

# **UNIDAD UNO**

## **ECUACIONES E INECUACIONES**

# CAPÍTULO UNO: LAS ECUACIONES

$$\alpha x + \beta = \delta$$

## INTRODUCCIÓN

A través de la historia, las ecuaciones han sido de gran importancia en las Matemáticas y otras ciencias, desde los babilonios, pasando por los egipcios y los griegos, hasta nuestra época, las ecuaciones han sido el pan de cada día para resolver problemas donde se requiere saber el valor de una “incógnita”.

Las ecuaciones son igualdades que se hacen verdaderas para valores específicos, por ejemplo: Si tenemos:  $2x + 5 = 9$ , se debe buscar el valor de  $x$  que al multiplicarlo por 2 y sumado con 5 nos resulte nueve. Es así que para  $x = 2$ , si lo reemplazamos en la igualdad  $2(2) + 5 = 9$ , ésta será verdadera. Entonces, resolver una ecuación es hallar el valor o valores de la incógnita que hagan verdadera dicha igualdad. A su vez, las soluciones pueden ser *reales* o *imaginarias*, según el caso. Por ejemplo si tenemos  $x^2 - 4 = 0$ , se puede verificar que los valores que puede tomar la incógnita son  $x = 2$  y  $x = -2$ . Pero si se tiene  $x^2 + 4 = 0$ , la solución no es real, ya que NO existen número real que al elevarlo al cuadrado y sumado con 4 resulte cero, luego la solución es imaginaria  $\sqrt{2}i$  y  $-\sqrt{2}i$ . (Recordemos los números imaginarios del curso de Matemáticas Básicas).

Existen diferentes clases de ecuaciones, según el grado del polinomio que la describe, según el número de variables, según el tipo de coeficientes. De acuerdo al grado del polinomio, existen ecuaciones de primer grado, de segundo grado, etc. De acuerdo al número de variables, se tienen ecuaciones de una variable, ecuaciones de dos variables, etc. Según el tipo de coeficientes, se tienen ecuaciones de coeficientes enteros, de coeficientes racionales, de coeficientes reales.

Para resolver ecuaciones, existen diversas técnicas matemáticas que depende del tipo de ecuación, pero siempre se debe tener presente el principio de operaciones opuestas: Suma – Resta, Producto – Cociente, Potenciación – radicación, potenciación – Logaritmicación.

Para un el buen dominio en la resolución de ecuaciones, se requiere mucho ánimo, paciencia, desarrollar diversos y un número adecuado de ejemplos modelos.

## Lección Uno: Elementos Matemáticos Básicos.

$$\beta + \varphi = \zeta$$

Entender las ecuaciones requiere conocer claramente algunos conceptos que son comunes a todo tipo de ecuación:

**Constante:** Son términos que toman valores fijos, en álgebra se utilizan por lo general las primeras letras del alfabeto: a, b, c,... Todos los números en esencia son constantes, por ejemplo en la expresión  $ax^2 + bx + c$  los términos a, b, c son constantes.

**Incógnita (Variable):** Se considera todo aquello que no se conoce; pero se puede identificar utilizando principios matemáticos, en Matemáticas por lo general se utilizan las últimas letras del alfabeto x, y, z, w,... para el caso de  $ax^2 + bx + c$ , la incógnita es x, otro ejemplo:  $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ , las incógnitas son x e y.

A manera de ejercicio identifique las incógnitas y constantes en las siguientes ecuaciones, será un ejercicio muy motivante.

$$4x^3 + 5y^2 - 7z = 0$$

$$ax^3 + by^2 + pz = 0$$

Por lo general, la solución de ecuaciones se enmarca dentro del conjunto de los reales, exceptuando los casos donde hay involucradas raíces con índice par de cantidades negativas.

### Leyes Básicas:

#### 1. Leyes de Uniformidad:

Es pertinente recordar las leyes de uniformidad, que son muy útiles a la hora de resolver ecuaciones. En su fundamento, las leyes de uniformidad definen que dados dos o más números, si se suman, la respuesta siempre es única, independiente de la naturaleza de las cantidades. De la misma manera para la multiplicación.

#### SUMA Y PRODUCTO:

Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  números reales; tal que  $a = b$  y  $c = d$ . entonces:

1.  $a + c = b + d$
2.  $a + c = b + c$
3.  $a \times c = b \times d$
4.  $a \times c = b \times c$

#### Ejemplo 1:

Sea la siguiente expresión:  $a = 2$  y  $c = 5$ , aplicar la ley de suma y producto.

#### Solución:

Siguiendo el orden:

$$a + c = 2 + 5$$

$$a \times c = 2 \times 5$$

Así  $b = 2$  y  $d = 5$ .

#### RESTA Y COCIENTE:

Al restar dos números, la diferencia siempre es un valor único. Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  números reales; tal que  $a = b$  y  $c = d$ . entonces:

5.  $a - c = b - d$
6.  $a - c = b - c$
7.  $a / c = b / d$  Para  $c \neq 0$
8.  $a / c = b / c$  Para  $c \neq 0$

#### Ejemplo 2:

Sea la siguiente expresión:  $a = 8$  y  $c = 4$ , aplicar la ley de resta y cociente.

**Solución:**

Siguiendo el orden:

$$a - c = 8 - 4$$

$$a/c = 8/4$$

Luego  $b = 8$  y  $d = 4$ .

**POTENCIA Y RAIZ:**

Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  números reales; tal que  $a = b$  y  $c = d$ . Para  $a \neq 0$  y  $c \neq 0$ , entonces:

9.  $a^c = b^d$

10.  $c^a = d^a$

11.  $\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$  Para  $a \geq 0$  además  $c \in \mathbb{Z}^+$  y  $c \geq 2$

**Ejemplo 3:**

Sea la siguiente expresión:  $a = 9$  y  $c = 2$ , aplicar la ley de potencia y raíz.

**Solución:**

Siguiendo el orden:

$$a^c = 9^2$$

$$c^a = 2^a$$

$$\sqrt[c]{a} = \sqrt[2]{9}$$

Luego  $b = 9$ .

**2. Ley del producto nulo:**

Sean  $a$  y  $b$  números reales, entonces:

12.  $a \times b = 0$  si, y solo si,  $a = 0$  ó  $b = 0$

**Ejemplo 4:**

Dada la expresión.  $4 \cdot a = 0$

**Solución:**

Como 4 es un valor fijo, para que el producto sea cero, entonces  $a = 0$ .

**Ejemplo 5:**

Dada la expresión.  $(x - 4) \cdot 12 = 0$

**Solución:**

Como 12 es un valor fijo, para que el producto sea cero, entonces  $(x - 4) = 0$ . Así  $x = 4$ .

### 3. Principio de Fracciones Equivalentes:

Dada la igualdad:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a * d = c * b$ . Para  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .

**Ejemplo 6:**

Dada la expresión.  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$  Mostrar que la equivalencia es verdadera.

**Solución:**

Aplicando la ley de fracciones equivalentes:  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Rightarrow 1 * 6 = 2 * 3$  Lo cual es evidentemente verdadera.

### Lección Dos: Ecuaciones de Primer Grado con Una Incógnita.

$$\beta x + \varphi = \zeta$$

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma  $ax + b = c$ , siendo a, b y c las constantes y x la incógnita. El valor de **a** puede ser un número real; diferente de cero. Ejemplos de este tipo de ecuaciones:  $3x - 5 = 0$  que corresponde a una ecuación de coeficiente entero y expresión entera.  $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} = 0$ , ecuación de coeficiente racional y expresión entera.  $\frac{3x - 2}{5} = 8$ , ecuación de coeficiente entero y expresión racional.

Las ecuaciones de primer grado se caracterizan porque la incógnita tiene como exponente la unidad; por lo cual, la solución es única, esto quiere decir que éste tipo de ecuaciones tienen “Una Sola solución”.

Para resolver ecuaciones de éste tipo, se han utilizado varias técnicas, los egipcios; por ejemplo, utilizabas la llamada “Regula Falsa”, actualmente se utiliza el método axiomático, el cual se analizará a continuación.

**METODO AXIOMATICO:** Es el método más utilizado en la actualidad, el cual utiliza las propiedades algebraicas y las leyes de uniformidad, todo esto derivado de los axiomas de cuerpo. Aclaremos que los axiomas epistemológicamente son “Verdades Evidentes” y a partir de éstas, se desarrolla el conocimiento matemático. Algunos axiomas que son importantes para comprender la solución de ecuaciones.

**Axiomas de Cuerpo:** Sean  $x, y, z$ , valores definidos, dentro del conjunto de los Reales

*Primer Axioma:*  $x + y = y + x$  (Propiedad conmutativa)

*Segundo Axioma:*  $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$  (Propiedad Asociativa)

*Tercer Axioma:*  $x(y + z) = x*y + x*z$  (Propiedad Distributiva)

*Cuarto Axioma:*  $x + 0 = x$  y  $x*1 = x$  (Propiedad Modulativa de la suma y producto)

**Quinto Axioma:**  $x + y = 0$ ,  $y + x = 0$  (Propiedad del inverso. Todo número real tiene un Inverso, excepto el cero). Para  $x$ , su inverso es puede escribir  $-x$ , igual para  $y$ .

**Sexto Axioma:**  $x*y = 1, y*x = 1$  Para  $x \neq 0$ . (Propiedad del recíproco, todo número real tiene un recíproco). Para  $x$ , su recíproco se puede escribir  $x^{-1} = 1/x$ , igual para  $y$ .

**NOTA:** El símbolo  $*$  indica multiplicación.

Con los argumentos anteriores, se puede comenzar el análisis del desarrollo de ecuaciones.

Los siguientes ejemplos, buscan ilustrar la resolución de ecuaciones de éste tipo, utilizando las leyes de uniformidad y los axiomas de cuerpo, explicado anteriormente.

### Ejemplo 7:

Sea la ecuación  $ax + b = 0$  hallar el valor de  $x$  que satisfaga la igualdad.

#### Solución:

Como la idea es despejar la incógnita, en este caso  $x$ , entonces se debe “eliminar Matemáticamente hablando” lo que rodea a dicha incógnita. Así lo primero es eliminar  $b$ , lo cual se puede hacer aplicando el inverso, ya que todo número sumado con su inverso resulta cero.

$ax + b - b = 0 - b$ . Como se puede observar, el valor adicionado se hizo a los dos lados de la ecuación, esto con el fin de que ésta NO se altere. Entonces:  $ax = -b$ . Ahora se debe eliminar la  $a$ , esto se hace aplicando el recíproco, ya que todo número multiplicado con su recíproco resulta uno. Veamos:

$$\frac{1}{a}ax = -b\frac{1}{a}. \text{ Operando se obtiene: } x = -\frac{b}{a}$$

### Ejemplo 8:

Hallar la solución de la ecuación:  $6 - x = 2x + 9$

#### Solución:

Como estamos utilizando el método axiomático. Por lo general, la incógnita se organiza al lado derecho y las constantes al lado izquierdo, entonces dejemos la incógnita al lado derecho, para esto se elimina del lado izquierdo, lo cual se hace adicionando  $-2x$  a los dos lados de la ecuación.  $6 - x - 2x = 2x - 2x + 9$ , operando se obtiene:  $6 - 3x = 9$  Ahora eliminemos el  $-6$  de la parte derecha para que solo quede la incógnita.  $6 - 6 - 3x = 9 - 6$ , operamos para obtener,  $-3x = 3$  Finalmente aplicamos el recíproco de  $3$  para que la incógnita quede completamente despajada.

$$-3x * \left(-\frac{1}{3}\right) = 3 * \left(-\frac{1}{3}\right), \text{ operando se obtiene:}$$

$x = -1$ . La solución de la ecuación propuesta.

Si reemplazamos el valor de  $x = -1$ , en la ecuación original, se debe obtener una igualdad.  $6 - x = 2x + 9 \Rightarrow 6 - (-1) = 2(-1) + 9 \Rightarrow 7 = 7$

### Ejemplo 9:

Resolver la ecuación:  $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$

**Solución:**

Recordando las leyes de uniformidad:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a * d = c * b$  Se aplica para el caso que tenemos  
Esta es el camino para convertir una expresión racional en entera.

$$\text{Veamos: } \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x) * (2) = (1) * (x+2) \Rightarrow 2x = x + 2$$

Sumemos  $-x$  a los dos lados de la ecuación, ¿por qué?

$$2x - x = x - x + 2 \Rightarrow x = 2. \text{ Así la solución es } x = 2.$$

Reemplazamos la solución en la ecuación original:  $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$  Operando:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  Se observa que la igualdad se cumple. Este último proceso es lo que se conoce comúnmente como la *comprobación de la solución*.

Es pertinente analizar los pasos realizados, para ir aprendiendo los principios que soportan la resolución de ecuaciones.

**Ejemplo 10:**

Hallar el valor de la incógnita que satisfaga la ecuación:  $\frac{6t+7}{4t-1} = \frac{3t+8}{2t-4}$

**Solución:**

Se va a resolver la ecuación, pero se recomienda que usted estimado estudiante, identifique qué principios fueron aplicados en cada paso.

$$\frac{6t+7}{4t-1} = \frac{3t+8}{2t-4} \Rightarrow (6t+7)(2t-4) = (3t+8)(4t-1)$$

$$(6t+7)(2t-4) = (3t+8)(4t-1) \Rightarrow (12t^2 - 10t - 28) = (12t^2 + 29t - 8)$$

A la última ecuación se le adiciona:  $-12t^2$

$$12t^2 - 12t^2 - 10t - 28 = 12t^2 - 12t^2 + 29t - 8 \Rightarrow -10t - 28 = 29t - 8 \quad \text{Sumamos } -29t$$

$$-10t - 29t - 28 = 29t - 29t - 8 \Rightarrow -39t - 28 = -8 \quad \text{Adicionamos } 28 \text{ a la ecuación:}$$

$$-39t - 28 + 28 = -8 + 28 \Rightarrow -39t = 20$$

Finalmente:  $(-\frac{1}{39}) - 39t = 20(-\frac{1}{39}) \Rightarrow t = -\frac{20}{39}$ . Estimado estudiante comprobar esta solución.

**Ejemplo 11:**

Hallar el valor de  $x$  que satisfaga la igualdad:  $8(2x - 6) = 4(x - 3)$

### Solución:

$$8(2x - 6) = 4(x - 3) \Rightarrow 16x - 48 = 4x - 12$$

$$16x - 4x - 48 = 4x - 4x - 12 \Rightarrow 12x - 48 = -12$$

$$12x - 48 = -12 \Rightarrow 12x - 48 + 48 = -12 + 48 \Rightarrow 12x = 36$$

$$\left(\frac{1}{12}\right)12x = \left(\frac{1}{12}\right)36 \Rightarrow x = \frac{36}{12}, \text{ simplificando: } x = 3:$$

En este ejemplo, no se dieron mayores detalles de la solución, Ya que la idea es que los estudiantes analicen y deduzcan todo el procedimiento.

### Restricciones en la Solución:

Existen situaciones donde la ecuación tiene restricción en la solución. Veamos algunos casos.

a-)  $\frac{1}{x-1} = \frac{1+x}{x^2}$ . La restricción es que la incógnita NO puede tomar el valor de 0 ó 1, ya que si  $x = 0$ , se presenta una indeterminación, lo mismo ocurre si  $x = 1$ .

b-)  $\sqrt{x} + 3 = x - 4$ . Para este caso la solución se acepta si esta en los reales no negativos. ( $\mathbb{R}^+$ ); es decir, los reales mayores o iguales a cero.

c-)  $\text{Log}(x + 2) = -4$ . Recordemos que los logaritmos de números negativos no existen, así la solución debe ser tal que  $x + 2 > 0$ ; es decir, si la solución es superior a -2, ésta se acepta.

### Ejemplo 12:

Muestre que la ecuación  $\frac{3x}{x-1} + 2 = \frac{3}{x-1}$  No tiene solución.

### Solución

Aplicando los principios estudiados anteriormente.

$$\frac{3x}{x-1}(x-1) + 2(x-1) = \frac{3}{x-1}(x-1) \Rightarrow 3x + 2(x-1) = 3$$

$$3x + 2(x-1) = 3 \Rightarrow 3x + 2x - 2 = 3 \Rightarrow 5x - 2 = 3$$

$$5x - 2 = 3 \Rightarrow 5x - 2 + 2 = 3 + 2 \Rightarrow 5x = 5$$

Finalmente  $x = 1$ .

Si comprobamos la solución.  $\frac{3x}{x-1} + 2 = \frac{3}{x-1} \Rightarrow \frac{3(1)}{1-1} + 2 = \frac{3}{1-1}$  Observamos que se presenta una indeterminación, ya que se tiene un cociente con denominador cero. Así queda demostrado que la ecuación NO tiene solución.

### Ejemplo 13:

Determinar si la ecuación  $\text{Log}(x + 2) = -4$ . tiene solución.

### Solución

Aplicando los principios estudiados anteriormente y recordando las propiedades básicas de los logaritmos.  $\text{Log}(x + 2) = -4$ . Aplicando operación inversa:  $10^{\text{Log}(x+2)} = 10^{-4}$ . Recordemos que la base de Log es diez, entonces:  $10^{\text{Log}(x+2)} = 10^{-4} \Rightarrow x + 2 = 10^{-4}$ . despejando la incógnita.  $x = 10^{-4} - 2 = -1,9999$

Como la solución  $x = -1,9999$  es superior a  $-2$ , la solución es válida. Por consiguiente la ecuación planteada tiene solución.

**REFLEXIÓN:** En todos los ejemplos propuestos, la resolución se centra en despejar la incógnita, lo cual se hace utilizando los principios, leyes y axiomas matemáticos.

### Lección Tres: Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnitas:

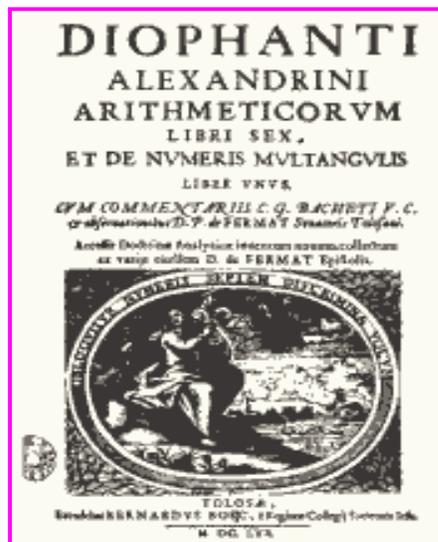
$$\beta x + \phi y = \zeta$$

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son una herramienta muy importante para resolver situaciones que se presentan en todas las áreas del saber. Este tipo de ecuaciones es de dos clases: El primero es donde se tiene una ecuación con dos incógnitas; donde se hará una breve descripción. El segundo es cuando se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, lo cual se estudiará en detalle.

### PRIMER CASO: Una Ecuación Con Dos Incógnitas:

**ECUACIONES DIOFÁNTICAS:** Diofanto de Alejandría, del siglo III de nuestra era, desarrolló ciertas ecuaciones que trabajan sobre el conjunto de los enteros y son de primer grado con dos incógnitas. En honor a su nombre se les conoce como Ecuaciones Diofánticas.

La forma general de estas ecuaciones es  $ax + by = c$ , donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son constantes y pertenecen al conjunto de los enteros; además,  $a \neq 0$  ó  $b \neq 0$ . Cuando  $a$ ,  $b$  y  $c$  son enteros positivos, la ecuación tiene solución entera si y, solo si, el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ , divide a  $c$ . Este tipo de ecuaciones puede tener soluciones infinitas o no puede tener solución. Entonces la solución consiste en hallar ecuaciones generadoras (paramétrica) del par  $(x, y)$  que satisfagan la ecuación propuesta. Este tipo de ecuaciones no son el objetivo principal de este curso, solo se deseaba hacer una breve descripción.



FUENTE: <http://suanzes.iespana.es/diofanto.htm>

### Ejemplo 14:

Para la ecuación  $2x + 3y = 8$  ¿cuál será el par  $(x, y)$  que satisfaga dicha ecuación?

### Solución:

Por simple inspección se puede ver que  $x = 1$  y  $y = 2$ , satisfacen la igualdad.

$$2(1) + 3(2) = 8.$$

Entonces la solución  $(x, y) = (1, 2)$

Pero se puede encontrar más soluciones, por ejemplo  $(4, 0)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(-5, 6)$ ,... como se dijo al principio, pueden existir infinitas soluciones.

## **SEGUNDO CASO: Dos Ecuación Con Dos Incógnitas.**

El interés central de este apartado es el análisis de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$a_1x_1 + b_1y_1 = c_1$$

$$a_2x_2 + b_2y_2 = c_2$$

Donde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  son constantes; además  $a_1 \neq 0$  ó  $b_1 \neq 0$  Al igual que  $a_2 \neq 0$  ó  $b_2 \neq 0$ , se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para  $x$  e  $y$ , debe satisfacer simultáneamente las dos ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es hallar un par  $(x, y)$  tal que al reemplazarlo en cualquiera de las dos ecuaciones, la igualdad se cumpla.

*Sistema Consistente:* Un sistema de ecuaciones es consistente, cuando tiene al menos una solución para cada incógnita.

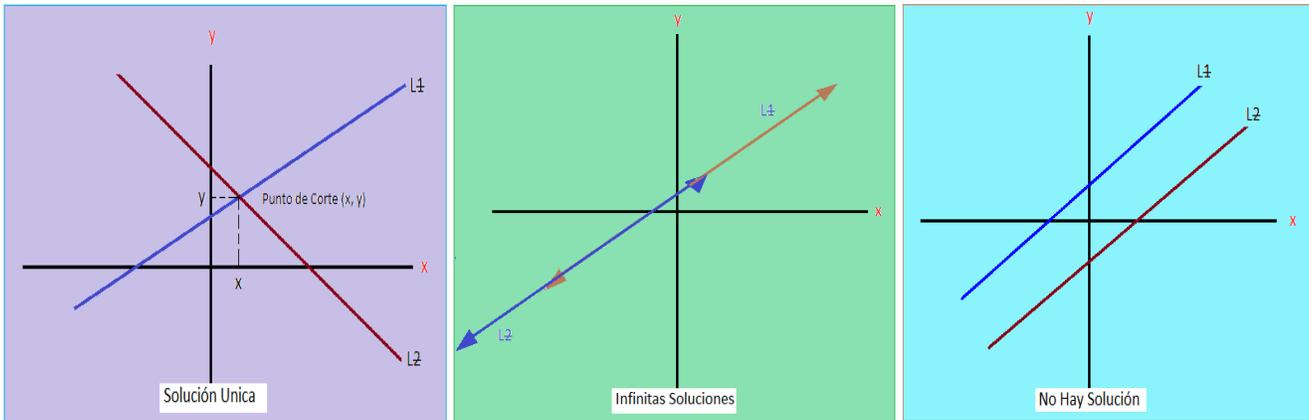
*Sistema Inconsistente:* ocurre cuando el sistema NO tiene solución alguna.

Es obvio que el trabajo es analizar sistemas consistentes.

Existen diversos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso vamos a analizar tres.

### **1. METODO GRAFICO.**

El método se basa en que en el plano de coordenadas rectangulares, una ecuación de la forma  $ax + by = c$ , está representada por una recta cuyos puntos son parejas ordenadas de números reales, donde la primera componente corresponde a  $x$  y la segunda componente a  $y$ . Como se tiene dos ecuaciones, entonces se deben tener graficadas dos rectas. De esta manera se pueden tener tres situaciones: *Primero*, que las rectas se corten en un punto, lo que indica que la solución es única y será el punto de corte. *Segundo*, que las dos rectas coincidan, luego hay infinitas soluciones. *Tercero*, que las rectas sean paralelas, lo que indica es que NO hay solución.



$L_1$  y  $L_2$ , corresponden a las ecuaciones uno y dos del sistema.

El método es adecuado cuando hay soluciones enteras, ya que los puntos de corte son bien definidos. El procedimiento básico consisten en despejar  $y$  en las dos ecuaciones y, darle valores arbitrarios a  $x$  para obtener parejas  $(x, y)$ , por lo general se asignas números enteros cercanos a cero; para facilitar el proceso y hacer la gráfica. Así se obtienen dos parejas de números, que corresponde a dos puntos en el plano  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , con lo cual se puede graficar una recta (Axioma Euclidiano)

### Ejemplo 15:

Resolver el sistema:

$$3x - 2y = 5$$

$$5x - y = 6$$

### Solución:

Según el procedimiento.

Para la primera ecuación:  $3x - 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5 - 3x}{-2}$

Tomemos dos valores, por ejemplo  $x = 3$ , entonces:  $y = [5 - 3(3)]/-2 = 2$ . El punto es  $(3, 2)$

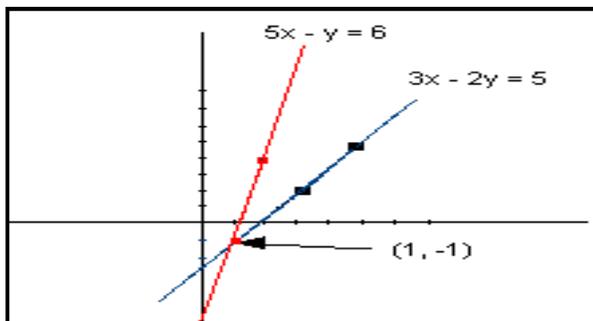
Otro valor  $x = 5$ , entonces:  $y = [5 - 3(5)]/-2 = 5$ . El punto es  $(5, 5)$

Los puntos para graficar la primera recta son:  $(3, 2)$  y  $(5, 5)$ .

Para la segunda ecuación.  $5x - y = 6 \Rightarrow y = 5x - 6$

Los valores:  $x = 1$ , entonces:  $y = 5(1) - 6 = -1$ . El punto es  $(1, -1)$  El otro valor  $x = 2$ , entonces  $y = 5(2) - 6 = 4$ , el punto es  $(2, 4)$

Los puntos para graficar la segunda recta son:  $(1, -1)$  y  $(2, 4)$



Graficando:

Según la gráfica, el punto de corte es  $(1, -1)$

Luego la solución son:  $x = 1$ ,  $y = -1$ .

### Ejemplo 16:

Dado el sistema de ecuaciones, hallar la solución correspondiente.

$$2x + y = 5$$

$$4x + 2y = 8$$

### Solución:

Como en el caso anterior, se despeja  $y$ , dando valores arbitrarios a  $x$ .

Se toma la primera ecuación:  $2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x$

Para  $x = 1$ , entonces  $y = 5 - 2(1) = 3$ , el punto es  $(1, 3)$

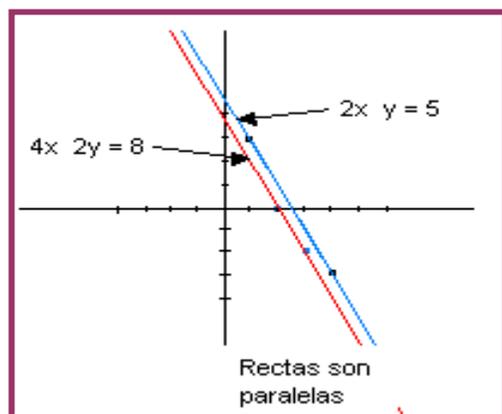
Para  $x = 4$ , entonces  $y = 5 - 2(4) = -3$  el punto es  $(4, -3)$

En seguida la segunda ecuación:  $4x + 2y = 8 \Rightarrow y = \frac{8 - 4x}{2}$

Para  $x = 2$ , entonces  $y = [8 - 4(2)]/2 = 0$ , el punto es  $(2, 0)$

Para  $x = 3$ , entonces  $y = [8 - 4(3)]/2 = -2$ , el punto es  $(3, -2)$

Graficamos:



Como las rectas son paralelas, no hay puntos de corte, por consiguiente el sistema NO tiene solución.

**NOTA:** En los ejemplos estudiados, los valores dados a  $x$  han sido escogidos arbitrariamente, siempre y cuando no se presenten inconsistencias, luego al reemplazarlos en la ecuación se obtiene el valor de  $y$ .

## 2. METODO POR ELIMINACIÓN.

Es un método algebraico, cuyo principio es eliminar una incógnita, para obtener el valor de la otra, posteriormente con el valor obtenido, se busca el valor de la primera.

Este método se puede desarrollar por tres técnicas, a continuación analizamos cada una.

**REDUCCIÓN:** Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en igualar coeficientes de una de las dos incógnitas y que presenten signos contrarios, así se puede eliminar dicha incógnita, obteniendo una ecuación con una incógnita, cuya resolución ya hemos estudiado.

Con el valor de la incógnita obtenida, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones, para obtener el valor de la otra incógnita.

### Ejemplo 17:

Resolver el sistema.

$$y - x = 0$$

$$x + y = 4$$

### Solución:

Primer organizamos las incógnitas, para que queden las  $y$  en una columna y las  $x$  en la otra, para poder igualar coeficientes y eliminar la incógnita seleccionada para este fin.

$$-x + y = 0$$

$$x + y = 4$$

Como ya están organizadas, se debe igualar coeficientes con signos contrarios, pero se observa que la incógnita  $x$  tiene coeficientes iguales y signos contrarios, luego se puede eliminar, entonces:

$$-x + y = 0$$

$$x + y = 4$$

$$\hline / + 2y = 4$$

Despejamos  $y$ , entonces:  $y = 4/2 = 2$ . Como ya se conoce el valor de  $y$ , se toma *cualquiera* de las dos ecuaciones originales y se reemplaza dicho valor, para obtener el valor de  $x$ , entonces tomemos la primera ecuación y reemplacemos el valor de  $y$ .

$$-x + y = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

La solución es:  $(x, y) = (2, 2)$

Si reemplazamos dichos valores en las dos ecuaciones originales, las igualdades se deben cumplir simultáneamente.

### Ejemplo 18:

Resolver el sistema

$$x - y = 4$$

$$3x - 2y = -5$$

### Solución.

Para seleccionar la incógnita a eliminar, se puede tomar como criterio la que tenga signo contrario, pero no es una camisa de fuerza. Para este ejemplo se puede escoger cualquiera de las dos, escojamos  $x$ , entonces debemos igualar coeficientes en  $x$  y con signo contrario, para esto lo que se hace es multiplicar la primera ecuación por  $-3$  y la segunda por  $1$ , luego:

$$-3x - (-3)y = 4(-3)$$

$$3x - 2y = -5$$

Operando se obtiene:

$$-3x + 3y = -12$$

$$3x - 2y = -5$$

$$\begin{array}{r} \text{Ahora:} \quad -3x + 3y = -12 \\ \quad \quad \quad 3x - 2y = -5 \\ \hline \quad \quad \quad / + y = -17 \end{array}$$

La solución para  $y$  es  $-17$ . Para obtener la solución en  $x$ , se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones originales, por ejemplo tomemos la segunda.

$$3x - 2y = -5 \Rightarrow 3x - 2(-17) = -5 \Rightarrow 3x + 34 = -5 \Rightarrow x = \frac{-5 - 34}{3} = -13$$

La solución es:  $(x, y) = (-13, -17)$

### Ejemplo 19:

Resolver el sistema

$$4x + 9y = 8$$

$$2x - 6y = -3$$

### Solución:

Como se observa en el sistema, se puede eliminar  $y$ , ya que tiene signo contrario, solo faltaría igualar los coeficientes, lo que se consigue multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3.

$$\begin{array}{r} (4x + 9y = 8)2 \\ (2x - 6y = -3)3 \end{array} \quad \text{Lo que equivale a:} \quad \begin{array}{r} 8x + 18y = 16 \\ 6x - 18y = -9 \end{array} \quad \text{Operando:}$$

$$\begin{array}{r} 8x + 18y = 16 \\ 6x - 18y = -9 \\ \hline 14x + / = 7 \end{array} \quad \text{Despejando la incógnita tenemos:} \quad x = 7/14 = 1/2$$

En seguida debemos hallar el valor de la otra incógnita, reemplazando  $x$  en una de las ecuaciones originales, se toma la segunda:

$$2x - 6y = -3 \Rightarrow 2(1/2) - 6y = -3 \Rightarrow 1 - 6y = -3 \Rightarrow y = \frac{-3 - 1}{-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Así, la solución es:  $(x, y) = (1/2, 2/3)$

Recordemos que la verificación ó comprobación de la solución, se hace sustituyendo en las ecuaciones originales los valores obtenidos, para comprobar que la igualdad es verdadera.

$$\begin{array}{r} 4(1/2) + 9(2/3) = 8 \\ 2(1/2) - 6(2/3) = -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2 + 6 = 8 \\ 1 - 4 = -3 \end{array}$$

Se observa que las igualdades son verdaderas, luego la solución es correcta.

**IGUALACIÓN:** Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en despejar en las dos ecuaciones la misma incógnita, quedando el sistema en términos de la otra, seguido se igualan las expresiones obtenidas. De lo anterior, se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita, que por medio de procesos matemáticos; ya analizados, se busca el valor de la incógnita presente, el cual; como en el caso de la reducción, se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de la otra incógnita.

**Ejemplo 20:**

Resolver el sistema dado a continuación:

$$x + y = 8$$

$$x - y = 4$$

**Solución:**

Se puede despajar la incógnita que se desee, para este caso vamos a despejar  $x$  en las dos ecuaciones.

Para la primera:  $x_1 = 8 - y$

Para la segunda:  $x_2 = 4 + y$

Ahora, igualamos las dos expresiones, ya que  $x_1 = x_2$

¿Por qué? Analícelo con sus compañeros.

Entonces:  $8 - y = 4 + y$ , como ya sabemos trabajar este tipo de ecuaciones, el proceso para despajar  $y$  será entendido.

$$2y = 4, \text{ luego } y = 4/2 = 2.$$

Ahora reemplazamos el valor de  $y$  en cualquiera de las ecuaciones originales, bueno esta expresión se ha repetido varias veces, la idea es que usted estimado estudiante la asimile para que a medida que sigamos en el estudio de este tipo de ecuaciones, llegará el momento de NO repetir, pero si saber que se está haciendo.

Tomemos la primera ecuación:

$$x + y = 8 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$$

La solución será:  $(x, y) = (6, 2)$

Por favor realicen la verificación de dicha solución, es un trabajo motivante.

**Ejemplo 21:**

Hallar el valor de las incógnitas, para el sistema dado a continuación.

$$12x - 5y = 37$$

$$9x - 8y = \frac{57}{2}$$

**Solución:**

Despajamos  $x$ .

Para la primera:  $12x - 5y = 37 \Rightarrow 12x = 37 + 5y \Rightarrow x = \frac{37 + 5y}{12}$

Para la segunda:  $9x - 8y = \frac{57}{2} \Rightarrow 9x = \frac{57}{2} + 8y = \frac{57 + 16y}{2} \Rightarrow x = \frac{57 + 16y}{18}$

Se igualan las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{37 + 5y}{12} = \frac{57 + 16y}{18} \Rightarrow 18(37 + 5y) = 12(57 + 16y)$$

Operando y simplificando:  $666 + 90y = 684 + 192y$ .

