Actividad 12: Lectura Capítulo 8 – Parte 1

Fecha de inicio	Fecha de Cierre
17/OCT/13 00:00	09/NOV/13 23:55

Sumatorias

Dentro del estudio de muchos fenómenos de la naturaleza, la formulación del modelo que describe el comportamiento del mismo, puede estar bajo el uso de variables discretas, siendo las sumatorias un insumo fundamental.

Las sumatorias son dos procesos matemáticos muy particulares de gran utilidad en ciencias estadísticas, ciencias económicas y otros. Aún en los fundamentos de Cálculo Integral, las sumatorias son un insumo básico, es común hablar de las muy nombradas *Sumas de Riemman*, como la base de las integrales definidas. En el análisis de series las sumatorias son el pan de cada día. En fin se puede observar que las sumatorias tienen gran utilidad en el mundo de las matemáticas.

La idea de proponer es estudio de las Sumatorias, es con el fin de poderlas utilizar en temáticas que las requieran y que a veces por falta de las mismas, los procesos se detienen un poco y a veces se complican para los estudiantes.

Se ha utilizado un lenguaje muy sencillo y didáctico para que usted estimado estudiante, pueda comprender e interiorizar los principios sobre estas dos temáticas.

Notación de sumatoria

Para denotar la sumatoria se utiliza la letra griega sigma $\sum$ que corresponde a la letra s en el alfabeto español. La notación se puede generalizar de la siguiente manera:

$$\boxed{s = \sum_{i=a}^{a+k} n_i}$$

S = La magnitud de la operación sumatoria

i = El índice de la suma, éste varia de a hasta a + k.

a = Término inicial de la sumatoria. (*Límite inferior*) a + k = Término final de la sumatoria. (*Límite superior*)

n_i = Valor del término en el punto i.

k = Cantidad de términos a operar en la sumatoria.

Existe un caso particular de sumatoria en donde el límite superior es infinito, más conocidas como series, cuya simbología es:

$$\boxed{s = \sum_{i=a}^{\infty} n_i}$$

La temática de series será abordada en cursos superiores, aquí solo se busca que se conozca cual es sus raíz, las sumatorias.Para operar sumatorias es pertinente comprender en primera instancia, los términos a operar y el índice de los mismos.

Teoremas

TEOREMA 1:

$$\sum_{i=1}^{n} c = n * c \qquad \text{Para } n \in Z^+ \text{ y } c = \text{constante}$$

TEOREMA 2:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{Para } n \in Z^+ \text{ y } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

TEOREMA 3:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

TEOREMA 4:

$$\sum_{i=n}^{m} i^2 = \sum_{i=1}^{m} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \qquad \text{Para } n < m$$

TEOREMA 5:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

TEOREMA 6:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Propiedades

Las sumatorias tienen propiedades, que también permiten resolverlas de una manera más analítica. Las demostraciones se pueden hacer por Inducción matemática, lo cual sería pertinente investigar, pero por las metas del curso, éstas se omiten, ya que lo importante es puedan utilizar adecuadamente.

Propiedad 1:

$$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \qquad \text{Para } c = \text{constante y } n \in Z^+$$

Propiedad 2:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Propiedad 3:

$$\sum_{i=p}^{q} i = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2} \qquad \text{Para } p<q \text{ y } n \in Z^+$$

Propiedad 4:

$$\sum_{i=n}^{m} k = (m-n+1) * k \qquad \text{Para } n<m \text{ y } n \in Z^+$$

Propiedad 5:

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2+i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Propiedad 6:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i} = \frac{n}{n+1} \qquad \text{Para } n \in Z^+$$

Aplicación de las sumatorias

Dentro de las muchas aplicaciones de las sumatorias vamos a nombrar algunas de ellas:

La media aritmética

Un ejemplo vivo del uso de las sumatorias es la muy conocida Media Aritmética o Promedio, término muy utilizado en Estadística.

Por definición:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

A partir de esta se pueden obtener dos ecuaciones alternas.

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

y

$$n = \frac{1}{\bar{x}}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Doble sumatoria

En situaciones encontradas de Álgebra Lineal, Economía, Estadística y otras ciencias, se presentan casos donde se debe hacer la suma de n sumas. Dicho de otra forma, sumatorias de series de sumatorias.

En este espacio vamos a analizar la doble sumatoria, la cual se puede expresar de la siguiente manera.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i3} + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{im}$$

Resumiendo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i3} + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{im} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

Lo anterior nos muestra que para este tipo de sumatorias, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

Como conclusión podemos decir que en una doble sumatoria finita, el orden del operador es irrelevante; es decir, no afecta la operación en sus resultado.