Actividad 12: Lectura Capítulo 7

Fecha de inicio	Fecha de Cierre
17/OCT/13 00:00	09/NOV/13 23:55

La recta

De las figuras geométricas la más sencilla es la recta, ya que los parámetros que la caracterizan son en general sencillos y sencillos de obtener. Desde tiempos antiguos se sabe que la distancia más corta entre dos puntos es una recta, lo cual es evidente. De las métricas de distancia la más común es la "Distancia Euclidiana", aunque existen otras que son importantes.

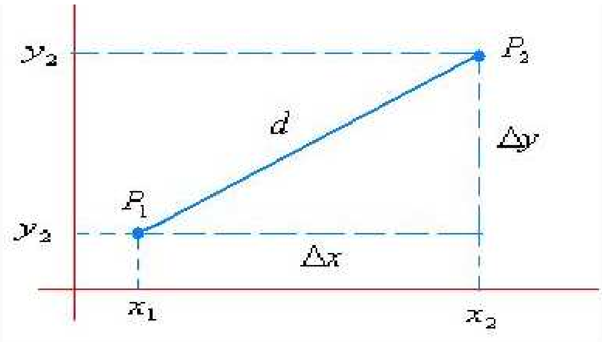
En este capítulo se analizará la recta desde el énfasis de la distancia euclidia entre dos puntos, sus parámetro, su gráfica. Pero además es pertinente hacer el análisis de rectas perpendiculares, rectas paralelas.

Se presentan las temáticas de manera sencilla pero con rigurosidad matemática, para que el estudiante se sumerja en este interesante tema de la recta, será de gran satisfacción.

Distancia Euclidiana

A través de la historia de las Matemáticas, la distancia ha sido un concepto de gran trascendencia por su utilidad, desde la antigüedad se buscaron formas de determinarla. Fue ***EUCLIDES***, el gran matemático nacido en 300 años A: C: en Alejandría (Egipto) quien dio una solución para determinar la distancia entre dos puntos. A partir de conocido teorema de Pitágoras, estableció una técnica para determinar la distancia entre dos puntos.

FUENTE: euler.ciens.ucv.ve/matematicos/images/euclides.gif



Sean los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$.

d = distancia entre P_1 y P_2

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Para señalar la distancia euclidia generalmente se describe como: $d(P_1P_2)$, lo cual se determina por la fórmula anterior. Es pertinente aclarar que $d(P_1P_2) = d(P_2P_1)$.

La recta

En geometría un de los conceptos más importantes es el de La Recta, dar una definición de recta es relativamente fácil, todos conocemos una línea recta, la dibujamos, la construimos, pero busquemos un acercamiento a una definición sencilla pero muy técnica.

DEFINICIÓN:

Una recta es una sucesión de puntos colineales; es decir, puntos ubicados uno tras otro de tal manera que uno esconde al anterior cuando se observa la fila de frente.: El concepto de colineal, se puede explicar diciendo que cada punto de línea recta no se sale de la línea.

Parámetros de la Recta:

Toda recta tiene una serie de puntos que satisfacen una Ecuación, unos parámetros, una ecuación canónica y una general, además de una gráfica.

Los parámetros de la recta son:

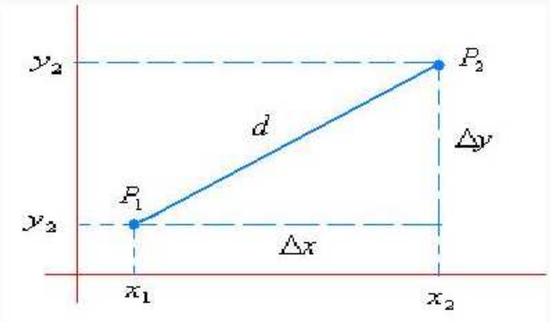
- ***La Pendiente***: Se simboliza con la letra *m*, esta relacionado con la inclinación que tiene la recta respecto al eje x. Para determinar la pendiente de una recta se requiere solo de dos puntos. Como una recta presenta desplazamiento respecto a los ejes x e y, la pendiente la determina la relación de éstos.

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Δy = Desplazamiento en el eje y

Δx = Desplazamiento en el eje x

Observando la gráfica, se puede determinar que las coordenadas de los puntos son:



$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Identificando dos puntos, se puede determinar la pendiente de cualquier recta.

