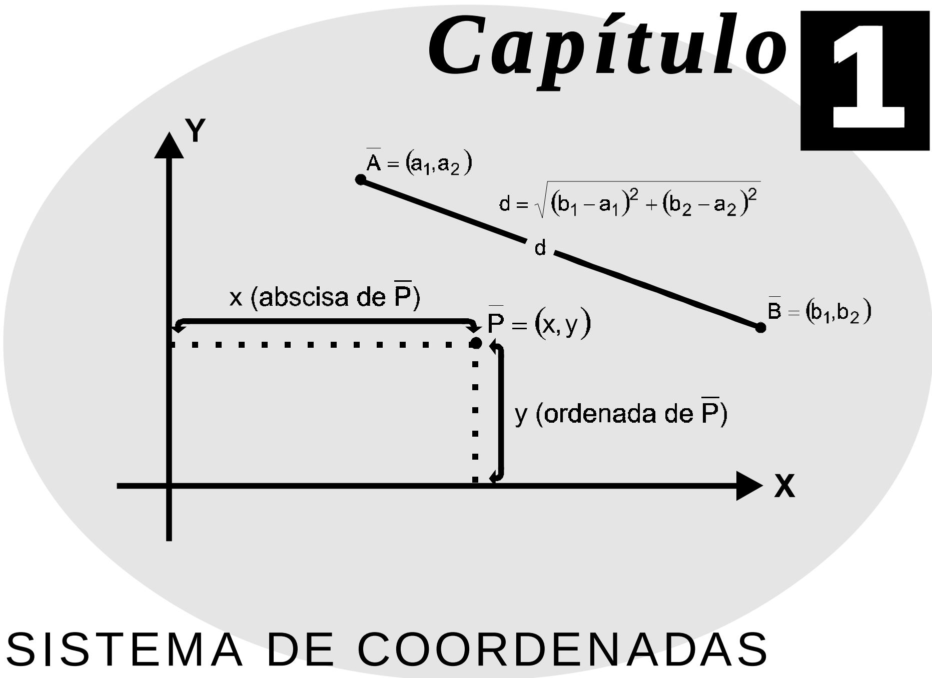
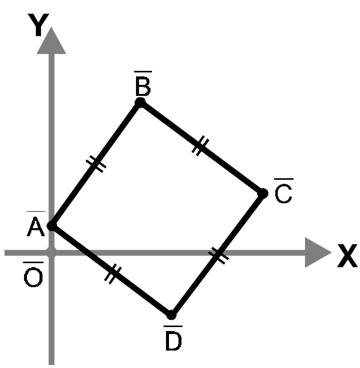
Capítulo 1



SISTEMA DE COORDENADAS

1 Demostrar que los puntos $\overline{A} = (0,1)$ y $\overline{B} = (3,5)$; $\overline{C} = (7,2)$ y $\overline{D} = (4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.

Solución:



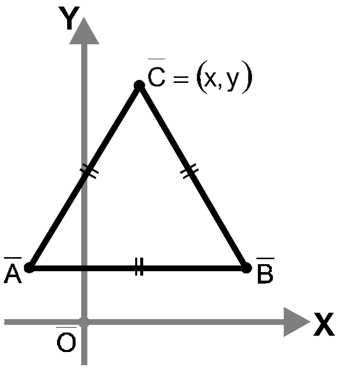
- $|AB| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $|BC| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $|AD| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $|CD| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Como : $|AB| = |BC| = |AD| = |CD| = 5$

$\therefore$ ABCD es un cuadrado. LQQD

2 Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $\overline{A} = (-1,1)$ y $\overline{B} = (3,1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos casos).

Solución:



Sea $\overline{C} = (x,y)$ el tercer vértice.

∘ $|BC| = |AC|$

➡ $\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} =$

$= \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \longrightarrow$ ①

∘ $|BC| = |AB|$

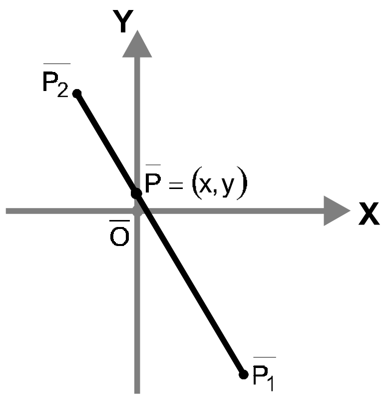
➡ $\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{16} \longrightarrow$ ②

De ① y ②: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

∴ $\boxed{\overline{C} = \left(1, 1 \pm 2\sqrt{3}\right)}$

3 Dados los puntos $\overline{P_1} = (2,-3)$ y $\overline{P_2} = (-1,2)$ encontrar sobre $\overline{P_1P_2}$ el punto que diste doble de $\overline{P_1}$ que $\overline{P_2}$.

