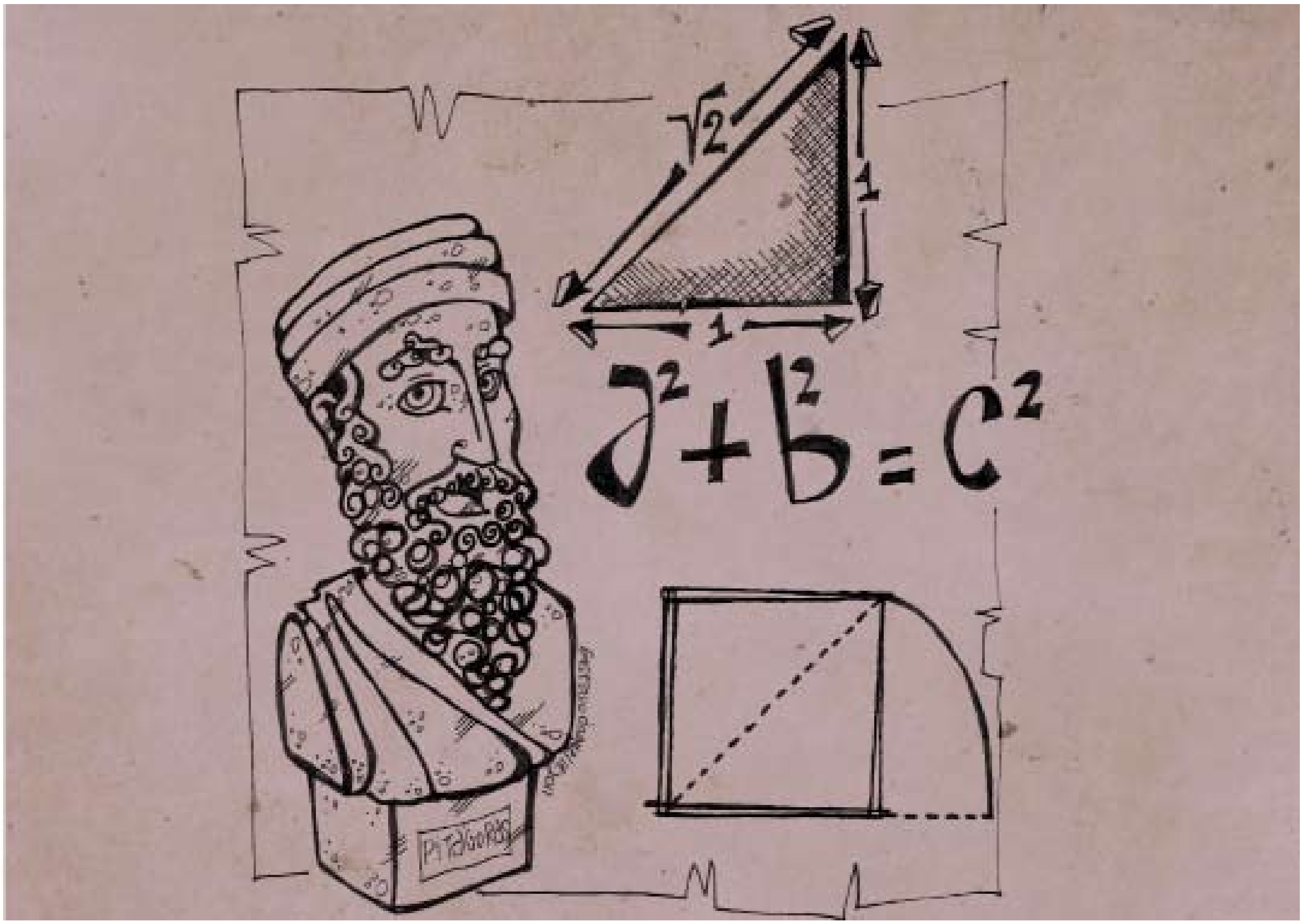
EXPLORA
LAS CIENCIAS EN EL MUNDO CONTEMPORÁNEO

PROGRAMA
DE CAPACITACIÓN
MULTIMEDIAL

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

MATEMÁTICA

DE NÚMEROS Y MEDIDAS, ¿QUÉ ES POSIBLE, QUÉ ES NECESARIO?



Números y medidas en el pensamiento pitagórico | Inconmensurabilidad e irracionalidad, ¿qué diferencias? ¿qué similitudes? | El tratamiento de la inconmensurabilidad y la irracionalidad en la clase | Mediciones y medidas: una ruptura necesaria | Primeros abordajes de las nociones de inconmensurabilidad e irracionalidad | Profundización de las nociones de inconmensurabilidad e irracionalidad

Autora: Prof. Ana Lía Crippa | **Colaboradora:** Prof. Laura del Río | **Lectura crítica:** Lic. Mónica Agrasar y Mg. Graciela Chemello.