Según el valor de la pendiente (**m**), la recta puede tomar varios comportamientos:

Cuando **m > 0:** La recta presenta inclinación hacia la derecha, (positiva) es decir, el ángulo es agudo ($0<\theta<\pi/2$)

Cuando **m < 0:** La recta presenta inclinación hacia la izquierda (negativa), es decir, el ángulo es obtuso. ($\pi/2<\theta<\pi$)

Cuando **m = 0:** La recta es horizontal, luego el ángulo es cero $\theta = 0$.

Cuando **m = α.** Se presenta una indeterminación, la recta es vertical. $\theta = \pi/2$

El Intercepto: Se simboliza con la letra b, está relacionado con el punto donde la recta corta al eje y. En la ecuación canónica éste corresponde al término independiente, en la ecuación general, para identificarlo, se debe despejar la variable y.

Ecuación de la recta

Como se dijo en la parte inicial de este trema la recta tiene dos tipos de ecuación, vamos a analizar cada una.

-***Ecuación Canónica***: Llamada también ecuación analítica, ya que por medio de ésta se puede inferir el comportamiento de la recta.

$$\boxed{y = mx + b}$$

La ecuación muestra una pendiente m, un intercepto b y una serie de puntos (x, y) que satisfacen dicha recta.
- ***Ecuación General:*** Es una ecuación de primer grado, de la forma:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

En esta ecuación no se ve explícitos los parámetros de la recta, se debe despajar la variable y para poderlos visualizar.

A través de algunos ejemplos modelos, vamos a profundizar e interiorizar lo referente a la recta.

Ecuación Punto Pendiente: En diversas ocasiones se trabaja con la conocida ecuación punto pendiente, donde los parámetros son la pendiente y un punto conocido de la recta.

Este tipo de ecuación es de la forma: $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ Para $P(x_1, y_1)$

Rectas paralelas

Del concepto básico sobre la recta, esta aquel que dice que dos rectas son paralelas cuando tiene el mismo ángulo, o cuando para todo x, la distancia entre ellas siempre es igual.

TEOREMA:

Dos rectas no - verticales son paralelas si, y solo si, estas tienen la misma pendiente, es decir, $m_1 = m_2$ para: $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$

Rectas perpendiculares

Cuando dos rectas se cortan en algún punto, estas NO son paralelas, pero si las rectas se cortan de tal manera que el ángulo entre ellas es de π/2, se dice que las rectas son perpendiculares.

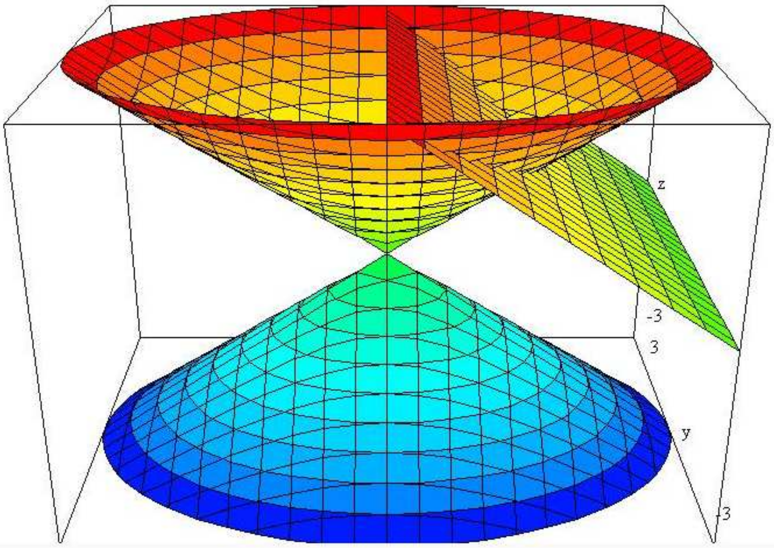
TEOREMA:
Dos rectas L1 y L2 cuyas pendientes son m1 y m2 respectivamente, son perpendiculares si, y solo si, m1x m2 = -1

La parábola

La parábola es una figura que describe diversos fenómenos, como la trayectoria de un balón, la forma de las antenas de señales de televisión por cable, la trayectoria de un tejo en nuestro deporte autóctono y otros. Se forma cuando el cono es cortado por el plano de corte de manera sesgada.

