Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

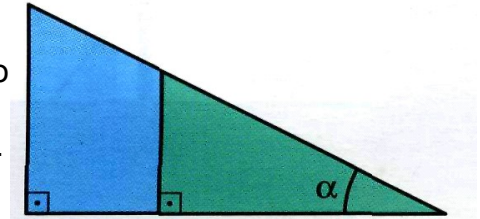
Semejanza entre triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son especialmente importantes. Veamos algunos criterios por los cuales se comprueba muy fácilmente si dos triángulos rectángulos son o no semejantes.

1 - Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.
Pues, en tal caso, se pueden poner en posición de Tales.

2 - Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen:

- sus dos catetos proporcionales,
- o bien un cateto y la hipotenusa proporcionales.



EJEMPLO

En un triángulo rectángulo, un cateto mide 10 cm, y la hipotenusa, 15 cm. Otro triángulo rectángulo tiene un cateto de 2 cm y la hipotenusa de 3 cm. Podemos comprobar si son semejantes:

$$\frac{10}{2} = \frac{15}{3} = 5$$

Como sus lados son proporcionales, los triángulos son semejantes.

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

La semejanza de triángulos tiene muchas aplicaciones prácticas. Veamos algunas.

Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra

Para calcular la altura de un árbol, AB , procedemos del siguiente modo:

Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.

Medimos la longitud de la estaca, $A'B'$, y de las sombras, AC y $A'C'$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el Sol en el mismo instante.

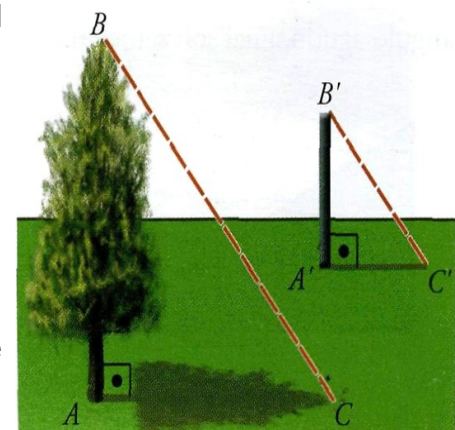
Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

$\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos.

$\hat{C} = \hat{C}'$ porque *los rayos del Sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo.*

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



Los rayos del Sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros

Como conocemos AC , $A'B'$ y $A'C'$, podemos calcular la altura del árbol, AB .

Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que:

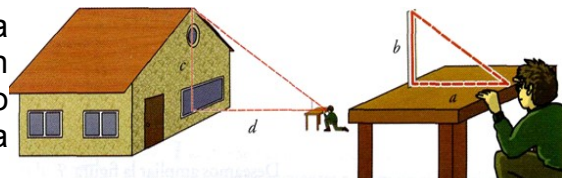
longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$

Solución: El árbol mide 8 m.

Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a la sombra

El chico lanza una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa. Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).



Los triángulos rectángulos, de catetos a , b y d , c , son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Conociendo a , b y d , se calcula c . La altura de la casa es igual a c más la altura de la mesa.

Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura de la casa sabiendo que:

longitud de la regla, $b = 35$ cm; distancia del borde de la mesa al pie de la regla, $a = 50$ cm; distancia del borde de la mesa a la casa, $d = 4,5$ m; altura de la mesa = 80 cm.

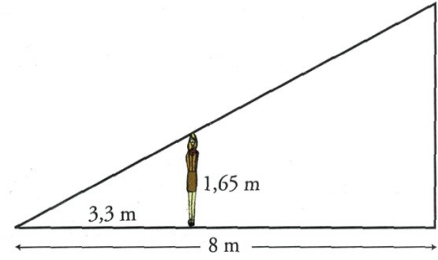
$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

$$3,15 + 0,8 = 3,95 \text{ m}$$

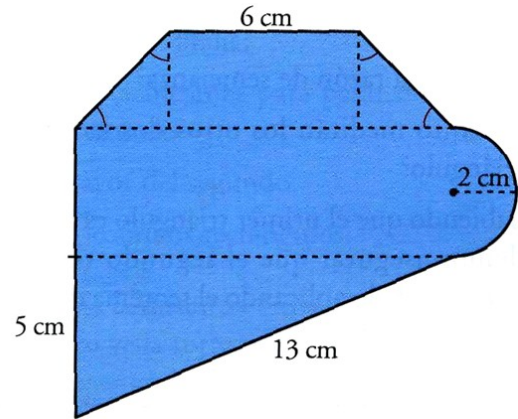
Solución: La altura de la casa es de 3,95 m.