Tenemos una ecuación con una incógnita.  $90y - 192y = 684 - 666$

Operando:  $-102y = 18$ , luego  $y = -18/102 = -3/17$

Ahora sustituimos  $y = -3/17$ , tomemos la primera ecuación.

$$12x - 5y = 37 \Rightarrow 12x - 5(-3/17) = 37 \Rightarrow 12x = 37 - 15/17 \Rightarrow 12x = 614/17$$

Despejamos la incógnita:  $x = 614 / 204 = 307 / 102$

La solución:  $(x, y) = (307 / 102, -3 / 17)$

**SUSTITUCIÓN:** Para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación. Dicho de otra manera, si despejamos la incógnita  $x$  en la primera ecuación, se debe sustituir en la segunda ecuación ó viceversa, igual si fuera la otra incógnita.

Como siempre los ejemplos modelos, permiten ilustrar claramente el método de resolución. Veamos.

**Ejemplo 22:**

Resolver el sistema dado en seguida:

$$\begin{array}{r} x - y = -4 \\ 3x - 2y = -5 \end{array}$$

**Solución:**

Según la teoría del método, debemos despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones, para este caso se elige la incógnita  $y$  en la primera ecuación.

$$x - y = -4 \Rightarrow -y = -4 - x \Rightarrow y = x + 4$$

Ahora reemplazamos  $y$  en la segunda ecuación.

$$3x - 2y = -5 \Rightarrow 3x - 2(x + 4) = -5$$

Aquí tenemos una ecuación con una incógnita, lo cual a estas alturas ya sabemos resolver.

$$3x - 2(x + 4) = -5 \Rightarrow 3x - 2x - 8 = -5 \Rightarrow x = 3$$

Ahora se reemplaza el valor de  $x$  en la segunda ecuación:

$$3x - 2y = -5 \Rightarrow 3(3) - 2y = -5 \Rightarrow -2y = -5 - 9 \Rightarrow y = \frac{-14}{-2} = 7$$

La solución:  $(x, y) = (3, 7)$

**Ejemplo 23:**

Resolver el sistema.

$$\begin{aligned} \frac{3x}{5} + \frac{5y}{3} &= 2 \\ \frac{6x}{5} - \frac{5y}{3} &= 1 \end{aligned}$$

**Solución:**

Para resolver este sistema, es aconsejable primero convertir las ecuaciones a expresión enteras. Veamos:

$$\frac{3x}{5} + \frac{5y}{3} = 2 \Rightarrow \frac{9x + 25y}{15} = 2 \Rightarrow 9x + 25y = 30$$

$$\frac{6x}{5} - \frac{5y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{18x - 25y}{15} = 1 \Rightarrow 18x - 25y = 15$$

Entonces, según el método, despejamos  $x$  en la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda, recordemos que también se puede hacer lo contrario.

$$9x + 25y = 30 \Rightarrow 9x = 30 - 25y \Rightarrow x = \frac{30 - 25y}{9}$$

$$\text{Ahora: } 18x - 25y = 15 \Rightarrow 18 \left[ \frac{30 - 25y}{9} \right] - 25y = 15 \Rightarrow 60 - 50y - 25y = 15 \Rightarrow -75y = 15 - 60$$

$$\text{Despejando: } y = -45 / -75 = 3/5$$

En seguida se toma la primera ecuación para reemplazar  $y$ , así obtener el valor de la otra incógnita;  $x$ .

$$9x + 25y = 30 \Rightarrow 9x + 25(3/5) = 30 \Rightarrow 9x + 15 = 30 \Rightarrow 9x = 30 - 15$$

$$\text{Despejando. } x = 15 / 9 = 5/3$$

$$\text{Solución: } (x, y) = (5/3, 3/5)$$

**Ejemplo 24:**

Hallar la solución del sistema dado.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 4x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

**Solución:**

Siguiendo la metodología para este método, tenemos:

$$2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$$

Reemplazando:

$$4x + 2y = 3 \Rightarrow 4x + 2(1 - 2x) = 3 \Rightarrow 4x + 2 - 4x = 3 \Rightarrow 2 = 3$$

La última igualdad no es verdadera, luego NO hay solución, por consiguiente el sistema no tiene solución, es un sistema inconsistente.

### 3. METODO POR DETERMINANTES

Para aplicar este método, primero analicemos algunos términos propios de los determinantes.

- ) Determinante: Un determinante es un arreglo rectangular de filas y columnas, donde los elementos de éste valores que se obtienen del sistema de ecuaciones.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Las filas son: } (a_1 \ b_1) \text{ y } (a_2 \ b_2) \\ \text{Las columnas: } (a_1 \ a_2) \text{ y } (b_1 \ b_2) \end{array}$$

El tamaño del determinante lo da el número de filas y de columnas. Así pueden haber determinantes de 2x2, 3x3, 4x4, etc.

Resolver un determinante es hallar el valor del mismo, para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se requiere trabajar con determinantes de 2x2.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - a_2 * b_1$$

Donde **D** es el valor del determinante.

- ) Ecuaciones por Determinante:

Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, **KRAMER** propuso una técnica que podemos resumir así:

Sea el sistema:

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1y_1 = c_1 \\ a_2x + b_2y_2 = c_2 \end{array}$$

Se despeja cada incógnita de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador, se le llama *determinante de coeficientes*, que es común para todas las incógnitas.

La solución será el cociente de los dos determinantes, para cada incógnita.

Solución:  $x = \frac{c_1 * b_2 - c_2 * b_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$        $y = \frac{a_1 * c_2 - a_2 * c_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$

**Ejemplo 24:**

Resolver el sistema

$$3x - 2y = 5$$

$$5x - y = 6$$

**Solución:**

Se organizan los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5x(-1) - 6x(-2)}{3x(-1) - 5x(-2)} = \frac{-5 + 12}{-3 + 10} = \frac{7}{7}$$

Solución para la primera incógnita  $x = 1$ .

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3x6 - 5x5}{3x(-1) - 5x(-2)} = \frac{18 - 25}{-3 + 10} = \frac{-7}{7}$$

Solución para la segunda incógnita  $y = -1$

Solución del sistema:  $(x, y) = (1, -1)$

**Ejemplo 25:**

Resolver el sistema siguiente.

$$4x - 3y = 6$$

$$-2x + 5y = 4$$

**Solución:**

Como ya se conoce el procedimiento general, procedamos así.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6x5 - 4x(-3)}{4x5 - (-2)x(-3)} = \frac{30 + 12}{20 - 6} = \frac{42}{14}$$

Así  $x = 3$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4 \times 4 - (-2) \times 6}{4 \times 5 - (-2) \times (-3)} = \frac{16 + 12}{20 - 6} = \frac{28}{14}$$

Solución para  $y = 2$

Solución del sistema:  $(x, y) = (3, 2)$

### Ejemplo 26:

Hallar el valor de  $x$  e  $y$  en el sistema

$$7x + 4y = 8$$

$$7x + 4y = 6$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8 \times 4 - 6 \times 4}{7 \times 4 - 7 \times 4} = \frac{32 - 24}{28 - 28} = \frac{8}{0}$$

El valor de  $x$  es indeterminado, ya que la fracción tiene como denominador cero.

Así, el sistema NO tiene solución, es inconsistente.

## Lección Cuatro: Ecuaciones de Primer Grado con Tres Incógnitas

$$\beta x + \varphi y + \partial z = \zeta$$

Con los conocimientos adquiridos en el apartado anterior, será más sencillo abordar el que sigue, ya que los principios son similares, solo que para este caso se trata de tres ecuaciones y tres incógnitas. Para los sistemas de éste tipo, se van a analizar dos métodos.

### PRIMER MÉTODO: SOLUCIÓN POR ELIMINACIÓN.

Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

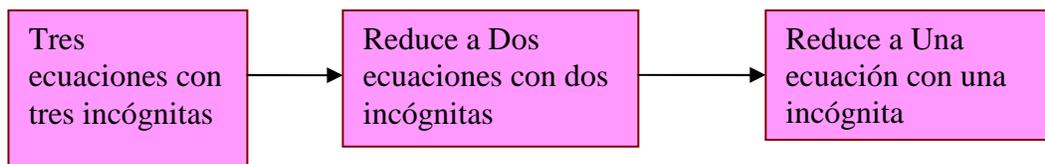
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Donde  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$  son constantes.

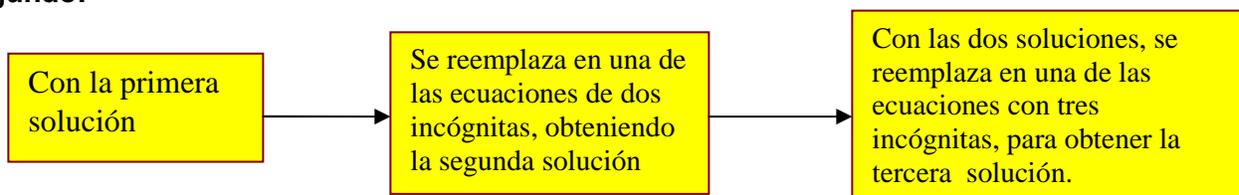
Se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para  $x$ ,  $y$ ,  $z$  debe satisfacer simultáneamente las tres ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es hallar valores específicos para  $(x, y, z)$  tal que al reemplazarlo en cualquiera de las tres ecuaciones, la igualdad se cumpla.

Un esquema sencillo que nos ayuda a comprender el método.

**Primero:**



**Segundo:**



La mejor forma de comprender el método es con ejemplos modelos.

**Ejemplo 27:**

$$x + y + z = 4$$

Resolver el sistema dado, por Eliminación.  $x + y - z = 0$

$$x - y + z = 2$$

**Solución:**

Primero enumeremos las ecuaciones para hacer más fácil su identificación.

$$x + y + z = 4 \quad (1)$$

$$x + y - z = 0 \quad (2)$$

$$x - y + z = 2 \quad (3)$$

Según el esquema, a partir de las tres ecuaciones, obtener dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que se hace de la siguiente manera.

Tomemos las ecuaciones (1) y (2) y eliminemos la incógnita  $z$ , pero puede ser una de las otras incógnitas. .

$$x + y + z = 4 \quad (1)$$

$$x + y - z = 0 \quad (2)$$

$$\hline 2x + 2y \quad / = 4 \quad (4)$$

Observemos que se obtiene una nueva ecuación (4) que es de dos incógnitas.

Ahora se toman las ecuaciones (1) y (3), [pero puede ser también (2) y (3)] y eliminamos la misma incógnita que se eliminó anteriormente; es decir,  $z$ , para lo cual se multiplica la ecuación (3) por  $-1$ .

$$\begin{array}{rcl}
 x + y + z = 4 & (1) & \text{Entonces:} \\
 x - y + z = 2 & (3) & \begin{array}{r}
 x + y + z = 4 \quad (1) \\
 -x + y - z = -2 \quad (3) \\
 \hline
 / + 2y \quad / = 2 \quad (5)
 \end{array}
 \end{array}$$

Las ecuaciones (4) y (5) tendrán a lo más dos incógnitas. En este caso la ecuación (5) solo tiene una incógnita, luego despejamos y se puede obtener su valor.

$2y = 2$ , entonces:  $y = 1$ . Primera solución.

Para la segunda solución, reemplazamos  $y$  en la ecuación (4), ya que esta solo tiene dos incógnitas y se conoce el valor de una de ellas. Entonces:

$$2x + 2y = 4 \Rightarrow 2x + 2(1) = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 2 = 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

La segunda solución es  $x = 1$ .

Para la última solución; es decir, la incógnita  $z$ , se reemplaza en cualquiera de la ecuaciones originales el valor de  $x$  e  $y$ , así queda resuelto el sistema.

Tomemos la ecuación (1), (pero puede ser una de las otras, no lo olvidemos)

$$x + y + z = 4 \Rightarrow (1) + (1) + z = 4 \Rightarrow 2 + z = 4 \Rightarrow z = 4 - 2 = 2$$

La tercera solución  $z = 2$ .

La solución total:  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$

### Ejemplo 28:

Resolver por eliminación el sistema dado a continuación.

$$\begin{array}{rcl}
 x + y + z & = & 12 \\
 2x - y + z & = & 7 \\
 x + 2y - z & = & 6
 \end{array}$$

### Solución:

Recordemos que para facilitar el proceso debemos enumerarlas.

$$\begin{array}{rcl}
 x + y + z & = & 12 \quad (1) \\
 2x - y + z & = & 7 \quad (2) \\
 x + 2y - z & = & 6 \quad (3)
 \end{array}$$

Tomemos (1) y (2) y eliminemos la incógnita  $y$ , ya que tiene signos contrarios y esto facilita su eliminación, pero no olvidemos que se puede eliminar cualquiera de las otras incógnitas.

$$\begin{array}{rcl}
 x + y + z & = & 12 \quad (1) \\
 2x - y + z & = & 7 \quad (2) \\
 \hline
 3x \quad / + 2z & = & 19 \quad (4)
 \end{array}$$

Ahora se toma (2) y (3), pero como se ha venido comentando, puede ser (1) y (3). Se debe eliminar la misma incógnita; es decir,  $y$ . Entonces como tienen signos contrarios solo se debe igualar coeficientes, lo que se hace multiplicando la ecuación (2) por 2 y la ecuación (3) se deja igual.

$$\begin{array}{l}
 2x - y + z = 7 \quad (2) \\
 x + 2y - z = 6 \quad (3)
 \end{array}
 \quad \text{Entonces:} \quad
 \begin{array}{l}
 4x - 2y + 2z = 14 \quad (2) \\
 x + 2y - z = 6 \quad (3) \\
 \hline
 5x \quad / \quad + z = 20 \quad (5)
 \end{array}$$

Como se puede ver, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas (4) y (5). La solución se puede hacer por cualquiera de los métodos estudiados. Usemos igualación:

Para la ecuación (4):  $3x + 2z = 19$ , despejamos  $z$ , luego:  $z = \frac{19 - 3x}{2}$

Para la ecuación (5):  $5x + z = 20$ , también despejamos  $z$ , luego:  $z = 20 - 5x$

Ahora se igualan las expresiones y operamos:  $\frac{19 - 3x}{2} = 20 - 5x \Rightarrow 19 - 3x = 40 - 10x$

Como se tiene una ecuación con una incógnita, se resuelve como se ha aprendido.

$10x - 3x = 40 - 19$  entonces:  $7x = 21$ , así  $x = 3$

Ahora reemplazamos el valor de  $x$  en una de las ecuaciones (4) ó (5), así se puede obtener el valor de la otra incógnita. Tomemos la ecuación (5).

$5x + z = 20$ , entonces:  $5(3) + z = 20$ , luego:  $z = 20 - 15 = 5$ . Por consiguiente  $z = 5$

Finalmente, reemplazamos el valor de  $x$  y  $z$  en cualquiera de las ecuaciones originales. Tomemos la ecuación (3), pero ustedes pueden tomar cualquiera de las otras ecuaciones.

$x + 2y - z = 6$ , reemplazando tenemos:  $(3) + 2y - (5) = 6$ , luego:  $2y - 2 = 6$ , despejamos la incógnita:

$y = \frac{6 + 2}{2} = 4$  Luego  $y = 4$

Solución:  $(x, y, z) = (3, 4, 5)$

## SEGUNDO METODO: SOLUCIÓN POR DETERMINANTES.

Cuando se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se presentan determinantes de  $3 \times 3$ , conocidos como determinantes de tercer orden. Esto nos induce a analizar dichos determinantes, antes de su respectiva aplicación.

**Determinantes de tercer orden:** Son arreglos de 3 filas y 3 columnas.

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Para resolver un determinante de tercer orden hay tres formas diferentes, veamos:

1. **Productos Cruzados:** Se puede ver esquemáticamente el procedimiento.

Sea el determinante:  $A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Solución:  $A = [a] - [b]$

Donde:

$$a = (x_1 y_2 z_3) + (y_1 z_2 x_3) + (x_2 y_3 z_1)$$

$$b = (x_3 y_2 z_1) + (x_2 y_1 z_3) + (y_3 z_2 x_1)$$

2. **Método de Sarrus:** Consiste en aumentar las dos primeras filas a continuación del determinante original y hacer productos cruzados. Para el determinante A definido anteriormente, el nuevo determinante, propuesto por sarrus es:

$$A' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Solución del determinante:  $A' = [\alpha] - [\beta]$

$$\alpha = (x_1 y_2 z_3) + (x_2 y_3 z_1) + (x_3 y_1 z_2)$$

$$\beta = (x_3 y_2 z_1) + (x_1 y_3 z_2) + (x_2 y_1 z_3)$$

Este método sólo es adecuado para determinantes de 3x3.

3. **Método de Cofactor:** La esencia del método es convertir un determinante de 3x3 en tres determinantes de 2x2. La siguiente ilustración explica el procedimiento.

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

La última parte se resuelve como determinante de 2x2:

$$A = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - y_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

El método de cofactor tiene la ventaja que se puede utilizar para determinantes de mayor tamaño.

**Ejemplo 29:**

Resolver por productos cruzados y por Sarrus el siguiente determinante.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

a-) *Por productos cruzados.*

$$D = [a] - [b]$$

$$[a] = [(-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (3)(4)(2)] = 6 - 6 + 24 = 24$$

$$[b] = [(2)(-1)(1) + (3)(3)(3) + (-2)(4)(-2)] = -2 + 27 + 16 = 41$$

$$D = 24 - 41 = -17$$

b-) *Por Sarrus.*

$$D' = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = [\alpha] - [\beta]$$

$$[\alpha] = (-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (2)(3)(4) = 6 - 6 + 24 = 24$$

$$[\beta] = (2)(-1)(1) + (-2)(-2)(4) + (3)(3)(3) = -2 + 16 + 27 = 41$$

$$D' = 24 - 41 = -17$$

**Ejemplo 30:**

Desarrollar el siguiente determinante por Sarrus y por cofactor.

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

a-) *Por Sarrus.*

$$P' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow P' = [\alpha] - [\beta]$$

$$[\alpha] = (-4)(2)(2) + (1)(4)(0) + (-2)(3)(3) = -16 + 0 - 18 = -34$$

$$[\beta] = (-2)(2)(0) + (-4)(4)(3) + (1)(3)(2) = 0 - 48 + 6 = -42$$

$$P = -34 - (-42) = -34 + 42 = 8$$

b-) Por Cofactor:

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4)[2x2 - (4)x3] - 3[1x2 - (-2)x3] + 0$$

$$P = (-4)(4 - 12) - 3(2 + 6) + 0 = 32 - 24 = 8$$

**Solución de Ecuaciones por Determinantes:** Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes, **KRAMER**, propuso una metodología que ilustramos a continuación.

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Primero se calcula el determinante de coeficientes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{Aclarando que } \Delta \neq 0$$

En seguida se calculan los determinantes para cada incógnita.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Finalmente la solución para cada incógnita.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Los determinantes se pueden resolver por cualquiera de los métodos explicados.

**Ejemplo 31:**

Resolver el siguiente sistema por determinantes.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 5 \\3x + 2y + z &= 8 \\2x + 3y + 3z &= 14\end{aligned}$$

**Solución:**

Usando la técnica de Kramer: primero calculamos el determinante de coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Lo resolvemos por cofactor.

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 3 - 3 \cdot 1) - 1(3 \cdot 3 - 2 \cdot 1) + 1(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 3 - 7 + 5 = 1$$

Ahora los determinantes de las incógnitas.  $\Delta_x$  Se resuelve por productos cruzados,  $\Delta_y$  por sarrus y  $\Delta_z$  por cofactor.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (30 + 24 + 14) - (28 + 24 + 15) = 68 - 67 = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 8 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 1) - (2 \cdot 8 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 3) = 76 - 75 = 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 14 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 14 - 3 \cdot 8) - 1(3 \cdot 14 - 2 \cdot 8) + 5(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 4 - 26 + 25 = 3$$

Finalmente hallamos el valor de cada incógnita.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

Solución:  $(x, y, z) = (1, 1, 3)$

**Ejemplo 32:**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x - y + 2z = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

$$-2x + 2y - 4z = 0$$

**Solución:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-8 + 12 + 0) - (-8 + 12 + 0) = 0$$

Como el determinante de coeficientes es cero, el sistema no se puede resolver, recordemos que este determinante no puede ser cero. La única que puede ser cierta es:  $x = y = z = 0$ , ya que éste tipo de sistema se le conoce como sistema homogéneo.

## Lección Cinco: Ecuaciones de Primer Grado: problemas de Aplicación

Con el estudio de las ecuaciones de primer grado, ahora estamos en capacidad de resolver problemas diversos, utilizando ecuaciones de este tipo. Lo nuevo aquí es que a partir del contexto y descripción del fenómeno, se debe *Plantear una Ecuación o Ecuaciones* para resolver la situación.

Es importante tener en cuenta para resolver problemas con ecuaciones, los siguientes aspectos, los cuales permitirán obtener resultados claros y verdaderos.

1. Se debe leer muy bien el problema hasta que quede completamente entendido. Si es necesario, leerlo las veces que sean requeridas.
2. Identificar las incógnitas y expresarlas por medio de un símbolo.
3. Llevar el problema a un modelo matemático, es decir, plantear las ecuaciones.
4. Si es necesario utilizar gráficos, tablas y otros, como ayuda para la ilustración del problema.
5. Realizar las operaciones necesarias para obtener el valor de las incógnitas.
6. Identificar la respuesta y hacer la respectiva verificación.
7. Establecer las conclusiones del caso.

## Problemas Ecuaciones de Primer Grado con Una Incógnita

Para resolver problema de este tipo, lo más pertinente es plantear ejemplos modelos y hacer su respectiva explicación.

**Ejemplo 33:**

Escribir la modelación matemática de la siguiente situación: *La longitud de un arco circular, es el producto del ángulo barrido y el radio del círculo.*

**Solución:**

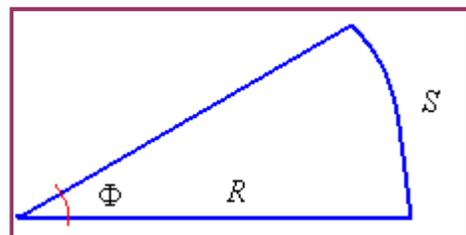
Se dan símbolos a los términos.

Longitud del arco: S

Angulo barrido:  $\Phi$

Radio del círculo: R

Según el problema, el modelo sería:  **$S = R \times \Phi$**



### Ejemplo 34:

Escribir matemáticamente la siguiente situación: *El volumen de un cono circular recto es un tercio del producto de una constante, el radio al cuadrado y la altura.*

#### Solución:

Los símbolos.

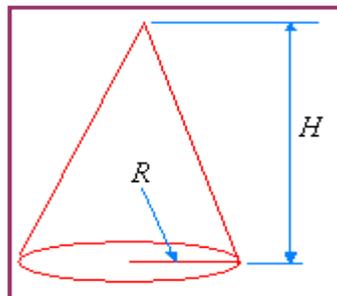
V = volumen

$\Pi$  = constante

R = radio

H = altura

Según el contexto  $V = \frac{1}{3}\Pi R^2 H$

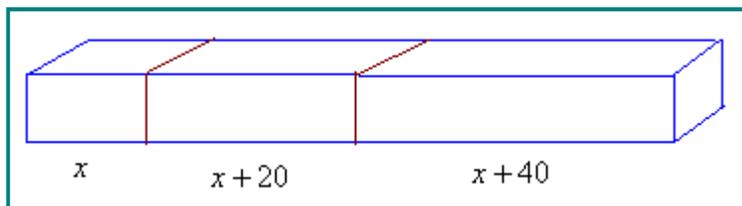


### Ejemplo 35:

Un carpintero debe cortar una tabla de 6 m. de largo en tres tramos, si cada tramo debe tener 20 cm. más que el anterior, ¿Cuál será la longitud de cada tramo?

#### Solución:

Sea x la longitud del tramo más corto, entonces el segundo tramo será  $x + 20$  y el tercero será  $x + 40$ .



El modelamiento matemático es:

$$(x) + (x + 20) + (x + 40) = 600 \quad \text{Operando:}$$

$$3x + 60 = 600 \quad \text{Entonces: } 3x = 600 - 60 = 540$$

$$\text{Despejando la incógnita: } x = 540/3 = 180$$

Así:

El tramo más corto  $x = 180$  cm.

El segundo tramo:  $x + 20 = 180 + 20 = 200$  cm.

El tercer tramo:  $x + 40 = 180 + 40 = 220$  cm.

### Ejemplo 36:

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo mide  $180^\circ$ . En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es el otro aumentado en  $10^\circ$ . ¿Cuáles serán las medidas de los ángulos de dicho triángulo?

#### Solución:

Si x es el ángulo más pequeño, el otro ángulo será  $x + 10$ . Recordemos que un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, luego:

$$(x) + (x + 10) + 90 = 180$$

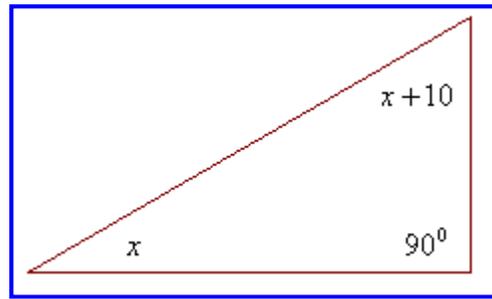
$$2x + 100 = 180$$

$$2x = 180 - 100 = 80$$

$$x = 40$$

Ahora:  $x + 10 = (40) + 10 = 50$

Los ángulos son:  $40^\circ, 50^\circ, 90^\circ$ .



**Ejemplo 37:**

En una molécula de azúcar se encuentra el doble de átomos de hidrógeno que de oxígeno, también tiene un átomo más de carbono que de oxígeno. Si la molécula de azúcar tiene 45 átomos. ¿Cuántos átomos de cada elemento tienen dicha sustancia?

**Solución:**

$x$  = Átomos de oxígeno

$y = 2x$ . Átomos de hidrógeno según el contexto del problema.

$z = x + 1$ . Átomos de carbono según el contexto del problema.

Como todo suma 45, entonces el modelo matemático será:  $x + y + z = 45$ . Expresando el modelo en términos de una sola incógnita:  $(x) + (2x) + (x + 1) = 45$

Operando:  $4x + 1 = 45$ ;  $4x = 44$ ; entonces:  $x = 11$  átomos de oxígeno.

Átomos de hidrogeno:  $2x = 11 \times 2 = 22$

Átomos de carbono:  $x + 1 = 11 + 1 = 12$

Solución: La molécula de azúcar tiene 11 átomos de oxígeno, 22 átomos de hidrógeno y 12 átomos de carbono.  $C_{12}H_{22}O_{11}$

**Ejemplo 38:**

Un Ingeniero desea desarrollar un equipo hidráulico compuesto por dos cilindros. El primer cilindro está a 120 cm. del punto de apoyo y ejerce una fuerza de 500 Kg.-f, el sistema debe soportar una fuerza de 1.200 Kg.-f ubicada a 90 cm. del punto de apoyo y al lado opuesto de los cilindros. Si el segundo cilindro ejerce una fuerza de 700 Kg.-f, ¿En donde se debe colocar dicho cilindro para que el sistema quede en equilibrio?

**Solución:**

Para que el sistema este en equilibrio, la suma de las fuerzas debe ser cero.

$F_1$  = Fuerza uno, ubicada a  $x_1$  distancia del punto de equilibrio.

$F_2$  = Fuerza dos, ubicada a  $x_2$  distancia del punto de equilibrio.

$F_3$  = Fuerza tres, ubicada a 90 cm. del punto de equilibrio.

Según las condiciones del problema:

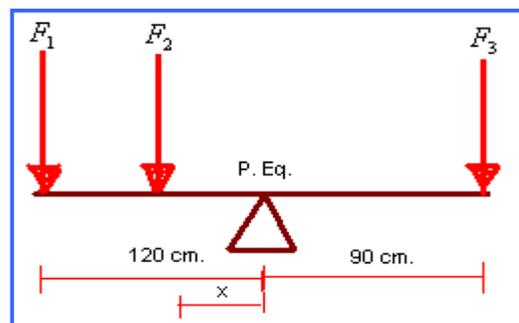
$$F_1 X_1 + F_2 X_2 = F_3 X_3$$

Reemplazando:

$$500 \cdot 120 + 700 \cdot X = 1.200 \cdot 90$$

Resolviendo:

$$60.000 + 700X = 108.000$$



$700X = 48.000$ , entonces:  $X = 68,57$  cm.

Solución: El cilindro dos se debe colocar a 68,57 cm. del punto de equilibrio

## Problemas Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnita

En el desarrollo de ecuaciones de primer grado con una incógnita, se han adquirido destrezas en el planteamiento y resolución de problemas. Sin olvidar los cinco pasos que se recomiendan para este tipo de situaciones, entramos en el análisis y resolución de problemas donde se involucran dos ecuaciones con dos incógnitas.

### Ejemplo 39:

Una industria tiene dos clases de equipos para comunicación, la clase A cuesta \$67.000 y la clase B cuesta \$100.000, si fueron vendidos 72 equipos con un costo total de \$5'880.000, ¿Cuántos equipos de cada clase fueron vendidos?

### Solución:

Como se tiene dos incógnitas: Costo y cantidad, se debe plantear dos ecuaciones.

$x$  = Equipos de clase A

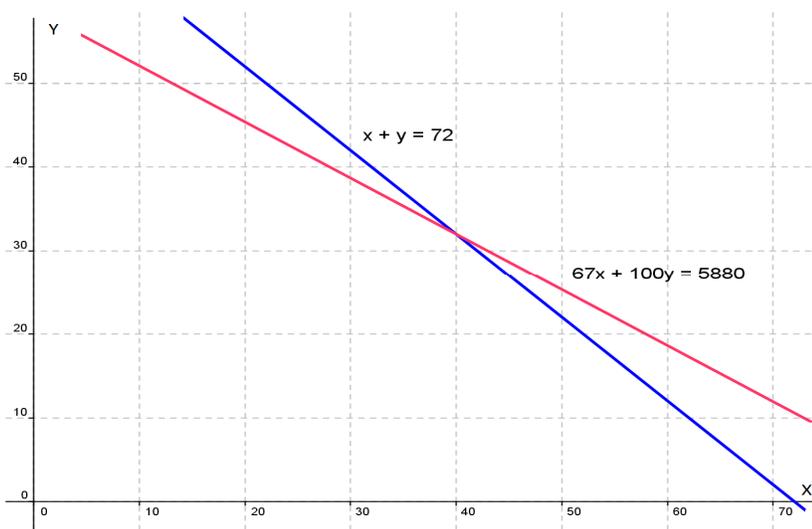
$y$  = Equipos de clase B

Ecuación para cantidad:  $x + y = 72$

Ecuación para costo:  $67.000x + 100.000y = 5'880.000$

Como se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, se puede utilizar para su solución: Grafico, eliminación o determinantes.

### Solución grafica:



El punto de corte esta en  $x = 40$  y en  $y$  por encima de 30, aproximadamente 32

### Solución analítica:

El sistema planteado a partir de la situación planteada es:

$$x + y = 72$$

$$67.000 x + 100.000 y = 5'880.000$$

Para este caso utilizemos la eliminación por reducción. Se elimina la incógnita  $x$ . Luego la primera ecuación se multiplica por  $-67.000$  y la segunda queda igual.

$$-67.000 x - 67.000 y = - 4'824.000$$

$$67.000 x + 100.000 y = 5'880.000$$

---

$$33.000 y = 1'056.000$$

Despejando  $y = 32$

Reemplacemos  $y$  en la primera ecuación:

$$x + y = 72; \quad x + (32) = 72, \text{ entonces: } x = 40.$$

Solución: Se vendieron 40 equipos de clase A y 32 equipos de clase B.

### Ejemplo 40:

Se desea preparar una sustancia a partir de dos soluciones base. La solución N tiene el 5% y la solución M tiene el 20%. La cantidad resultante R debe ser de 200 ml, con una concentración del 15%. ¿Cuántos mililitros de solución N y M se deben mezclar?

### Solución:

$x$  = Mililitros de la Solución N al 5% ...  $y$  = Mililitros de la Solución M al 20%

Se tiene dos ecuaciones, una para el volumen y otra para la concentración.

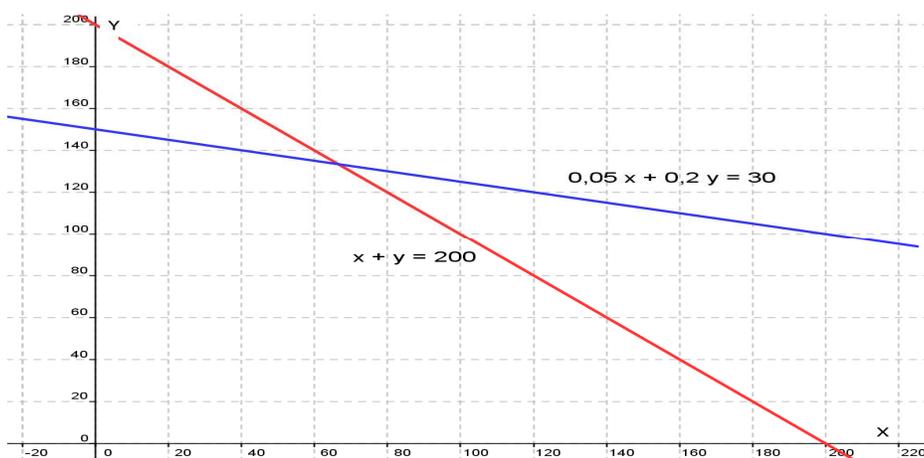
- Ecuación para el volumen:  $x + y = 200$  (mililitros)

- Ecuación para la concentración:  $0,05x + 0,20y = 200(0,15)$  entonces:  $0,05 x + 0,20 y = 30$

El sistema obtenido será:

$$x + y = 200 \quad \dots \quad 0,05 x + 0,20 y = 30$$

### Solución Grafica:



Se observa que la incógnita  $x$  está cerca a 60 y la incógnita  $y$  por encima de 120. Con el método analítico se puede obtener la solución precisa.

### Solución Analítica:

Vamos a resolverlo por sustitución, el sistema:

$$x + y = 200$$

$$0,05x + 0,20y = 30$$

Despejemos  $x$  en la primera ecuación:  $x = 200 - y$ . Reemplazamos dicha incógnita en la segunda ecuación:  $0,05(200 - y) + 0,20y = 30$ . Operando el paréntesis:  $10 - 0,05y + 0,20y = 30$ . Simplificando:  $0,15y = 20$ . Así:  $y = 133,33$

Ahora, reemplazamos el valor de  $y$  en la primera ecuación, recordemos que puede ser también en la segunda:  $x + y = 200$ , entonces:  $x + (133,33) = 200$ , operando:  $x = 67,67$

Solución: Se deben mezclar 66,67 ml de solución N y 133,33 ml. De solución M.

### Ejemplo 41:

Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son suplementarios, de tal manera que uno de ellos es 4 veces y 3 grados mayor que el otro. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ?

### Solución:

Sea  $\alpha$  ángulo mayor

Sea  $\beta$  ángulo menor.