Solución:



Sea $\overline{P} = (x,y)$ el punto pedido.

➡ $r = \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{P_2P}} = \dfrac{2}{1} = 2$

∘ $x = \dfrac{x_1 + r\,x_2}{1+r} = \dfrac{2 + 2(-1)}{1+2} =$

$= \dfrac{2-2}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$ ➡ $x = 0$

∘ $y = \dfrac{y_1 + r y_2}{1+r} = \dfrac{-3+2(2)}{1+2} = \dfrac{-3+4}{3} = \dfrac{1}{3}$ ➡ $y = \dfrac{1}{3}$

ˆ $\boxed{\overline{P} = (x, y) = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)}$

4 El lado de un rombo es igual a $5\sqrt{10}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos $\overline{P} = (4,9)$ y $\overline{Q} = (-2,1)$. Calcular el área de este rombo.

Solución:

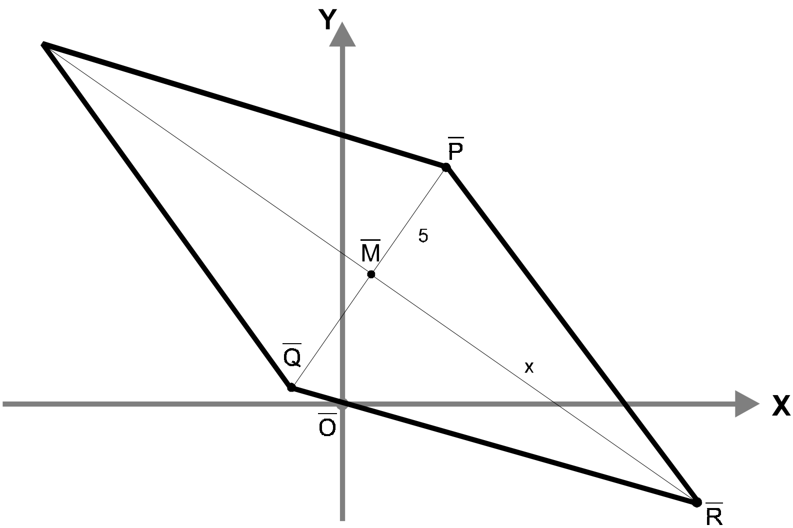
$\left|PQ\right| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

◺ PMR:

∘ $x^2 = \left(5\sqrt{10}\right)^2 - 5^2 = 250 - 25$ ➡ $x^2 = 225$ ➡ $x = 15$

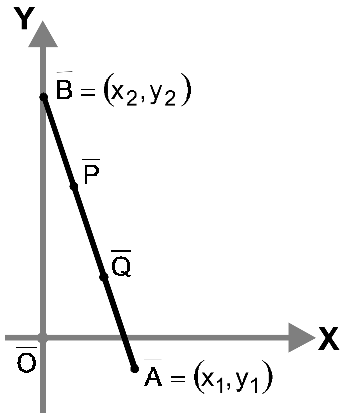
Luego:

$A = \dfrac{D \times d}{2} = \dfrac{30 \times 10}{2} = 150$ ➡ $\boxed{A = 150\ m^2}$



5 Determinar las coordenadas de los extremos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $\overline{P}=(2,2)$ y $\overline{Q}=(1,5)$.