DEFINICIÓN:

La parábola es un conjunto de puntos en el plano (x, y) que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo F llamado foco y una recta D llamada directriz.



Los parámetros de la parábola son:

Vértice V(h, k): Donde la curva se divide en dos partes iguales.

Foco: F: El punto fijo a una distancia p del vértice.

Eje de Simetría: Una recta que para por el vértice y es perpendicular a la directriz.

Directriz D: Recta ubicada a la misma distancia que el foco pero en sentido contrario.

Ecuación de la parábola

Ecuación Canónica: (Eje de Simetría vertical)

Para una parábola la ecuación canónica esta soportada por el siguiente teorema:

Toda parábola con eje de simetría vertical y vértice en el origen, tiene como ecuación canónica:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Ecuación Canónica: (Eje de Simetría horizontal)

Para una parábola la ecuación canónica esta soportada por el siguiente teorema:

Toda parábola con eje de simetría horizontal y vértice en el origen, tiene como ecuación canónica:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

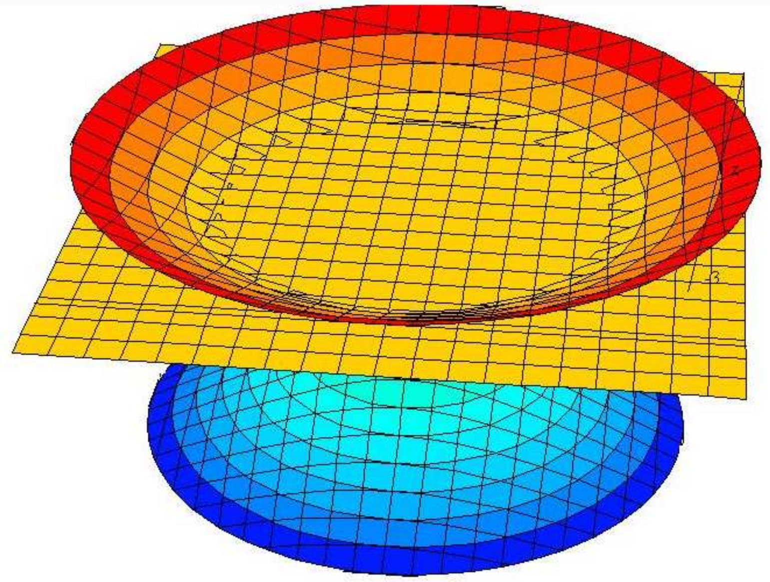
ECUACIÓN CANÓNICA	EJE DE SIMETRIA	VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	RAMAS
$x^2 = 4py$	x = 0	V(0, 0)	F(0, P)	y = -P	P>0: Hacia arriba P<0. Hacia abajo
$y^2 = 4px$	y = 0	V(0, 0)	F(P, 0)	x = -P	P>0: Hacia derecha P<0. Hacia izquierda

La circunferencia

Por geometría básica se sabe que la circunferencia es el perímetro del círculo, ésta no tiene área, solo longitud y los parámetros que la identifican. La circunferencia se forma cuando el plano corta horizontalmente el cono.

DEFINICIÓN:

La circunferencia es un conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano que equidistan a un punto fijo llamado centro. La distancia fija se le llama radio.



Los parámetros de la circunferencia son:

Centro: La coordenada en x se le denomina h y la de y se le denomina k. C(h, k)

Radio: Es la distancia del centro a cualquier punto de la misma, se representa por R.

Otros parámetros de la circunferencia, que no inciden directamente con la ecuación son:

Diámetro: D = 2R

Longitud: L = 2πR

Con los conceptos dados, se puede inferir que la circunferencia queda descrita por medio de su centro, su radio y el conjunto de puntos que la conforman.