La ecuación de ángulos suplementarios:  $\alpha + \beta = 180$

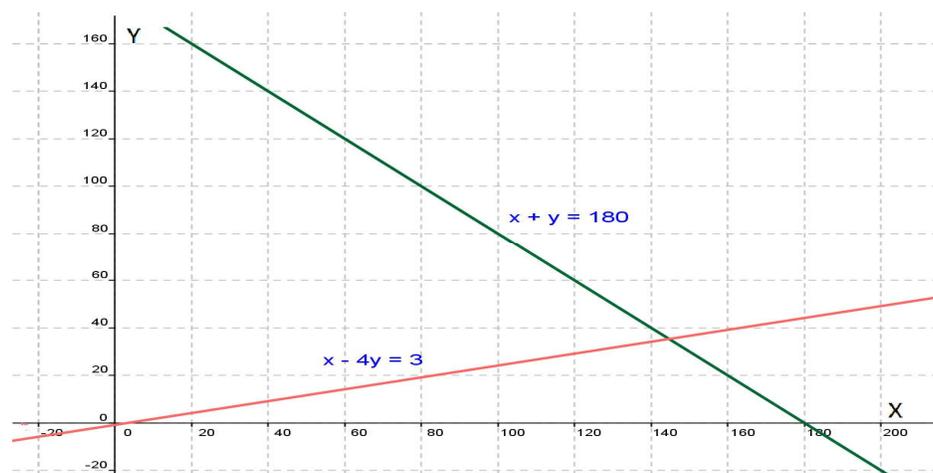
La ecuación, dada la condición del problema:  $\alpha = 4\beta + 3$

Organizando:

$$\alpha + \beta = 180$$

$$\alpha - 4\beta = 3$$

### Solución Grafica:



El punto muestra que  $\alpha$  (X) está por encima de 140 y el punto  $\beta$  (Y) está cercano a 40. Con el método analítico, se puede obtener la solución precisa.

**Solución Analítica:**

$$\alpha + \beta = 180$$

$$\alpha - 4\beta = 3$$

Por reducción:

$$4\alpha + 4\beta = 720$$

$$\alpha - 4\beta = 3$$

-----  
 $5\alpha = 723$ , entonces:  $\alpha = 144,6$

Para hallar el ángulo  $\beta$ , reemplazamos en la segunda ecuación:

$$(144,6) - 4\beta = 3. \text{ Desarrollando: } -4\beta = 3 - 144,6 = -141,6. \text{ Por consiguiente: } \beta = 35,4$$

Solución: El ángulo  $\alpha$  mide  $144,6^\circ$  y el ángulo  $\beta$  mide  $35,4^\circ$

**Ejemplo 42:**

En un circuito en serie la resistencia total es la suma de las resistencias componentes. Un circuito en serie es compuesto por dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$ , la resistencia total es de 1.375 ohmios, para suministrar el voltaje requerido,  $R_1$  debe tener 125 ohmios más que  $R_2$ . ¿Cuál es el valor de las resistencias?

**Solución:**

Se plantean las ecuaciones.

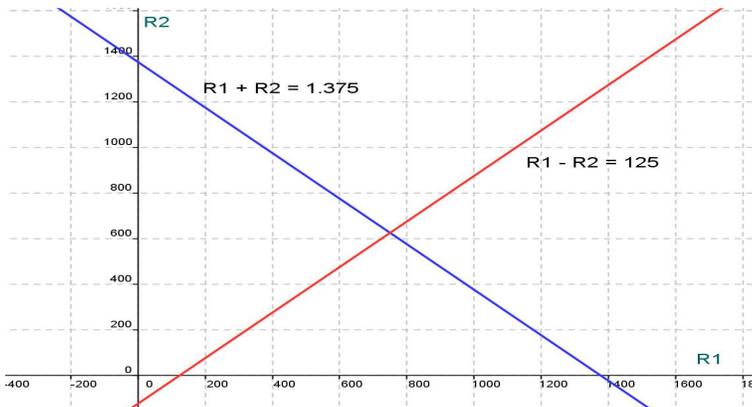
$$\text{Ecuación de resistencia total: } R_1 + R_2 = 1.375$$

$$\text{Según las condiciones del problema: } R_1 = R_2 + 125$$

$$\text{Entonces: } R_1 + R_2 = 1.375 \text{ y } R_1 - R_2 = 125$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

**Solución Gráfica:**



Como se observa en la gráfica, el punto de corte no es muy claro,  $R_1$  se acerca a 800 y  $R_2$  supera a 600.

### Solución Analítica:

Tomando las dos ecuaciones.

$$R_1 + R_2 = 1.375 \text{ y } R_1 - R_2 = 125$$

Despejamos  $R_1$  en la segunda:  $R_1 = R_2 + 125$

Reemplazamos en la primera:  $(R_2 + 125) + R_2 = 1.375$

Operando y simplificando:  $2R_2 = 1.375 - 125 = 1.250$ , luego:  $R_2 = 1250/2 = 625$

Ahora se busca el valor de  $R_1$  reemplazando el valor de  $R_2$  en cualquiera de las ecuaciones, utilizemos la ecuación dos:  $R_1 - R_2 = 125$ , entonces:  $R_1 = R_2 + 125 = (625) + 125 = 750$ .  $R_1 = 750$   
Por consiguiente: las resistencias tienen el valor de 625 y 750 ohmios.

### Ejemplo 43:

Jorge y Alberto pertenecen a un Club Ejecutivo, quienes debieron pagar una afiliación y cuotas mensuales. Jorge por 7 meses pagó por adelantado un total de \$605.000 y Alberto por 18 meses pago por adelantado \$770.000. ¿Cuánto vale la afiliación y la mensualidad en dicho Club?

### Solución:

$x$  = Cuota inicial

$y$  = mensualidad

Se plantea una ecuación para Jorge y una para Alberto.

$$\text{Jorge: } x + 7y = 605.000$$

$$\text{Alberto: } x + 18y = 770.000$$

Se resuelve reducción: Multiplicamos la primera ecuación por -1, luego:

$$-x - 7y = -605.000$$

$$x + 18y = 770.000$$

$11y = 165.000$ , despejando la incógnita:  $y = 15.000$

Para hallar  $x$ , reemplazamos el valor de  $y$  en la primera ecuación:

$$x + 7(15.000) = 605.000, \text{ donde: } x = 500.000, \text{ despejando la incógnita: } x = 500.000$$

Solución: La afiliación cuesta \$500.000 y la mensualidad cuesta \$15.000

## Problemas Ecuaciones de Primer Grado con Tres Incógnita

Existen problemas donde están involucradas tres incógnitas, la solución de este tipo de problemas son similares a los casos anteriores. Veamos algunos ejemplos modelos, que nos permitirán comprender situaciones de este tipo.

### Ejemplo 44:

La suma de tres números es cuatro, el primero, dos veces el segundo y el tercero suma uno. Por otro lado tres veces el primero mas el segundo, menos el tercero equivale a -2. ¿Cuáles son los números?

### Solución

El planteamiento.

$x$  = Primer número

$y$  = Segundo número

$z$  = tercer número

Según las condiciones.

$$x + 2y + z = 1 \quad (1)$$

$$3x + y - z = -2 \quad (2)$$

$$x + y + z = 4 \quad (3)$$

Tomamos (1) y (2) y eliminamos z.

$$x + 2y + z = 1 \quad (1)$$

$$3x + y - z = -2 \quad (2)$$

$$\text{-----}$$
$$4x + 3y = -1 \quad (4)$$

Ahora tomamos (2) y (3), eliminando la misma incógnita z.

$$3x + y - z = -2 \quad (2)$$

$$x + y + z = 4 \quad (3)$$

$$\text{-----}$$
$$4x + 2y = 2 \quad (5)$$

Se han obtenido dos ecuaciones con dos incógnitas, la forma de resolverlas ya se han estudiado.

$$4x + 3y = -1 \quad (4)$$

$$4x + 2y = 2 \quad (5)$$

Eliminemos x.

$$-4x - 3y = 1$$

$$4x + 2y = 2$$

$$\text{-----}$$
$$-y = 3. \text{ Primera solución: } \mathbf{y = -3}$$

Reemplazamos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones (4) o (5). Tomemos la ecuación 4.

$$4x + 3y = -1, \text{ entonces: } 4x + 3(-3) = -1. \text{ Operando y simplificando: } 4x = -1 + 9 = 8$$

$$x = 8/4 = 2. \text{ Segunda solución: } \mathbf{x = 2}.$$

Para hallar el valor de la tercera incógnita se reemplaza los valores de y y x en cualquiera de las ecuaciones originales (1), (2), (3). Tomemos la ecuación tres.

$$x + y + z = 4. \text{ Reemplazando: } (2) + (-3) + z = 4, \text{ luego: } z = 4 + 3 - 2 = 5. \text{ Así: } \mathbf{z = 5}$$

$$\text{Solución: } (x, y, z) = (2, -3, 5)$$

#### Ejemplo 45:

El ángulo más grande de un triángulo es  $70^\circ$  mayor que el ángulo más pequeño y el ángulo restante es  $10^\circ$  más grande que tres veces el ángulo más pequeño ¿Cuáles son las mediciones de los ángulos?

#### Solución:

x = Angulo más pequeño

y = Angulo intermedio

z = Angulo más grande

Por las condiciones del problema:

$$x + y + z = 180 \quad (1) \quad \text{¿porqué?}$$

$$x - z = -70 \quad (2)$$

$$3x - y = -10 \quad (3)$$

Se elimina la incógnita y, entonces:

$$x + y + z = 180$$

$$x - z = -70$$

-----

$$2x + y = 110 \quad (4)$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$3x - y = -10$$

$$2x + y = 110$$

Eliminamos  $y$ :  $5x = 100$ , así:  $x = 20$

Calculemos ahora  $y$  de la ecuación (3):  $3x - y = -10$ , entonces:  $3(20) - y = -10$ , operando se obtiene:  
 $y = 10 + 60 = 70$ , así:  $y = 70$

Finalmente para hallar  $z$ , tomamos la ecuación (1)

$x + y + z = 180$ , reemplazando:  $(20) + (70) + z = 180$ . Por consiguiente  $z = 90$ .

Así se tiene la solución:  $(x, y, z) = (20, 70, 90)$

### Ejemplo 46:

Una Heladería tiene tres sucursales: La sucursal A vendió 75 helados, 75 paletas y 32 conos, recibiendo \$84.500. La sucursal B vendió 80 helados, 69 paletas y 27 conos, recibiendo \$77.500 y la sucursal C vendió 62 helados, 40 paletas y 30 conos, recibiendo \$62.400. ¿Cuánto cuesta la unidad de cada producto?

### Solución:

Sea  $x =$  Helado,  $y =$  paleta,  $z =$  Cono. Según las condiciones del problema, se tiene:

$$\text{Sucursal A: } 75x + 75y + 32z = 84.500$$

$$\text{Sucursal B: } 80x + 69y + 27z = 77.500$$

$$\text{Sucursal C: } 62x + 40y + 30z = 62.400$$

Como tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas, se resuelve por determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 84.500 & 75 & 32 \\ 77.500 & 69 & 27 \\ 62.400 & 40 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 32 \\ 80 & 69 & 27 \\ 62 & 40 & 30 \end{vmatrix}} \quad \text{Resolviendo por cofactor:}$$
$$x = \frac{84.500 \begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75 \begin{vmatrix} 77.500 & 27 \\ 62.400 & 30 \end{vmatrix} + 32 \begin{vmatrix} 77.500 & 69 \\ 62.400 & 40 \end{vmatrix}}{75 \begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75 \begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32 \begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}} = \frac{84.500 * 990 - 75 * 640.200 + 32 * (-1'205.600)}{75 * 990 - 75 * 726 + 32 * (-1.078)}$$
$$x = \frac{-2'939.200}{-14.696} = 200 \quad \mathbf{x = 200}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 84.500 & 32 \\ 80 & 77.500 & 27 \\ 62 & 62.400 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 32 \\ 80 & 69 & 27 \\ 62 & 40 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{75 \begin{vmatrix} 77.500 & 27 \\ 62.400 & 30 \end{vmatrix} - 84.500 \begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32 \begin{vmatrix} 80 & 77.500 \\ 62 & 62.400 \end{vmatrix}}{75 \begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75 \begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32 \begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{75 * 640.200 - 84.500 * 726 + 32 * 187.000}{75 * 990 - 75 * 726 + 32 * (-1078)} = \frac{-7'348.000}{-14.696} = 500 \quad \mathbf{y = 500}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 84.500 \\ 80 & 69 & 77.500 \\ 62 & 40 & 62.400 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 75 & 75 & 32 \\ 80 & 69 & 27 \\ 62 & 40 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{75 \begin{vmatrix} 69 & 77.500 \\ 40 & 62.400 \end{vmatrix} - 75 \begin{vmatrix} 80 & 77.500 \\ 62 & 62.400 \end{vmatrix} + 84.500 \begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}}{75 \begin{vmatrix} 69 & 27 \\ 40 & 30 \end{vmatrix} - 75 \begin{vmatrix} 80 & 27 \\ 62 & 30 \end{vmatrix} + 32 \begin{vmatrix} 80 & 69 \\ 62 & 40 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{75 * 1'205.600 - 75 * 187.000 + 84.500 * (-1078)}{75 * 990 - 75 * 726 + 32 * (-1078)} = \frac{-14'696.000}{-14.696} = 1.000 \quad \mathbf{z = 1.000}$$

Solución: El helado cuesta \$200, la paleta cuesta \$500 y el cono cuesta \$1.000.

## EJERCICIOS

En los ejercicios propuestos, resolver la ecuación paso a paso identificando el axioma, propiedad o ley matemática utilizada.

1.  $3(2 - x) = 2x - 1$

Rta:  $x = 7/5$

2.  $\frac{1}{2}x - 6 = \frac{3}{4}x + 1$

Rta:  $x = -28$

3.  $\frac{6}{x} + \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$

Rta:  $x = 20$

4.  $x^2 + 6x - 7 = (x + 1)^2$

Rta:  $x = 2$

5.  $\frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+5} + \frac{10}{(x+5)(x-2)}$

Rta:  $x = 6$

6.  $5 - \frac{x+2}{3} = 7 - x$

Rta:  $x = 4$

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción.

$x - 5y = -13$

7.  $3x + 2y = 12$

Rta:  $x = 2, y = 3$

$x + 2y = 6$

8.  $3x - y = -10$

Rta:  $x = -2, y = 4$

Resolver los siguientes sistemas por el método de Igualación.

$2x - 4y = -2$

9.  $3x + 2y = 3$

Rta:  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$

Resolver los siguientes sistemas por el método de Sustitución

$x - \frac{1}{2}y = -1$

10.  $2x - y = -6$

Rta: NO hay solución

Identificar el valor de  $\varphi$  en cada determinante, de tal manera que la igualdad se cumpla.

11.  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \varphi \end{vmatrix} = 12$

Rta:  $\varphi = 12$

Resolver los sistemas de ecuaciones propuestos por el método de **Kramer**; es decir, utilizando determinantes.

$$12. \begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$\text{Rta: } x = 3, y = 2$$

$$13. \begin{cases} 3x - 6y = 24 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\text{Rta: } x = 4, y = -2$$

$$14. \begin{cases} y = \frac{-2x+1}{3} \\ 3x = 8+2y \end{cases}$$

$$\text{Rta: } x = 2, y = -1$$

Resolver los determinantes dados a continuación por el método de productos cruzados.

$$15. A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Rta: } A = 2$$

$$16. B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Rta: } B = 9/2$$

Resolver por Sarrus los determinantes dados.

$$17. C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Rta: } C = 58$$

$$18. E = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Rta: } E = -3/4$$

Resolver por Cofactor:

$$19. F = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Rta: } F = -49$$

Resolver por eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$x - 2y + 3z = 7$$

$$20. \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$$

$$\text{Rta: } x = 2, y = -1, z = 1$$

Solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Kramer.

$$x - 2y + 3z = 7$$

21.  $2x + y + z = 4$

$$-3x + 2y - 2z = -10$$

Rta:  $x = 2, y = -1, z = 1$

Hacer el planteamiento de los problemas propuestos y resolverlos adecuadamente.

22. La suma de dos números enteros positivos es igual a 12, uno de ellos es el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

Rta: 4 y 8

23. Un voceador reparte el periódico en 1800 seg., su compañero lo hace en 120 seg., si lo hacen simultáneamente, ¿Cuánto tardarán en hacer la entrega?

Rta: 720 seg.

24. Un ángulo mide  $46^\circ$  más que su complementario. ¿Cuál será la medida de los ángulos?

Rta:  $22^\circ$  y  $68^\circ$

25. En una distribuidora de dulces, 4 paquetes de dulces y 4 paquetes de galletas valen \$7.900. Dos paquetes de galletas cuestan \$20 más que un paquete de dulces. ¿Cuánto cuestan un paquete de galletas y un paquete de dulces?

Rta: Galletas: \$665, -dulces \$1.310

26. Un automóvil recorre 50 Km. En el mismo tiempo que un avión viaja 180 Km. La velocidad del avión es de 143 Km/hr más que el del automóvil. ¿Cuál es la velocidad del automóvil?

Rta: 55 Km/hr

27. Un Biólogo desea probar un fertilizante a partir de tres clases existentes referenciados  $F_1, F_2, F_3$ , cuyos contenidos de nitrógeno son: 30%, 20% y 15% respectivamente. El Biólogo quiere trabajar con 600 Kg. de mezcla con un contenido de nitrógeno de 25%, pero la mezcla debe tener 100 Kg. más de  $F_3$  que de  $F_2$ . ¿Cuánto requiere el Biólogo de cada tipo de fertilizante?

Rta:  $F_1 = 380$  Kg,  $F_2 = 60$  Kg,  $F_3 = 160$  Kg.

28. En la caja de un Banco hay \$880 en billetes de \$5, \$10, \$50. La cantidad de billetes de \$10 es el doble de la de \$50, si hay en total 44 billetes. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene el Banco?

Rta: 8 billetes de \$5, 24 de \$10 y 12 de \$50

## Lección Seis: Ecuaciones de Segundo Grado

$$\varphi x^2 + \mu x + \varepsilon = 0$$

Las ecuaciones de segundo grado han sido motivadas desde tiempos inmemorables, inicialmente la necesidad de resolver problemas de área y volumen, condujeron a manipular ecuaciones de este tipo. Como los números negativos se formalizaron tarde en la historia de las Matemáticas, en sus inicios el manejo de las ecuaciones de segundo grado fue con números positivos.

Se reconocen 5 tipos de ecuaciones de segundo grado.

$$x^2 = bx, \quad x^2 = c, \quad x^2 + c = bx, \quad x^2 = bx + c, \quad x^2 + bx = c$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se han utilizado diversos métodos, desde épocas de Herón, pasando por Euclides hasta el método axiomático, han permitido solucionar problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, por el interés que despierta, se analizará el método axiomático.

**MÉTODO AXIOMÁTICO:** Es el método más utilizado; por no decir que el único, en la actualidad, se soporta en los axiomas, propiedades y definiciones, establecidos a través de toda la historia de las matemáticas.

Sea la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , con a, b y c constantes y  $a \neq 0$ . Este tipo de ecuaciones se puede resolver de las siguientes maneras:

### 1. FACTORIZACIÓN:

Se sabe que toda ecuación de segundo grado se puede expresar como producto de dos factores.

$$ax^2 + bx + c = (x + \delta)(x + \beta) = 0$$

A los factores obtenidos se les aplica la “Regla del Producto Nulo” la cual dice:

$$\text{Si } (x + \delta)(x + \beta) = 0 \Rightarrow (x + \delta) = 0, \vee, (x + \beta) = 0$$

De esta manera se puede despejar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. Se debe aclarar que las ecuaciones de tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , tiene dos soluciones, las cuales pueden ser: Reales iguales, Reales diferentes ó Imaginarias.

#### Ejemplo 47:

Resolver la siguiente ecuación.  $3x^2 - 3x - 18 = 0$

#### Solución:

Primero factorizamos el trinomio, a esta altura debemos conocer las técnicas de factorización, en caso de dudas por favor consultar el modulo de Matemáticas Básicas para aclarar dudas al respecto.

$$\frac{3(3x^2 - 3x - 18)}{3} = 0 \Rightarrow \frac{(3x)^2 - 3(3x) - 54}{3} = 0$$

La última expresión se puede factorizar como un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c = 0$

$$\frac{(3x)^2 - 3(3x) - 54}{3} = \frac{(3x - 9)(3x + 6)}{3} = (3x - 9)(x + 2) = 0$$

Tenemos dos términos a los cuales le podemos aplicar la regla del producto nulo.

$$(3x - 9) = 0, \text{ despejando } x = 3$$

$$(x + 2) = 0, \text{ despenando } x = -2$$

Se observa que se obtienen dos soluciones -2 y 3, así se comprueba que toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

#### Ejemplo 48:

Hallar la solución de la ecuación  $x^2 - 10x + 25 = 0$

#### Solución:

Se factoriza como trinomio cuadrado de la forma  $x^2 + bx + c = 0$ .

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5) = 0$$

Por la regla del producto nulo:

$$x - 5 = 0, \text{ luego } x = 5$$

$$x - 5 = 0, \text{ luego } x = 5$$

Se observa que la solución es doble, pero la misma.

#### Ejemplo 49:

Determinar el valor de  $x$  para la ecuación  $x^2 + 16 = 0$

#### Solución:

Despejamos la incógnita.

$$x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16}$$

Se observa que se tiene una raíz par de número negativo, cuya solución esta en el campo de los números imaginarios.

$$\text{Así: } x = +4i \text{ y } x = -4i$$

**NOTA:** recordemos los números imaginarios, el tema esta explicitado en el modulo de matemáticas Básicas. Por otro lado, en los ejemplos anteriores se puede verificar que la solución puede ser real diferente, real igual ó imaginaria.

#### Ejemplo 50:

Hallar la solución de la ecuación  $9x^2 - 25 = 0$

#### Solución:

La idea es despajar la incógnita, en este caso  $x$ .

$$9x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}$$

La solución es:  $x = 5/3$  y  $x = -5/3$

#### Ejemplo 51:

Resolver la ecuación  $x^2 - 2x - 4 = 0$

**Solución:**

Para este caso, NO es fácil identificar dos números que multiplicados sea - 4 y sumados sea -2, esto conlleva a buscar otras técnicas para resolver este tipo de ecuaciones. Una de ellas es la que se analiza a continuación.

**2. FÓRMULA CUADRÁTICA:** En muchas ocasiones el trinomio propuesto en la ecuación no se puede resolver directamente por factorización o extracción de raíz, entonces lo que se hace para resolver la ecuación propuesta es utilizar la fórmula cuadrática, es un camino más rápido para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Sea la ecuación:  $ax^2 + bx + c = 0$  con  $a, b, c$ , reales y  $a \neq 0$ . La solución para la incógnita es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Demostración:**

Para demostrar la fórmula cuadrática, aplicamos el principio de completar cuadrados. Veamos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$$

Se debe hacer que el coeficiente de la incógnita al cuadrado sea uno, para esto se divide todo por  $a$ .

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completa cuadrados en la parte izquierda de la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

El primer término es un trinomio cuadrado perfecto, entonces:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se extrae raíz cuadrado a la última ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Desarrollando la raíz del denominador y operando las dos fracciones:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones por medio de la fórmula cuadrática serán:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión  $\Delta = b^2 - 4ac$  se le conoce como el **discriminante**, debido a que su signo indica el tipo de solución obtenida.

Si  $\Delta > 0$ : Hay dos soluciones reales diferentes.

Si  $\Delta = 0$ : Hay dos soluciones reales iguales

Si  $\Delta < 0$ : Hay dos soluciones imaginarias.

### Ejemplo 52:

A partir del ejemplo 50, resolver la ecuación  $x^2 - 2x - 4 = 0$

#### Solución:

Para el trinomio dado,  $a = 1$ ,  $b = -2$  y  $c = -4$ . Aplicando la fórmula.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} \cong 3,23606 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} \cong -1,23606$$

Como se puede observar, las soluciones son reales y diferentes.

### Ejemplo 53:

Resolver la siguiente ecuación utilizando la fórmula cuadrática.  $x^2 - 6x + 8 = 0$

#### Solución:

Para el trinomio dado,  $a = 1$ ,  $b = -6$  y  $c = 8$ . Aplicando la fórmula.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Las soluciones son:

$$x_1 = \frac{6 + 2}{2} = 4 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

Como las soluciones son enteras, este trinomio se puede resolver también por factorización.

### Ejemplo 54:

Resolver  $3x^2 - 4x + 2 = 0$

**Solución:**

Identificamos las constantes.  $a = 3$ ,  $b = -4$ ,  $c = 2$ , entonces:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{8}i}{6}$$

Simplificamos el radicar.

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}i}{3} \quad y \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}i}{3}$$

Se observa que las soluciones son imaginarias, a propósito, cuando una ecuación tiene solución imaginaria, su conjugada también es solución.

**Ejemplo 55:**

Resolver la ecuación:  $2x^2 + 6x = -4$

**Solución:**

Lo primero que debemos hacer es igualar la ecuación a cero:

$$2x^2 + 6x = -4 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$$

Así  $a = 2$ ,  $b = 6$  y  $c = 4$ . Se aplica la fórmula.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{-6 \pm 2}{4}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{-6 + 2}{4} = -1 \quad y \quad x_2 = \frac{-6 - 2}{4} = -2$$

En los ejemplos realizados, donde las soluciones han sido reales, los valores son enteros, pero no siempre es así, en muchas ocasiones las soluciones son fraccionarias.

**Ecuaciones de Grado  $n$  ( $n$  par)**

$$\phi x^n + \mu x^{n/m} + \varepsilon = 0$$

A veces se pueden presentar ecuaciones de la forma  $ax^n + bx^m + c = 0$ , donde  $m = n / 2$ , la idea es reducir el grado del trinomio hasta que  $n = 2$ . Para resolverlo como un trinomio cuadrado.

Algunos ejemplos nos aclaran el proceso.

### Ejemplo 56:

Resolver:  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

### Solución:

Se hace un “cambio de variable” digamos  $u = x^2$  luego  $u^2 = x^4$  Reemplazamos:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

Ahora se puede resolver el último trinomio, se utiliza la factorización.

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow (u - 4)(u - 1) = 0$$

Por la regla del producto nulo:

$$u - 4 = 0, u = 4$$

$$u - 1 = 0, u = 1$$

Ahora se reemplaza el valor de  $u$  por  $x^2$

$$x^2 = 4, x = +2 \text{ y } -2$$

$$x^2 = 1, x = +1 \text{ y } -1$$

Se observa que se obtienen 4 soluciones, ya que la ecuación original es de grado cuarto.

### Ejemplo 57:

Resolver la siguiente ecuación  $y^{10} + 6y^5 - 16 = 0$

### Solución:

Hacemos el “cambio de variable”  $w = y^5$ , luego  $w^2 = y^{10}$  entonces:

$$y^{10} + 6y^5 - 16 = 0 \Rightarrow w^2 + 6w - 16 = 0$$

La última expresión se puede resolver por factorización o por la cuadrática, resolvámosla por los dos métodos.

Por Factorización:

$$w^2 + 6w - 16 = 0 \Rightarrow (w + 8)(w - 2) = 0$$

Por la regla del producto nulo:

$$w + 8 = 0, \text{ luego: } w = -8$$

$$w - 2 = 0, \text{ luego } w = 2$$

Por la Cuadrática:

$$w = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

Las soluciones:

$$w_1 = \frac{-6+10}{2} = 2 \quad \text{y} \quad w_2 = \frac{-6-10}{2} = -8$$

Pero la solución final se debe dar en la incógnita  $y$ . Como  $w = y^5$  Se hace el reemplazo:

$$\text{Para } w_1: y^5 = 2 \Rightarrow y = \sqrt[5]{2}$$

$$\text{Para } w_2: y^5 = -8 \Rightarrow y = \sqrt[5]{-8}$$

Podemos ver que sólo se obtuvieron dos soluciones, pero la ecuación es de grado 10, luego hacer falta ocho soluciones, las cuales se pueden obtener por métodos matemáticos más avanzados.

### Ejemplo 58:

Resolver la ecuación:  $x^{2/3} + 2x^{1/3} - 15 = 0$

### Solución:

Como en los casos anteriores se hace “cambio de variable”.

$$v = x^{1/3} \Rightarrow v^2 = x^{2/3} \quad \text{Procedemos a reemplazar.}$$

$$x^{2/3} + 2x^{1/3} - 15 = v^2 + 2v - 15 = 0$$

La última expresión al resolvemos por factorización.

$$v^2 + 2v - 15 = 0 \Rightarrow (v + 5)(v - 3) = 0$$

Por la regla del producto nulo.

$$v + 5 = 0, \quad v = -5$$

$$v - 3 = 0, \quad v = 3$$

Finalmente, reemplazamos nuevamente para  $x$ .

$$v = -5 \Rightarrow x^{1/3} = -5 \Rightarrow \left(x^{1/3}\right)^3 = (-5)^3 \Rightarrow x = -125$$

$$v = 3 \Rightarrow x^{1/3} = 3 \Rightarrow \left(x^{1/3}\right)^3 = (3)^3 \Rightarrow x = 27$$

Solución:  $x = -125$  y  $x = 27$

## Lección Siete: Ecuaciones de Segundo Grado: Problemas de aplicación

Muchos fenómenos del mundo que nos rodea, se pueden expresar matemáticamente por medio de ecuaciones cuadráticas. Para resolver problemas de este tipo, se debe seguir la metodología propuesta en la sección de problemas con ecuaciones de primer grado, es una buena orientación. La manera más pertinente de ilustrar problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado, es por medio de ejemplos modelos.

### Ejemplo 59:

La cuarta parte del producto de dos números enteros pares positivos consecutivos es 56. ¿Cuáles son los números?

#### Solución:

Sea  $x$  el entero par, luego  $(x + 2)$  será el entero par consecutivo. Según las condiciones del problema.

$$\frac{1}{4}(x)(x + 2) = 56.$$

$$\text{Desarrollando: } \frac{1}{4}(x)(x + 2) = 56 \Rightarrow x^2 + 2x - 224 = 0$$

Como se tiene una ecuación de segundo grado, se utiliza el método de la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-224)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{-2 \pm 30}{2}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{-2 + 30}{2} = \frac{-2 + 30}{2} = 14$$

$$x_2 = \frac{-2 - 30}{2} = \frac{-2 - 30}{2} = -16$$

Como se trata de enteros positivos, entonces la solución válida será 14, la otra no se tiene en cuenta. Así la solución al problema es: **14** y **16**

### Ejemplo 60:

La raíz cuadrada de un número más cuatro, es lo mismo que el número menos ocho. ¿Cuál será el número?

#### Solución:

Sea  $y$  = el número a buscar. Aplicando las condiciones dadas en el problema.

$$\sqrt{y + 4} = y - 8$$

Teniendo el modelo matemático, se puede resolver la ecuación, para obtener la solución al problema. lo que se puede hacer es eliminar la raíz y luego despejar la incógnita.

$$\sqrt{y + 4} = y - 8 \Rightarrow (\sqrt{y + 4})^2 = (y - 8)^2 \Rightarrow y + 4 = y^2 - 16y + 64$$

$$\text{Reorganizando la última ecuación: } y^2 - 17y + 60 = 0$$

Por la cuadrática:

$$y = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(1)(60)}}{2(1)} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2}$$

Las soluciones:

$$y_1 = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 + 7}{2} = 12$$

$$y_2 = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 - 7}{2} = 5$$

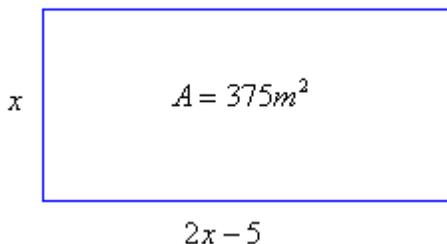
Las soluciones son 5 y 12. Pero según las condiciones dadas en el problema, el número que las cumple es 12, entonces  $y = 12$ .

### Ejemplo 61:

Calcular las dimensiones de un rectángulo, cuya área es de  $375 \text{ m}^2$ ; además, el largo es el doble del ancho menos cinco.

**Solución:**

Una gráfica nos ilustra la situación.



El planteamiento del modelo será:  $(x)(2x - 5) = 375$

Multiplicando y resolviendo:  $2x^2 - 5x = 375 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 375 = 0$

Se resuelve la ecuación por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(2)(-375)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 3000}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{3025}}{4} = \frac{5 \pm 55}{4}$$

Las soluciones:  $x = \frac{5 + 55}{4} = \frac{60}{4} = 15$  y  $x = \frac{5 - 55}{4} = \frac{-50}{4} = -12,5$

Como el problema es sobre longitudes, los valores negativos no son válidos, luego:  $x = 15$ .  
Por consiguiente.

**Largo:  $2(15) - 5 = 25$  y Ancho:  $x = 15$**

### Ejemplo 62:

Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 400 m/seg. la altura tiene como modelo matemático  $y = -16t^2 + v_0t$  Siendo  $t$  el tiempo y  $v_0$  la velocidad inicial.

- A -) En que tiempo el objeto regresa al suelo  
b -) Cuanto tarda en alcanzar 2.500 metros de altura

### Solución:

a-) Cuando el objeto regresa al suelo, la altura es cero ( $y = 0$ )

$$y = -16t^2 + v_0t \Rightarrow -16t^2 + 400t = 0$$

Recordemos que la velocidad inicial es de 400 m/seg. Se factoriza para despejar la incógnita, que en este caso es el tiempo.  $-16t^2 + 400t = 0 \Rightarrow t(-16t + 400) = 0$

Por la regla del producto nulo:  $t = 0$  ó  $-16t + 400 = 0$ , luego  $t = 25$  seg.

El objeto regresa al suelo a los 25 seg. de haber sido lanzado.

b-) Para determinar el tiempo en que la altura es de 2.500, en la ecuación se reemplaza  $y$  por 2.500 y se despeja el tiempo.  $2.500 = -16t^2 + 400t \Rightarrow 16t^2 - 400t + 2.500 = 0$

Aplicamos la cuadrática a la última ecuación:

$$t = \frac{-(-400) \pm \sqrt{160000 - 4(16)(2.500)}}{2(16)} = \frac{400 \pm \sqrt{0}}{32} = \frac{400}{32} = 12,5$$

El tiempo que utiliza para alcanzar los 2.500 metros es de 12,5 segundos.

### Ejemplo 63:

En una planta manufacturera el costo mensual por producir  $x$  unidades está dada por la ecuación  $C(x) = 10x^2 - 100x - 2000$  ¿Cuántas unidades se pueden producir para un costo de 10.000?

### Solución:

Primero se identifica  $C =$  costo y  $x =$  unidades producidas.

Como se conoce el costo, se debe despejar la incógnita  $x$ .

$$C(x) = 10x^2 - 100x - 2000 \Rightarrow 10.000 = 10x^2 - 100x - 2000 \Rightarrow 10x^2 - 100x - 12.000 = 0$$

Resolvemos por la cuadrática:

$$x = \frac{-(-100) \pm \sqrt{10000 - 4(10)(-12.000)}}{2(10)} = \frac{100 \pm \sqrt{490.000}}{20} = \frac{100 \pm 700}{20}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{100 + 700}{20} = 40 \quad x_2 = \frac{100 - 700}{20} = -30$$

Por obvias razones la solución es **40 unidades**.

### Ejemplo 64:

La suma de los  $n$  enteros pares consecutivos está dada por la ecuación  $s = n(n+1)$ .