VERSIÓN PRELIMINAR

INTRODUCCIÓN

En este módulo nos centraremos en las estrechas relaciones entre números y medidas, con el propósito de discutir algunas dificultades de enseñanza vinculadas con el tratamiento de estos temas en la Escuela Secundaria.

Para intentar comprender dichas relaciones e interpretar tales dificultades, comenzaremos comentando brevemente el lugar que ocuparon en el pensamiento de los grandes exponentes de la Matemática Occidental, los griegos, y particularmente en los pitagóricos. Posteriormente nos referiremos a dos nociones matemáticas que suelen dar lugar a confusiones, la de inconmensurabilidad y la de irracionalidad, explicitando el alcance de las mismas.

A continuación nos detendremos en una noción propia de la Matemática, la de "medida exacta", cuya ausencia en la mayoría de las propuestas de enseñanza para el nivel secundario plantea un problema específico para comprender las nociones mencionadas anteriormente. En esta línea, discutiremos una propuesta que intenta abordar dicha dificultad. Finalmente, nos centraremos en la presentación y profundización de la inconmensurabilidad y de la irracionalidad en el aula y en formas de prueba que pueden ser adecuadas en este nivel de escolaridad.

NÚMEROS Y MEDIDAS EN EL PENSAMIENTO PITAGÓRICO

En la Escuela Pitagórica "la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre, es explicable en términos de arithmos, es decir, de propiedades de los números naturales y sus razones" (Boyer, 1994). Tal es así que "Todo es número" es el lema de esta Escuela.

La estrecha relación entre números y geometría se pone de manifiesto en los "números figurados"[1], que fueron estudiados en profundidad por los pitagóricos, y continúan, de algún modo, presentes en nuestros días: hablamos de "cuadrados de números" y de "cubos de números", términos que provienen de estos célebres matemáticos griegos.

En total coherencia con sus ideas acerca de los números, las magnitudes con las que trabajaban los griegos se expresaban con números naturales o sus razones, es decir sólo consideraban *magnitudes conmensurables*.

Una de las producciones más relevantes de Pitágoras, la Teoría Numérica de las Proporciones, se aplicaba sólo a magnitudes conmensurables. Sin embargo los mismos pitagóricos vislumbraron la insuficiencia de tales magnitudes; se atribuye a ellos el descubrimiento de la inconmensurabilidad.

INCONMENSURABILIDAD E IRRACIONALIDAD DESDE LA PERSPECTIVA ACTUAL

Si se comparan las longitudes **a** y **b** de dos segmentos **CD** y **EF** puede suceder que **CD** esté contenido un número exacto de veces en **EF.** En este caso podemos expresar la longitud **b** tomando como unidad la longitud **a** y afirmar que la longitud **b** es **r** veces la longitud **a**, siendo **r** un número natural:

b = r . a

También puede suceder que ningún múltiplo entero de **a** sea igual a **b**, pero que sea posible dividir el segmento **CD** en **n** partes iguales, de modo tal que el segmento **CD/n** quepa exactamente **m** veces en el segmento **EF**. Es decir que **b** sea igual a un múltiplo entero **m** de **a/n:**

b = m. a/n , lo que implica que **b = m/n . a**, donde **m/n** es un **número racional**.

Cuando se cumplen estas igualdades diremos que **los segmentos CD y EF son conmensurables** dado que tienen una medida común: el segmento **CD/n** está contenido **n** veces en **CD** y **m** veces en **EF.**

Notemos que el primer caso es un caso particular del segundo para **n= 1**.

Si no existen los números **n** y **m,** es decir, no existe el número racional **m/n,** diremos que los **segmentos CD y EF son inconmensurables**.

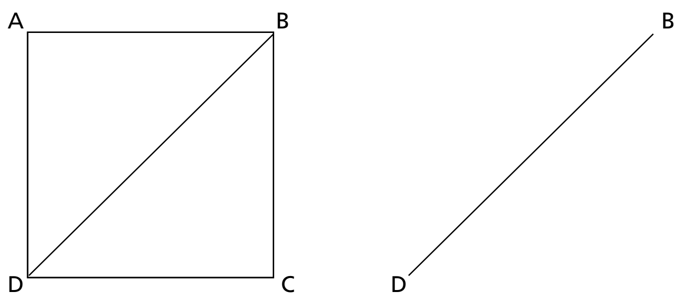
Dado que existen **segmentos inconmensurables**, y considerando que a todo segmento le corresponde un número, que expresa la medida de su longitud respecto de un segmento unidad, existen también **números irracionales**.

Notemos que la inconmensurabilidad es una relación aplicable a dos segmentos y no a uno.

1.Se sugiere volver sobre la lectura del Fascículo 1, en el que se incluye una caracterización de estos números.

