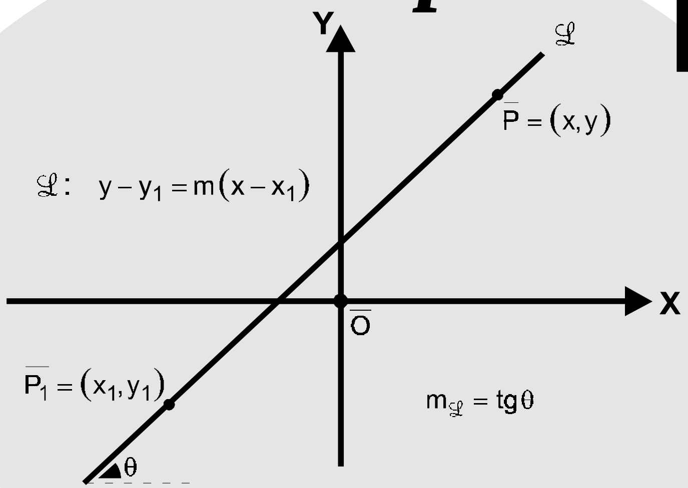
Capítulo 3



LA LÍNEA RECTA

20 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $\overline{A} = (4,2)$ y $\overline{B} = (-5,7)$.

Solución:

Sea $\mathscr{L}$ la recta buscada.

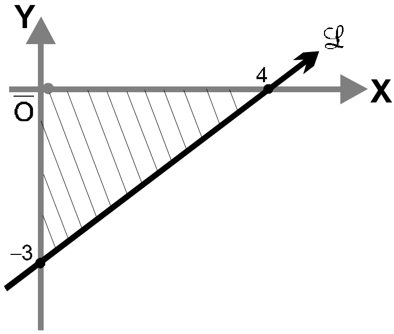
Dado que se conocen dos puntos de la recta, se puede conocer su pendiente.

$$\mathscr{L}:\ \begin{cases} \overline{A} = (4,2) \\ \overline{B} = (-5,7) \end{cases} \Rightarrow\ m_{\mathscr{L}} = m_{\overline{AB}} = \frac{7-2}{-5-4} = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore\ \mathscr{L}:\ y - 2 = -\frac{5}{9}(x-4) \Leftrightarrow \boxed{\mathscr{L}:\ 5x + 9y - 38 = 0}$$

21 Calcular el área del triángulo que forma la recta $3x-4y-12=0$ con los ejes coordenados.

Solución:



◦ ‹ : $3x-4y-12=0$

Luego :

◦ ‹ : $3x-4y=12$

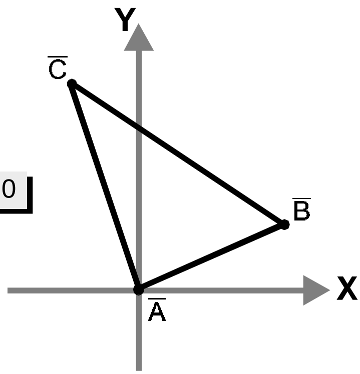
Dividiendo $\times 2$:

◦ ‹ : $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$

ˆ $A_\Delta=\dfrac{|4\times(-3)|}{2}=\dfrac{12}{2} \Leftrightarrow \boxed{A_\Delta=6u^2}$

22 Los vértices de un triángulo son $\overline{A}=(0,0)$, $\overline{B}=(4,2)$ y $\overline{C}=(-2,6)$. Obtener las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del triángulo.

Solución:



◦ Ecuación de $\overline{AB}$:

$\overline{AB}: \begin{cases} \overline{A}=(0,0) \\ \overline{B}=(4,2) \end{cases} \Rightarrow m_{\overline{AB}}=-\dfrac{1}{2}$

ˆ $y-0=-\dfrac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow \boxed{x-2y=0}$

◦ Ecuación de $\overline{BC}$:

$\overline{BC}: \begin{cases} \overline{B}=(4,2) \\ \overline{C}=(-2,6) \end{cases} \Rightarrow m_{\overline{BC}}=-\dfrac{2}{3}$