¿Cuántos enteros pares consecutivos y positivos se deben sumar para que dicha suma sea de 342?

**Solución:**

A partir de la ecuación se reemplaza el valor de s y se opera:

$$s = n(n + 1) \Rightarrow n^2 + n = 342 \Rightarrow n^2 + n - 342 = 0$$

$$n^2 + n - 342 = (n + 19)(n - 18) = 0$$

Por el producto nulo:

$$n + 19 = 0, \text{ entonces } n = -19$$

$$n - 18 = 0, \text{ entonces } n = 18$$

Se deben sumar los primeros 18 enteros pares consecutivos positivos para que la suma de 342.

**Reflexión:** ¿Por qué no se toma el número -19?

**Ejemplo 65:**

Una tubería puede llenar un tanque en 5 hr. más rápido que otra tubería, las dos tuberías pueden llenar el tanque en 5 hr. ¿Cuánto tiempo tomará llenar el tanque cada una?

**Solución:**

El llenado de la tubería más lenta es  $\frac{1}{x}$  Para x tiempo en segundos.

El llenado de la tubería más rápida es  $\frac{1}{x+5}$

El llenado las dos tuberías simultáneamente es  $\frac{1}{5}$

La suma de los llenados, permite obtener el tiempo de cada tubería.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{5}$$

Por el principio de fracciones equivalentes:  $10x + 25 = x^2 + 5x \Rightarrow x^2 - 5x - 25 = 0$

$$\text{Por la cuadrática: } x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(-25)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{125}}{2}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{125}}{2} = 8,09 \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{125}}{2} = -3,09$$

La solución será 8,09

La tubería más lenta tarda en llenar el tanque **8,09 seg.** y la tubería más rápida tardará en llenar el tanque  $8,09 + 5 = \mathbf{13,09 \text{ seg.}}$

## Lección Ocho: Ecuaciones Cubicas.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Las ecuaciones de tercer grado han sido muy estudiadas, pero no se ha encontrado una solución general como la que tiene las de segundo grado. Para resolver este tipo de ecuaciones, se han realizado varios métodos, aquí vamos a referenciar la forma antigua y a analizar la forma moderna, que es la de interés en nuestro estudio.

### METODO ANTIGUO:

La resolución de ecuaciones de tercer grado se remonta a los babilonios, quienes resolvieron problemas que involucraban raíces cúbicas, tenían planteamientos como el siguiente:

$$z = 12x \quad y = x \quad v = xyz \quad v = 12x^3$$

Para lo cual usaron tablas de potencias cúbicas y raíces cúbicas.

Un profesor de Matemáticas de la Universidad de Bologna, *Scipione del Ferro* (1.465 – 1.526) fue quien por primera vez resolvió algebraicamente una ecuación cúbica. de la forma  $x^3 + px = q$ . Posteriormente *Nicolo Tartaglia*, en una competencia con *Fior*; alumno de *Scipione del Ferro* resolvió 30 ecuaciones de este tipo.

El matemático *Girolamo Cardano* (1.501 – 1.576) se inquietó por los avances de *Tartaglia* y al reunirse con él en marzo de 1.539, éste último revela sus secretos a Cardano, después de muchos ires y venires, la formula obtenida para ecuaciones de tercer grado se le llamo “Formula de Cardano-Tartaglia”. En resumen del proceso que se realizó, se obtuvo una formula de la siguiente manera:

Sea la ecuación:  $x^3 + px = q$  La solución es de la forma:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano, no acepto ni coeficientes, ni soluciones complejas para las ecuaciones de este tipo.

Vale la pena comentar que *Vietá*, quien trabajo las ecuaciones cúbicas utilizando transformaciones y sustituciones, obtuvo ecuaciones cuadráticas para resolver ecuaciones cúbicas, la característica era que solo utilizaba raíces cúbicas positivas.

### METODO MODERNO:

A partir de los trabajos de Cardano y Tartaglia, se han venido buscando formas más prácticas para resolver ecuaciones de tercer grado. El primer intento llevo a plantear una fórmula parecida a la de Cardano-Tartaglia, pero era muy larga y complicada de manejar. Con el estudio de los polinomios se logró establecer algunos principios que ayudaron a buscar un camino dinámico para resolver ecuaciones cúbicas.

**DEFINICIÓN:** Sea  $P(x)$  un polinomio de grado  $n$ , sea  $r$  un número real o complejo, tal que  $P(r) = 0$ , entonces se dice que  $r$  es un cero del polinomio. Por consiguiente  $r$  es una solución o raíz de la ecuación Polinómica.

Con la definición anterior, se puede inferir que una ecuación de grado tres, se puede reducir a grado dos, buscando una de sus raíces, ya que:  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  Si  $P(r) = 0$ , entonces:

$$P(x) = (x - r)(px^2 + qx + w)$$

Este proceso es una forma de *linealizar* la ecuación, recordemos que linealizar es expresar un polinomio de grado  $n$ , en  $n$  factores de grado uno; o sea, factores lineales. Los matemáticos se han preocupado por determinar el tipo de soluciones que puede tener una ecuación cúbica. A partir de la ecuación  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , se identifica su discriminante:

$$\Delta = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^3$$

Según el signo del discriminante se puede identificar el tipo de solución:

Si  $\Delta > 0$ : La ecuación tiene tres soluciones reales diferentes.

Si  $\Delta = 0$ : La ecuación tiene tres soluciones reales y por lo menos dos de ellas iguales.

Si  $\Delta < 0$ : La ecuación tiene una solución real y dos soluciones imaginarias.

### Solución para una ecuación de tercer grado:

El principio consiste en reducir la ecuación a un producto de dos factores, uno lineal y otro cuadrático, de esta manera se puede despejar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. La técnica de reducción es por medio la llamada **División Sintética**, la cual se mostrará simbolizada a continuación.

Sea la ecuación:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

La división: Se organizan los coeficientes como se observa en la gráfica.

a	b	c	d	r
	A	B	D	
a	P	Q	0	

$r$  son los divisores de  $a$  y  $d$  positivos y negativos. Es pertinente aclarar que  $a$  debe ser diferente de cero

El proceso inicia bajando el valor  $a$ , luego este se multiplica por  $r$  para obtener el valor A. En seguida se suma  $b + A$  para obtener P. Seguido se multiplica P por  $r$  para obtener B, se suma  $c + B$  y se obtiene Q, Luego se multiplica Q por  $r$  para obtener D, se suma  $d + D$  cuyo resultado debe ser cero (0).

Si la última suma ( $d + D$ ) no da cero, lo que indica es que el  $r$  escogido no es raíz del polinomio, entonces se prueba con otro  $r$  hasta obtener aquel que permita que dicha suma sea cero ( $d + D = 0$ ).

El proceso acepta utilizar los valores positivos y negativos de los divisores identificados.

### Ejemplo 66:

Resolver la ecuación  $x^3 - 3x + 2 = 0$

**Solución:**

Es evidente que se deben tener tres soluciones. Para buscar la primera se identifican los  $r$  que para este caso son: 1, -1, 2, -2. Se inicia con 1. Como el polinomio no tiene término en  $x^2$  se completa con cero.

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Ilustremos el proceso realizado:

$$1 \times 1 = 1, \quad 0 + 1 = 1$$

$$1 \times 1 = 1, \quad -3 + 1 = -2$$

$$-2 \times 1 = -2, \quad 2 + (-2) = 0$$

$r = 1$  es cero del polinomio.

Ahora la ecuación inicial se expresa como producto de dos factores, el primero será  $(x - r)$  y el segundo será un trinomio cuadrado cuyos coeficientes son los valores del residuo de la división sintética.

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

El trinomio cuadrado se puede resolver como ya se ha analizado:

$$(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1)$$

Las soluciones son: -2 y 1, recordemos por qué.

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$$

Las soluciones de la ecuación inicial será entonces:  $x = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = -2$

Como se observa en la solución hay dos factores lineales iguales, entonces se dice que el polinomio tiene una raíz doble; es decir, raíz con *multiplicidad* dos.

**Ejemplo 67:**

Hallar la solución de la siguiente ecuación:  $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

**Solución:**

Los posibles  $r$  son: 1, -1

Probamos con  $r = 1$ .

1	-3	1	1	1
	1	-2	-1	
1	-2	-1	0	

$$1 \times 1 = 1, \text{ luego } -3 + 1 = -2$$

$$-2 \times 1 = -2, \text{ luego } 1 + (-2) = -1$$

$$-1 \times 1 = -1, \text{ luego } 1 + (-1) = 0$$

$r = 1$  es cero del polinomio.

$$\text{Entonces: } x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$$

El trinomio cuadrado se resuelve por la cuadrática:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

La solución de la ecuación inicial es:  $x = 1$   $x = 1 + \sqrt{2}$   $x = 1 - \sqrt{2}$  Corresponde a tres soluciones reales diferentes.

**Multiplicidad:** La multiplicidad de un polinomio es el número de factores lineales que se repiten. El ejemplo 65 tiene multiplicidad dos. El ejemplo 66 tiene multiplicidad uno.

**Ejemplo 68:**

Resolver  $2x^3 - 3x^2 + 6x + 40 = 0$

**Solución:**

Los posibles ceros del polinomio: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 8, -8, 10, -10, 20, -20, 40, -40. Como siempre se prueba con uno, pero para este caso la suma d + D es diferente de cero, de la misma manera para -1, 2, para el caso de -2 si se obtiene cero, veamos:

2	-3	6	40	-2
	-4	14	-40	
2	-7	20	0	

$2x - 2 = -4$ , luego  $-3 + (-4) = -7$   
 $-7x(-2) = 14$ , luego  $6 + 14 = 20$   
 $20x(-2) = -40$ , luego  $40 + (-40) = 0$

$r = -2$  es cero ó raíz del polinomio.

dos factores:

Entonces, expresamos la ecuación inicial como producto de

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 40 = (x + 2)(2x^2 - 7x + 20)$$

El trinomio cuadrado se resuelve por la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49 - 4(2)(20)}}{2(2)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 160}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{-111}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{111}i}{4}$$

Las soluciones:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{111}i}{4} \quad y \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{111}i}{4}$$

La ecuación inicial tiene tres soluciones, una solución real  $x = -2$  y dos imaginarias.  $x = \frac{7 + \sqrt{111}i}{4}$

$$x = \frac{7 - \sqrt{111}i}{4}$$

## Lección Nueve: Ecuaciones Polinómicas.

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + d = 0$$

Las ecuaciones que presentan un grado mayor a tres, se les conoce comúnmente como polinómicas, en este espacio se pretende hacer un análisis general a las ecuaciones polinómicas. Una ecuación de la forma  $ax^n + bx^{n-1} + \dots + k = 0$ , con  $a \neq 0$  y le conoce como ecuación Polinómica.  $n \in \mathbb{Z}^+$

Haciendo algo de historia, en la resolución de ecuaciones, los Babilonios formularon problemas que condujeron a ecuaciones de cuarto grado, donde la incógnita era un cuadrado, por lo que se les llamaron ecuaciones bicuadradas. Ferrari desarrolló el método de solución de ecuaciones de cuarto grado, lo que fue publicado en Ars Magna de Cardano. En trabajos encontrados de Cardano, Tartaglia y Ferrari, se detecto que deseaban establecer una forma general para resolver ecuaciones de cuarto grado.

La metodología actual propone para resolver ecuaciones de cuarto grado, buscar los factores lineales por división sintética, como se hizo para las ecuaciones de grado tres. Respecto a las ecuaciones de quinto grado, el gran famoso matemático noruego **Niels Henrik Abel** demostró que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de un número finito de operaciones algebraicas, allá por los años 1.824 Para fortalecer esta teoría un prestigioso matemático de tan solo 20 años de edad y de nacionalidad francesa **Evariste Galois**, dedujo que bajo ciertas condiciones, una ecuación se puede resolver por radicales. Galois desarrollo la teoría de grupos para analizar métodos generales de solución de ecuaciones, basado únicamente en las operaciones fundamentales y extracción de raíces, llegando a la demostración de que NO hay un método general para resolver ecuaciones de quinto grado o mayor.

Los avances en los inicios de la edad moderna dieron buenos resultados y a partir de allí, se establecieron ciertas consideraciones para el desarrollo de ecuaciones polinómicas.

### REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES:

El Matemático francés René Descartes, padre de la Geometría Analítica, en 1.636 propone una técnica para identificar el número de soluciones reales positiva y negativas para un polinomio de grado  $n$ ; para  $n$  entero positivo, con el teorema cuya prueba esta fuera del alcance de este curso dice:

**TEOREMA:** Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes reales cuyo término independiente es diferente de cero, tendrá un número de soluciones reales positivas de  $P(x) = 0$ , igual al número de variaciones de signo en  $P(x)$  ó es menor que el número de variaciones en cantidad par. El número de variaciones negativas de la ecuación  $P(x)$ , es igual al número de variaciones de signo en  $P(-x) = 0$ , ó es menor que el número de variaciones en cantidad par.

En resumen, el teorema permite saber cuántas soluciones reales positivas y negativas tiene el polinomio, basado en la variación de signos. Algunos ejemplos nos ilustran la aplicación del teorema.

#### Ejemplo 69:

Determinar las posibles soluciones reales del polinomio:  $P(x) = 2x^5 - x^4 + 3x - 6$

#### Solución:

Por ser un polinomio de grado cinco, entonces debe tener cinco soluciones ó cinco raíces.

Para identificar las soluciones reales positiva:

$$P(x) = 2x^5 - x^4 + 3x - 6$$

Tomando  $P(x)$  e identificando los cambios de signo, los cuales según la grafica son tres, entonces  $P(x)$  puede tener tres ó una raíces reales positivas.

Para identificar las soluciones reales negativas, aplicamos  $P(-x)$  y observar los cambios de signo.

$$P(-x) = 2(-x)^5 - (-x)^4 + 3(-x) - 6 = -2x^5 - x^4 - 3x - 6$$

$P(-x)$  no presenta cambios de signo, luego  $P(x)$  no tiene raíces reales negativas.

El polinomio tiene 5 raíces, como puede tener 3 reales positivos y NO tiene reales negativas, por consiguiente las posibles soluciones:

Primera opción: Tres raíces reales positivas y dos imaginarias. (3  $R^+$  y 2  $I$ )

Segunda opción: Una raíz real positiva y 4 raíces imaginarias. (1  $R^+$  y 4  $I$ )

*Es pertinente recordar que las raíces imaginarias, SIEMPRE se dan en pares, ya que si hay una solución imaginaria, su conjugada también es solución.*

### Ejemplo 70:

Dado el polinomio  $Q(x) = 5x^4 - 6x^3 + x - 9$  identificar las posibles soluciones.

### Solución:

El polinomio debe tener 4 raíces. *Ya sabemos por qué.*

Raíces reales positivas.

$$Q(x) = 5x^4 - 6x^3 + x - 9$$

Se observa que  $Q(x)$  presenta tres variaciones de signo, luego puede tener tres ó una soluciones reales positivas.

Raíces reales negativas.

$$Q(-x) = 5(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x) - 9 = 5x^4 + 6x^3 - x - 9$$

$$Q(-x) = 5x^4 + 6x^3 - x - 9$$

Para  $Q(-x)$  se observa que hay un cambio de signo, lo que nos indica que el polinomio tiene una raíz real negativa.

Según los resultados, el polinomio  $Q(x)$  puede tener las posibles soluciones:

- ) Una solución real positiva, una solución real negativa y dos soluciones imaginarias. . (1 $R^+$ , 1 $R^-$ , 2  $I$ )

- ) Tres soluciones reales positivas y una solución real negativa. ( $3 \mathbf{R}^+$  y  $1 \mathbf{R}^-$ )

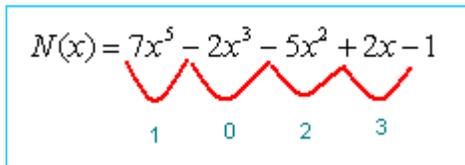
**Ejemplo 71:**

Identificar los ceros del polinomio:  $N(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

**Solución:**

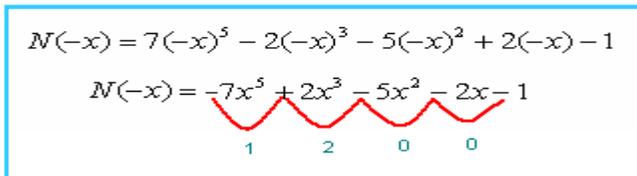
$N(x)$  debe tener 5 ceros, veamos cuales podrían ser:

Ceros reales positivos:



Para  $N(x)$  se observan tres cambios de signo, Luego dicho polinomio puede tener 1 ó 3 raíces reales positivas.

Ceros reales negativos:



Para  $N(-x)$  se observa que presenta dos cambios de signo, luego el polinomio puede tener cero ó dos soluciones reales negativas.

Así el polinomio  $N(x)$  puede presentar las siguientes soluciones:

- ) Una solución real positiva, dos soluciones reales negativas y dos imaginarias. ( $1\mathbf{R}^+$ ,  $2\mathbf{R}^-$ ,  $2 \mathbf{I}$ )
- ) Tres soluciones reales positivas y dos soluciones reales negativas. ( $3\mathbf{R}^+$ ,  $2\mathbf{R}^-$ )
- ) Una solución real positiva y cuatro soluciones imaginarias. ( $1\mathbf{R}^+$ ,  $4\mathbf{I}$ )

**Acotación de las Soluciones:**

El siguiente teorema permite identificar el intervalo en el que se encuentran las soluciones reales, si éstas existen.

**TEOREMA:** Sea  $P(x)$  un polinomio, tal que si  $P(x) = 0$ , no tiene raíz real alguna mayor al número real  $K$ , entonces  $K$  se le llama cota superior de las raíces reales. Análogamente, si  $P(x) = 0$ , no tiene raíz real menor que el número real  $k$ , luego  $k$  se le llama cota inferior de las raíces reales.

$$k \leq \text{Raíces Reales} \leq K$$

**Ejemplo 72:**

Dado el polinomio:  $P(x) = (x - 1)(2x - 1)(2x + 1) = 0$  Determinar la acotación del mismo.

**Solución:**

Por la regla del producto nulo.

$$(x - 1) = 0, \text{ luego } x = 1$$

$$(2x - 1) = 0, \text{ luego } x = 1/2$$

$$(2x + 1) = 0, \text{ luego } x = -1/2$$

Así  $k = -1/2$ . Cualquier número menor que  $-1/2$  será cota inferior de  $P(x)$ .

$K = 1$ . Cualquier número superior a 1 será cota superior de  $P(x)$ .

**TEOREMA DE RAICES RACIONALES:**

Para determinar las soluciones de una ecuación Polinómica con coeficientes enteros, hay un teorema que simplifica la identificación de las raíces del polinomio.

**TEOREMA:** Sea  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + ax + a_0 = 0$  Un polinomio con coeficientes enteros, Si  $p/q$  es un real irreducible tal que  $p/q$  es una raíz de  $P(x)$ ; es decir,  $P(p/q) = 0$ , entonces  $p$  es factor de  $a_0$  y  $q$  es factor de  $a_n$ .

El teorema permite obtener los ceros del polinomio en forma directa, dando una lista limitada de soluciones racionales posibles.

*Veamos:* Si se tiene un polinomio  $P(x)$  y suponemos que  $p/q$  es una raíz del mismo, entonces  $(x - p/q)$  es un factor de  $P(x)$ ; además,  $P(x) = (x - p/q) Q(x)$ . Donde  $Q(x)$  es un polinomio de un grado menor que  $P(x)$ . Las soluciones adicionales para  $P(x)$ , se obtiene resolviendo  $Q(x)$ .

**Ejemplo 73:**

Determinar los ceros del polinomio:  $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$

**Solución:**

Se identifica  $p$  y  $q$ . Siendo  $p$  los divisores del término independiente y  $q$  del coeficiente de  $x^4$ .

$$p = 1, -1, 2, -2, 4, -4.$$

$$q = 1, -1, 2, -2.$$

Posibles soluciones racionales: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 1/2, -1/2.

A cada uno de estas posibilidades se le aplica la división sintética para identificar las soluciones. Por la Regla de Descartes se puede inferir las posibles soluciones:

- ) Tres soluciones reales positivas y una negativa. ( $3R^+$ ,  $1R^-$ )
- ) Una solución real positiva, una negativa y dos imaginarias. ( $1R^+$ ,  $1R^-$ ,  $2I$ )

Probando las posibles soluciones, se detecta que  $x = 2$  es solución, veamos:

El polinomio inicial quedaría así:

$$P(x) = (x - 2)(2x^3 + x^2 + 4x + 2)$$

Donde  $Q(x) = (2x^3 + x^2 + 4x + 2)$

2	-3	2	-6	-4		2
	4	2	8	4		
2	1	4	2	0		

Ahora tomamos el polinomio  $Q(x)$  e identificamos los divisores de  $p$  y  $q$ :

$p = 1, -1, 2, -2$ . y  $q = 1, -1, 2, -2$ .

Las posibles soluciones ( $p/q$ ):  $1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2$ .

Al probar las diferentes posibilidades, se identifico que  $-1/2$  es cero del polinomio, veamos:

2	1	4	2	$-\frac{1}{2}$
	-1	0	-2	
2	0	4	0	

Probando con todos, se observa que  $-1/2$  es cero, luego el polinomio se puede escribir como:

$$Q(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4)$$

El último polinomio se resuelve por factorización o cuadrática. Si se revisa se puede determinar que los ceros son:  $\sqrt{2}i$  y  $-\sqrt{2}i$

Volviendo al polinomio inicial  $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$ , se puede concluir que los ceros de dicho polinomio son:  $2, -1/2, \sqrt{2}i$  y  $-\sqrt{2}i$  Una solución real positiva, una solución real negativa y dos soluciones imaginarias. ( $1\mathbb{R}^+, 1\mathbb{R}^-, 2\mathbb{I}$ )

### MULTIPLICIDAD DE LAS SOLUCIONES:

En un aparte anterior se hizo referencia a la multiplicidad, pero es pertinente darle un soporte formal, a través de la siguiente definición.

#### DEFINICIÓN:

Sea  $P(x)$  un polinomio de grado  $n$ ; además,  $(x - r)^m$  un factor de  $P(x)$ , entonces  $r$  es llamado cero de  $P(x)$ , con multiplicidad  $m$ .

#### Ejemplo 74:

Sea el polinomio:  $P(x) = 4(x - 2)(x + 3)^2(x - 1)^3$  Identificar los ceros y su multiplicidad.

#### Solución:

Los ceros son:  $2, -3, 1$ .

La multiplicidad:

Para  $2$ : La multiplicidad es  $1$

Para  $-3$ : la multiplicidad es  $2$

Para  $-1$ : La multiplicidad es  $3$

## Lección Diez: Ecuaciones Racionales y Radicales.

Existen una serie de ecuaciones que merecen atención, ya que la forma de resolución, conjugan aspectos de las que ya se estudiaron.

### ECUACIONES RACIONALES

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

Las ecuaciones racionales son de la forma:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  Donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x)  $\neq 0$ .

Resolver ecuaciones de este tipo, sigue los principios matemáticos aplicados a los dados en fracciones, principalmente fracciones equivalentes.

#### Ejemplo 75:

Hallar la solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2}$$

#### Solución:

Por el principio de ecuaciones equivalentes.

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(2x-4) = 1(x+2) \Rightarrow 4x-8 = x+2$$

Se debe despejar la incógnita, agrupando las x a un lado y los términos independientes al otro lado.

$$4x - 8 = x + 2 \Rightarrow 4x - x = 2 + 8 \Rightarrow 3x = 10$$

Así la solución será: **x = 10/3**

#### Ejemplo 76:

$$\text{Resolver: } \frac{6x+8}{5} - \frac{3x-4}{2} = 0$$

#### Solución:

Con lo aprendido ya podemos trabajar consecutivamente, por favor analizar cada paso.

$$\frac{6x+8}{5} = \frac{3x-4}{2} \Rightarrow 12x+16 = 15x-20 \Rightarrow 12x-15x = -20-16$$

$$\text{Despejando: } -3x = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{-3} = 12$$

#### Ejemplo 77:

$$\text{Resolver: } \frac{x}{x+2} - \frac{2}{x-1} = 0$$

#### Solución:

Aplicando los principios sobre fracciones se tiene:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{x(x-1) - 2(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 0 \Rightarrow x(x-1) - 2(x+2) = 0$$

Operando:  $x^2 - x - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

La última ecuación se resuelve por factorización:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

Por el producto nulo:

$$x - 4 = 0, \text{ entonces } x = 4$$

$$x + 1 = 0, \text{ entonces } x = -1$$

Así la solución será: **-1 y 4.**

### Ejemplo 78:

Hallar los valores de la incógnita que hacen verdadero la expresión dada.

$$1 - \frac{2}{y} = \frac{3}{y^2}$$

### Solución:

Veamos el procedimiento.

$$1 - \frac{2}{y} = \frac{3}{y^2} \Rightarrow 1 - \frac{2}{y} - \frac{3}{y^2} = 0 \Rightarrow \frac{y^2 - 2y - 3}{y^2} = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\text{Factorizando: } (y-3)(y+1) = 0$$

Por la regla del producto nulo:

$$y - 3 = 0, \text{ entonces } y = 3$$

$$y + 1 = 0, \text{ entonces } y = -1$$

Solución: **-1 y 3**

### Ejemplo 79:

Resolver la ecuación  $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10$

### Solución:

Como indica la expresión, se debe sumar las fracciones.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10 \Rightarrow \frac{2x+3x}{6} = 10 \Rightarrow \frac{5x}{6} = 10 \Rightarrow 5x = 60$$

Así se puede despajar la incógnita:

$$x = 60 / 5 = 12. \text{ Entonces: } \mathbf{x = 12.}$$

## ECUACIONES RADICALES

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = 0$$

Cuando se tiene ecuaciones con radicales, el primer paso es buscar la forma de reducir el radical por medio de operaciones opuestas y obtener ecuaciones de grado dos o múltiplos, siempre y cuando el índice de la raíz sea par. Aquí se va a analizar fundamentalmente las raíces cuadradas, pero se puede hacer extensivo a otros índices.

Recordemos que:  $\sqrt{x} = y \Rightarrow x^2 = y$

### Ejemplo 80:

Resolver la ecuación  $x + \sqrt{x-4} = 4$

#### Solución:

A partir de la expresión, se busca que la parte radical quede a un lado de la igualdad.

$$x + \sqrt{x-4} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-4} = 4 - x$$

Ahora se elimina la raíz utilizando operación opuesta y reorganizando:

$$(\sqrt{x-4})^2 = (4-x)^2 \Rightarrow x-4 = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

La última ecuación se puede resolver por factorización o por la fórmula cuadrática.

$$x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5) = 0$$

Por la regla del producto nulo:

$$x - 4 = 0, \text{ entonces } x = 4$$

$$x - 5 = 0, \text{ entonces } x = 5$$

Solución: **4 y 5**

### Ejemplo 81:

Hallar los valores de  $y$  que hagan verdadera la igualdad dada.  $\sqrt{2y+3} - \sqrt{y-2} = 2$

#### Solución:

Lo primero es pasar uno de los radicales al otro lado de la ecuación, para reducir uno de ellos.

$$\sqrt{2y+3} - \sqrt{y-2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2y+3} = 2 + \sqrt{y-2} \Rightarrow (\sqrt{2y+3})^2 = (2 + \sqrt{y-2})^2$$

Desarrollando los cuadrados y reorganizando términos:

$$2y+3 = 4 + 4\sqrt{y-2} + (y-2) \Rightarrow 2y+3-4-y+2 = 4\sqrt{y-2} \Rightarrow y+1 = 4\sqrt{y-2}$$

Para eliminar el nuevo radical, se vuelve a aplicar operación opuesta y reorganizando:

$$(y+1)^2 = (4\sqrt{y-2})^2 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 16(y-2) \Rightarrow y^2 - 14y + 33 = 0$$

La última expresión se puede resolver por factorización o por la fórmula cuadrática. Apliquemos factorización.  $y^2 - 14y + 33 = (y - 11)(y - 3) = 0$

Por la regla del producto nulo.

$y - 11 = 0$ , luego  $y = 11$

$y - 3 = 0$ , luego  $y = 3$

Solución: **3 y 11**

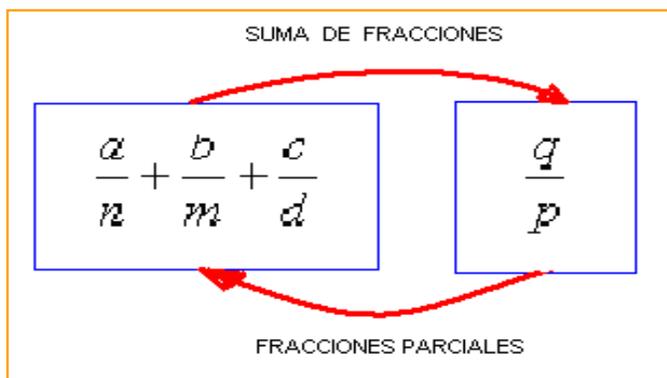
## Lección Once: Fracciones Parciales

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Toda fracción racional de la forma  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  con  $p(x)$  y  $q(x)$ , polinomios y  $q(x) \neq 0$ , se pueden

expresar como suma o resta de fracciones racionales más simples. Para que se pueda hacer este procedimiento, el grado de  $p(x)$  debe ser menor que el grado de  $q(x)$ ; además,  $q(x)$  se puede descomponer en factores primos. Por teoría algebraica, cualquier polinomio de coeficientes reales, se puede escribir como producto de factores lineales o cuadráticos.

En los principios de álgebra, aprendimos que a partir de dos o más fracciones, se obtenía una como resultado de la suma, en este aparte lo que se va a analizar es el caso contrario, a partir de una fracción, buscar las fracciones que fueron sumadas para llegar a ésta.



De acuerdo al denominador, se pueden encontrar varios casos.

### 1. $q(x)$ es producto de factores lineales diferentes:

Se puede generalizar este caso de la siguiente manera, se tiene la fracción  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , esta se

puede descomponer en la suma de fracciones tales como:  $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{ax + \lambda_1} + \frac{B}{bx + \lambda_2} + \dots + \frac{N}{nx + \lambda_n}$

Siendo A, B, ..., N constantes.

#### Ejemplo 82:

Dada la fracción siguiente, expresarla como fracciones parciales.  $\frac{4x - 5}{x^2 - 5x + 6}$

Solución:

La idea es linealizar el denominador. Primero factorizamos el trinomio cuadrado.

$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6} = \frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}$$

Según la teoría, la fracción obtenida se puede escribir como suma de fracciones simples, para este caso dos fracciones ya que hay dos factores lineales simples.

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

El trabajo consiste en encontrar el valor de A y B. Para esto se operan las dos fracciones así:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx - 3B}{(x-3)(x-2)} = \frac{x(A+B) - 2A - 3B}{(x-3)(x-2)}$$

La última fracción es equivalente a la primera, luego se igualan:

$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6} = \frac{x(A+B) - 2A - 3B}{(x-3)(x-2)}$$

Esta es la parte principal del proceso, ya que se observa que los denominadores son iguales, por ende los numeradores también deben serlo. Así se comparan numeradores.

$$- ) 4x - 5 = x(A + B) - 2A - 3B$$

Los coeficientes de x deben ser iguales:  $4 = A + B$

Los términos independientes también son iguales:  $-5 = -2A - 3B$

Se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, *que ya sabemos resolver*. Aplicando eliminación se obtiene:  $A = 7$ ,  $B = -3$

Se reemplaza los valores de A y B en la ecuación propuesta:

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{7}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

$$\text{Por consiguiente: } \frac{4x-5}{x^2-5x+6} = \frac{7}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

### Ejemplo 83:

Escribir como fracciones parciales la siguiente fracción:

$$\frac{5}{2x^2-9x+4}$$

**Solución:**

$$\text{Se linealiza el denominador. } \frac{5}{2x^2-9x+4} = \frac{5}{(2x-1)(x-4)}$$

Por favor confirmar la factorización que se hizo en el denominador.

Es seguida se propone descomponer la fracción como suma de fracciones parciales.

$$\frac{5}{(2x-1)(x-4)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-4} \quad \text{Se operan las dos fracciones que se propusieron:}$$

$$\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(2x-1)}{(2x-1)(x-4)} = \frac{Ax - 4A + 2Bx - B}{(2x-1)(x-4)} = \frac{x(A+2B) - 4A - B}{(2x-1)(x-4)}$$

Como la última fracción es equivalente a la primera, se hace la igualación:

$$\frac{5}{2x^2 - 9x + 4} = \frac{x(A+2B) - 4A - B}{(2x-1)(x-4)}$$

Ahora, como el denominador es igual, los numeradores también deben serlo. Entonces:  
 $5 = x(A + 2B) - 4A - B$

Comparando los coeficientes en  $x$ , se observa que en el primer término de la igualdad el coeficiente de  $x$  es cero, ya que no hay término en dicha incógnita, luego:  $0 = A + 2B$ . Para el término independiente:  $5 = -4A - B$

Se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$A + 2B = 0$$

$$-4A - B = 5$$

Utilizando cualquiera de los métodos de resolución, se obtiene:

$$A = -10/7, B = 5/7$$

Finalmente se reemplaza en la suma de fracciones propuesta:

$$\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{5}{7(x-4)} - \frac{10}{7(2x-1)} \quad \text{Solución:} \quad \frac{5}{2x^2 - 9x + 4} = \frac{5}{7(x-4)} - \frac{10}{7(2x-1)}$$

## 2. $q(x)$ es producto de factores lineales, algunos repetidos:

Hay casos donde el polinomio del denominador presenta factores lineales simples que se repiten  $k$  veces, cuando esto se presenta la descomposición es de la siguiente manera:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-\lambda)(x-\beta)^k} = \frac{A}{(x-\lambda)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{N}{(x-\beta)^k}$$

### Ejemplo 84:

Descomponer en fracciones parciales.  $\frac{2x-1}{x(x+1)^2}$

### Solución:

El procedimiento es similar al caso anterior, solo que aquí se debe proponer tantas fracciones simples como indique el exponente del factor que se repite.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Se operan las fracciones y se organizan los términos.

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x)(x+1) + C(x)}{x(x+1)^2} = \frac{A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + x) + Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + x) + Cx}{x(x+1)^2} = \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx}{x(x+1)^2}$$

Se organizan los términos según la incógnita:

$$\frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx}{x(x+1)^2} = \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}$$

Se iguala la última fracción con la inicial:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}$$

Se igualan los numeradores, *ya sabemos por que*.

$$2x-1 = x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A$$

Para el caso de la incógnita al cuadrado ( $x^2$ ):  $0 = A + B$

Para el caso de la incógnita ( $x$ ):  $2 = 2A + B + C$

Para el caso del término independiente:  $-1 = A$

Así ya se tiene una solución:  $A = -1$

De la ecuación  $0 = A + B$ , se puede obtener el valor de B, es decir:  $B = 1$

Para el caso de C, en la ecuación:  $2 = 2A + B + C$ ; se reemplaza A y B:  $2 = 2(-1) + (1) + C$ , despejando  $C = 3$

Volviendo a la expresión propuesta:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Finalmente la fracción original queda expresada como suma de fracciones parciales así:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}$$

### 3. $q(x)$ Tiene factores Cuadráticos irreducibles:

Cuando el polinomio del denominador tiene términos cuadráticos irreducibles, la forma de descomponer en fracciones parciales es como se muestra a continuación.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x+n)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x+n} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$$

Donde  $q(x) = (x+n)(ax^2+bx+c)$

Como siempre los ejemplos son la mejor forma de mostrar el método.