Algunos historiadores coinciden en que a partir del Teorema de Pitágoras surgen magnitudes cuya medida no puede expresarse por números naturales o por las razones entre los mismos. Esta conclusión se asocia con el problema de encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado respecto de su lado.
Suele afirmarse que Aristóteles menciona una demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado respecto de su lado basada en la distinción entre lo par y lo impar.
Si bien no hay testimonios escritos de la misma es posible reconstruirla:

DEMOSTRACIÓN INDIRECTA O POR EL ABSURDO: LA DIAGONAL DE UN CUADRADO NO ES CONMENSURABLE CON EL LADO DE DICHO CUADRADO



Sea **l** la longitud del lado **AB** y **d** la longitud de la diagonal **BD**.
En **ABCD**, por el Teorema de Pitágoras: $d^2 = 2\,l^2$. Luego, $\frac{d^2}{l^2} = 2$

Por otra parte, si **BD** y **AB** son conmensurables, es posible encontrar dos números enteros positivos **n** y **m**, primos entre sí, tales que $\frac{d}{l} = \frac{m}{n}$

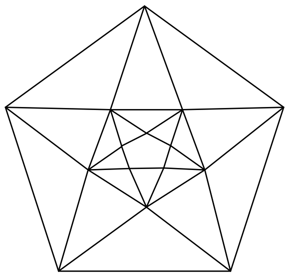
Luego, $\frac{m^2}{n^2} = 2$, lo que implica que $m^2 = 2\,n^2$.

La última igualdad indica que m^2 es un número par, por lo que m es también un número par. Por lo tanto **n** debe ser un número impar pues de lo contrario, **m** y **n** no serían primos entre sí.
Si **m** es par, existe un entero **k** tal que $m = 2\,k$.
Reemplazando en $m^2 = 2\,n^2$, se obtiene $(2\,k)^2 = 2\,n^2$.
Es decir, $n^2 = 2\,k^2$, lo que implica que n^2 es un número par y **n** también es un número par.
Pero **n** no puede ser par e impar, es una contradicción.
El absurdo proviene de suponer que **BD** y **AB** son conmensurables.
Luego, **BD** y **AB** no son conmensurables.

Esta demostración pondría en cuestión la Teoría de las Proporciones de los Pitagóricos en la que, como dijimos, sólo se trabajaba con magnitudes geométricas conmensurables.
Se atribuye a Eudoxo (siglo IV aC) la ampliación de dicha teoría y la elaboración de una nueva aplicable tanto a magnitudes conmensurables como a magnitudes no conmensurables.
Pero no todos los autores coinciden en los orígenes de la inconmensurabilidad. Boyer (1994) señala que el descubrimiento de la misma a partir de la demostración que menciona Aristóteles ha sido, con razón, cuestionado, dado el grado de abstracción que requiere.
Según el mencionado historiador, existen otros caminos desde donde muy probablemente se haya llegado a los inconmensurables. Entre ellos se encuentra el trabajo atribuido a Hipaso de Metaponto (pitagórico tardío), referido a la medida de la diagonal de un pentágono regular respecto de su lado, como se explicita en el recuadro de la página siguiente.
El surgimiento de la inconmensurabilidad y de la irracionalidad puede considerarse como uno de los descubrimientos más sorprendentes de los matemáticos griegos.
Pese a que intentaron ocultar esas nociones que cuestionaban las bases de su idea de número, no pudieron ignorarlas tan fácilmente, pues aparecían una y otra vez en diferentes construcciones geométricas.

EL PENTAGÓNO REGULAR:

Puede demostrarse que la diagonal y el lado del pentágono regular son inconmensurables, y que la razón entre sus magnitudes es el número de oro[2] simbolizado con ϕ.
Notemos que al trazar las diagonales de un pentágono regular queda determinado otro pentágono regular más pequeño y una estrella de cinco puntas, denominada "pentágono estrellado". Este proceso puede continuarse indefinidamente.



El pentágono estrellado, símbolo griego de salud y de vida, fue una figura de extrema importancia para los pitagóricos, y sus propiedades fueron muy debatidas en esa comunidad.

INCONMENSURABILIDAD E IRRACIONALIDAD, ¿QUÉ DIFERENCIAS? ¿QUÉ SIMILITUDES?

Dada su estrecha vinculación, muchas veces se confunde la inconmensurabilidad y la irracionalidad. Arsac (1987) hace un minucioso análisis acerca de esta confusión, refiriéndolo a la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado respecto de su lado y la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Señala que, si bien se trata de un mismo problema, se puede mirar en dos marcos diferentes.
En el marco geométrico, se debe constatar que la diagonal de un cuadrado no admite parte alícuota común con el lado, lo que es imposible de realizar apoyándose en dibujos.
En el marco aritmético, se trata de probar que el número 2 no admite raíz cuadrada racional.
Sin embargo, ambas cuestiones se relacionan y, como afirma Arsac (1987) "la existencia de esa relación sólo puede percibirse después de haber señalado la diferencia"
Para aclarar esta afirmación veamos la demostración siguiente:

RÉGINE DOUADY (1986) AFIRMA:

"El juego de marcos traduce la intención de explotar el hecho de que la mayoría de los conceptos puede intervenir en distintos dominios, diversos marcos: físico, geométrico, numérico, gráfico u otros. En cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados del concepto en el marco."