ˆ $y-2=-\dfrac{2}{3}(x-4) \Leftrightarrow \boxed{2x+3y-14=0}$

- Ecuación de $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}: \begin{cases} \overline{A} = (0,0) \\ \overline{B} = (-2,6) \end{cases} \Rightarrow m_{\overline{AC}} = -3$$

$$\therefore \quad y - 0 = -3(x - 0) \iff \boxed{3x + y = 0}$$

23 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $\overline{A} = (4, 8/3)$ y por la intersección de las rectas $3x - 4y - 2 = 0$, $9x - 11y - 6 = 0$

Solución:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} \overline{A} = (4, 8/3) & \text{Un punto de la recta} \\ \left.\begin{aligned} \mathcal{L}_1&: \ 3x - 4y - 2 = 0 \\ \mathcal{L}_2&: \ 9x - 11y - 6 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \overline{B} = (2/3, 0) \end{cases}$$

Luego :

$$\mathcal{L}: \quad y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Donde}: \quad m_{\mathcal{L}} = m_{\overline{AB}} = \frac{0 - 8/3}{2/3 - 4} = \frac{4}{5}$$

Finalmente :

$$\mathcal{L}: \quad y - \frac{8}{3} = \frac{4}{5}(x - 4) \iff \boxed{\mathcal{L}: \quad 12x - 15y - 8 = 0}$$

24 Si la recta $ax + by + c = 0$ pasa por el punto $\overline{P} = (p, q)$, escribir una ecuación en forma de:

a) pendiente y ordenada en el origen.

b) punto - pendiente.

c) simétrica.

Solución:

a) $\mathcal{L}: \quad ax + by + c = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}}$

b) $\mathcal{L}: \quad ax+by+c=0; \quad$ donde: $\quad m_{\mathcal{L}} = -\dfrac{a}{b}; \quad P=(p,q)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}: \quad y-q=-\frac{a}{b}(x-p)}$$

c) $\mathcal{L}: \quad ax+by+c=0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}: \quad ax+by=-c$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}: \quad \frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1}$$

25 Encontrar la ecuación de una recta que tiene intercepciones iguales y que pasa por el punto $\overline{A}=(8,-6)$

Solución:

Sea: $\quad \mathcal{L}: \quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1 \quad$ Pero: $\quad \overline{A}=(8,-6) \in \mathcal{L}$

Luego: $\quad \dfrac{8}{a}+\dfrac{-6}{a}=1 \quad \Rightarrow \quad a=2$

$\therefore \quad \mathcal{L}: \quad \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}: \quad x+y-2=0}$

26 Desde el punto $\overline{M_0}=(-2,3)$ se ha dirigido hacia el eje OX un rayo de luz con una inclinación de un ángulo α, se sabe que $tg\alpha=3$. El rayo se ha reflejado del eje OX. Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los rayos incidente y reflejado.

Solución:

- Ecuación del rayo incidente:

  pendiente: $\quad m=tg\alpha=3$

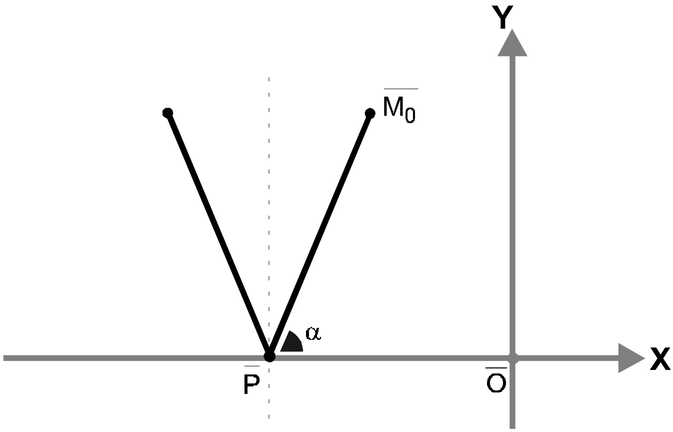
  $\Rightarrow \quad y-3=3(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{3x-y+9=0}$

- Ecuación del rayo reflejado :

Si $\quad y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3\,; \quad \overline{P_0}=(-3{,}0)$

pendiente : $\quad m=\operatorname{tg}(180^{\circ}-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha=-3$

$\Rightarrow \quad y-0=-3(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{3x+y+9=0}$



27 Dados los puntos $\overline{M}=(2{,}2)$ y $\overline{N}=(5,-2)$. Hallar en el eje de abscisas un punto $\overline{P}$ de modo que en el ángulo $\widehat{MPN}$ sea recto.