**Ejemplo 85:**

Expresar como suma de fracciones parciales:  $\frac{x-5}{x(x^2+2)}$

**Solución:**

Se escribe la fracción como se presenta a continuación:  $\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

Operando y organizando:  $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2) + x(Bx+C)}{x(x^2+2)} = \frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+2)}$

Agrupando términos semejantes:  $\frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+2)} = \frac{x^2(A+B) + x(C) + 2A}{x(x^2+2)}$

Igualando las fracciones original y la última:  $\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{x^2(A+B) + x(C) + 2A}{x(x^2+2)}$

Comparando términos:

Para la incógnita al cuadrado:  $(x^2)$ :  $0 = A + B$

Para la incógnita  $(x)$ :  $1 = C$

Para los términos independientes:  $-5 = 2A$

Así:  $A = -5/2$ ,  $B = 5/2$ ,  $C = 1$

Reemplazando estos valores en las fracciones propuestas:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = -\frac{5}{2x} + \frac{\frac{5}{2}x+1}{x^2+2}$$

Por consiguiente la fracción inicial queda expresada como suma de fracciones parciales así:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{5x+2}{2x^2+4} - \frac{5}{2x}$$

## EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones, realizando el procedimiento adecuadamente y justificando las respuestas.

1.  $z^2 + \sqrt{2}z - 2 = 0$

Rta:  $z = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$

2.  $y^6 - 10y^3 = -21$

Rta:  $y = \sqrt[3]{7}$  y  $y = \sqrt[3]{3}$

3. Demuestre que la solución de la ecuación  $x^{2/3} - x^{1/3} - 6 = 0$  es 27 y -8.

Desarrollar el procedimiento apropiado para resolver los ejercicios propuestos.

4.  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+9} = -2$

Rta:  $x = 0$

5.  $\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$

Rta:  $x = 64$

6.  $\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3x-5}} = \sqrt{2}$

Rta:  $x = 3$

Desarrollar los siguientes ejercicios, verificar la respuesta.

7.  $\frac{13+2x}{4x+1} = \frac{3}{4}$

Rta:  $x = 49/4$

8.  $\frac{1}{x+4} + \frac{3}{x-4} = \frac{3x+8}{x^2-16}$

Rta:  $x = 0$

9.  $\frac{x+1}{3x+2} - \frac{x-2}{2x-3} = 0$

Rta:  $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

Lea cuidadosamente cada problema y con los conocimientos adquiridos, resolverlos adecuadamente.

10. Dos números enteros pares consecutivos tienen como producto 168, ¿Cuáles son dichos números?  
Rta: 12 y 14

11. El largo de un rectángulo es de 4 metros y el ancho de 2 metros, si las dos dimensiones se aumentan en la misma cantidad, el área del nuevo rectángulo será el doble del área original. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo rectángulo?  
Rta: Largo 5,12 y ancho 3,12

12. La ecuación  $P(t) = 1.000(30 + 17t - t^2)$  corresponde al crecimiento de una población de peces en  $t$  tiempo, medido en años. La primera medida se hizo en el año 1.997.

a-) Cuantos peces había en el año 1.997

b-) A los cuantos años se mueren todos los peces.

Rta: a-) 30.000 y b-) 18,61 años

Para las ecuaciones dadas, identificar la cantidad y tipo de raíces posible que se tiene en cada polinomio.

13.  $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$

Rta: 2 reales positivas, 1 real negativa

14.  $x^3 + 3x^2 - x - 9 = 0$

Rta: 1 real positiva, 2 reales negativas

15.  $x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{13}{3}x - 2 = 0$

Rta: 1 real positiva, 2 reales negativas

16.  $x^6 - 1 = 0$

Rta: 1 real positiva, 1 real negativa y 4 imag.

Para las ecuaciones dadas, identificar la cantidad y tipo de raíces posible que se tiene en cada polinomio.

17.  $2x^6 - 4x^4 + x^2 - 3 = 0$

Rta: 3 reales positivas y 3 reales negativas

18.  $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

Rta: 4 reales positivas

19.  $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$

Rta: 2 real positiva, 3 reales negativas

20.  $8x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 10 = 0$

Rta: 8 raíces imaginarias

21.  $x^6 - 1 = 0$

Rta: 1 real positiva, 1 real negativa y 4 imag.

Dadas las siguientes expresiones, escribirlas como suma de fracciones parciales.

22.  $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

Rta:  $\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$

23.  $\frac{5}{(x-1)(x+4)}$

Rta:  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}$

24.  $\frac{x+14}{x^2-2x-8}$

Rta:  $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2}$

# CAPÍTULO DOS: LAS INECUACIONES

## INTRODUCCIÓN

Las Inecuaciones son expresiones matemáticas donde se comparan dos términos, utilizando principios matemáticos bien definidos. Por esto a las inecuaciones también son conocidas como Desigualdades.

Para desarrollar el tema, inicialmente se analizarán los intervalos, ya que la solución de una desigualdad está dada por uno ó varios intervalos. También se analizarán las propiedades que gobiernan las desigualdades, demostrando algunas de ellas. Al igual que se hizo en las ecuaciones, se estudiarán las clases de inecuaciones, siendo las más importantes las inecuaciones lineales con una incógnita, las inecuaciones lineales con dos incógnitas, las cuadráticas con una incógnita y las mixtas.

Las desigualdades son muy importantes como herramientas para el análisis de temáticas como la Investigación de Operaciones, un área de las Matemáticas muy utilizadas en Ingeniería, Administración, economía y otros campos del saber.

Para abordar con éxito esta temática es pertinente recordar los símbolos de comparación entre dos expresiones algebraicas tales como:  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ . Que en su orden indican mayor, menor, mayor o igual y menor o igual, su significado se irá comprendiendo a medida que se vayan estudiando las inecuaciones.

Un trabajo juicioso y sistemático para el desarrollo de la temática De Inecuaciones, permitirá adquirir conocimientos sólidos que conlleven a resolver problemas del mundo real en donde se necesiten las desigualdades.

### Lección Doce: Generalidades de las Desigualdades

$$ax - b < c$$

Las desigualdades son expresiones matemáticas donde dos términos  $p(x)$  y  $q(x)$  se comparan, siendo éstos polinomios ó uno de ellos término independiente. Las formas de comparación se pueden observar a continuación:

$$p(x) < q(x)$$

$$p(x) > q(x)$$

$$p(x) \leq q(x)$$

$$p(x) \geq q(x)$$

En el primer caso  $p(x)$  es menor que  $q(x)$ , para el segundo  $p(x)$  es mayor que  $q(x)$ , en el tercero  $p(x)$  es menor o igual a  $q(x)$  y en el cuarto  $p(x)$  es mayor o igual a  $q(x)$ . Las dos primeras se les llaman *desigualdades estrictas*.

Por ejemplo si se dice que  $x > 2$ , está indicando que cualquier valor mayor que dos, satisface la desigualdad propuesta. Si se dice que  $x \leq 5$ , se está indicando que cualquier valor menor que cinco es solución; pero inclusive cinco es también solución.

## Propiedades de las Desigualdades:

Sean  $a, b, c$  números reales:

1. Si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$

### Demostración:

Como  $a < b$ , por definición  $b - a$  es positivo; además,  $(b + c) - (a + c) = b - a$ , entonces  $(b + c) - (a + c)$  es positivo, así  $a + c < b + c$ .

2. Si  $a < b$ , entonces  $a - c < b - c$

### Demostración:

Con el mismo argumento del caso anterior, tenemos que  $a + (-c) < b + (-c)$ , así  $a - c < b - c$ .

3. Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $a \times c < b \times c$

### Demostración:

Como  $(a < b)$ , luego  $(b - a)$  es positivo; además,  $c$  es positivo, entonces el producto  $(b - a) \times c$  es positivo, así  $(b \times c - a \times c)$  es positivo, por lo tanto  $(a \times c < b \times c)$ .

4. Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $a \times c > b \times c$

### Demostración:

Como ejercicio para hacer en el grupo colaborativo, para cualquier duda consultar con el tutor.

5. Tricotomía:

Si  $a$  y  $b$  son números reales, una de las siguientes expresiones se cumple.

$$a < b$$

$$a > b$$

$$a = b$$

*Reflexión:* ¿Qué pasa si  $b = 0$ ?

6. La NO Negatividad:

Para cualquier número real  $a$ :  $a^2 \geq 0$

7. La Reciprocidad:

Para cualquier número real  $a \neq 0$ :

Si  $a > 0$ , entonces  $\frac{1}{a} > 0$

Si  $a < 0$ , entonces  $\frac{1}{a} < 0$

Es pertinente que usted estimado estudiante, plantee al menos dos ejemplo donde se aplique cada propiedad, esto le permitirá comprender la esencia de as mismas.

Las desigualdades pueden ser simples o compuestas.

Simples:  $ax < b$      $px \geq q$

Compuestas:  $a < x < b$      $a \leq px < b$

### Lección Trece: Intervalos.

Cuando se tienen expresiones como  $x > 3$ ,  $x > 2$ ,  $x > - 5$ , otros, se podría preguntar cómo se grafican, la respuesta está en los intervalos.

Un intervalo es un segmento de recta con extremos inferior (a) y superior (b), el cual contiene todos los valores que satisfacen la desigualdad.



Existen varias clases de intervalos.

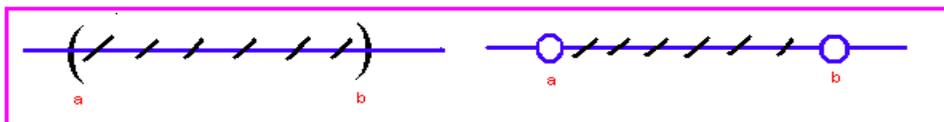
**Intervalo Cerrado:** Son todos aquellos donde los extremos del mismo, hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

- Parejas ordenadas:  $[a, b]$
- Desigualdades:  $a \leq x \leq b$
- Gráficamente:



**Intervalo Abierto:** Son todos aquellos donde los extremos del mismo, NO hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

- Parejas ordenadas:  $(a, b)$
- Desigualdades:  $a < x < b$
- Gráficamente:



**Intervalo Semiabierto:** Son todos aquellos intervalos donde uno de los extremos NO hace parte del mismo, pueden ser abiertos a izquierda ó abiertos a derecha.

**Intervalo Abierto a Derecha:** Corresponde a los intervalos donde el extremo derecho es abierto. La notación es:

- parejas ordenadas:  $(a, b]$
- Desigualdades:  $a < x \leq b$
- Gráficamente:



**Intervalo Abierto a izquierda:** Corresponde a los intervalos donde el extremo izquierdo es abierto. La notación es:

- parejas ordenadas:  $[a, b)$
- Desigualdades:  $a \leq x < b$
- Gráficamente :

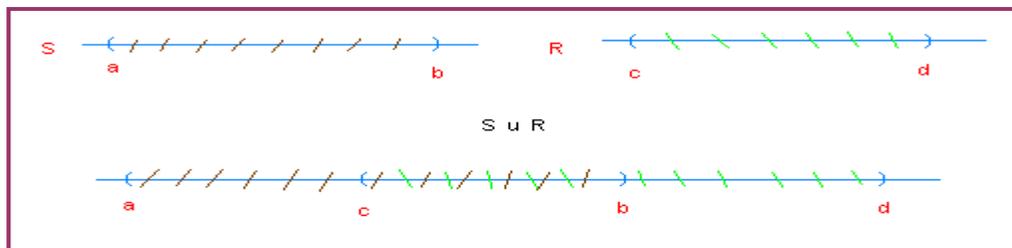


Los intervalos semiabiertos a la izquierda, serán semicerrados a la derecha y viceversa.

### OPERACIONES CON INTERVALOS:

Las operaciones estudiadas en los conjuntos, como unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento, son aplicables también en intervalos.

**UNION:** Se sabe que la unión es la agrupación bajo un mismo conjunto de todos los elementos que hacen parte de la operación. Sea  $S = (a, b)$  y  $R = (c, d)$ , entonces  $S \cup R = (a, b) \cup (c, d)$   
Gráficamente:



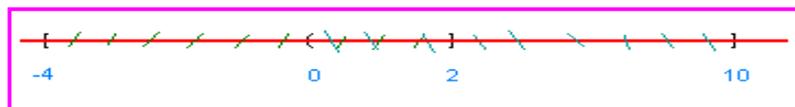
#### Ejemplo 86:

Sea  $S = [-4, 2]$  y  $R = (0, 10]$ . Hallar  $S \cup R$

**Solución:**

$$S \cup R = [-4, 2] \cup (0, 10] = [-4, 10]$$

Gráficamente  $S \cup R$  será:



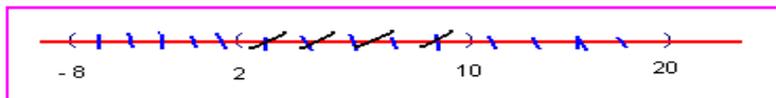
**Ejemplo 87:**

Dados  $P = (-8, 20)$  y  $Q = (2, 10)$  Hallar  $P \cup Q$

**Solución:**

La operación es:  $P \cup Q = (-8, 20) \cup (2, 10) = (-8, 20)$

Gráficamente:



La solución nos hace ver que  $Q \subseteq P$ ; es decir, Q está contenido en P.

**INTERSECCIÓN:** Se trata de identificar los *elementos comunes* de los conjuntos que participan en la operación.

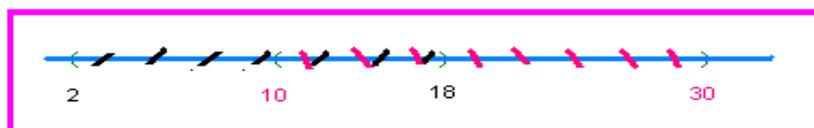
**Ejemplo 88:**

Dados los intervalos  $A = (2, 18)$  y  $B = (10, 30)$ . Hallar la intersección de A y B.

**Solución:**

La intersección se expresa así:  $A \cap B = (2, 18) \cap (10, 30) = [10, 18]$

Gráficamente:



La intersección involucra los elementos que están en los dos intervalos.

Las demás operaciones son similares a como se hace en las operaciones con conjuntos, para el fin de las desigualdades, las operaciones más importantes son la unión e intersección.

A manera de ilustración veamos el siguiente ejercicio, por favor discutir los resultados con sus compañeros de grupo colaborativo y aclararlo con el Tutor.

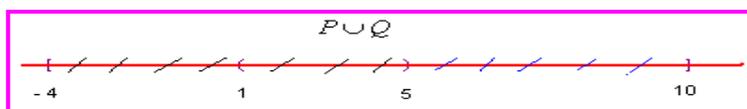
**Ejemplo 89.**

Sean los intervalos  $P = [-4, 5)$  y  $Q = (1, 10]$ . Hallar las siguientes operaciones.

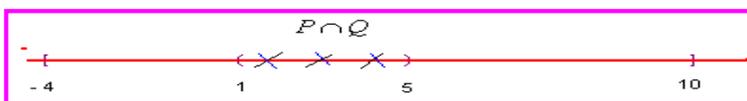
$P \cup Q$ ,  $P \cap Q$ ,  $P - Q$ ,  $P \Delta Q$

**Solución:**

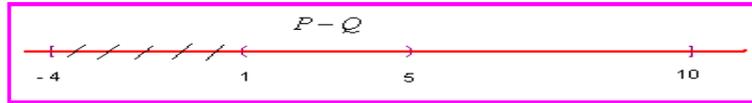
-)  $P \cup Q$ :  $[-4, 10]$



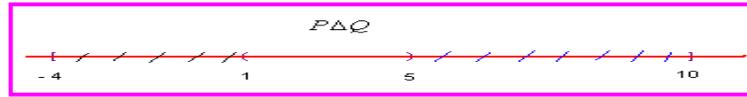
-)  $P \cap Q$ :  $[1, 5]$



-)  $P - Q : [-4, 1]$



-)  $P \Delta Q : [-4, 1] \cup [5, 10]$



## Lección Catorce: Inecuaciones Lineales con Una Incógnita

$$ax + b < 0$$

Las inecuaciones lineales son aquellas donde el polinomio que la representa, tiene la incógnita cuyo grado es uno, a continuación se estudiarán las inecuaciones lineales con una incógnita.

Las inecuaciones lineales con una incógnita son de la forma  $ax + b > c$ , aunque puede ser con cualquiera de los signos de comparación. La resolución de inecuaciones de este tipo, requiere el uso de las propiedades analizadas en desigualdades y los principios matemáticos básicos.

### Ejemplo 90:

Resolver la siguiente inecuación:  $3x + 4 < 11$

### Solución:

El proceso consiste en espejar la incógnita, dejándola al lado derecho de la desigualdad.

Por la propiedad 1, adicionamos  $-4$  a los dos lados de la expresión, para ir despejando la incógnita.

$$3x + 4 - 4 < 11 - 4 \Rightarrow 3x < 7$$

Por la propiedad 7, sobre la reciprocidad, se divide por 3, como es un valor positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, de esta manera se despeja completamente la incógnita.

$$3x < 7 \Rightarrow \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(7) \Rightarrow x < \frac{7}{3}$$

Solución:  $x < 7/3$ .



Esto significa que cualquier valor menor que  $7/3$  satisface la desigualdad. Veamos un ejemplo  $x = 0$ , si lo reemplazamos en la desigualdad, ésta debe ser verdadera.

$3x + 4 < 11 \Rightarrow 3(0) < 11 \Rightarrow 3 < 11$  Lo cual es verdadero. Cuando en la solución se toma un solo valor y se cumple, significa que en los demás valores del intervalo también se cumple. Para el ejemplo analizado, la solución NO incluye el extremo ya que es una desigualdad estricta.

### Ejemplo 91:

Hallar el conjunto solución de la inecuación:  $4(x + 5) + x \geq 3(x + 1)$

### Solución:

Lo primero que se debe realizar es operar los paréntesis.

$$4(x+5) + x \geq 3(x+1) \Rightarrow 4x + 20 + x \geq 3x + 3 \Rightarrow 5x + 20 \geq 3x + 3$$

Aplicando las propiedades básicas de desigualdades tenemos:

$$5x + 20 \geq 3x + 3 \Rightarrow 5x - 3x \geq 3 - 20 \Rightarrow 2x \geq -17 \Rightarrow x \geq -\frac{17}{2}$$

La solución indica que el extremo también hace parte del intervalo. Expresemos dicha solución como pareja ordenada, como desigualdad y gráficamente.

-) Pareja ordenada:  $[-\frac{17}{2}, \infty)$

-) desigualdad:  $-\frac{17}{2} \leq x < \infty$

-) Gráficamente



**Ejemplo 92:**

Resolver  $-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$

**Solución:**

Se observa que se trata de una desigualdad compuesta, el procedimiento para despejar la incógnita, lo podemos ver en seguida. Primero multiplicamos toda la expresión por 2 para eliminar el dos del denominador de la parte que contiene la incógnita.

$$-5(2) \leq \frac{(4-3x)(2)}{2} < (2)1 \Rightarrow -10 \leq 4-3x < 2$$

Ahora restamos  $-4$  a los términos para seguir despejando la incógnita

$$-10-4 \leq 4-4-3x < 2-4 \Rightarrow -14 \leq -3x < -2$$

Dividimos todo por  $-3$  para que la incógnita quede despejada, pero recordemos que si una desigualdad la dividimos por un valor negativo, el sentido cambia.

$$-14 \leq -3x < -2 \Rightarrow \frac{-14}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \Rightarrow \frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

La solución indica que todo valor mayor que  $2/3$  y menor o igual que  $14/3$  satisface la desigualdad. El intervalo solución es semiabierto a derecha.

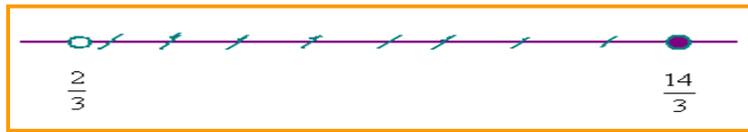
Expresemos la solución como se acostumbra.

-) Pareja Ordenada:  $(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}]$

-) Desigualdad:  $\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$

-) Gráficamente:





**Ejemplo 93:**

Hallar los valores de  $x$  que satisfagan la expresión.  $\frac{1}{x-2} > 0$

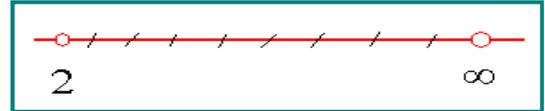
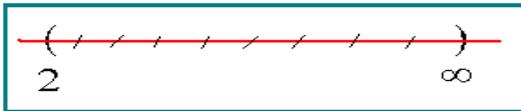
**Solución:**

Analizando la desigualdad, se observa que el numerador siempre es positivo, entonces para que la fracción sea mayor que cero, el denominador debe ser mayor que cero. Así:  $x - 2 > 0$ , despejando la incógnita:  $x - 2 + 2 > 0 + 2$ , entonces:  $x > 2$ .

-) Pareja Ordenada:  $(2, \infty)$

-) Desigualdad:  $2 < x < \infty$

-) Gráficamente:



**Ejemplo 94:**

Resolver  $\frac{y+1}{3} \leq \frac{y+1}{2}$

**Solución:**

Por el principio de fracciones equivalentes, transformamos las fracciones a expresiones enteras.

$$\frac{y+1}{3} \leq \frac{y+1}{2} \Rightarrow 2(y+1) \leq 3(y+1)$$

Ahora se hacen las multiplicaciones indicadas y se simplifica.

$$2(y+1) \leq 3(y+1) \Rightarrow 2y+2 \leq 3y+3 \Rightarrow 2y-3y \leq 3-2 \Rightarrow -y \leq 1$$

Como la incógnita nos da negativa, entonces multiplicamos toda la expresión por -1.  $-y \leq 1 \Rightarrow y \geq -1$

La solución:

-) Pareja Ordenada:  $[-1, \infty)$

-) Desigualdad:  $-1 \leq y < \infty$

-) Gráficamente



**Lección Quince: Inecuaciones Racionales.**

En este apartado se van a analizar las inecuaciones racionales cuyo numerador y denominador son polinomios lineales.

Sea  $\frac{p(x)}{q(x)} < c$  Siendo  $q(x) \neq 0$ .

La resolución de este tipo de inecuaciones se puede hacer por dos métodos, por conectivos lógicos o por el diagrama de signos.

### -) Conectivos Lógicos:

Consiste en comparar la fracción frente al cero.

a) Sea  $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$

Para que la fracción sea negativa (menor que cero) puede ocurrir dos situaciones:

$$p(x) > 0 \wedge q(x) < 0 \quad \vee \quad p(x) < 0 \wedge q(x) > 0$$

Ya que un valor positivo y un valor negativo ó un valor negativo y un valor positivo, producen siempre negativo.

b) Sea  $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$

Para que la fracción sea positiva (mayor que cero) puede ocurrir dos situaciones:

$$p(x) > 0 \wedge q(x) > 0 \quad \vee \quad p(x) < 0 \vee q(x) < 0$$

Ya que un valor positivo y otro positivo, ó un valor negativo y otro negativo, siempre produce positivo.

Si nos detenemos un poco a analizar este método, se puede ver que hay involucrados dos conectivos lógicos, la Conjunción ( $\wedge$ ) y la Disyunción ( $\vee$ ).

### Ejemplo 95:

Resolver la siguiente inecuación:  $\frac{x+2}{x+3} > 0$

### Solución:

$$\frac{x+2}{x+3} > 0$$

Llamemos  $p(x) = x + 2$  y  $q(x) = x + 3$ , entonces:

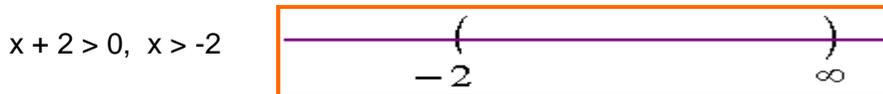
Para que  $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$  Pueden ocurrir dos situaciones:

**$P(x) > 0 \wedge q(x) > 0$**  ,  $\vee$ ,  **$p(x) < 0 \wedge q(x) < 0$**

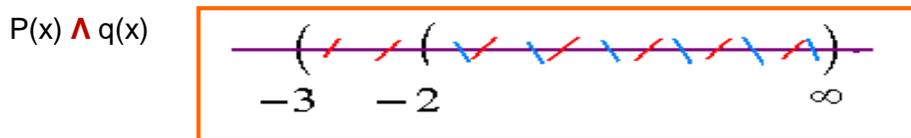
Dichos en palabras: Los dos positivos o los dos negativos (*tiene lógica verdad*)

Analicemos las dos posibilidades:

-) Primera:  **$P(x) > 0 \wedge q(x) > 0$**



Como entre  $p(x)$  y  $q(x)$  hay una conjunción ( $\wedge$ ) se debe hacer intersección entre los intervalos.

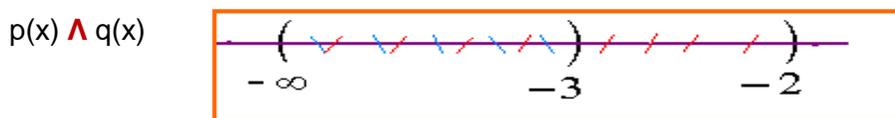


Primera solución:  $(-2, \infty)$

-) Segunda:  **$p(x) < 0 \wedge q(x) < 0$**

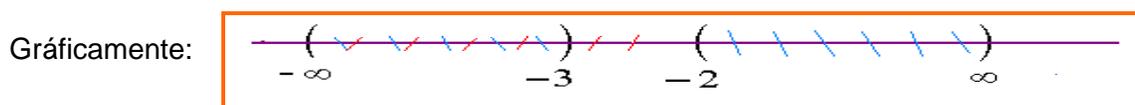


Igual que en el caso anterior:



Segunda Solución:  $(-\infty, -3)$

Como ya se contemplaron las dos posibilidades, la solución total es la unión ( $\vee$ ) de la primera y segunda solución. Solución Total:  $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$



**- ) Diagrama de Signos:**

Por este método, se toma el polinomio del numerador y del denominador y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. Cada polinomio es representado por una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para cociente y se obtiene intervalos positivos y negativos para la fracción. La solución depende del tipo de comparación: Si la fracción es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si la fracción es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

Por medio de los ejemplo modelos, se puede comprender mejor los métodos mencionados.

**Ejemplo 96:**

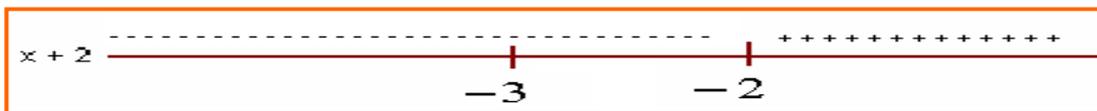
Resolver la siguiente inecuación:  $\frac{x + 2}{x + 3} > 0$

**Solución:**

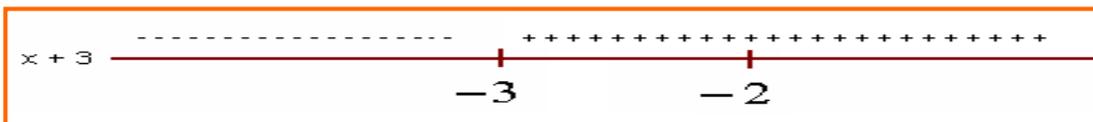
$$\frac{x + 2}{x + 3} > 0$$

Llamemos  $p(x) = x + 2$  y  $q(x) = x + 3$ , entonces:

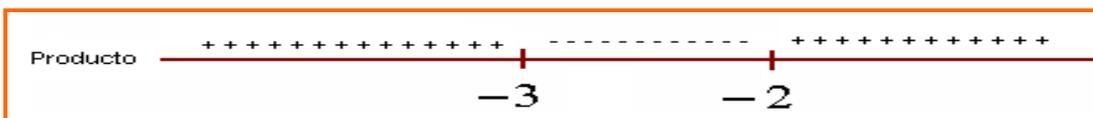
Para el numerador:  $x + 2 = 0$ , el valor de  $x$  que hace cero la expresión es  $-2$ , punto crítico  $x = -2$ . Cualquier valor mayor de  $-2$  hace positiva la expresión  $(x + 2)$  y cualquier valor menor de  $-2$  hace negativa dicha expresión. Se hace la recta real con este análisis.



Para el polinomio del denominador:  $x + 3 = 0$ , el valor de  $x$  que hace cero la expresión es  $-3$ , punto crítico  $x = -3$ .



Se agrupan los dos resultados y se hace producto de signos.



Como la fracción debe ser mayor que cero, la solución será los intervalos positivos del producto, es decir:  $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$

Los dos métodos son interesantes, aunque el segundo es algo más corto. Se recomienda aprender los dos.

**Ejemplo 97:**

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:  $\frac{3x - 12}{2x + 6} < 0$

**Solución:**

Para que la fracción sea negativa, se requiere que uno término sea negativo y el otros positivo y viceversa.

**Método de Conectivos Lógicos:**

Como la fracción es menor que cero se pueden presentar dos posibilidades:

$$p(x) > 0 \wedge q(x) < 0 \quad \vee \quad p(x) < 0 \wedge q(x) > 0$$

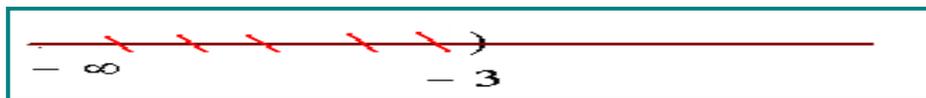
Primera posibilidad:  $p(x) > 0 \wedge q(x) < 0$

Reemplazamos

$$3x - 12 > 0, \quad x > 4$$



$$2x + 6 < 0, \quad x < -3$$



Como entre  $p(x)$  y  $q(x)$  hay una conjunción ( $\wedge$ ) se debe hacer intersección entre los intervalos.



Se observa que NO hay elementos comunes, luego la solución es vacía.  $\{\emptyset\}$

Segunda posibilidad:  $p(x) < 0 \wedge q(x) > 0$

Reemplazando:

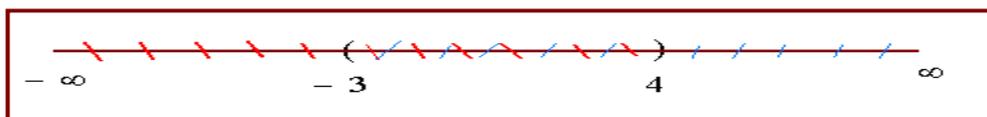
$$3x - 12 < 0, \quad x < 4$$



$$2x + 6 > 0, \quad x > -3$$



Hacemos la intersección de los intervalos:



La solución total será:  $\{\emptyset\} \cup (-3, 4) = (-3, 4)$

Cualquier valor del intervalo  $(-3, 4)$  satisface la desigualdad propuesta. Recordemos que para este caso, los extremos NO se incluyen en la solución.

**Ejemplo 98:**

Resolver la inecuación:  $\frac{x+4}{2x-1} < 2$

**Solución:**

Antes de aplicar cualquiera de los métodos descritos, se debe transformar la expresión de tal forma que el segundo término sea cero, para hacer la comparación.

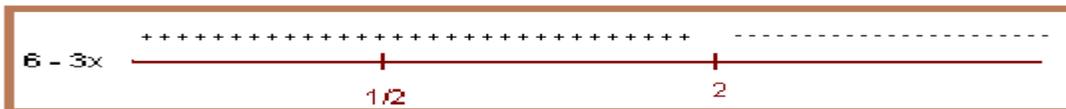
$$\frac{x+4}{2x-1} < 2 \Rightarrow \frac{x+4}{2x-1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{(x+4) - 2(2x-1)}{2x-1} < 0$$

Operando y simplificando:  $\frac{(x+4) - 2(2x-1)}{2x-1} < 0 \Rightarrow \frac{6-3x}{2x-1} < 0$

Ahora si tenemos la fracción comparada con cero, por lo que se puede aplicar cualquiera de los métodos analizados para este tipo de inecuaciones.

**Método de Diagrama de Signos:**

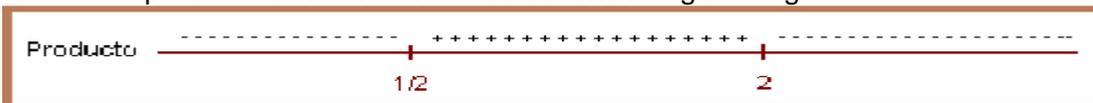
$6 - 3x = 0, x = 2$ . Punto crítico (2). Todos los valores mayores que  $x = 2$ , hacen la expresión negativa y todos los valores menores que  $x = 2$  la hacen positiva.



$2x - 1 = 0, x = 1/2$ . Punto crítico ( $1/2$ ). Todos los valores mayores que  $1/2$  hacen la expresión positiva y los valores menores que  $1/2$  la hacen negativa.



Al hacer el producto de los intervalos se obtiene la siguiente grafica:



Como la desigualdad inicial debe ser negativa; es decir, menor que cero, entonces la solución serán los intervalos negativos.

Solución:  $(-\infty, 1/2) \cup (2, \infty)$

## Lección Dieciséis: Inecuaciones Cuadráticas

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Las inecuaciones cuadráticas son de la forma  $ax^2 + bx + c < 0$ , pero puede ser  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ . Con  $a \neq 0$ . La resolución para este tipo de inecuaciones es similar al caso de las inecuaciones racionales lineales.

Lo primero que se debe hacer para resolver una inecuación cuadrática es llevarla a la comparación con cero y luego linealizarla; es decir, expresarla como producto de dos factores lineales, lo que se puede hacer por factorización o por la fórmula cuadrática.

Si se tiene la inecuación:  $ax^2 + bx + c < 0$  se puede transformar en un producto:  $\alpha x \beta < 0$ . Cuando en la inecuación el segundo término es cero, se aplica uno de los métodos propuestos, ya sea conectivos lógicos o diagrama de signos.

### - ) Conectivos Lógicos:

Dada una inecuación cualquiera,  $ax^2 + bx + c > 0$  ó  $ax^2 + bx + c < 0$  se puede presentar los siguientes casos.

1.  $\alpha x \beta > 0$

Para que el producto de los dos factores sea positivo, hay dos posibilidades:

$$\boxed{-) \alpha > 0 \wedge \beta > 0}$$

Un valor positivo por otro valor positivo produce un valor positivo.

v

$$\boxed{-) \alpha < 0 \wedge \beta < 0}$$

Un valor negativo por otro valor negativo produce un valor positivo

2.  $\alpha x \beta < 0$

Para que el producto de los dos factores sea negativo, hay dos posibilidades:

$$\boxed{-) \alpha > 0 \wedge \beta < 0}$$

Positivo por negativo produce negativo

v

$$\boxed{-) \alpha < 0 \wedge \beta > 0}$$

Negativo por positivo produce negativo.

Se puede observar que cada posibilidad origina dos intervalos los cuales se intersecan y las dos soluciones de las dos posibilidades se unen para obtener la solución total.