DEMOSTRACIÓN POR EL ABSURDO: $\sqrt{2}$ NO ES UN NÚMERO RACIONAL
Si $\sqrt{\mathbf{2}}$ fuera racional, se podría escribir $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{p/q}$ (donde **p** y **q** son números enteros y **p/q** es una fracción irreducible).
Elevando ambos miembros al cuadrado resulta:
$\mathbf{2 = p^2/q^2}$, o sea $\mathbf{2\,q^2 = p^2}$
La última igualdad indica que $\mathbf{p^2}$ es un número par y por lo tanto **p** también es un número par.
Luego, existe un número entero **k** tal que **p=2 k**.
Por lo tanto, $\mathbf{2\,q^2 = (2k)^2}$, lo que implica que $\mathbf{2\,q^2 = 4\,k^2}$. Es decir, $\mathbf{q^2 = 2\,k^2}$
Esta última igualdad indica que $\mathbf{q^2}$ es un número par y por lo tanto **q** también es un número par.
Si **p** y **q** son pares, la fracción **p/q** se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por **2.** Pero partimos de que **p/q** es una fracción irreducible. El absurdo proviene de suponer que existe una fracción **p/q** cuyo cuadrado es **2**.
Luego, $\sqrt{\mathbf{2}}$ no es un número racional.

2. Hoy día sabemos que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pero los griegos no utilizaron números para expresar las razones entre magnitudes inconmensurables, por lo que algunos autores las llamaron ***inexpresables***.

Podemos notar que en el marco aritmético, la demostración de la irracionalidad se basa en el razonamiento por el absurdo.

El reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad en el marco geométrico hace necesario independizar el razonamiento del dibujo y pasar al marco aritmético, como puede observarse en la demostración propuesta en el apartado anterior.

EL TRATAMIENTO DE LA INCONMENSURABILIDAD Y LA IRRACIONALIDAD EN LA CLASE

"No es de extrañar que el descubrimiento de los inconmensurables produjera gran impresión en los filósofos y matemáticos griegos, y que, aún hoy le ofrezca, a quien medite la cuestión, cierta perplejidad" destacan Courant y Robbins (1979).

En la Escuela Secundaria esa dificultad es muy conocida por los profesores de matemática. Todos nos hemos enfrentado a preguntas realizadas por los alumnos tales como: ¿cuánto es raíz de 2? o ¿cuánto es ¶? Estas preguntas, en algún sentido dan cuenta de una cierta negativa al estatus de número de √2 y de ¶.

Con relación al tratamiento de la irracionalidad, Luis Rico (1996) afirma: "Situándonos en la perspectiva del curriculum de matemáticas de la Educación Secundaria, a partir de los conocimientos aritméticos de nuestros alumnos, el problema de la irracionalidad, simplemente, no tiene lugar. Así pues, su introducción a los estudiantes requiere de una evolución cualitativamente importante en su pensamiento matemático. Esta modificación no se produce espontáneamente, mientras se evita el problema de la irracionalidad y se pospone a la espera de que la presentación formal del concepto solucione un conflicto que no se entiende como tal, porque nunca ha sido planteado. El problema de la irracionalidad adquiere plena significación en el contexto geométrico, más concretamente, en el terreno de la medida. "Sin la presión de los problemas de la medida, R no habría respondido más que a problemas matemáticos extremadamente elaborados (Douady", 1980).

La idea intuitiva inicial de que dos magnitudes, y más concretamente, dos longitudes, tienen una parte alícuota común es, sin duda, una etapa inevitable en el desarrollo del conocimiento matemático, tanto en el plano histórico como en el plano individual. Pero esta intuición puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del problema de la irracionalidad".

Se plantea, entonces, el problema de cómo es posible que los alumnos puedan acceder a las nociones de inconmensurabilidad y de irracionalidad, y elaboren pruebas adecuadas a su nivel de escolaridad respecto de estas nociones, en el marco de una práctica matemática como la que concebimos.

Habitualmente se introduce el problema de la diagonal del cuadrado y a continuación el profesor propone la conocida demostración por el absurdo, que incluimos en el apartado anterior. Sin embargo, esta demostración es dificultosa si pretendemos que los alumnos otorguen sentido a la elaboración de pruebas, por eso, podría resultar adecuado que se proponga la lectura de este tipo de demostraciones luego de que los alumnos se hayan familiarizado con el problema.

"La complejidad del aprendizaje de la demostración aparece de tal forma que no pretendemos construir situaciones que le permitan al alumno construir la herramienta de prueba que es la demostración". (Balacheff, 2000).