Solución:



- Cálculo de $\overline{A}=(x_1,y_1)$:

➡ $r=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PQ}}=1$

➡ $\begin{cases} 2=\dfrac{1+x_1}{2} & \Rightarrow \quad x_1=3 \\ 2=\dfrac{y_1+5}{2} & \Rightarrow \quad y_1=-1 \end{cases}$

ˆ $\boxed{\overline{A}=(3,-1)}$

- Cálculo de $\overline{B}=(x_2,y_2)$:

➡ $r=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QB}}=1$ ➡ $\begin{cases} 1=\dfrac{2+x_2}{2} & \Rightarrow \quad x_2=0 \\ 5=\dfrac{2+y_2}{2} & \Rightarrow \quad y_2=8 \end{cases}$

ˆ $\boxed{\overline{B}=(0,8)}$

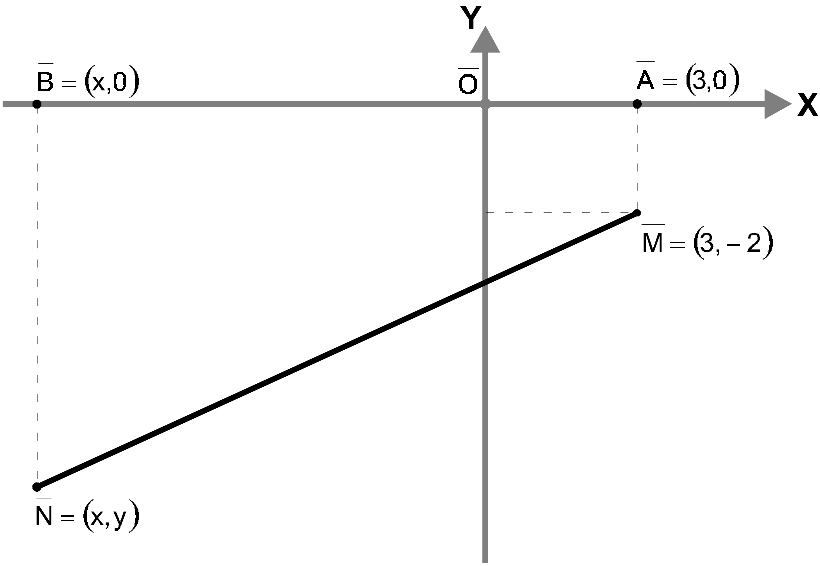
6 La longitud del segmento $\overline{MN}$ es igual a 13; su origen está en el punto $\overline{M}=(3,-2)$; la proyección sobre el eje de abscisas es igual a -12. Hallar las coordenadas del otro extremo del segmento, si forma con el eje de ordenadas un ángulo dado.

Solución:

- Si $\overline{AB} = -12$ ➡ $x - 3 = -12$ ➡ $x = -9$

- Si $\overline{MN} = 13$ ➡ $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 13$ ➡ $y = -7$

ˆ $\boxed{\overline{N} = (x, y) = (-9, -7)}$



7 Tres de los vértices de un paralelogramo son $\overline{A} = (-1,4)$, $\overline{B} = (1,-1)$ y $\overline{C} = (6,1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6. ¿Cuál es su abscisa?

Solución:

Sea $\overline{D} = (x,6)$ el punto pedido.

- $|AD| = |BC|$ ➡ $\sqrt{(x+1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (1+1)^2}$

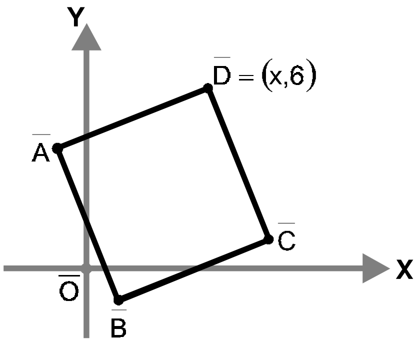
Efectuando operaciones:

- $x^2 + 2x - 24 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ \cancel{x_2 = -6} \end{cases}$$

Luego :

- $\overline{D} = (x,6) \Rightarrow \boxed{\overline{D} = (4,6)}$



8 El punto medio de cierto segmento es el punto $\overline{M} = (-1,2)$ y uno de sus extremos es el punto $\overline{N} = (2,5)$. Hallar las coordenadas del otro extremo.