Solución:

Dado que :

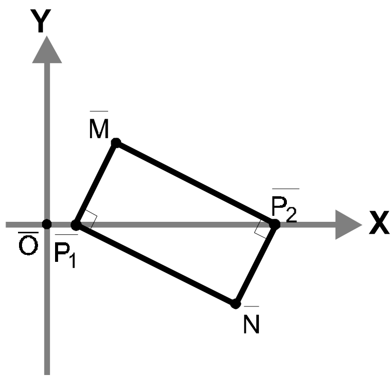
$\overline{MP}\perp\overline{NP} \quad \Leftrightarrow \quad m_{\overline{MP}}\cdot m_{\overline{NP}}=-1$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-2}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{2}{x-5}\right)=-1$$

Efectuando operaciones :

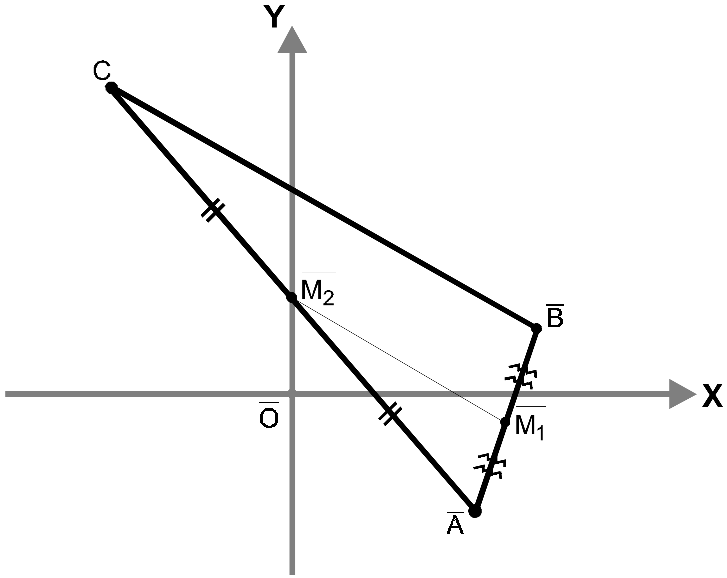
$$x^2-7x+6=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=1 \end{cases}$$

ˆ $\quad \boxed{\overline{P_1}=(6{,}0)\,; \quad \overline{P_2}=(1{,}0)}$



28 Los puntos $\overline{A}=(3,-2)$, $\overline{B}=(4,1)$ y $\overline{C}=(-3,5)$ son los vértices de un triángulo. Demostrar que la recta que pasa por los puntos medios de los lados AB y CD es paralelo a la base BC del triángulo.

Solución:



- Cálculo de $\overline{M_1}=(x_1,y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{7}{2} \\ y_1=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \overline{M_1}=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

- Cálculo de $\overline{M_2}=(x_2,y_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{x_A+x_C}{2}=0 \\ y_2=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \overline{M_2}=\left(0,\frac{3}{2}\right)$$

Sabemos que : $\overline{BC} * \overline{M_1M_2} \Leftrightarrow m_{\overline{BC}} = m_{\overline{M_1M_2}} \Leftrightarrow -\frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$

Luego efectivamente : $\boxed{\overline{BC} * \overline{M_1M_2} \quad \text{LQQD}}$

29 Calcular la distancia entre las rectas paralelas: $x + 2y + 4 = 0$ y $2x + 4y - 5 = 0$

Solución:

Dado que :

$‹_1: \; x + 2y + 4 = 0 \quad \wedge \quad ‹_2: \; 2x + 4y - 5 = 0$

Hallamos un punto cualesquiera $\overline{P}$, de la recta $‹_1$.

Para $x = 0 \Rightarrow y = -2$ ˆ $\overline{P} = (0, -2)$

Luego :

ˆ $d = \frac{|(2)(0) + (4)(-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|-8-5|}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{13}{\sqrt{20}} \approx 2.90}$