Sin embargo, el profesor puede presentar situaciones de enseñanza que favorezcan la producción de pruebas que, sin llegar a ser demostraciones, no se apoyen en acciones materiales. A continuación presentamos algunas propuestas de enseñanza, pensadas para ser desarrollar en diferentes años del nivel secundario, que intentan abordar las dificultades que hemos descrito.

LA NOCIÓN DE OBSTÁCULO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

"El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido" (Brousseau, 1983).

MEDICIONES Y MEDIDAS: UNA RUPTURA NECESARIA

Como adelantamos en la introducción, para iniciar el tratamiento de la inconmensurabilidad y de la irracionalidad en la Escuela Secundaria resultaría necesario realizar un trabajo previo en torno a una noción matemática que usualmente no es objeto de enseñanza: la noción de medida exacta.

"La noción de "media exacta" es propia de la matemática y está en ruptura no solamente con la idea habitual "inocente", sino también con la medida utilizada en las ciencias llamadas "exactas"…

Está extrañamente ausente de todos los programas de enseñanza secundaria, lo que no impide, evidentemente, que plantee un problema específico cuya resolución no es evidente. Sin embargo, es ineludible en clase de 3º: ¿cómo, en efecto, hacer acceder a √2 al estatus de número si no integramos el hecho de que la medida de un segmento -para el caso la diagonal de un cuadrado de lado 1- se expresa con UN número?" (Reynes,2000).

 VERSIÓN PRELIMINAR

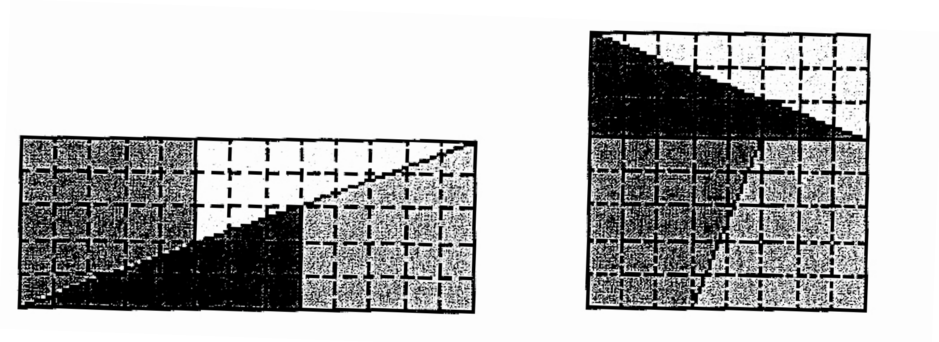
En la escuela primaria la enseñanza de la geometría se inicia con un trabajo con las nociones geométricas como modelos del espacio físico. Esta modelización se apoya en la relación del niño con el espacio sensible en el que vive y que constituye su primer campo de experiencias y debería avanzar hacia una geometría en la que los problemas no pueden ser resueltos simplemente por la acción, es decir hacia un trabajo con objetos ideales, donde la validación se apoye en las propiedades de las figuras. El desarrollo y la profundización de este tipo de trabajo se realiza en los primeros años de la escuela secundaria.

Si bien entendemos que no hay otra manera de iniciar a los alumnos en el estudio de la Geometría, dicho tratamiento genera un obstáculo didáctico inevitable tanto para iniciarse en un trabajo geométrico en el que la validación se realice apelando a las propiedades de las figuras involucradas, es decir, mediante pruebas intelectuales, en el sentido de Balacheff, como para comprender qué significa la noción de medida exacta.

Por otra parte, la enseñanza que usualmente se imparte en la escuela primaria prioriza un tratamiento basado en la percepción, ya sea a partir de propuestas centradas en mostrar ("Aquí tienen un triángulo"; "Se ve en la figura"), para luego definir y ejemplificar, como por medio de actividades manuales de plegados y recortes. En ambos casos se minimiza, y aún se ignora, un trabajo con problemas que apunten a poner en juego las propiedades de las figuras en cuestiónEs necesario entonces cuestionar, en primer lugar, el lugar de la percepción en la producción de conocimientos matemáticos. Para ello, resultan de interés actividades como las siguientes, adecuadas para presentar en los primeros años de la escuela secundaria, ya que la mayoría de los alumnos disponen de los conocimientos necesarios para abordarla.

ACTIVIDADES PARA LOS ALUMNOS

¿Qué pueden decir de las áreas de las siguientes figuras?



La parte izquierda del dibujo muestra un rectángulo de área 5 x 13 = 65; dicho rectángulo se divide en cuatro piezas, las cuales se pueden recomponer para formar el cuadrado como el que se muestra en la parte derecha del dibujo. Sin embargo, el área del cuadrado es igual a 8 x 8 = 64.

Si no nos damos cuenta que hay un agujero en la diagonal del rectángulo podríamos inferir que ¡65 = 64!