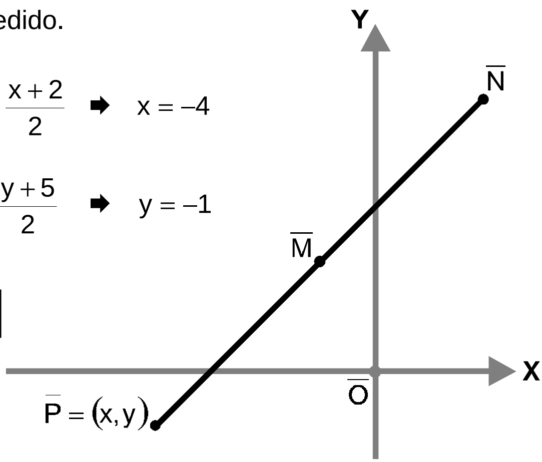
Solución:

Sea $\overline{P} = (x,y)$ el punto pedido.

- $x_M = \dfrac{x + x_N}{2} \Rightarrow -1 = \dfrac{x+2}{2} \Rightarrow x = -4$

- $y_M = \dfrac{y + y_N}{2} \Rightarrow 2 = \dfrac{y+5}{2} \Rightarrow y = -1$

ˆ $\boxed{\overline{P} = (x,y) = (-4,-1)}$



9 Los vértices de un triángulo ABC son $\overline{A} = (2,-1)$, $\overline{B} = (-4,7)$ y $\overline{C} = (8,0)$. Calcular las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.

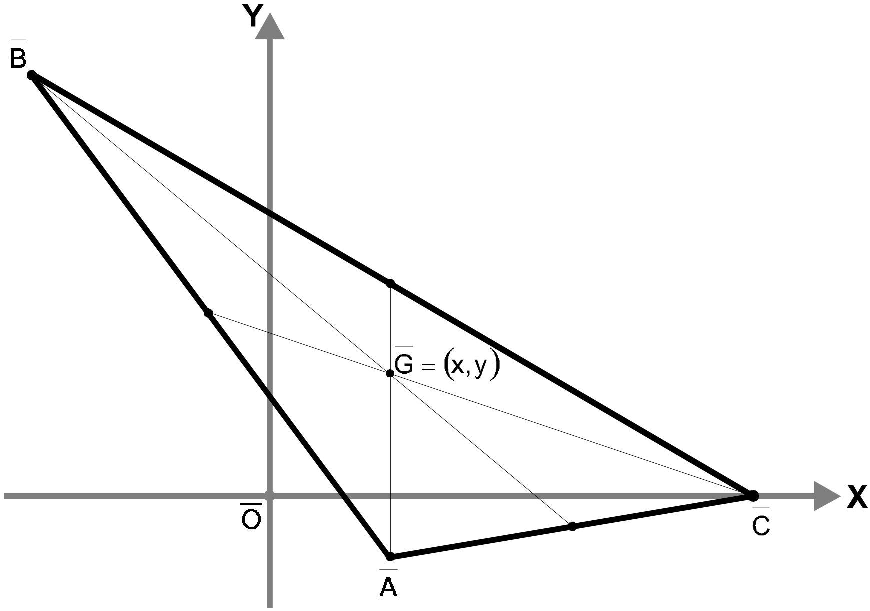
Solución:

Sabemos que :

- $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ ➡ $x = \dfrac{2 - 4 + 8}{3}$ ➡ $x = \dfrac{6}{3} = 2$

- $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ ➡ $y = \dfrac{-1 + 7 + 0}{3}$ ➡ $y = \dfrac{6}{3} = 2$

ˆ $\boxed{\overline{G} = (x, y) = (2, 2)}$



10 ¿Hasta qué punto debe prolongarse el segmento que une los puntos $\overline{A} = (1, -1)$ y $\overline{B} = (4, 5)$ en la dirección AB, para que su longitud se triplique?

Solución:

Sea $\overline{P} = (x, y)$ el punto pedido.

- Sabemos: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \dfrac{1}{2}$ ➡ $\overline{BP} = 2\overline{AB}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = 2\sqrt{(4-1)^2+(5+1)^2}$$

Efectuando operaciones :

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-8x-10y-139=0 \quad \longrightarrow \quad ①$$

◦ También: $\quad |AB| + |BP| = |AP|$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(4-1)^2+(5+1)^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

Efectuando operaciones :

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-8x-10y+14=0 \quad \longrightarrow \quad ②$$

De ① y ②: $\begin{cases} x_1 = 10\,; & y_1 = 17 \\ \cancel{x_2 = -2}\,; & \cancel{y_2 = -7} \end{cases}$

ˆ $\boxed{\overline{P} = (x, y) = (10, 17)}$