### Ejemplo 99:

Resolver la inecuación:  $x^2 - x - 6 < 0$

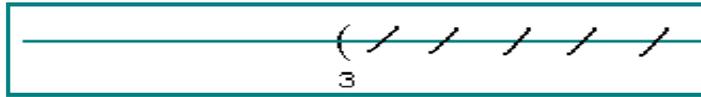
Solución:

Primero se linealiza el trinomio cuadrado.  $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) < 0$

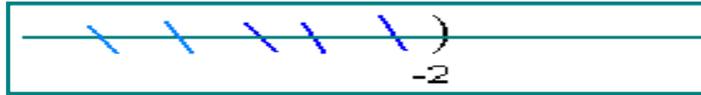
Como los factores deben ser menor que cero, las posibilidades son:

a-)

$$x - 3 > 0, x > 3$$



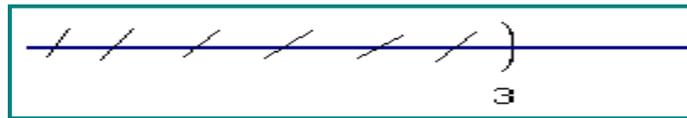
$$x + 2 < 0, x < -2$$



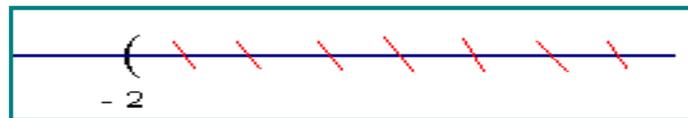
La intersección entre estos intervalos es vacío:  $(\Phi)$

b-)

$$x - 3 < 0, x < 3$$



$$x + 2 > 0, x > -2$$



La intersección para esta posibilidad es el intervalo  $(-2, 3)$

La solución total será la unión de las dos soluciones obtenidas,  $(\Phi) \cup (-2, 3)$

Solución total:  $(-2, 3)$

### -) Diagrama de Signos:

Por este método se toman los polinomios de los dos factores y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. A cada polinomio se le hace una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para producto y se obtiene intervalos positivos y negativos para la inecuación. La solución depende del tipo de comparación: Si la inecuación cuadrática es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

### Ejemplo 100:

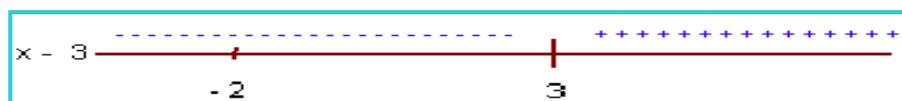
Resolver el ejemplo anterior por diagrama de signos:  $x^2 - x - 6 < 0$

### Solución:

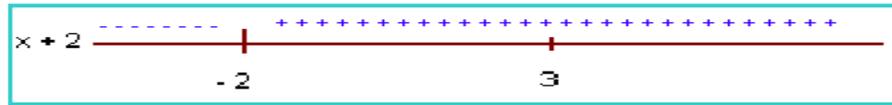
Por medio de diagrama de Signos: A partir de la inecuación dada, se linealiza, iniciamos el proceso.

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) < 0$$

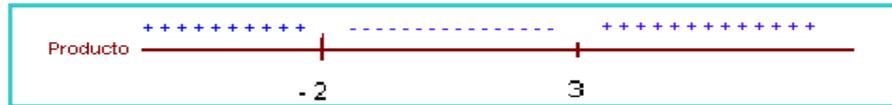
$x - 3 = 0$ , valor crítico  $x = 3$ . Cualquier valor mayor que 3 hará positiva la expresión y cualquier valor menor que 3 la hará negativa.



$x + 2 = 0$ , valor crítico  $x = -2$ . Cualquier valor mayor que  $-2$  hará positiva la expresión y viceversa.



Producto de signos:



Así como la inecuación debe ser menor que cero, la solución será la parte negativa del producto.  
Solución:  $(-2, 3)$

**Ejemplo 101:**

Hallar el conjunto solución de la inecuación:  $x^2 - 4x - 12 > 0$

**Solución:**

Se va a utilizar los conectivos lógicos. Entonces:  $x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2) > 0$

Como el producto de los factores debe ser positivo, entonces las posibilidades son:



$\wedge$

$x + 2 > 0, x > -2$



Primera solución: La intersección de los dos intervalos:  $(6, \infty)$



$\wedge$

$x + 2 < 0, x < -2$



Segunda solución: La intersección de los intervalos es:  $(-\infty, -2)$

La solución total:  $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$



### Ejemplo 102:

Resolver la siguiente inecuación:  $x^4 \leq x$

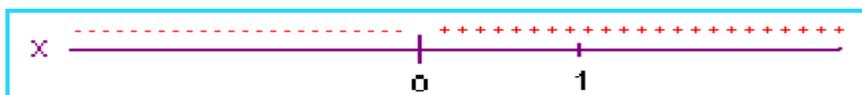
#### Solución:

Primero la comparamos con cero.  $x^4 - x \leq 0$

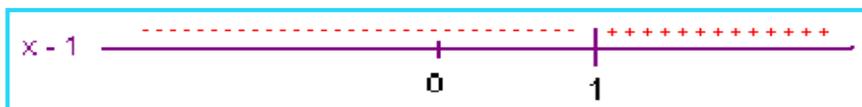
Ahora la linealizamos:  $x(x^3 - 1) \leq 0 \Rightarrow x(x - 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

Para cada término identificamos el punto crítico y los intervalos positivos y negativos.

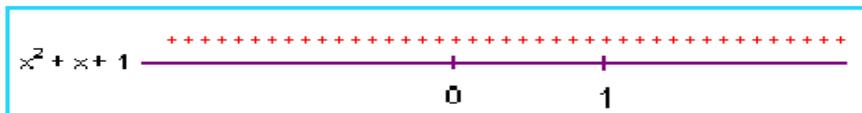
$x$ : Valor crítico  $x = 0$ .



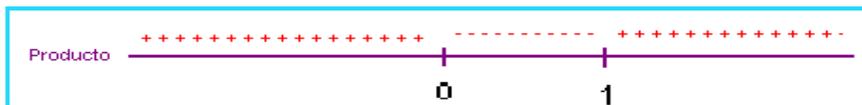
$x - 1$ : Valor crítico  $x = 1$



$x^2 + x + 1$ : No hay valor crítico. (Por qué)



El producto:



Como la inecuación no es estricta y debe ser menor que cero, la solución incluye los extremos y será la parte negativa del intervalo obtenido. Entonces la solución:

Como pareja ordenada:  $[0, 1]$  Como desigualdad:  $0 \leq x \leq 1$

### OBSERVACIÓN:

Los ejemplos modelos que se han ilustrado, muestran que las inecuaciones racionales y cuadráticas (también polinómicas) se pueden resolver por el método de los conectivos lógicos y del diagrama de signos; también llamado técnica del cementerio; por aquello de las cruces. Cualquiera de los métodos es válido para desarrollar inecuaciones, pero para muchos casos es más pertinente el diagrama de signos, como es el caso de las inecuaciones mixtas o de grado tres o más.

### Lección Diecisiete: Inecuaciones Mixtas

En este contexto se ha determinado que las *inecuaciones mixtas* sean aquellas que además de ser racionales, tengan en el numerador polinomios de grado dos o más, igual en el denominador. El camino de solución para este tipo de inecuaciones es el *diagrama de signos* por su facilidad y mejor manejo.

**Ejemplo 103:**

Hallar el conjunto solución de la inecuación:  $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} < 0$

**Solución:**

Como se ha venido trabajando, lo primero es linealizar los términos.

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{x(x - 1)} < 0$$

Como ya la tenemos linealizada, entonces se procede a tomar cada término para identificar el valor crítico.

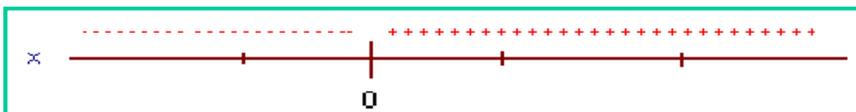
$x - 3 = 0$ , valor crítico  $x = 3$



$x + 2 = 0$ , valor crítico  $x = -2$



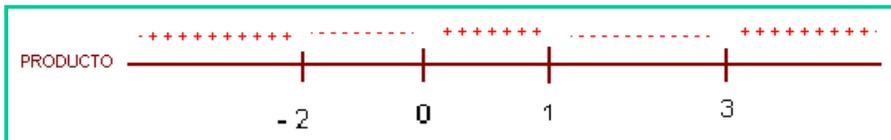
$x$ , valor crítico  $x = 0$



$x - 1 = 0$ , valor crítico  $x = 1$



Por la ley de los signos para producto.



Como la fracción debe ser menor que cero, entonces la solución serán los intervalos:  $(-2, 0) \cup (1, 3)$

**Ejemplo 104:**

Resolver:  $\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leq 2$

**Solución:**

Primero se lleva la fracción a compararla con cero.

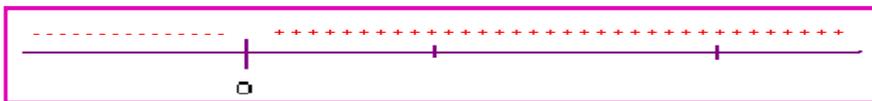
$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \leq 2 \implies \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} - 2 \leq 0 \implies \frac{x^2 - x - 2 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0$$

Operando y simplificando:  $\frac{x^2 - x - 2 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0 \implies \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \leq 0$

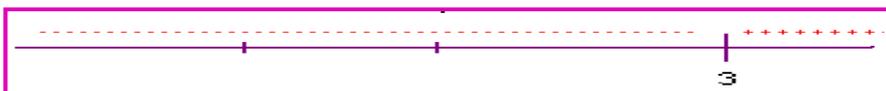
Ahora se linealiza los términos de la fracción:  $\frac{x^2 - 3x}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x(x - 3)}{x - 1} \leq 0$

Se identifican los valores críticos.

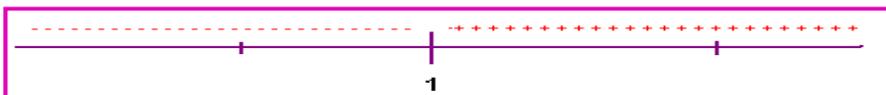
$x$ , valor crítico  $x = 0$



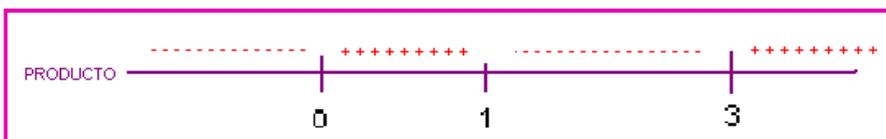
$x - 3$ , valor crítico  $x = 3$



$x - 1$ , valor crítico  $x = 1$



Por la ley de los signos para producto.



De la expresión original, se infiere que  $x \neq 1$ , ya que cuando  $x = 1$  la fracción se vuelve indeterminada; además, la desigualdad no es estricta, luego la solución puede incluir los extremos, teniendo en cuenta por supuesto la restricción identificada.

Se observa que la fracción debe ser menor o igual que cero, entonces la solución será los intervalos negativos del producto obtenido. Solución:  $(-\infty, 0] \cup (1, 3]$

En la medida que se estudien detalladamente los ejemplos modelos y se resuelvan los ejercicios propuestos, se podrá comprender e interiorizar las inecuaciones, así su aplicación en cualquier contexto.

## Lección Dieciocho: Inecuaciones con Dos Incógnitas

$$ax + by + c > 0$$

Las inecuaciones con dos incógnitas pueden ser de la forma  $ax + by < k$ ,  $ax^2 + by > k$  otras. Siendo  $k$  un real. Inicialmente se estudiarán las técnicas de resolución de este tipo de inecuaciones para luego analizar algunas aplicaciones.

Resolver una inecuación con dos incógnitas, es hallar un conjunto de puntos en el plano; llamado también semiplano, que llamaremos  $R$ , los cuales deben satisfacer la inecuación.

Se expondrá una metodología general para resolver una inecuación con dos incógnitas.

1. Dada la desigualdad  $ax + by < 0$ , se expresa temporalmente como igualdad  $ax + by = 0$ , para hacer una gráfica, que puede ser una recta, una parábola, etc. Si la desigualdad es estricta ( $>$ ,  $<$ ) la línea límite se hace interrumpida (- - - -), pero si la desigualdad no es estricta ( $\geq$ ,  $\leq$ ), la línea será continua (—).

2. La línea obtenida divide el plano en dos semiplanos, se prueba un punto  $(x, y)$  en cada semiplano, para determinar en cuál de ellos la desigualdad se hace verdadera. Esto nos indica que solo en uno de ellos, la inecuación es válida.

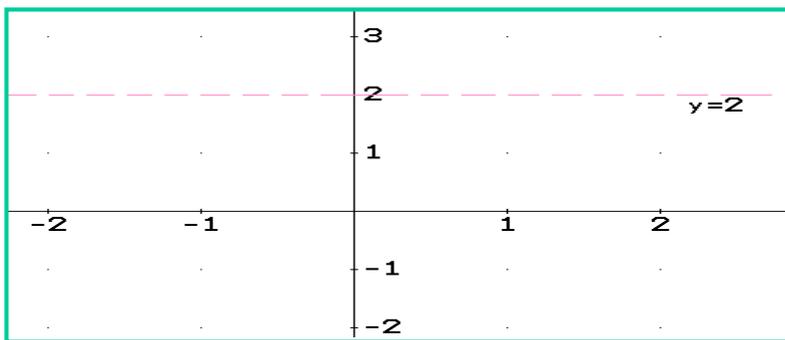
3. El punto que hace verdadera la desigualdad incluye el semiplano que lo contiene, luego dicho semiplano será la solución, generalmente se subraya o sombrea.

### Ejemplo 105:

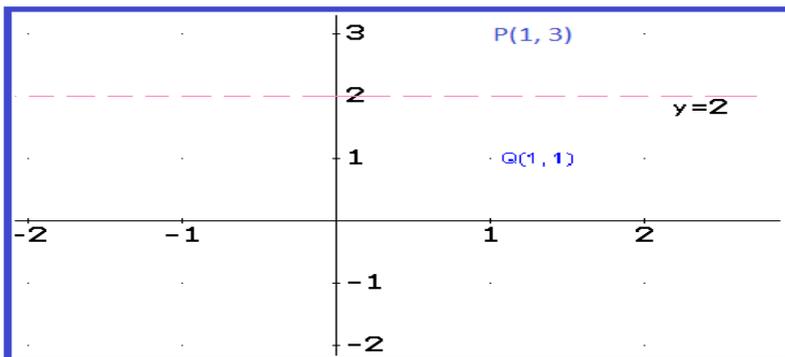
Resolver la desigualdad:  $y > 2$ .

### Solución:

Primero hacemos  $y = 2$ , para graficar, se sabe que esto corresponde a una recta horizontal, se observa de color rojo en la ilustración, con líneas interrumpidas, ya que la desigualdad es estricta.

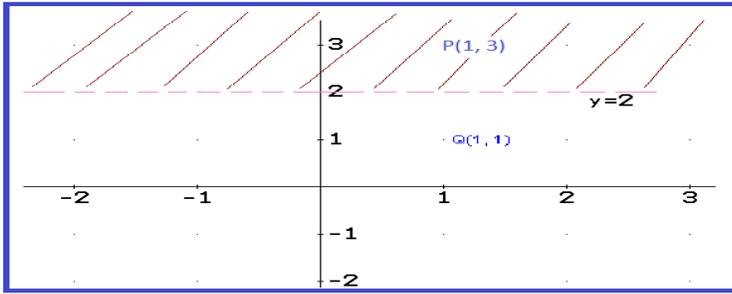


Reemplazamos dos puntos, digamos  $P(3, 1)$  y  $Q(1, 1)$ . Se puede ver que P está en el semiplano superior y Q en el semiplano inferior.



Según la desigualdad dada,  $y > 0$ , el semiplano superior, satisface la desigualdad; es decir, el que inicia en la recta interrumpida de color rojo hacia arriba. El punto Q no satisface la desigualdad.

El conjunto solución será el semiplano superior, lo que se expresa subrayado.



**Ejemplo 106:**

Dada la expresión,  $y \geq 2x$ , hallar el conjunto de punto en el plano que satisfaga la inecuación dada.

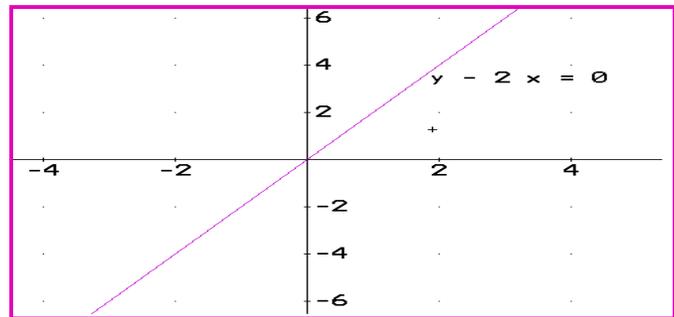
**Solución:**

Primero ajustamos la desigualdad:  $y - 2x \geq 0$ . En seguida expresamos  $y - 2x = 0$  para graficar, como corresponde a una ecuación de primer grado, la gráfica es una recta, entonces se toman dos puntos:

Para  $x = 0$ ,  $y - 2(0) = 0$ , entonces  $y = 0$ .  $(0, 0)$

Para  $x = 2$ ,  $y - 2(2) = 0$ , entonces  $y = 4$   $(2, 4)$

Como se tienen dos puntos, por los axiomas euclidianos, entre los que se tiene aquel famoso que dice: "Por dos puntos solo pasa una y solo una recta" Esta será continua, ya que la desigualdad no es estricta.

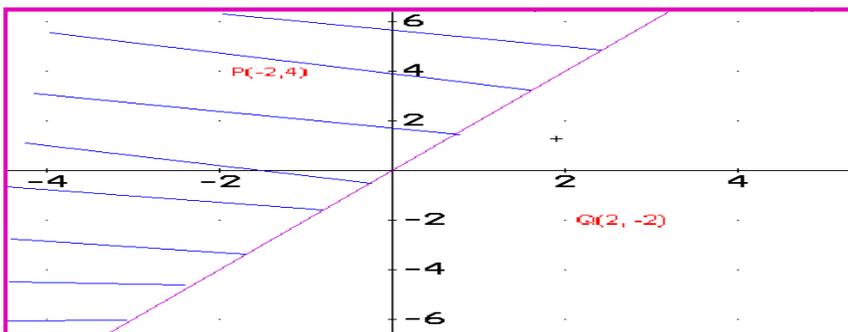


Para identificar el semiplano de solución, reemplacemos dos puntos, digamos:  $P(-2, 4)$  y  $Q(2, -2)$ , ya que  $P$  está por encima del plano y  $Q$  está por debajo. Si se reemplaza dicho puntos en la inecuación:

Para  $P(-2, 4)$ : Como  $y \geq 2x$ , entonces:  $4 \geq 2(-2)$  Verdadero.

Para  $Q(2, -2)$ : para la misma desigualdad:  $-2 \geq 2(2)$  Falso.

El punto  $P$  es solución de la inecuación, luego el semiplano que contiene a dicho punto es la solución de la inecuación planteada.



Cualquier punto de la parte rayada, es solución de la inecuación.

**Ejemplo 107:**

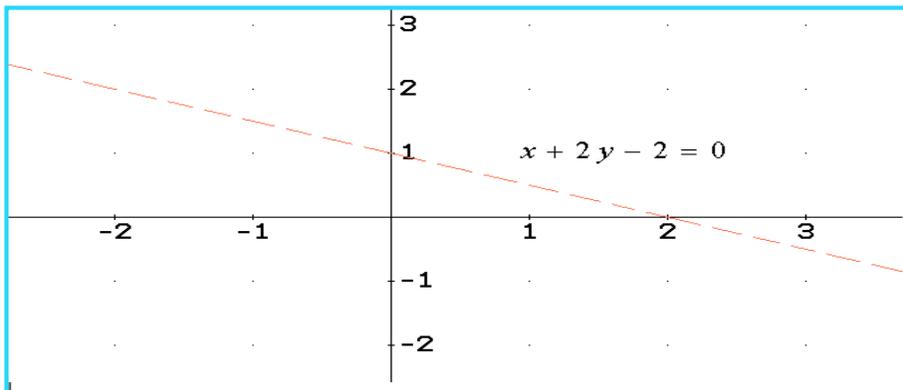
Determinar el conjunto solución de la desigualdad:  $x + 2y < 2$

**Solución:**

Llevamos la expresión a una comparación con cero.  $x + 2y - 2 < 0$  Luego planteamos la ecuación temporal:  $x + 2y - 2 = 0$  Por ser una ecuación lineal, con dos puntos es suficiente para graficar. Tomemos por ejemplo  $x = 0$  y  $x = 2$ .

$x = 0$ , reemplazando:  $0 + 2y - 2 = 0$ ,  $y = 1$ , luego el punto:  $(0, 1)$

$x = 2$ , reemplazando:  $2 + 2y - 2 = 0$ ,  $y = 0$ , luego el punto:  $(2, 0)$



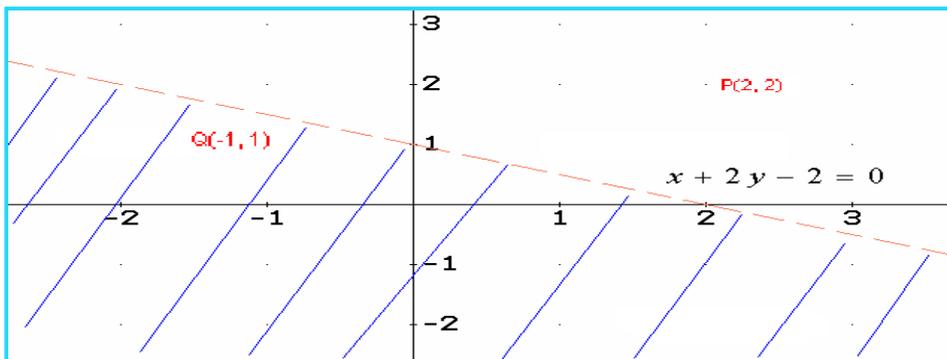
Ahora buscamos un punto por encima y por debajo del plano que esta separado por la recta, para identificar el conjunto de puntos solución.

Tomemos los puntos:  $P(2, 2)$  y  $Q(-1, 1)$  Es de aclarar que los puntos que se toman son arbitrarios, solo se debe tener presente que estén en la parte del plano correspondiente.

Para  $P(2, 2)$ :  $2 + 2(2) - 2 < 0$  Falso.

Para  $Q(-1, 1)$ :  $-1 + 2(1) - 2 < 0$  Verdadero

El conjunto solución contiene el punto  $Q$ .



### Ejemplo 108:

Resolver el sistema:  $x + y > 2$  y  $2x - y \leq 4$

#### Solución:

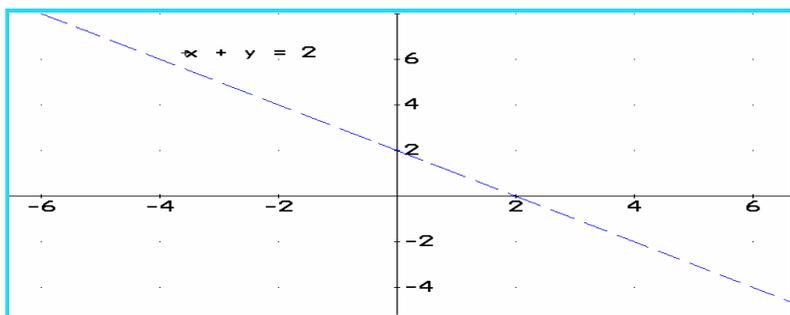
Para este caso se debe hacer dos procesos uno para cada inecuación, la solución será la intersección de los dos casos.

**Primer Caso:**  $x + y > 2$ . Planteamos la ecuación temporal  $x + y = 2$ , damos valores a  $x$ , veamos:

$x = 0$ , entonces  $y = 2$ , el punto  $(0, 2)$

$x = 2$ , entonces  $y = 0$ , el punto  $(2, 0)$

La gráfica será.

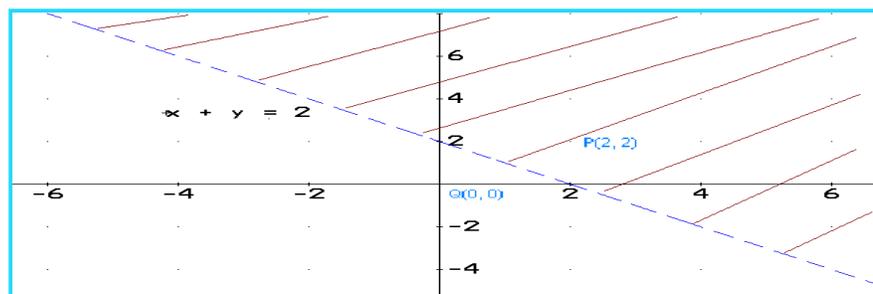


Tomemos el punto  $P(2, 2)$  y el punto  $Q(0, 0)$ , los reemplazamos en la inecuación.

Para  $P(2, 2)$ :  $x + y > 2$ , luego:  $(2) + (2) > 2$ . Verdadero

Para  $Q(0, 0)$ :  $x + y > 2$ , luego:  $(0) + (0) > 2$ . Falso.

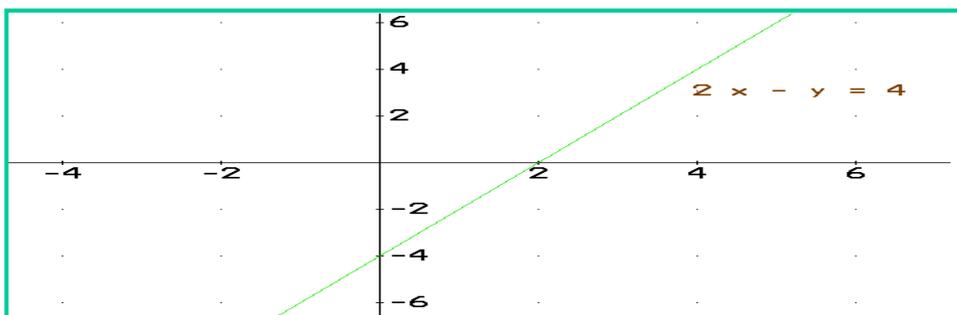
El semiplano solución será el que contiene el punto  $P(2, 2)$ .



**Segundo Caso:**  $2x - y \leq 4$ . La ecuación temporal  $2x - y = 4$ . Los puntos:

Tomemos  $x = 0$ , entonces  $y = -4$ , el punto  $(0, -4)$

$x = 2$ , entonces  $y = 0$ , el punto  $(2, 0)$ . La gráfica:

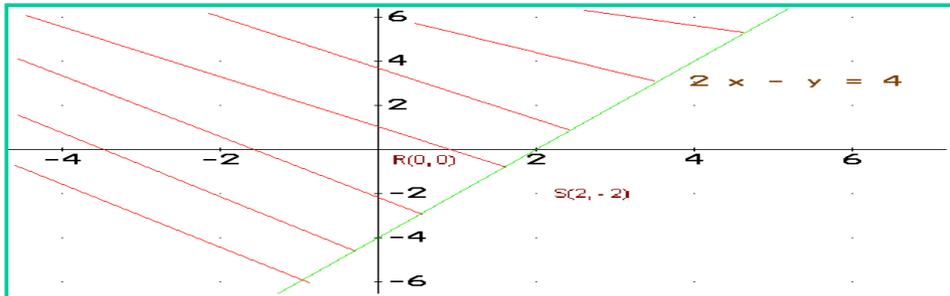


Tomemos los puntos:

R (0, 0):  $2x - y \leq 4$ , luego:  $2(0) - (0) \leq 4$ . Verdadero

S (2, -2):  $2x - y \leq 4$ , luego:  $2(2) - (-2) \leq 4$ . Falso

El semiplano solución debe contener al punto R (0, 0)

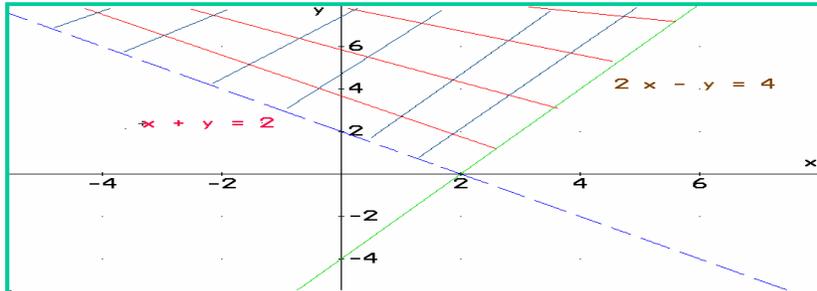


Como ya se tienen las dos soluciones, una para cada inecuación, en seguida se debe hallar la solución total, la cual será *la intersección* de las soluciones obtenidas.

El cruce de líneas en la siguiente gráfica, está indicando la intersección, dicho semiplano satisface simultáneamente las dos inecuaciones planteadas en el ejemplo. Si tomamos un punto cualquiera en dicho semiplano digamos (2, 4), éste debe hacer verdaderas las dos desigualdades simultáneamente.

Para  $x + y > 2$ :  $(2) + (4) > 2$ . Lo cual es verdadero.

Para  $2x - y \leq 4$ :  $2(2) - (4) \leq 4$ . Que también es verdadero.



La solución es la parte que presenta cuadrículas.

### Ejemplo 109:

Identificar el conjunto solución para la inecuación:

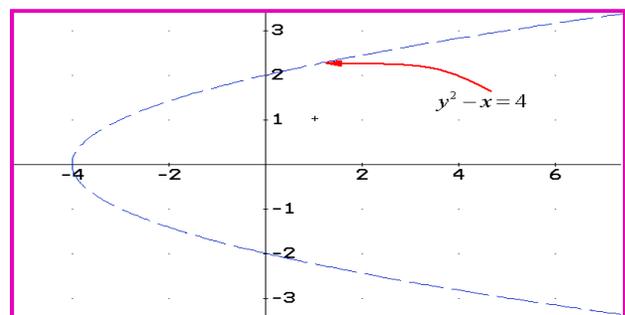
$$x + 4 > y^2$$

#### Solución:

Se observa que corresponde a una expresión

cuadrática: Entonces:  $x + 4 = y^2$

Reorganizándolo:  $y^2 - x = 4$  La grafica:



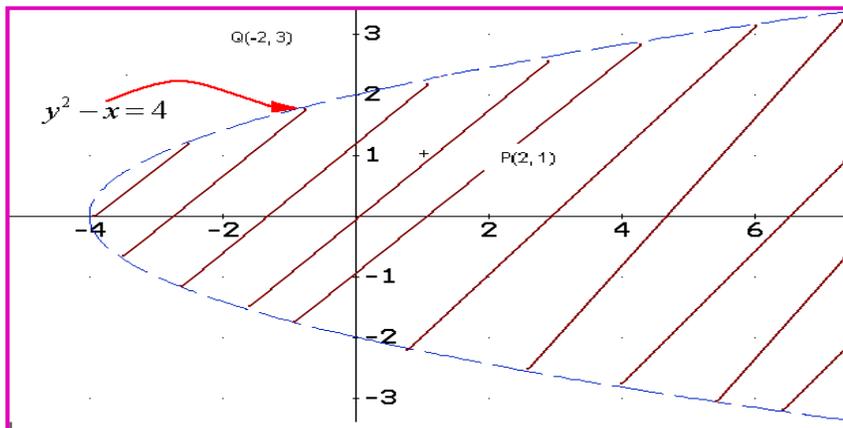
Para encontrar el semiplano solución, tomemos dos puntos un dentro y otro fuera de la curva.

Punto dentro de la curva: P(2, 1). Punto fuera de la curva Q(-2, 3)

Para P(2, 1):  $x + 4 > y^2 \Rightarrow (2) + 4 > (1)^2$  Verdadero.

Para Q(-2, 3):  $x + 4 > y^2 \Rightarrow (-2) + 4 > (3)^2$  Falso.

La solución será el semiplano que contenga a el punto P(2, 1), que en este caso es la parte interna de la curva.



### Ejemplo 110:

Hallar la solución total para el sistema:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y < 4, \quad 2x - y \leq 6$$

### Solución:

A continuación se dará la solución total, por favor hacer el procedimiento con el grupo colaborativo y aclarar las dudas con el Tutor.

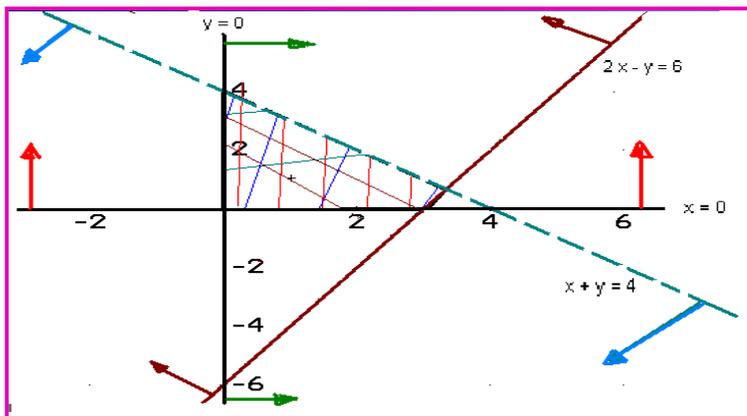
Para  $x \geq 0$  las líneas son verdes.

Para  $y \geq 0$  las líneas son rojas.

Para  $x + y < 4$  las líneas son azules

Para  $2x - y \leq 6$  las líneas son cafés.

Solución: La parte cuadriculada



## Lección Diecinueve: Inecuaciones: Problemas de Aplicación



### PROBLEMAS CON INECUACIONES DE UNA INCÓGNITA:

En la vida diaria se presentan diversos problemas donde el camino adecuado para la resolución son las inecuaciones, una vez estudiados los principios y técnicas de solución de inecuaciones, ahora corresponde darle sentido de aplicabilidad a las mismas.

El primer paso para resolver problemas que involucran inecuaciones, es leer muy bien el problema hasta comprenderlo completamente. En seguida plantear el modelo matemático que expresa con simbología matemática las especificidades del mismo. Para el caso particular de las inecuaciones, es pertinente tener claro algunos términos usados para comparar, como; *A lo más, como mínimo, etc*, que son los que dan las condiciones para plantear el modelo matemático.