En lo que respecta a la medida, la enseñanza usual prioriza actividades que implican cálculos algorítmicos, que ocultan tanto la problemática de la precisión de la acción de medir, como el significado de la medida en esta disciplina. Este tratamiento frecuentemente se extiende a los inicios de la escuela secundaria.

Con relación a la noción de medida exacta, resulta esclarecedor el ejemplo propuesto por Francis Reynes (2000): "Para saber qué cantidad de moquette necesito para alfombrar un estar, mido (físicamente) el piso de dicho estar y elijo a partir de allí el modelo geométrico que me parezca más adecuado (rectángulo, trapecio, etc.), tomo por precaución un "margen de error" y hago funcionar el modelo para calcular (rigurosamente) un área teórica que cubrirá mis necesidades reales.

La razón por la que no se mide un segmento con una regla es porque un segmento es un objeto idealizado y no material".

Para interpretar esta afirmación recordemos que en matemática los objetos son ideales y que accedemos a ellos a través de sus representaciones[4]. En geometría, una de las formas de representación más utilizada es el dibujo, pero el dibujo de un segmento no es el segmento sino un objeto material. Por ello, "… es esencial comprender que no hay diferencia de naturaleza entre medir el piso del salón y medir un dibujo de un cuadrilátero en el cuaderno: ¡En los dos casos no se hace matemática!" (Reynes, 2000).

Es necesario entonces que los alumnos establezcan las diferencias existentes entre el resultado de la acción física de medir, que concierne a objetos materiales, y la medida exacta que sólo puede corresponder a objetos ideales, como los matemáticos. Sin embargo, esta distinción no se tiene en cuenta en la enseñanza, lo que genera una dificultad que se potencia pues tanto los

4. En el fascículo 2 caracterizamos la noción de representación en didáctica de la matemática. Sugerimos volver sobre la misma.

datos se priorizan en la escuela como los resultados de las medidas tienen, a lo sumo, una cifra decimal.

A fin de aclarar esa confusión, Reynes (2000) destaca el interés de jugar sobre la variable didáctica referida a la cantidad de cifras decimales, sugiriendo actividades muy simples adecuadas para los mismos años que la anterior.

VARIABLES DIDÁCTICAS

Es importante tener en cuenta que ciertas características de una situación de enseñanza pueden ser modificadas por el docente y cambiar de ese modo los procedimientos de resolución que utilizan los alumnos/as. Del mismo modo, cambian los conocimientos que se ponen en juego. Estas características constituyen variables didácticas.

ACTIVIDADES PARA LOS ALUMNOS

Actividad 1

a. Representá un segmento EC tal que EC = 10, 7 cm.

b. Representá un segmento KL tal que KL = 13, 216 cm.

Actividad 2 [5]

a. A continuación se ha representado segmento ST tal que ST= 13, 6 cm.

S ____ T

¿Estás de acuerdo?

b. A continuación se ha representado un segmento AB tal que AB = 12, 4978 cm:

A ____ B

¿Estás de acuerdo?

Al proponer estas actividades los alumnos, no tienen ninguna dificultad para dibujar el segmento que se solicita en el inciso a de la primera actividad. Pero cuando se enfrentan con el inciso b de esta misma actividad, la reacción de muchos de ellos es: *"¡¡¡es imposible!!!"*.

El inciso a de la segunda actividad tampoco ofrece ninguna dificultad a los alumnos. En el caso del inciso b, una gran mayoría toma su regla, mide y protesta: *"¡¡¡no, el segmento tiene 12 cm y medio!!"….*

A partir de las respuestas señaladas, el profesor promoverá un debate que en torno cuestiones como las siguientes:

- La representación de un segmento, ¿es ese segmento?
- ¿Qué se mide con una regla, un segmento o una representación del segmento?

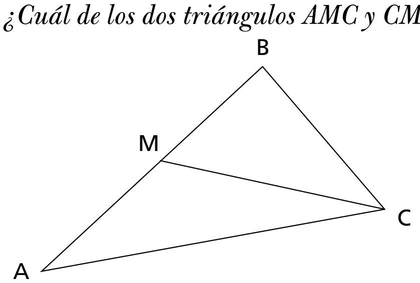
A partir del debate el profesor podrá destacar que:

- Los dibujos son sólo representaciones de segmentos que son objetos matemáticos ideales.
- En matemática es posible concebir una "medida exacta" expresada por un número que puede tener tantas cifras decimales como queramos, pues dado que se trabaja con objetos ideales, podemos imaginarlos perfectos.

En la misma línea de trabajo, presentamos a continuación otra actividad, también apropiada para los primeros años de la Escuela Secundaria, que permite reconocer los límites de la acción de medir en el trabajo matemático.

ACTIVIDAD PARA LOS ALUMNOS

En un triángulo ABC tal que AB = 15 cm, AC = 10 cm y BC = 13 cm.
Ubicamos la marca el punto medio M sobre el lado AB y se traza la mediana.
¿Cuál de los dos triángulos AMC y CMB tiene mayor área?