Ecuación de la circunferencia

Para una circunferencia de centro en el origen de coordenadas (h, k) = (0, 0) y radio R, la ecuación canónica es de la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

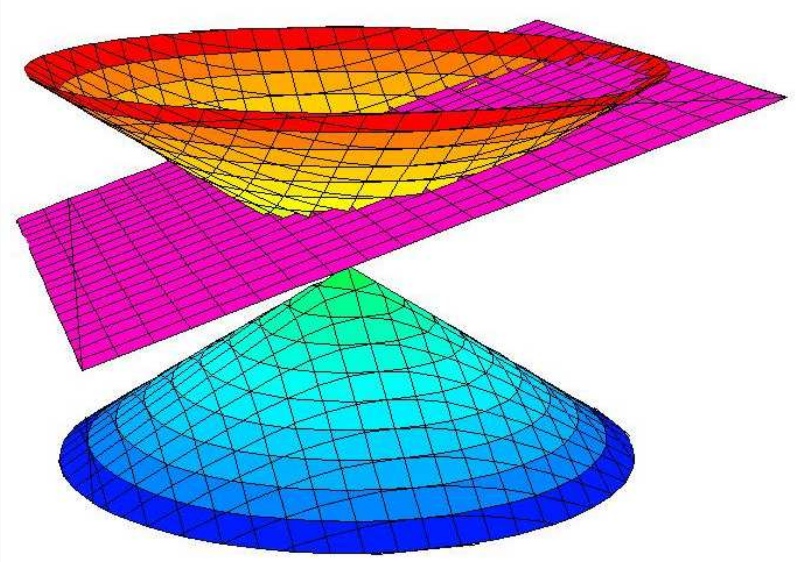
La elipse

Hemos escuchado sobre el movimiento elíptico, de la tierra, del electrón y de otros fenómenos, pero la pregunta sería ¿Como es la descripción matemática de esta figura geométrica?

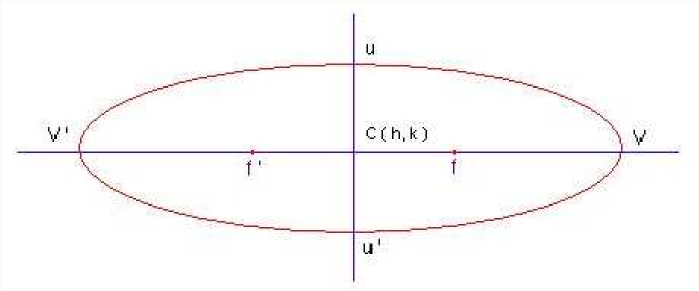
La elipse es una curva ovalada, que se asemeja a una circunferencia alargada, se obtiene cuando el plano corta el cono de manera sesgada.

DEFINICIÓN:

La elipse es un conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante



Al igual que la circunferencia, la elipse tiene los parámetros que la caracterizan, los cuales se describen a continuación.



Los parámetros de la elipse son:

Centro: C (h, k)

Vértices mayores: V y V'

Vértices menores: u y u'

Focos: f y f'

Eje mayor: 2a (Distancia V V ‘)

Eje menor: 2b (Distancia u u ‘)

Por definición: 2a > 2b

Ecuación de la elipse

Ecuación Canónica: (Con eje mayor en x)

La ecuación canónica de la elipse con centro en C(0, 0) y eje mayor sobre la coordenada *x* es de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación Canónica: (Con eje mayor en y)

La ecuación canónica de la elipse con centro en C(0, 0) y eje mayor sobre la coordenada *y* es de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

EXCENTRICIDAD:

El concepto de excentricidad es usado para describir la forma de la curva, haciendo una relación de cociente entre la longitud del foco y la longitud del eje mayor. Esto nos permite determinar si la elipse es aplanada o abombada.

La excentricidad se define como:

