

Actividad 12: Lectura Capítulo 8 – Parte 2

Fecha de inicio	Fecha de Cierre
17/OCT/13 00:00	09/NOV/13 23:55

Productorias

Las productorias es un operador matemático muy específico, de gran utilidad en ciencias estadísticas, ciencias económicas y otros, no se conoce un compendio específico para este operador, solo se dan apartes en cursos donde es necesario utilizarlo. Por esto se consideró pertinente darle ese espacio que merecen las productorias,

El operador productoria no es muy conocido, tal vez porque su utilidad es muy limitada, sin embargo este operador es fundamental en muchos temas de matemáticas, por decir un caso "El Factorial" utilizado en estadística para las técnicas de conteo y en Álgebra para el desarrollo de la expansión binomial. Esto es suficiente justificación para que se deba analizar este operador matemático.

Notación de Productoria

Para denotar la productoria se utiliza la letra griega pi \prod

La notación se puede generalizar de la siguiente manera:

$$P = \prod_{i=n}^{n+k} a_i$$

P = La magnitud de la operación productoria

i = El índice del producto, éste varia de n hasta $n + k$.

n = Término inicial de la productoria. (*Límite inferior*)

$n + k$ = Término final de la productoria. (*Límite superior*)

a_i = Valor del término en el punto i .

k = Cantidad de términos a operar en la productoria.

La fórmula establece que el operador productoria consiste en multiplicar los términos a_i dado que i varia de n hasta $n + k$.

Se puede generalizar la definición de la siguiente manera:

$$\prod_{i=n}^m a_i = a_n * a_{n+1} * a_{n+2} * \dots * a_m$$

Siendo $n \leq m$

En este operador es importante identificar el número de factores, el cual se obtiene con la siguiente relación.

$$m - n + 1$$

Propiedades de las productorias

Al igual que las sumatorias, las productorias tiene algunas propiedades, que permiten desarrollar productorias de una manera más ágil.

Propiedad 1:

$$\prod_{i=1}^n kx_i = k^n \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{Para } k = \text{constante y } n \in \mathbb{N}$$

La siguiente propiedad, hace referencia a la productoria del producto.

Propiedad 2:

$$\prod_{i=1}^n [f(i)g(i)h(i)] = \left[\prod_{i=1}^n [f(i)] \right] \left[\prod_{i=1}^n [g(i)] \right] \left[\prod_{i=1}^n [h(i)] \right]$$

También es pertinente la propiedad de cociente. La propiedad expresa que la productoria de un cociente, es igual al cociente de la productoria.

Propiedad 3:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{f(i)}{g(i)} \right) = \frac{\prod_{i=1}^n f(i)}{\prod_{i=1}^n g(i)} \quad \text{Para } \prod_{i=1}^n g(i) \neq 0$$

Existe una propiedad de los logaritmos que esta relacionado con las productorias.

Propiedad 4:

$$\text{Log} \left[\prod_{i=1}^n (x_i) \right] = \sum_{i=1}^n \text{Log} (x_i)$$

Aplicación de las productorias

El factorial

El factorial es un concepto matemático, siendo una herramienta muy importante en campos como el álgebra, el cálculo y la estadística. Estas razones motivan el estudio de los factoriales.

El factorial o producto factorial de un número, es una operación que permite hacer productos secuenciales cuando así se requiera, tal es el caso del desarrollo de combinatorias en el cálculo de probabilidades, el desarrollo de la expansión binomial en los llamados productos notables y otros.

DEFINICIÓN:

Para todo número natural n , el factorial de n es el producto de todos los naturales desde 1 hasta n .

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n - 1) \times n$$

A partir de la definición anterior, el factorial de un número se puede resumir de la siguiente manera:

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

Propiedades del factorial

Dos propiedades importantes acerca de los factoriales:

1. Por definición: $0! = 1$
2. De la definición se infiere: $n! = n \times (n - 1)!$

El operador factorial es pieza fundamental en análisis matemático, en las fórmulas de Taylor y McLaurin, como ejemplos de la utilidad de éste concepto matemático.