#### Ejemplo 111:

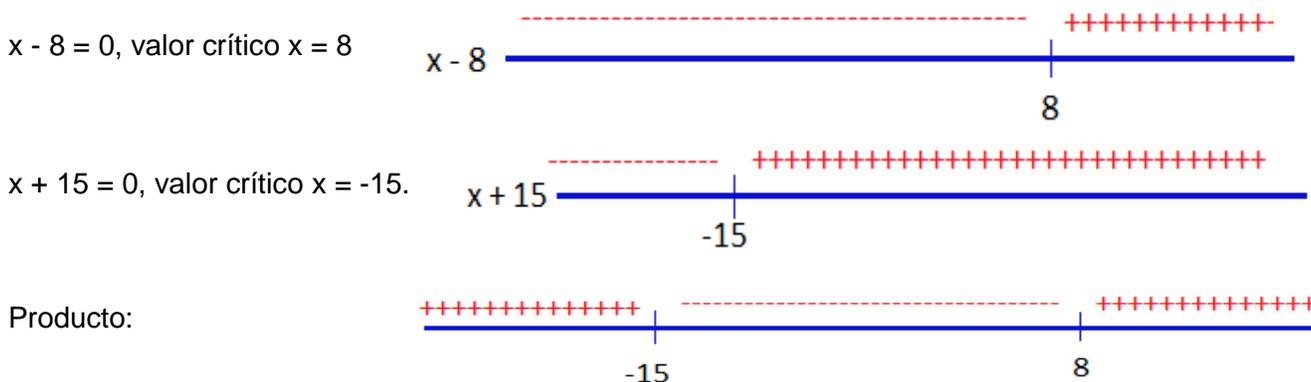
La función utilidad al vender  $x$  unidades está dada por el modelo:  $P = x^2 + 7x - 120$ , ¿cual será el mínimo de unidades vendidas para que se presente ganancia.

#### Solución:

Para que no haya pérdida ni ganancia,  $P = 0$ , luego el mínimo de unidades para que haya ganancia debe ser tal que  $P > 0$ .

$$x^2 + 7x - 120 > 0 \quad \text{Linealizando: } (x - 8)(x + 15) > 0$$

Recordemos que se puede resolver por los conectivos lógicos o por diagrama de signos. Utilicemos diagrama de signos.



La solución: presenta un intervalo negativo y otro positivo, es obvio que por las características del problema, solo se tendrá en cuenta la parte positiva, luego la cantidad mínima para obtener ganancia será de 9 unidades.

#### Ejemplo 112:

En una clase de Matemáticas un estudiante obtuvo las notas en sus primeras 4 evaluaciones de 60, 80, 78, 82. Faltando el examen. Para obtener una calificación de aprobatoria el promedio de las 5 notas debe ser igual o mayor a 80 y menor que 95. ¿Cuál debe ser la nota mínima en el examen para que el estudiante apruebe el curso?

**Solución:**

Según las condiciones del problema, el promedio será:  $\frac{60 + 80 + 78 + 82 + x}{5}$

El promedio debe estar entre 80 y 95.  $80 \leq \frac{60 + 80 + 78 + 82 + x}{5} < 95$

Iniciamos la resolución, eliminando el 5 del denominador de la fracción.

$80(5) \leq \frac{5(60 + 80 + 78 + 82 + x)}{5} < (5)95$  Entonces:  $400 \leq 300 + x < 475$

Eliminamos 300 que acompaña a la incógnita.

$400 - 300 \leq 300 - 300 + x < 475 - 300 \Rightarrow \Rightarrow 100 \leq x < 175$

El estudiante debe obtener mínimo 100 puntos para aprobar el curso.

**Ejemplo 113:**

En la fabricación de equipos para calentamiento, la renta obtenida por venta de  $x$  unidades es de  $450x$ . El costo de producción para  $x$  equipos es  $200x + 750$ . ¿Cuántos equipos mínimos se deben fabricar para obtener utilidad?

**Solución:**

La utilidad se mide así: Ingresos – Egresos  $> 0$ . Luego:

$450x - (200x + 750) > 0$ . Operando:

$250x - 750 > 0 \Rightarrow \Rightarrow 250x - 750 + 750 > 750$

$250x - 750 + 750 > 750 \Rightarrow \Rightarrow 250x > 750$

Despejando la incógnita:  $x = 750 / 250 = 3$ .

El mínimo de unidades que se debe fabricar es de 3 equipos para obtener ganancia.

**Ejemplo 114:**

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 90 m/seg. La distancia  $y$  de la pelota al suelo después de  $t$  segundos está dada por:  $y = 80t - 16t^2$ . ¿En qué intervalo de tiempo la pelota estará a más de 96 metros de altura?

**Solución:**

Como  $y = 80t - 16t^2$  y además  $y > 96$ , entonces:  $80t - 16t^2 > 96$

Organizando la expresión para compararla con cero.  $80t - 16t^2 - 96 > 0$ .

Cambiamos de signo para que la incógnita al cuadrado quede positiva ya sí poder linealizar más fácil.

$16t^2 - 80t + 96 < 0$

Ahora dividimos por 16 para que la expresión quede más sencilla.

$\frac{16t^2 - 80t + 96}{16} < \frac{0}{16} \Rightarrow \Rightarrow t^2 - 5t + 6 < 0$ . Se linealiza la expresión, utilizando la factorización.

$$t^2 - 5t + 6 < 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 2) < 0$$

Resolver la última desigualdad, utilicemos los conectivos lógicos. Como la expresión debe ser menor que cero, entonces las dos posibilidades serán:

$$(t - 3 > 0 \wedge t - 2 < 0) \vee (t - 3 < 0 \wedge t - 2 > 0)$$

Se busca la primera posibilidad.

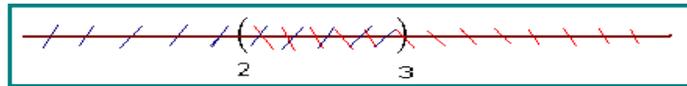
$$t - 3 > 0, t > 3 \wedge t - 2 < 0, t < 2$$



Para este caso NO hay solución, ya que no se presenta elementos comunes entre los dos intervalos, así la solución:  $(\Phi)$

Segunda posibilidad:

$$t - 3 < 0, t < 3 \wedge t - 2 > 0, t > 2$$



Para este caso la solución está en el intervalo  $(2, 3)$ , que son los elementos comunes a los dos intervalos.

La solución total será la unión de las soluciones obtenidas:  $(\Phi) \cup (2, 3) = (2, 3)$ .

Volviendo al problema planteado, la pelota estará a más de 96 metros de altura entre los 2 y 3 segundos.

### Ejemplo 115:

La potencia **W** (watts) de un circuito eléctrico se obtiene con la siguiente expresión:  $W = I \cdot E$ , donde **I** es la corriente eléctrica (amperes) y **E** la fuerza electromotriz (voltios). La potencia de un circuito de 110 voltios, varía entre 220 y 2.310 watts. ¿En qué intervalo oscila la corriente eléctrica?

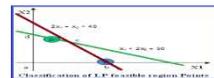
### Solución:

Como  $W = E \cdot I$ , según el problema:  $220 \leq W \leq 2.310$ . Reemplazando **W** por su equivalencia.

$220 \leq I \cdot E \leq 2.310$ , pero  $E = 110$  voltios, entonces:  $220 \leq 110 \cdot I \leq 2.310$ , dividiendo por 110 toda la desigualdad:  $2 \leq I \leq 21$ .

Entonces la corriente eléctrica oscila entre 2 y 21 amperes.

## PROBLEMAS CON INECUACIONES DE DOS INCÓGNITAS



Para resolver problemas que involucran inecuaciones, se requieren varias situaciones, primero leer muy bien el problema para comprenderlo, luego plantear el modelo matemático a través de una inecuación, en seguida resolver la inecuación planeada, finalmente analizar los resultados para dar las conclusiones al problema dado. En este aspecto, se diría que lo nuevo es el planteamiento del modelo; es decir, la inecuación que explica el fenómeno a analizar, ya que lo demás se conoce.

### Ejemplo 116:

Un Almacén vende dos clases de artículos tipo A y tipo B, las condiciones del almacén establecen que se debe tener al menos tres veces artículos tipo A que de tipo B; además, se debe tener al menos 12 artículos tipo B, el espacio permite tener máximo 80 artículos exhibidos. Plantear el sistema que describe la situación y describir la región solución del fenómeno.

### Solución:

Sea  $x$  cantidad de artículos tipo A y sea  $y$  cantidad de artículos tipo B.

$x \geq 3y$ : Tres veces artículo tipo A que de B.

$y \geq 12$ : Tener al menos 12 artículos tipo B

$x \geq 36$ . Tener tres veces artículo tipo A.

$x + y \leq 80$ . Capacidad máxima de exhibición.

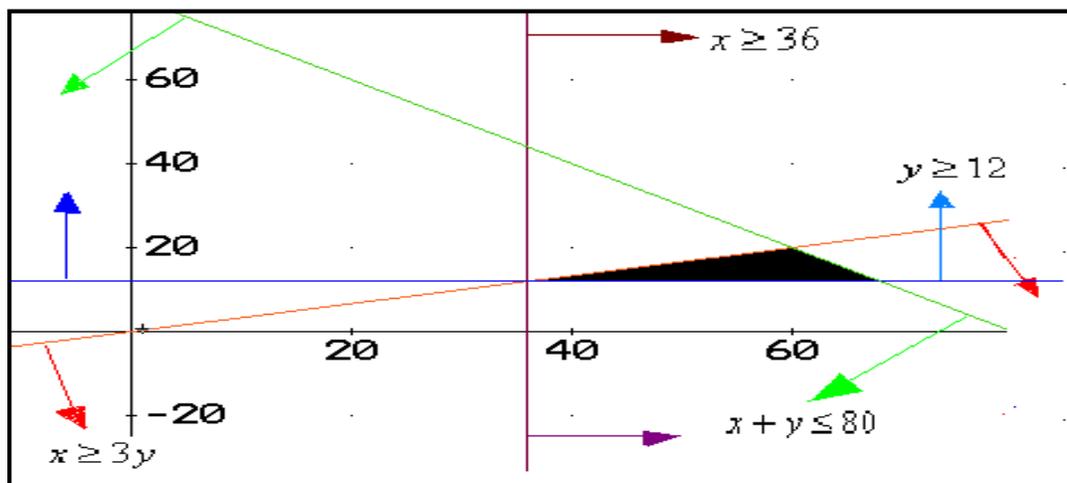
Planteamos las ecuaciones temporales para graficar.

$x \geq 3y$ , entonces:  $x - 3y = 0$ . Los puntos:  $(0, 0)$ ,  $(6, 2)$ . Línea roja

$y \geq 12$ , entonces:  $y = 12$ . Es una recta horizontal. Línea azul

$x \geq 36$ , entonces:  $x = 36$ . Es una recta vertical. Línea café

$x + y \leq 80$ , entonces:  $x + y = 80$ . Los puntos:  $(0, 80)$ ,  $(80, 0)$  Línea verde.



La parte sombreada será la región de solución del sistema.

### Ejemplo 117:

La compañía  $\pi$  desea comparar cable tipo AA y tipo BB para instalaciones telefónicas, para esto cuenta con un capital que oscila entre 600 y 1.200 millones de pesos. El valor de la unidad de cable tipo AA es de 400 mil pesos y de tipo BB de 300 mil pesos. La compañía requiere al menos 2 veces

más de cable tipo BB que de tipo AA. ¿Cuál será la zona de solución del sistema e identificar al menos dos posibilidades de compra?

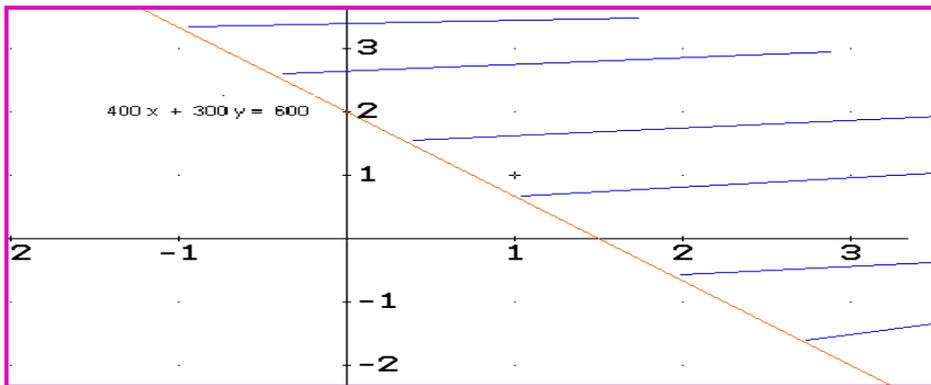
**Solución:**

Sea  $x$  cable tipo AA. Sea  $y$  cable tipo BB

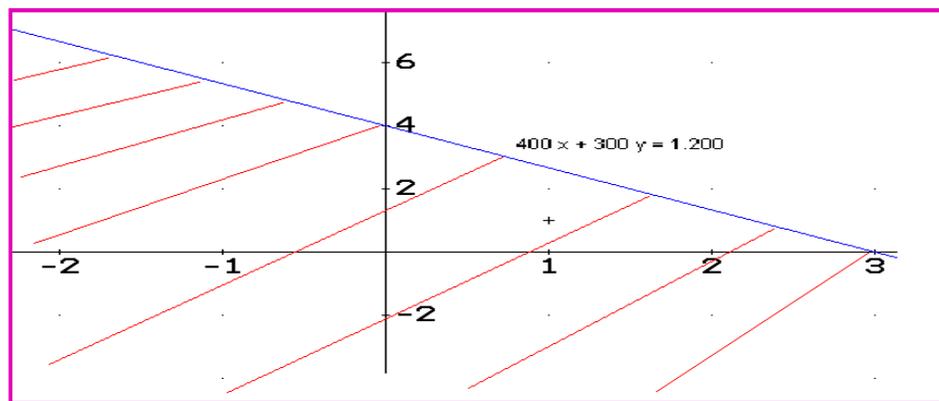
Según el problema:

- a)  $400x + 300y \geq 600$  Valor mínimo de compra
- b)  $400x + 300y \leq 1.200$  Valor máximo de compra
- c)  $y \geq 2x$ . Requerimientos de cable.

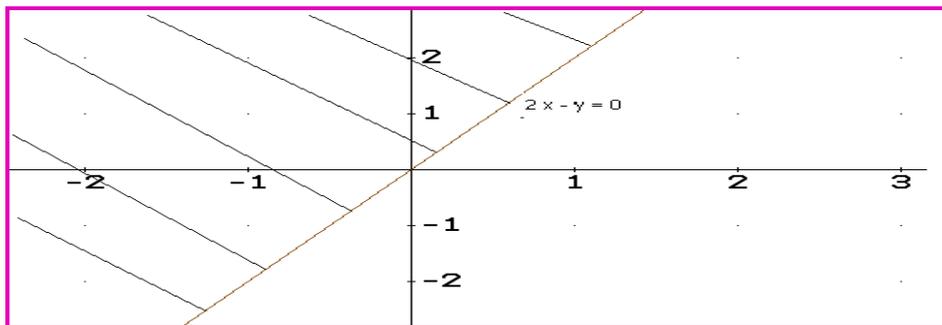
Solución para el caso a:



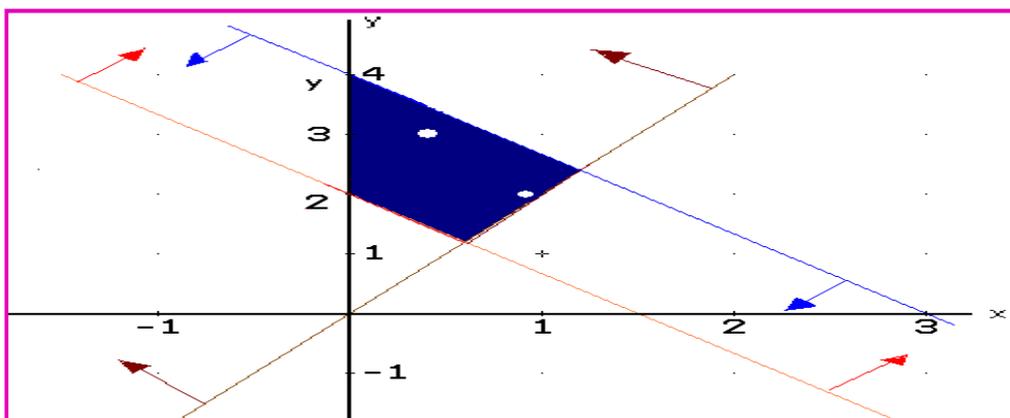
Solución para el caso b:



Solución para el caso c:



La solución al problema será la intersección de las soluciones obtenidas, mostrada en la zona sombreada.



Dos posibles soluciones:

Punto: (1, 2) puede ser una solución.

Punto: (1/2, 3) también puede ser solución.

### Ejemplo 118:

Una compañía de Alimentos para animales tiene definido dos tipos: Nutrian y Pedigry, con sus respectiva composición. Por otro lado tiene identificada las necesidades mínimas que se requieren. El objetivo es establecer el área de solución para la ración con mínimo costo: además, identificar dos posibles soluciones.

ALIMENTO	VARIABLE	PROTEINA (P)	CARBOHIDRATOS(CH)	FIBRA (F)	PRECIO(\$)
UNIDAD MEDIDA		GRAMOS	GRAMOS	GRAMOS	
NUTRIAN	X	150	200	320	3.000
PEDIGRY	Y	180	500	200	2.000
NECESIDADES MÍNIMAS		1.260	2.000	800	
NECESIDADES MÁXIMAS				1.600	

### Solución

Se plantean las inecuaciones.

$$150X + 180Y \geq 1.260 \text{ Proteína}$$

$$200X + 500Y \geq 2.000 \text{ Carbohidratos}$$

$$320X + 200Y \leq 1.600 \text{ Fibra}$$

$$110X + 200Y \geq 800 \text{ Fibra}$$

Se plantea cada inecuación como ecuación para identificar la recta que permite buscar la región de solución.

$$150X + 180Y = 1.260 \text{ Proteína. Dos puntos para graficar: } (0, 7); (8.4, 0)$$

$$200X + 500Y = 2.000 \text{ Carbohidratos. Dos puntos para graficar: } (0, 4); (10, 0)$$

$$320X + 200Y = 1.600 \text{ Fibra. Dos puntos para graficar: } (0, 8); (5, 0)$$

$$320X + 200Y = 800 \text{ Fibra. Dos puntos para graficar: } (0, 4); (2.5, 0)$$

Grafico de las dos primeras inecuaciones:

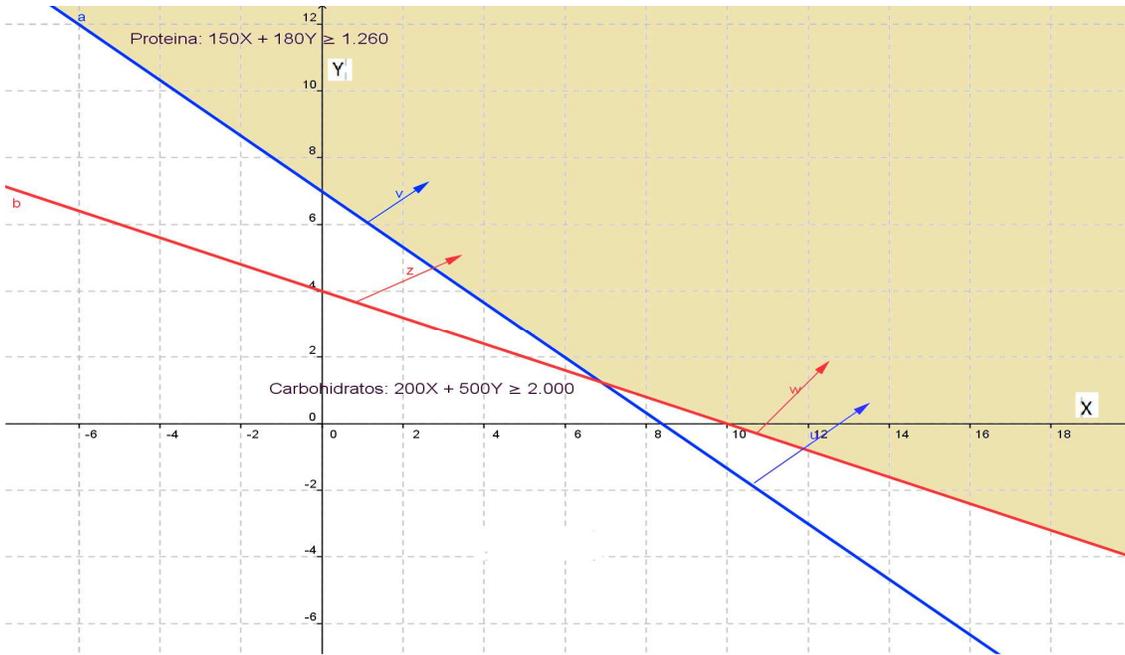
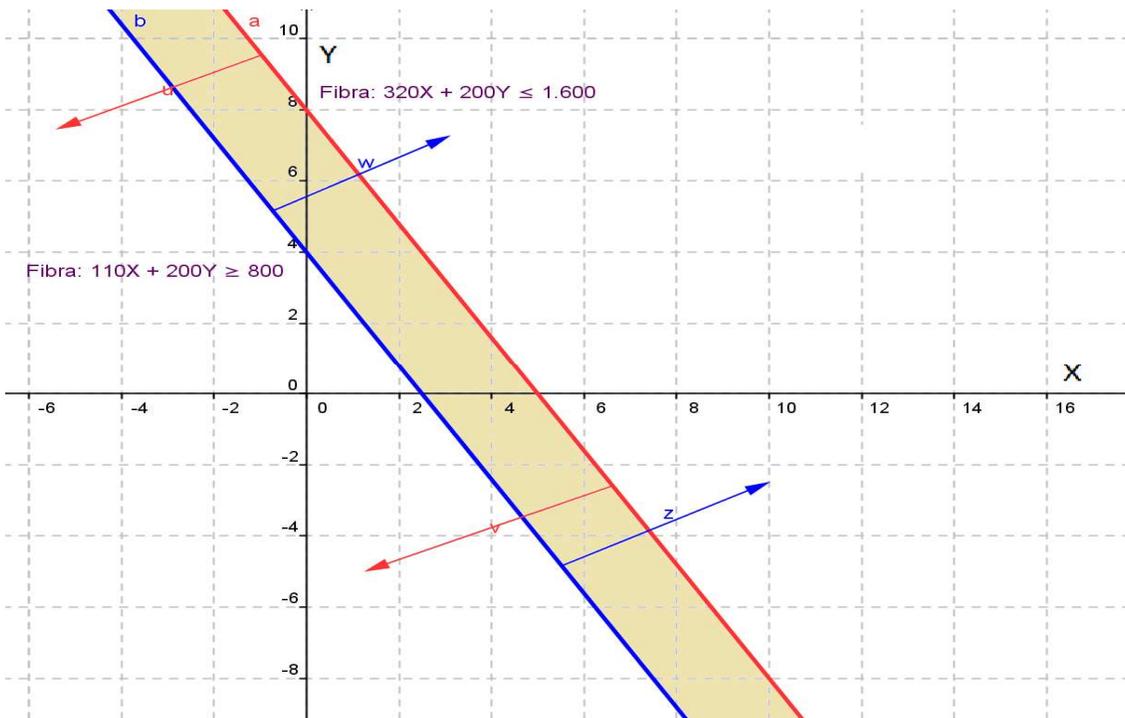
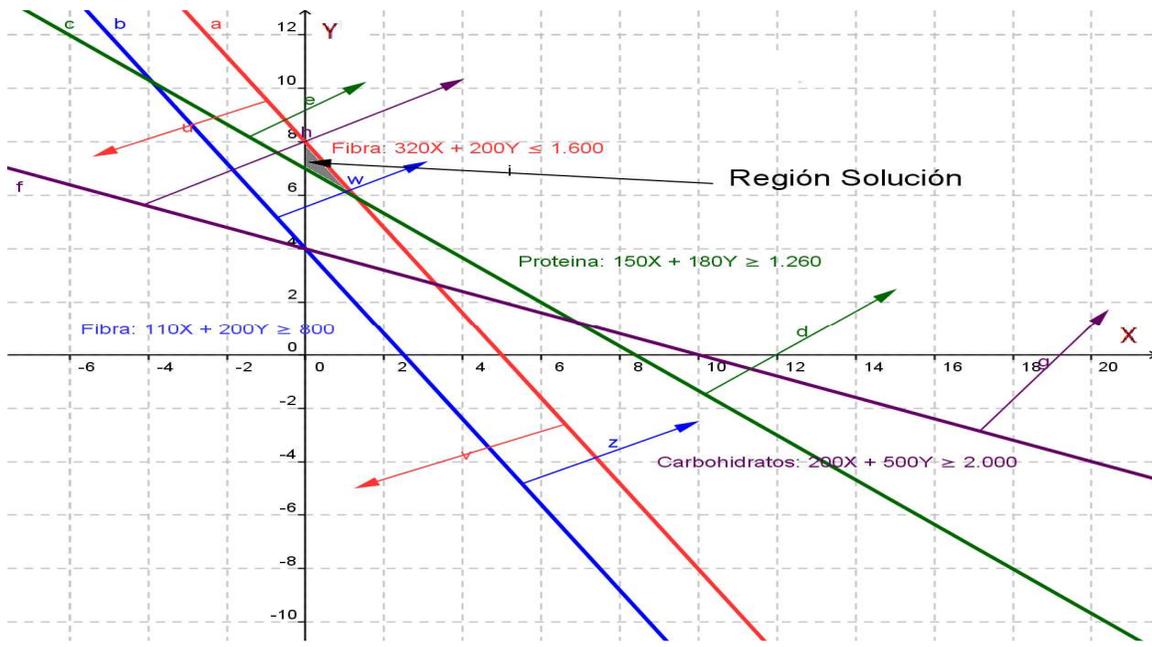


Grafico de las dos últimas inecuaciones:



Región solución:



La solución se observa así: En el eje x esta aproximadamente entre 0 y 1 y en el eje y entre 7 y 8.

Posibles soluciones: Se tomas dos puntos que estén en la región solución. Veamos dos posibles puntos que están en dicha región.

	X	Y
Punto 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
Punto 2	$\frac{1}{10}$	$\frac{72}{10}$

## EJERCICIOS

Desarrollar los ejercicios, explicando cada paso.

1. Dada la desigualdad  $-2 > -4$ , cuál será la desigualdad obtenida si:

- a-) Se suma  $-4$     b-) Se resta  $10$     c-) Se multiplica por  $-3$

2. Expresar las siguientes desigualdades como intervalos y hacer la grafica.

- a-)  $x > 4$     b-)  $x \geq -3$     c-)  $-5 > x \leq 2$     d-)  $0 \leq x \leq 8$

3. Expresar los siguientes intervalos como desigualdades.

- a-)  $(-3, 4]$     b-)  $(-\infty, 6) - [-5]$     c-)  $[-2, 4] - (0)$

4. Resolver las siguientes inecuaciones.

a-)  $2x + 5 \leq 7$

Rta:  $x \leq 1 \quad (-\infty, 1]$

b-)  $\frac{x}{3} \geq 2 + \frac{x}{6}$

Rta:  $x \geq 12 \quad [12, \infty)$

5. Resolver las siguientes inecuaciones racionales.

a-)  $\frac{4}{3x+2} \geq 0$

Rta:  $x > -\frac{2}{3}$

b-)  $\frac{x+1}{1-x} < 0$

Rta:  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Para los ejercicios propuestos, por favor resolverlos con mucho cuidado y hacer los pasos requeridos en su resolución.

6.  $(x+2)(x-1)(4-x) < 0$

Rta:  $(-2, 1) \cup (4, \infty)$

7.  $2x^2 - 2x < 12$

Rta:  $(-2, 3)$

8.  $\frac{1}{2}(x-4) > x+8$

Rta:  $(-\infty, -20)$

9.  $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$

Rta:  $[-1, 0] \cup [3, \infty)$

10.  $x^3 > x^2$

Rta:  $1 < x < \infty$

Leer cuidadosamente cada problema, para que sean resueltos adecuadamente.

11. El costo de producción de  $x$  unidades de un producto está dado por la expresión:

$C = x^2 + 6x$ , la utilidad por concepto de ventas está dada por  $U = 2x^2 + x$ . ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener utilidad.

Rta:  $x > 5$

12. Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, cuya función altura está dada por la expresión:  $h = -9,8t^2 + 147t$  donde h se da en metros y t en segundos. ¿En qué intervalo de tiempo el objeto estará por encima de 529,2 metros?

Rta:  $6 < t < 9$

13. Según la Ley de Boyle, para un gas específico a temperatura constante, se tiene la relación:  $P V = 200$ . Para P presión en psi y V volumen en  $\text{plg}^3$ . ¿En qué intervalo se desplaza la presión, si el volumen se encuentra entre 25 y 50  $\text{plg}^3$ ?

Rta:  $4 \leq P \leq 8$

14. El cuerpo humano tiene una temperatura normal de  $37^\circ\text{C}$ , si una temperatura x difiere a la normal al menos en  $2^\circ\text{C}$ , se considera anormal. ¿Cuál será el intervalo de temperatura que se considera anormal?

Rta:  $x \leq 35^\circ\text{C}$  y  $x > 39^\circ\text{C}$ .

15. La función ingreso por venta de un producto está dado por la expresión  $40x - \frac{1}{5}x^3$ . El costo de producción de una unidad es de \$28. ¿Cuántas unidades se deben vender para que la utilidad sea de \$100?

Rta:  $10 < x < 50$

Resolver los siguientes sistemas gráficamente.

16.  $3x + y < 3$  y  $4 - y < 2x$

17.  $y - x < 0$  y  $2x + 5y < 10$

18.  $x \geq 1$ ,  $y \geq 2$ ,  $x + 3y \leq 19$ ,  $3x + 2y \leq 22$

Leer cuidadosamente los siguientes problemas, plantear el sistema y resolverlo gráficamente.

19. Un negociante de finca raíz vende casas y apartamentos, por la demanda se debe tener al menos tres veces más casas que apartamentos. Se debe tener disponible al menos 6 casas y 2 apartamentos para su ocupación. Las casas cuestan 30 millones y los apartamentos 20 millones. El comerciante desea mantener sus costos de inventario en 600 millones o menos. Elaborar un sistema que explique el fenómeno y hallar la región solución.

20. Una refinera de petróleo puede producir hasta 5.000 barriles por día, el petróleo es de tipo A y B, del tipo A se deben producir por día al menos 1.000 y a lo más 3.500 barriles. Si hay una utilidad de 7 dólares para tipo A y 3 dólares para tipo B ¿Cuál será la utilidad máxima por día.

Rta: Tipo A 3.500 y tipo B 1.500

21. La empresa Sport fabrica dos tipos de balones para fútbol, el modelo pie duro da una utilidad de 20 mil pesos y el modelo pie blando de 13.00 pesos. Para satisfacer la demanda la empresa debe producir diariamente del modelo pie duro entre 20 y 100 inclusive, mientras que del modelo pie blando entre 10 y 70 inclusive. Por las condiciones de la fábrica el total de producción diaria debe ser máxima de 150 unidades. ¿Cuántos balones de cada tipo se deben fabricar en un día para obtener máxima utilidad?

Rta: 100 balones pie duro y 50 pie blando.

Resolver las siguientes inecuaciones.

$$22. \frac{x + 4}{x - 2} \leq 1$$

$$\text{Rta: } -\infty < x < 2$$

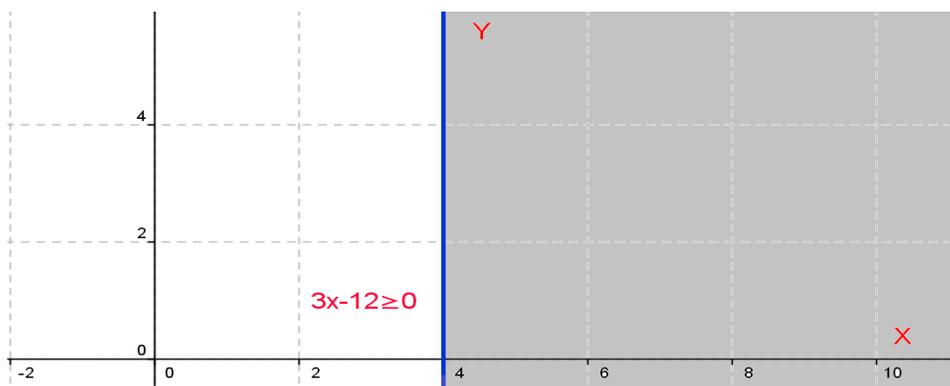
$$23. \frac{2x + 5}{x + 1} > \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$\text{Rta: } (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$$

Para los ejercicios propuestos, por favor resolverlos con mucho cuidado y hacer los pasos requeridos en su resolución.

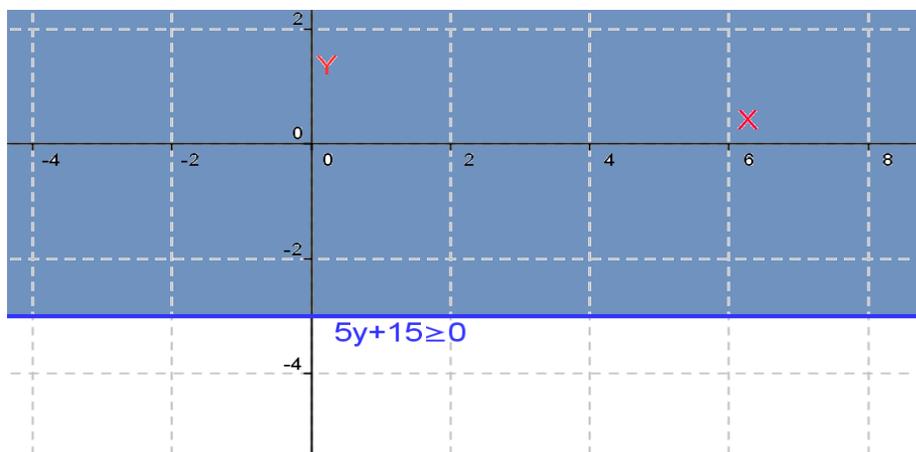
$$24. \text{ Hallar la solución grafica de la desigualdad: } 3x - 12 \geq 0$$

**Solución:** La parte sombreada de la grafica.



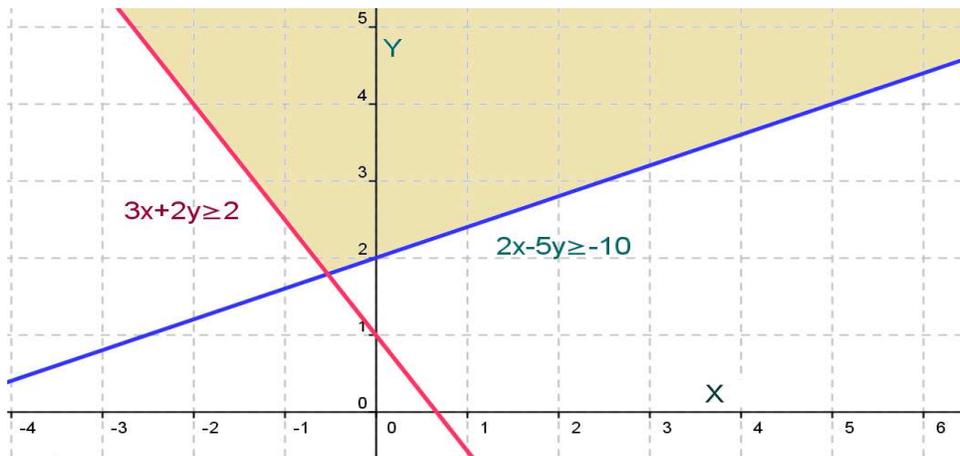
$$25. \text{ Hallar la solución grafica de la desigualdad: } 5y + 15 \geq 0$$

**Solución:** La parte sombreada de la grafica.



26. Hallar la solución gráfica del sistema de desigualdades:  $2x - 5y \geq -10$  y  $3x + 2y \geq 2$

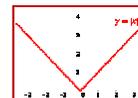
**Solución:** La parte sombreada de la grafica.