5. El segmento ST mide, aproximadamente, 13,6 cm y el AB mide 13,5 cm, aproximadamente. Al imprimir puede haber diferencias en las medidas debido a las configuraciones.

VERSIÓN PRELIMINAR

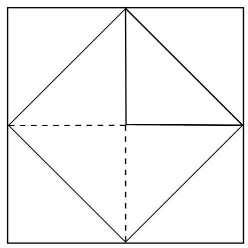
Frente a este problema, una vez realizada la construcción pedida, muchos alumnos trazan las alturas, miden sobre el trazado y calculan las áreas. Una discusión grupal favorecerá la confrontación de esas producciones, lo que permitirá concluir que la imprecisión de la acción de medir hace que se obtengan valores diferentes de las áreas.

PRIMEROS ABORDAJES DE LAS NOCIONES DE IRRACIONALIDAD E INCONMENSURABILIDAD

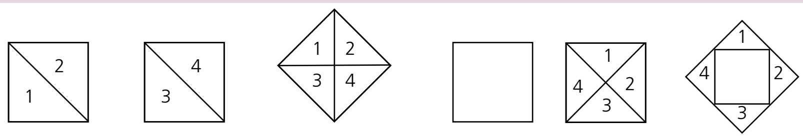
La situación que describimos a continuación[5] permite introducir la irracionalidad y la inconmensurabilidad, y resulta adecuada para presentar a alumnos de tercero o cuarto año, años en los que usualmente se incluye este contenido en la currícula de la Escuela Secundaria.
En primer lugar, se entrega a cada grupo de alumnos dos papeles cuadrados, de 10 cm de lado cada uno. Ellos deben recortar los cuadrados, con el menor número de cortes posibles, para formar con esas piezas un solo cuadrado más grande.
La consigna es, a primera vista, muy sencilla, lo que permite que los alumnos rápidamente se comprometan en la resolución. Es muy posible que primero intenten hacer recortes sin demasiada reflexión previa y sin buscar una estrategia determinada. Entonces el docente puede intervenir recordándoles que la consigna especifica "con el menor número de cortes". Hay dos soluciones a este problema, y son las que se ilustran en el recuadro de la derecha.

UN PROBLEMA HISTÓRICO

Este problema, tiene detrás una gran historia.
Se lo conoce como "problema de la duplicación del cuadrado" y es tratado por Platón en su diálogo Menón. Sócrates le pregunta al esclavo cómo hay que modificar el lado de un cuadrado, de lado inicial de 2 pies, para duplicar su área. El esclavo responde, intuitivamente, que el lado debe medir el doble, es decir 4 pies. Sócrates lo guía a través del diálogo para que concluya que no puede ser, ya que si el lado mide 4 pies, el área será 4 veces mayor que la original. El esclavo propone entonces otra respuesta: debe medir 3 pies. Nuevamente lo guía en la comprobación, y encuentra que el área del cuadrado de 3 pies de lado, es mayor que la deseada. Sócrates le muestra entonces un dibujo:



SOLUCIONES



Si todos los alumnos que logran resolver el problema llegan a la misma solución, el docente puede introducir la otra diciendo que en otro curso lo resolvieron de esa manera y poniendo esa solución a consideración de la clase.

A continuación, el profesor planteará una nueva cuestión a sus alumnos: ¿los dos cuadrados grandes, tienen los lados de la misma medida?
Muchos alumnos intentarán responder a esa pregunta midiendo con una regla los lados de la figura que formaron y encontrarán diferentes medidas: 14 cm, 14,1 cm, 14,2 cm.
Seguramente, aún en el caso de haber trabajado con actividades como las descriptas en el apartado anterior, a algunos alumnos les resulte poco razonable que las medidas de los lados de esas figuras sean diferentes, ya que ambos cuadrados fueron formados yuxtaponiendo partes de los cuadrados iniciales, de 10cm de lado cada uno. Por lo tanto las áreas de los cuadrados grandes deben ser iguales: 200 cm^2 cada uno, y entonces las medidas de sus lados, también deben ser iguales. Esto dará lugar a reflexionar acerca de la imprecisión de la acción de medir.

LOS LÍMITES DE LA ACCIÓN DE MEDIR

Notemos que si bien la actividad se inicia con un trabajo material como es la acción de medir, permite reconocer los límites del dicho trabajo.

6. El problema propuesto se presenta y analiza en el libro "Matemática dinámica" de Annie Berté (2005). En este fascículo hemos tomado algunas cuestiones trabajadas por la autora y hemos incorporado otras.