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$$

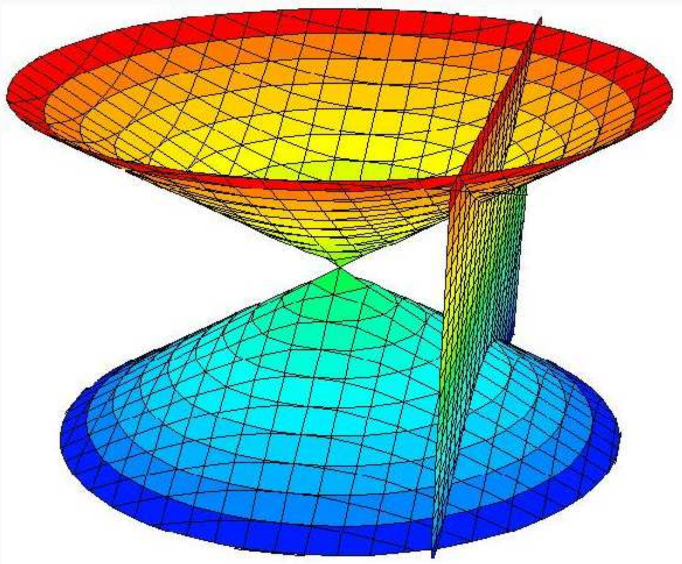
Para la elipse la excentricidad esta entre 0 y 1. ($0 < e < 1$). Cuando $e \to 0$ la elipse es casi circular, cuando $e \to 1$ la elipse es casi plana. ($\to$ significa tiende o se acerca a...)
Para la circunferencia la excentricidad es cero ($e = 0$), esto significa que cuando $e = 0$, la figura es concéntrica. Lo anterior quiere decir que si $a = b$, entonces $c = 0$, obteniendo así una circunferencia.

La hipérbola

Para entender la hipérbola se puede hacer una analogía con la elipse, donde partimos ésta última por el eje menor y la invertimos. La hipérbola se obtiene cuando el plano de corte se para vertical por las esquinas de los conos invertidos.

DEFINICIÓN:

La Hipérbola es un conjunto de puntos en el plano (x, y) cuya diferencia a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Los parámetros de la Hipérbola son:

Centro: C(h, k). Equidistante a los vértices

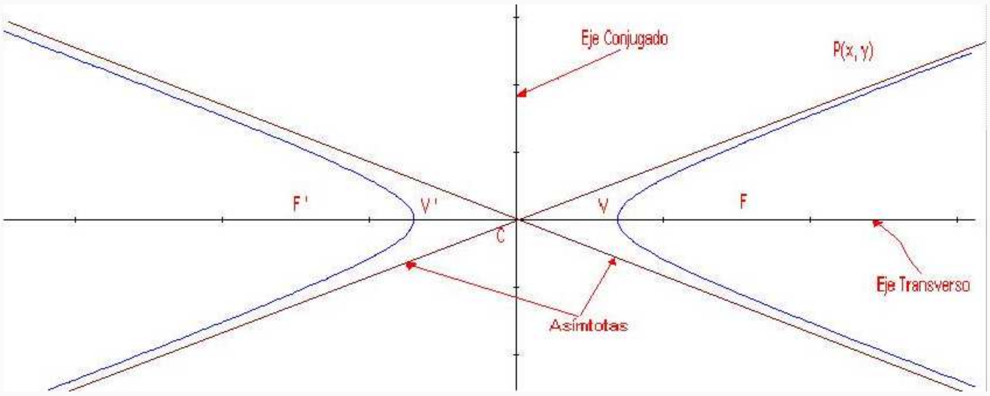
Vértices V y V' Donde las curvas se divide en dos partes iguales.

Focos: F y F' : Los puntos fijos.

Eje Transverso: Una recta que para por los vértices y por los focos.

Eje Conjugado: En una recta perpendicular al eje transverso y para por el centro.

Asíntotas: Dos rectas que paran por el centro delimitan las curvas de la hipérbola.



Ecuación de la hipérbola

Ecuación Canónica: (Eje transverso horizontal)

La ecuación canónica de la hipérbola con eje transverso horizontal, esta soportada por el siguiente teorema:

Toda hipérbola con eje transverso paralelo al eje de las abscisas y centro en el origen de coordenadas, tiene como ecuación:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación Canónica: (Eje transverso vertical)

La ecuación canónica de la hipérbola con eje transverso vertical, esta soportada por el siguiente teorema:

Toda hipérbola con eje transverso paralelo al eje de las ordenadas y centro en el origen de coordenadas, tiene como ecuación:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

ASÍNTOTAS:

En la hipérbola se conocer dos rectas oblicuas que pasan por centro de la hipérbola, cuya función es orientan la curvatura de la figura. La obtención de la ecuación de dichas rectas, se hace a partir de la ecuación canónica. La obtención de la ecuación se hace despejando la variable y en la canónica.