# CAPÍTULO TRES: VALOR ABSOLUTO

## INTRODUCCIÓN

El valor absoluto, es una figura matemática creada para relacionar un número con una distancia. Su funcionalidad es permitir que en diversas situaciones se pueda trabajar con números no negativos. En términos generales, el valor absoluto referencia la distancia entre dos números reales.



Es pertinente analizar los principios que sustentan esta figura matemática, para poder aplicarla en situaciones como son las ecuaciones e inecuaciones.

### Valor Absoluto:

Sea  $x$  un número real cualquiera, el valor absoluto simbolizado  $|x|$  se define así:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La definición es explícita y nos indica que el valor absoluto de un número positivo es positivo, pero si el número es negativo, su valor absoluto es negativo. Como consecuencia de esto, el valor absoluto de cualquier número siempre será positivo, excepto cero.

Algunas propiedades importantes en valor absoluto:

1.  $|x| \geq 0$  No negatividad.
2.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  Positividad.
3.  $-|x| = |x|$  Simetría
4.  $|x * y| = |x| * |y|$  Multiplicatividad.
5.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$  Divisibilidad Para  $y \neq 0$ .
6.  $|x^n| = |x|^n$  potencia.
7.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  Desigualdad triangular
8.  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$  Identidad.

### Ejemplo 119:

Hallar el valor absoluto de las siguientes cantidades.

a-)  $|10|$

b-)  $|-5|$

c-)  $|e - \pi|$

d-)  $|2 - \pi|$

### Solución:

a-) Como el valor es positivo, luego su valor absoluto será positivo.  $|10| = 10$

b-) Como el valor es negativo, luego su valor absoluto será negativo.  $|-5| = -(-5) = 5$

c-) El número  $e \approx 2,71828$  y  $\pi \approx 3,1416$ , entonces  $e < \pi$ , luego la cantidad será negativa, así su valor absoluto será negativo.  $|e - \pi| = -(e - \pi) = \pi - e$

d-) Para este caso  $2 < \pi$ , así la cantidad será negativa, entonces su valor absoluto será negativo.

Veamos:  $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$

## Lección Veinte: Ecuaciones e Inecuaciones con Valor Absoluto

$$|ax + b| = 0$$

### ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

Conocidos los principios sobre ecuaciones y sobre valor absoluto, ahora se hará una combinación de los dos términos para analizar ecuaciones con valor absoluto.

Sea  $|x| = a$  Entonces  $x = a$ , v,  $x = -a$ . Para todo  $x \neq$

Con este principio se pueden resolver ecuaciones con valor absoluto.

### Ejemplo 120:

Hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$|x - 3| = 8$$

### Solución:

Por la definición:  $x - 3 = 8$ , entonces:  $x = 8 + 3 = 11$  ó  $x - 3 = -8$ , entonces:  $x = -8 + 3 = -5$   
La solución será: -5 y 11.

La comprobación puede verificar la solución, hagámoslo.

$$|-5 - 3| = |-8| = -(-8) = 8$$

$$|11 - 3| = |8| = 8$$

**Ejemplo 121:**

Resolver:  $\left| \frac{2x-8}{4} \right| = 12$

**Solución:**

Aplicamos la definición:  $\frac{2x-8}{4} = 12 \quad \vee \quad \frac{2x-8}{4} = -12$

Resolviendo:  $2x - 8 = 48 \quad \vee \quad 2x - 8 = -48$

Despejando la incógnita.  $2x = 48 + 8 \quad \vee \quad 2x = -48 + 8$

$$x = \frac{56}{2} = 28 \quad \vee \quad x = \frac{-40}{2} = -20$$

La solución es -20 y 28. *Por favor verificar las soluciones obtenidas.*

En los ejemplos analizados se observa que se obtienen dos soluciones, situación que ocurre con las ecuaciones de primer grado con valor absoluto.

**Ejemplo 122:**

Hallar la solución para la ecuación dada a continuación:  $|x^2 - 8x - 18| = 2$

**Solución:**

Siguiendo la definición, se sabe que hay dos posibilidades:

a)  $x^2 - 8x - 18 = 2 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$  Se factoriza:

$$x^2 - 8x - 20 = (x - 10)(x + 2) = 0. \text{ Por la regla del producto nulo: } x = 10 \text{ y } x = -2$$

b)  $x^2 - 8x - 18 = -2 \Rightarrow x^2 - 8x - 16 = 0$ . Esta ecuación la resolvemos por la cuadrática:

$$x^2 - 8x - 16 \Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 64}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 64}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 * 2}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

Solución:  $4 + 4\sqrt{2}$  y  $4 - 4\sqrt{2}$

La solución total será:  $10, -2, 4+4\sqrt{2}, 4-4\sqrt{2}$

**Ejemplo 123:**

Resolver:  $|x^2 - 4| = 3x$

**Solución:**

De acuerdo con la definición hay dos posibilidades:

a)  $x^2 - 4 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) = 0$

Por la regla del producto nulo:  $x = 4$  y  $x = -1$

b)  $x^2 - 4 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1) = 0$

Por la regla del producto nulo:  $x = -4$  y  $x = 1$ .

Los valores negativos NO satisfacen la ecuación, luego la solución es: 1 y 4.

## INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

$$|ax + b| < 0$$

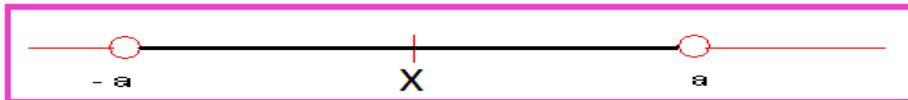
En la naturaleza existen muchos fenómenos que suceden bajo ciertos límites o mejor en un intervalo determinado. Las inecuaciones con valor absoluto son un dispositivo matemático que permiten resolver problemas de fenómenos que presentan dichas restricciones.

La resolución de inecuaciones con valor absoluto parte de las siguientes definiciones:

-Primera definición:

$$\text{Sea } |x| < a \quad \text{Entonces: } -a < x < a$$

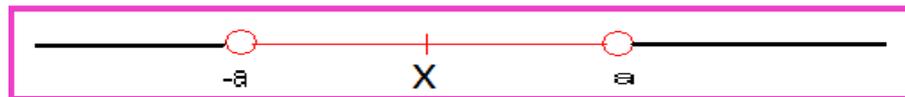
Veámoslo gráficamente:



-Segunda Definición:

$$\text{Sea } |x| > a \quad \text{Entonces: } x < -a \quad \text{ó} \quad x > a$$

Veámoslo gráficamente:



Las definiciones de dieron para desigualdades estrictas, pero aplica también para las no estrictas, en la gráfica, los extremos serán cerrados, ya que los incluye.

**Ejemplo 124:**

Resolver:  $|x| < 8$

**Solución:**

Por la primera definición:  $|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8$

Lo anterior significa que cualquier valor entre -8 y 8 satisface la desigualdad.

Veamos un caso: - 5,  $|-5| = -(-5) = 5$  obviamente 5 es menor que 8.

**Ejemplo 125:**

Hallar el conjunto solución para la siguiente expresión:

$$|x| > 6$$

**Solución:**

Por la segunda definición:  $|x| > 6 \Rightarrow x < -6 \vee x > 6$

La solución será:  $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$

**Ejemplo 126:**

Hallar la solución de la expresión:  $|2x - 6| \leq 4$

**Solución:**

Por la definición uno:  $|2x - 6| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 2x - 6 \leq 4$

Desarrollemos el procedimiento para desigualdades compuestas, primero sumamos 6 a toda la desigualdad, (¿por qué?)

$$-4 + 6 \leq 2x - 6 + 6 \leq 4 + 6 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 10$$

Ahora se divide toda la expresión entre 2.

$$2 \leq 2x \leq 10 \Rightarrow \frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{10}{2} \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

La solución será el intervalo  $[1, 5]$ . Notemos que es cerrado ya que la solución incluye los extremos.

**Ejemplo 127:**

Mostrar que la solución de la expresión:  $\left| \frac{x}{x-4} \right| \geq 2$  es  $[8/3, 4) \cup (4, 8]$

**Solución:** Resolverlo con el grupo colaborativo y cualquier duda consultar al tutor.

## EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

1.  $|2x + 3| = 5$

Rta:  $x = -4$  y  $x = 1$

2.  $|1 - 4y| = 5$

Rta:  $y = -1$  y  $y = 3/2$

3.  $\left| \frac{x}{3} + \frac{2}{5} \right| = 2$

Rta:  $x = -36/5$  y  $x = 24/5$

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

4.  $|z| < 7$

Rta:  $-7 < z < 7$   $(-7, 7)$

5.  $\left| \frac{y + 7}{3} \right| > 3$

Rta:  $(-\infty, -16) \cup (2, \infty)$

6.  $|2w - 7| \leq 0$

Rta:  $w = 7/2$

## AUTOEVALUACION UNIDAD UNO

1.  $\frac{y+1}{4} + \frac{2y-3}{4} = \frac{y}{2} - 2$

2.  $\frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

3.  $\frac{8}{4y-8} = \frac{6}{3y-6}$

4. Qué valor debe tener  $\phi$  en la expresión  $3y - 3\phi = 3y - 5$ , para que se cumpla la igualdad.

5. Demuestre que la ecuación  $4(y+1) = 6(y-2) - 2y$  no tiene solución.

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción.

6. 
$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y &= 7 \\ \frac{5}{3}x - \frac{1}{2}y &= 18 \end{aligned}$$

Resolver los siguientes sistemas por el método de Igualación.

7. 
$$\begin{aligned} \frac{2}{5}x - \frac{1}{6}y &= \frac{7}{10} \\ \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y &= \frac{19}{8} \end{aligned}$$

Resolver los siguientes sistemas por el método de Sustitución

8. 
$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{6} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} &= 3 \end{aligned}$$

Identificar el valor de  $\phi$  en cada determinante, de tal manera que la igualdad se cumpla.

9. 
$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ \phi & 4 \end{vmatrix} = 13$$

Resolver los sistemas de ecuaciones propuestos por el método de **Kramer**; es decir, utilizando determinantes.

10. 
$$\begin{aligned} 3p - q &= 13 \\ -12p + 4q &= -52 \end{aligned}$$

$$11. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$$

Resolver por eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$3x + y - z = 2/3$$

$$12. 2x - y + z = 1$$

$$4x + 2y = 8/3$$

Cuál será el valor de x para que el determinante sea verdadero.

$$13. D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$14. P = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -1 & x & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Solucionar los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Kramer.

$$2x - 3y + 2z = -3$$

$$15. -3x + 2y + z = 1$$

$$4x + y - 3z = 4$$

16. Describa explícitamente los métodos de Sarros y Kramer y explique para que se utilizan.

17. Se desea construir un Silo para granos en forma de cilindro circular y semiesférico en la parte superior. El diámetro del silo debe ser de 30 pies ¿Cuál será la altura del silo, si la capacidad debe ser de  $11.250\pi \text{ pie}^3$ ?

18. El largo de un campo de baloncesto es 12 metros más que su ancho. Si el perímetro es de 96 metros, ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

19. En un triángulo, el ángulo más pequeño es la mitad del mayor y las dos terceras partes del ángulo intermedio. ¿Cuáles serán las medidas de los ángulos?

20. Un fabricante de grabadoras reduce el precio de un modelo X en el 15%, si el precio con el descuento es de \$125.000,00 ¿Cuál será el precio original del modelo X?

21. José recibe de liquidación 10 millones de pesos, decide invertir una parte en la Banca al 12% anual y el resto lo invierte en transporte al 16% anual. Si al final de un año recibe 1,3 millones de intereses, ¿Cuánto invirtió José en banca y en transporte?

22. El perímetro de un rectángulo es de 16 metros, su área es de  $15 \text{ m}^2$  ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

23. Para asistir a una función de teatro, se tiene dos tipos de entradas, el preferencial vale \$4.500 y el popular vale \$3.000, si se vendieron 450 boletas para un recaudo de \$1'819.500 ¿Cuántas boletas de cada clase se vendieron?

24. Se desea preparar 200 Litros de ácido nítrico al 34% a partir de dos soluciones del 28% y 36% de concentración. ¿Cuáles deben ser las cantidades de ácido a utilizar para obtener la solución deseada?

25. Para tres grupos de investigación hay 1'360.000 millones de pesos, la cantidad de científicos es de 100, cada científico del primer grupo recibió \$20.000 millones, del segundo grupo cada científico recibió \$8.000 millones y del tercer grupo cada científico recibió \$10.000 millones. Los científicos del primer grupo recibieron 5 veces más fondos que el segundo ¿Cuántos científicos hay en cada grupo de investigación?

26. En una Fabrica se usan tres maquinas de diferentes modelos y capacidades para desarrollar la producción diaria. Al funcionar simultáneamente las tres maquinas, la producción se realiza en 2 horas. Si la máquina más moderna se avería, las otras dos pueden hacer la producción diaria en 4 horas; si se avería la segunda máquina; las otras dos pueden hacer la producción en 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardara cada máquina en realizar la producción diaria, de manera individual?

27. Un triángulo rectángulo tiene su hipotenusa 7 metros más larga que uno de sus lados, el perímetro del rectángulo es de 392 metros ¿Cual es la longitud de los lados del triángulo?

28. La cantidad de dinero A que resulta al invertir un capital P a una tasa de interés r compuesta anualmente por dos años, está dada por la ecuación  $A = P(1 + r)^2$  Si \$10.000 se invierten a una tasa de interés compuesto anualmente, el capital aumenta a \$12.321 en dos años. ¿De cuánto fue la tasa de interés?

Resolver las siguientes ecuaciones, realizando el procedimiento adecuadamente y justificando las respuestas.

29.  $z^2 + \sqrt{2}z - 2 = 0$

30.  $y^6 - 10y^3 = -21$

31. Demuestre que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es  $-\frac{b}{a}$

32. Para la ecuación  $y^2 - \beta y = -4$  Encontrar el valor de  $\beta$  tal que la ecuación tenga dos soluciones reales repetidas.

Desarrollar el procedimiento apropiado para resolver los ejercicios propuestos.

33.  $2\sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{-(16y + 3)}$

34.  $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{3x - 5}} = \sqrt{2}$

35.  $y^{\frac{3}{1}} - 64 = 0$

$$36. y^{3/2} - 81 = 0$$

$$37. 2\sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{-(16y + 3)}$$

Desarrollar los siguientes ejercicios, verificar la respuesta.

$$38. \frac{5y}{y^2 + 9} = -1$$

$$39. \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-4} = \frac{5}{4}$$

$$40. 1 + y + \frac{2+y}{y-1} = \frac{3}{y-1}$$

En los siguientes ejercicios hallar las soluciones de los polinomios propuestos.

$$41. 3x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$42. x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$43. x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$$

44. La ecuación  $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$  tiene entre sus raíces a  $x = 3$ . Hallar la suma de las otras dos raíces.

45. Un circuito de tres resistencias en paralelo tiene como modelo matemático:  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Para una instalación se debe cumplir las siguientes condiciones: La resistencia dos debe tener 10 ohmios más que la resistencia uno y la resistencia tres debe tener 50 ohmios más que la resistencia uno. Si la resistencia resultante es de 6 ohmios. Cual debe ser el valor de las resistencias componentes.

En los siguientes ejercicios hallar las soluciones de los polinomios propuestos.

$$46. x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

$$47. 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 40 = 0$$

$$48. x^7 - 12x^5 + 48x^3 - 64x = 0$$

$$49. x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$$

50. La ecuación  $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$  tiene entre sus raíces a  $x = 3$ . Hallar la suma de las otras dos raíces.

Dadas las siguientes expresiones, escribirlas como suma de fracciones parciales.

$$51. \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2}$$

$$52. \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}$$

$$53. \frac{3x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

54. Resolver las siguientes inecuaciones.

$$a-) 3 \leq \frac{2x - 3}{5} < 7 \quad b-) 9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$$

$$c-) \frac{7R}{7 + R} > 3$$

Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

$$55. |x + 3| = |2x - 1|$$

$$56. |q| - q = 1$$

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

$$57. \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| > 2$$

$$58. \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| < \frac{1}{10}$$

59. El peso en gramos de llenado de un recipiente que contiene granos, debe cumplir con la siguiente condición:  $\left| \frac{P - 16}{0,05} \right| \leq 1$  donde P es el peso. Se toma un tarro y al pesarlo éste fue de 17 gramos. El tarro cumple con las especificaciones de peso.

Resolver los siguientes ejercicios con su respectivo procedimiento.

$$60. \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$$

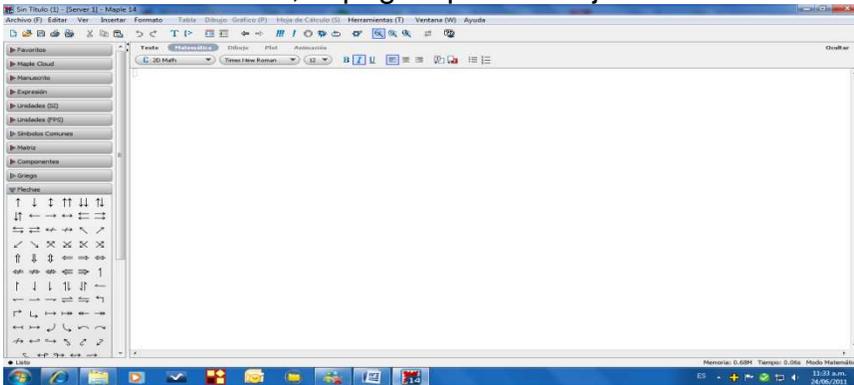
$$61. \frac{(x + 3)^2(x - 4)(x + 5)^2}{x^2 + x - 20} \geq 0$$

62. Hallar la solución grafica del sistema de desigualdades:  $4x + 4y < 6$  y  $y - 2x > 1$

## LABORATORIO

Para desarrollar este laboratorio, debemos tener disponible el software MAPLE.

Se abre el software, la página para trabajar se observa así:

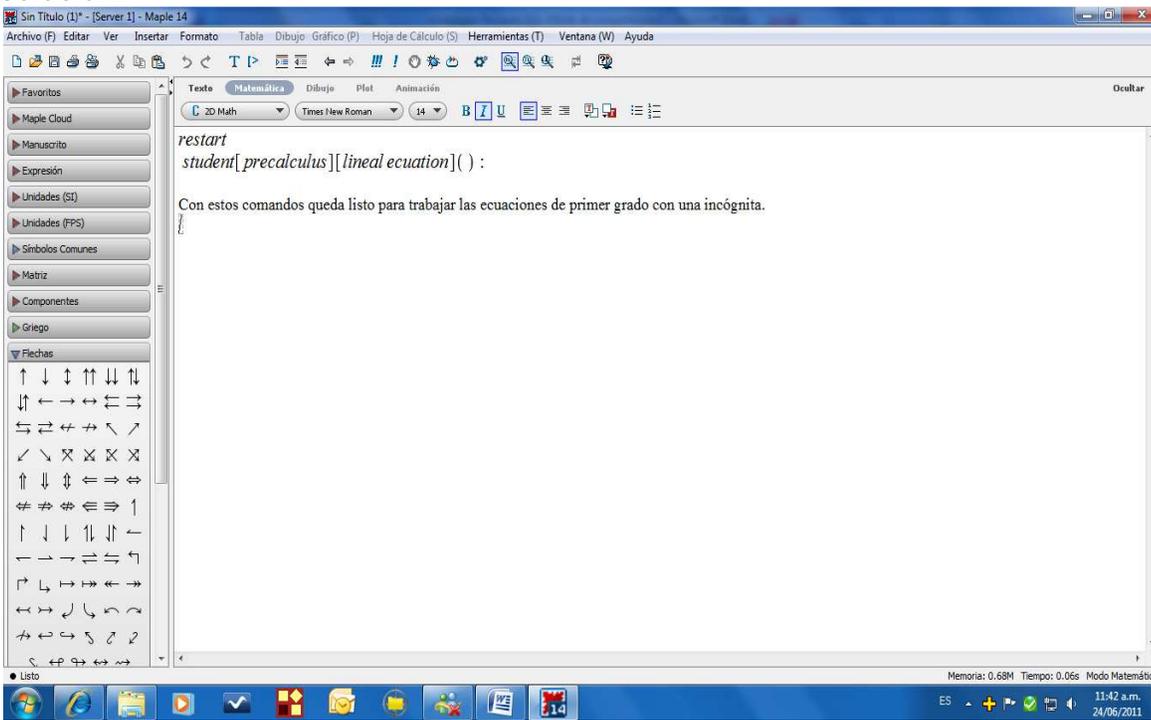


Al pulsar flechas en la parte izquierda, aparece una serie de flechas y símbolos, se pulsa la que se requiera, según la operación a realizar.

Para iniciar se escribe *restart*, lo que indica que podemos iniciar sin problema.

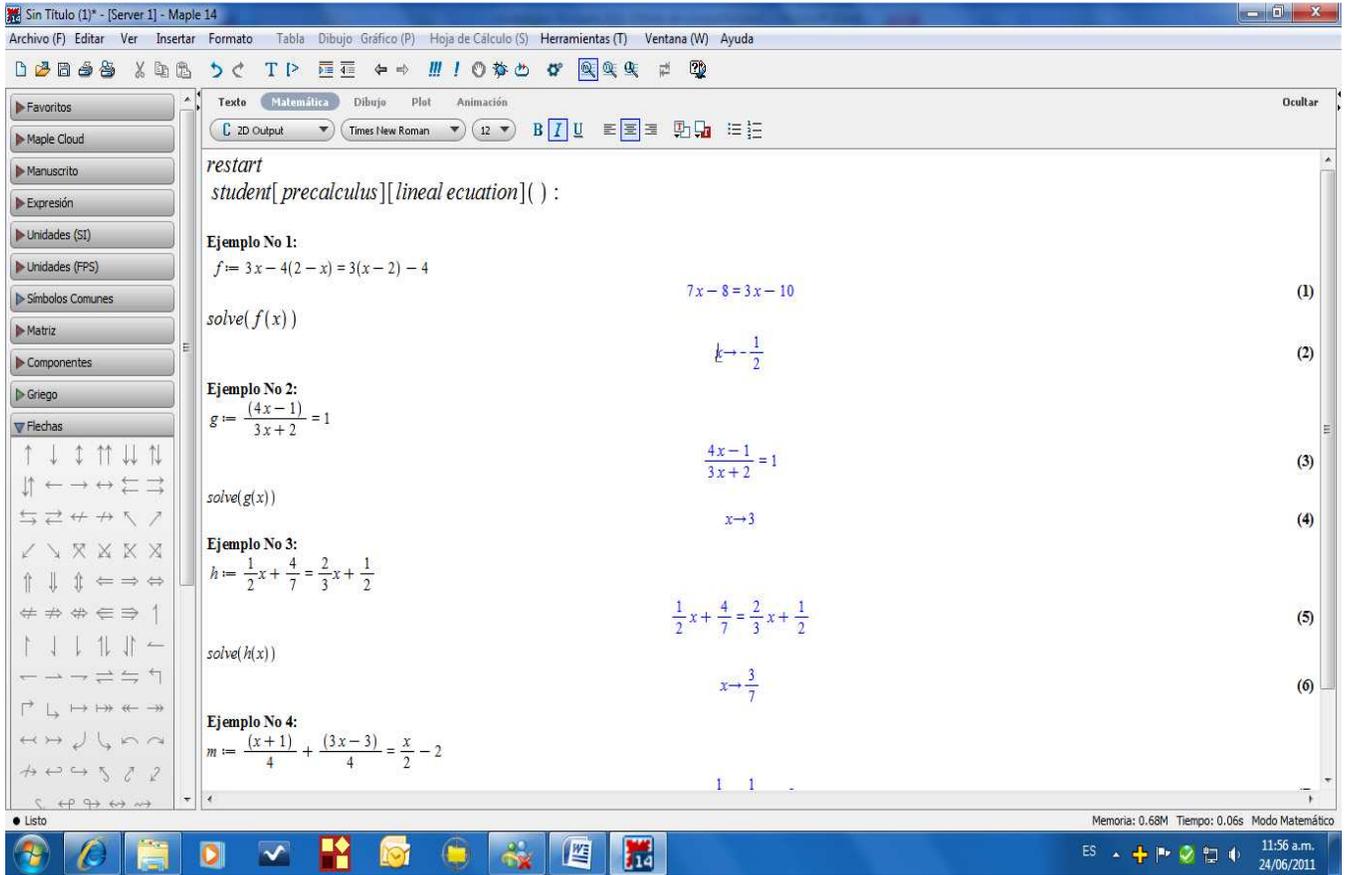
### Ecuaciones:

Ahora para trabajar las ecuaciones, se invoca la librería correspondiente, por ejemplo para ecuaciones lineales de primer grado. *Student[precalculus][lineal ecuacion]()*: Al dar enter, se carga la librería y luego se puede plantear las ecuaciones de este tipo para obtener la solución.



En seguida vamos a resolver tres ejemplos, observar la programación para cada uno.

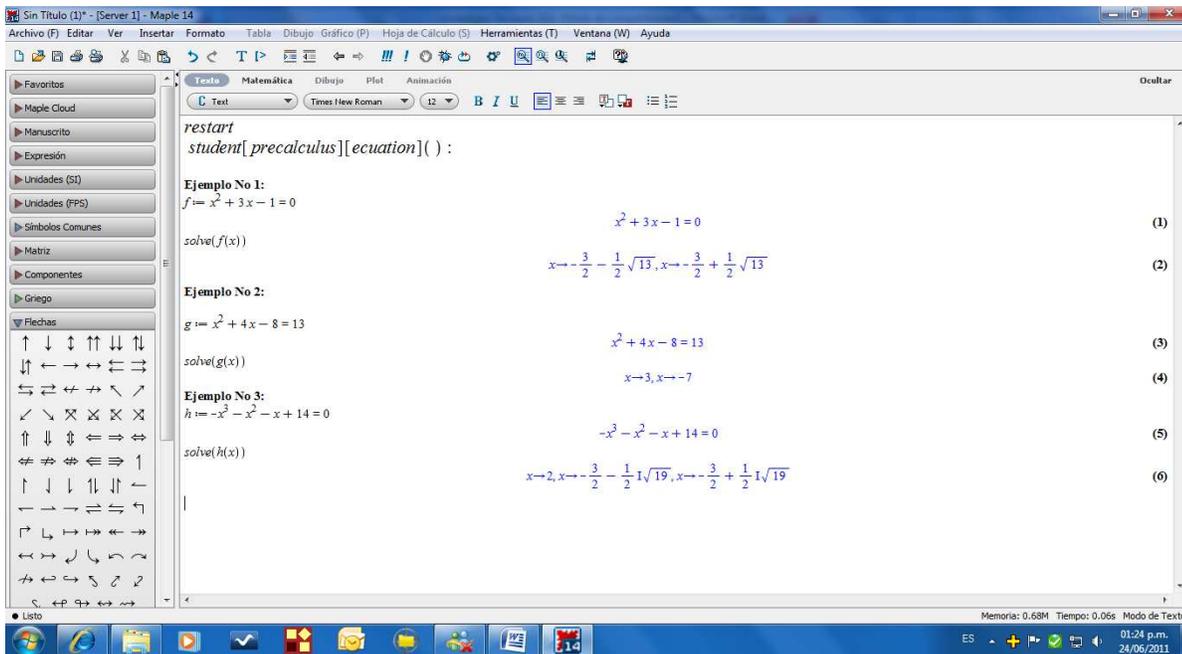
Se escribe la ecuación así:  $f := 3x - 4(2 - x) = 3(x - 2) - 4$  Se pulsa Enter, aparece la ecuación en color azul, en seguida se pide que la resuelva con  $\text{solve}(f(x))$ , enter, aparece la solución en color azul. Así para los demás ejemplos.



### Resolver utilizando Maple:

1.  $3(2 - x) = 2x - 1$
2.  $\frac{1}{2}x - 6 = \frac{3}{4}x + 1$
3.  $\frac{6}{x} + \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$

Para ecuaciones de grado dos o más, se invoca  $\text{Student}[precalculus][ecuacion]()$ : Lo demás igual que en las ecuaciones lineales.

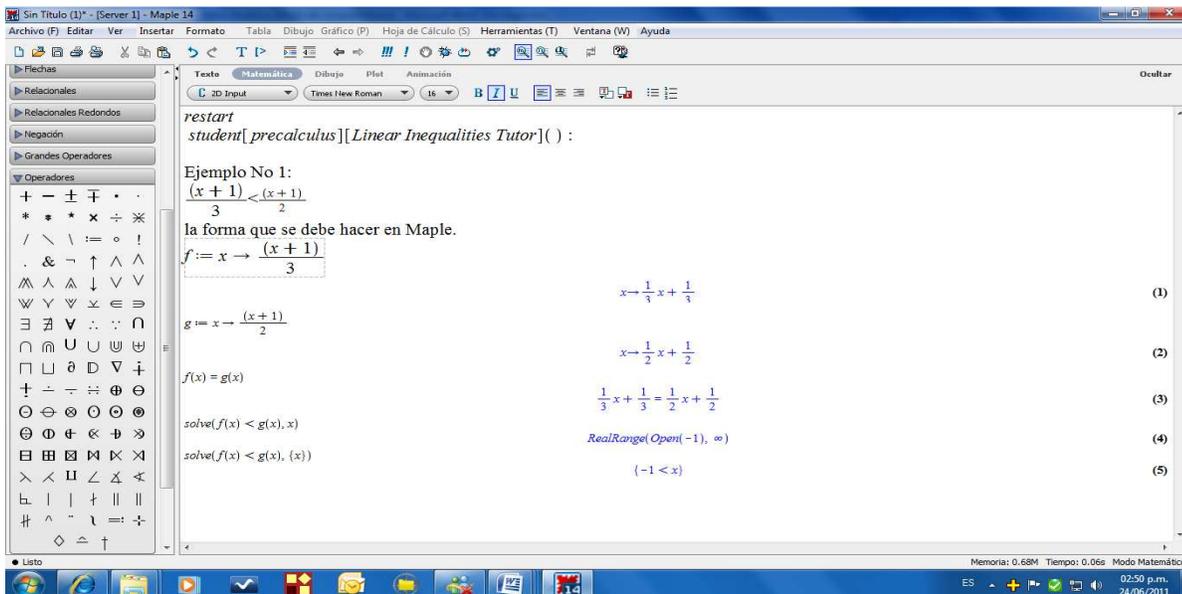


### Resolver utilizando Maple:

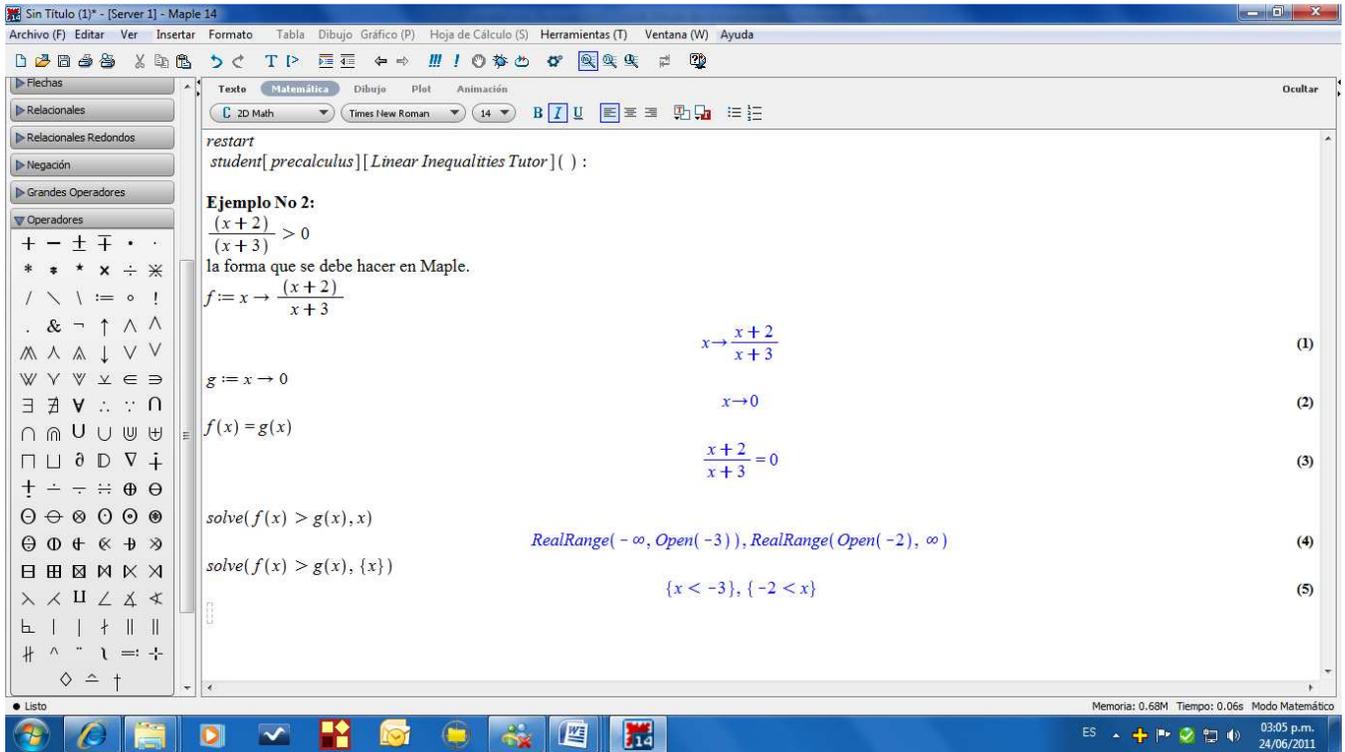
1.  $x^2 + 3x - 1 = 0$
2.  $x^2 + 4x - 8 = 13$
3.  $-x^3 - x^2 - x + 14 = 0$
4.  $\frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

### Inecuaciones:

Para las desigualdades lineales: Inicialmente se receta la hoja de trabajo (*restart*), se invoca la librería: *lineal Inequalities tutor*. Así se puede iniciar el trabajo.



Otro ejemplo:



**Resolver utilizando Maple:**

1.  $x^3 - 2x^2 - 3x \geq 0$

2.  $x^3 > x^2$

3.  $\frac{x+4}{x-2} \leq 1$

4.  $\frac{2x+5}{x+1} > \frac{x+1}{x-1}$

5.  $\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

En la dirección siguiente podemos observar el planteamiento de ecuaciones de primer grado con una incógnita y verificar su solución.

<http://www.terra.es/personal3/frjavier.lamas/mat1/matesol.htm#pr10>

En la dirección siguiente podemos observar el planteamiento de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas y verificar su solución.

<http://www.terra.es/personal3/frjavier.lamas/mat1/SISTEMAS%20DE%20ECUACIONES.htm>

En este sitio debemos registrarnos para hacer laboratorio interactivamente.

<http://132.248.17.238:8080/ejercicios/jsp/paginalnicial.jsp>