EJERCICIOS

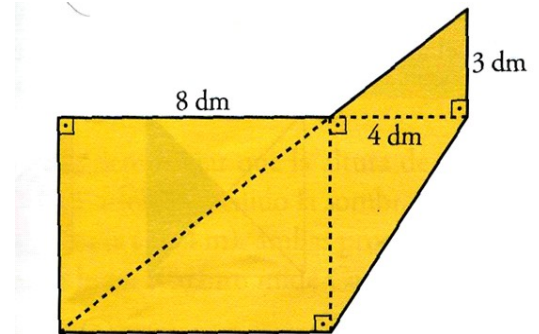
10. El salón de la casa de Raquel es abuhardillado y para medir la altura de la pared, se coloca como se ve en el dibujo. Teniendo en cuenta las medidas, calcula la altura máxima del salón.



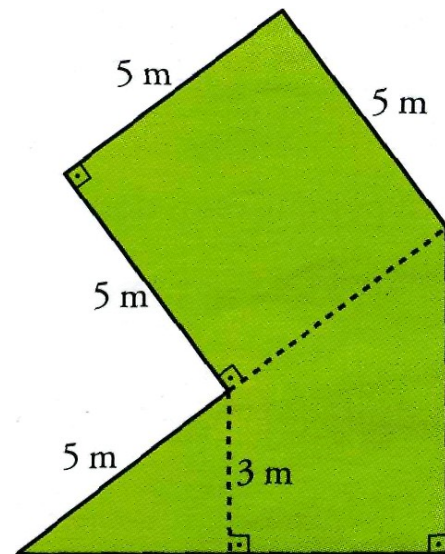
11. Calcula el perímetro y el área de esta figura teniendo en cuenta que los cuatro ángulos señalados miden 45° :



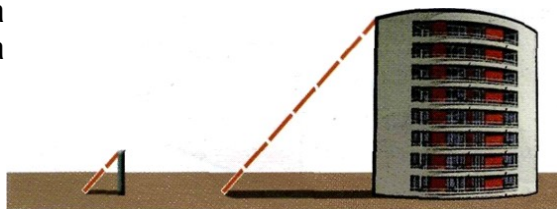
12. Halla el área y el perímetro de la figura.



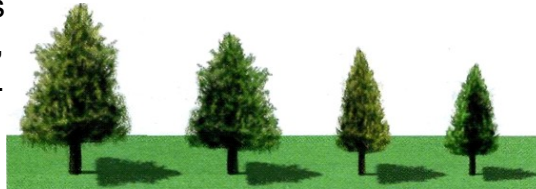
13. Calcula el perímetro y el área.



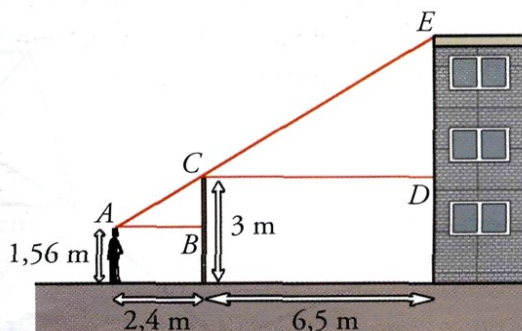
14. Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una estaca de 2 m arroja una sombra de 1,25 m.



15. Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2,5 m. ¿Cuánto miden los demás?

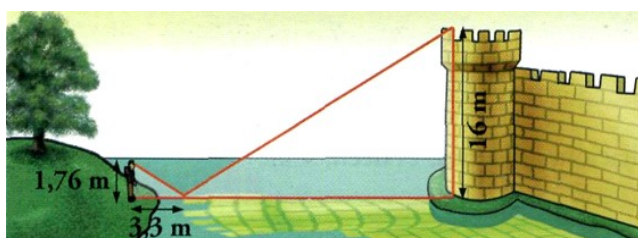


16. Observa de qué ingenioso método se vale Ramón para averiguar la altura del edificio: Se sitúa de tal manera que la parte alta de la verja y la parte alta del edificio estén alineadas con sus ojos. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.



- Explica por qué los triángulos ABC y CDE son semejantes.
- Calcula ED .
- Calcula la altura del edificio.

17. ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre (el chico ve la torre reflejada en el agua)?



18. Para determinar que la altura de un eucalipto es de 11 m, Carlos ha medido la sombra de este (9,6 m) y la suya propia (1,44 m), ambas proyectadas por el Sol a la misma hora.

¿Cuánto mide Carlos?