El docente puede preguntar entonces a toda la clase con cuál de las medidas halladas para el lado se obtiene un área de 200 cm^2. Una respuesta posible es que surja lo siguiente:

14^2=196
$14{,}1^2$=198.81
$14{,}2^2$=201.64
Estos cálculos les sugerirán que el valor de la medida del lado, será un número mayor que 14,1 y menor que 14,2
Pueden probar, entonces, con los siguientes números:
14, 11 ; 14,12 ; 14,13 ; … ; 14,19.

LA COMPUTADORA EN LA CLASE

Se puede sugerir a los alumnos que hagan las cuentas usando una planilla de cálculo, para agilizar la tarea:

Medida del lado (en cm)	Área (en cm^2)
14,11	199,0921
14,12	199,3744
14,13	199,6569
14,14	199,9396
14,15	200,2225
14,16	200,5056
14,17	200,7889
14,18	201,0724
14,19	201,3561

Con esto pueden concluir que el número está entre 14,14 y 14,15.
De forma análoga, pueden seguir encontrando las primeras cifras decimales del número buscado, pero por las limitaciones propias de la herramienta de cálculo, no llegarán muy lejos con esta tarea. Por ejemplo, nuestra planilla de cálculo nos permitió encontrar hasta la séptima cifra decimal.

Medida del lado (en cm)	Área (en cm^2)
14,1421351	199,999985
14,1421352	199,999988
14,1421353	199,999991
14,1421354	199,999994
14,1421355	199,999997
14,1421356	199,999999
14,1421357	200,000002
14,1421358	200,000005
14,1421359	200,000008

Medida del lado (en cm)	Área (en cm^2)
14,14213561	200
14,14213562	200
14,14213563	200
14,14213564	200
14,14213565	200,000001
14,14213566	200,000001
14,14213567	200,000001
14,14213568	200,000002
14,14213569	200,000002

Observamos en la tabla de la derecha que cuando intentamos determinar la octava cifra el programa redondea el resultado, y no permite distinguir entre los cuadrados de los primeros cuatro números. Si se usa otro programa u otra configuración, el proceso de acotamiento de la solución se agotará algunas cifras antes, o algunas cifras después. Pero ningún programa nos permitirá continuar este procedimiento indefinidamente.
En este caso, la computadora no podrá ayudar a hallar la solución del problema, pero sí permite instalar un debate que concluya con la elaboración de la conjetura:
"Ningún número decimal elevado al cuadrado da por resultado 200."
Es importante dedicarle un tiempo de la clase a esta tarea y dialogar con nuestros alumnos acerca de las limitaciones de esta herramienta, y de la importancia de entender matemática para interpretar los resultados que nos devuelve.
Llegado este punto, para validar la conjetura se torna necesario abandonar la tarea de la búsqueda de decimales.

VERSIÓN PRELIMINAR

El docente puede entonces recordar a los alumnos que también se utilizan fracciones para representar números que no son enteros. En realidad, el docente sabe que este número no es racional, y que por lo tanto, no admite una representación como cociente de enteros. Pero los alumnos no conocen aún los números irracionales. La idea es entonces permitirles que traten de encontrar su expresión fraccionaria y se topen con las contradicciones que esto implica.

Recién entonces puede presentarse la noción de número irracional con sentido para los alumnos.

Para facilitar la tarea es adecuado observar que el problema de encontrar un número cuyo cuadrado sea 200, es equivalente al de encontrar un número cuyo cuadrado sea 2.

Al representar al número cuyo cuadrado es igual a 2 como una fracción a/b donde a y b son números enteros y no nulos, surge la dificultad de que hay infinitas fracciones equivalentes a a/b. Pero es posible despreocuparse considerando que la fracción se encuentra ya simplificada, de modo que habrá un único a y un único b, coprimos entre sí, que cumplirán la condición:

$(a/b)^2 = 2$, o equivalentemente, $a^2 = 2.b^2$

Con ayuda del docente, una forma de analizar cómo deben ser a y b para que la última igualdad se cumpla, consiste en pensar que si a^2 y $2b^2$ son iguales, sus últimas cifras de las unidades serán iguales también.

La ventaja de esta forma de pensar es que existen infinitas posibilidades para a y para b, pero las posibles cifras de unidades de cada uno de estos números son limitadas.

En este momento, el profesor puede sugerir la utilización de una tabla como la siguiente para facilitar en análisis. En la misma se muestran las 10 posibles cifras de la unidad de a y las 10 posibles últimas cifras de la unidad b. Para cada una de esas posibilidades, se calculó cómo sería la última cifra, o cifra de las unidades, de a^2, de b^2 y de $2b^2$.

Última cifra de a	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Última cifra de a^2	**<u>0</u>**	**1**	**4**	**9**	**6**	**5**	**6**	**9**	**4**	**1**
Última cifra de b	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Última cifra de b^2	**0**	**1**	**4**	**9**	**6**	**5**	**6**	**9**	**4**	**1**
Última cifra de 2 b^2	**<u>0</u>**	**2**	**8**	**8**	**2**	**<u>0</u>**	**2**	**8**	**8**	**2**

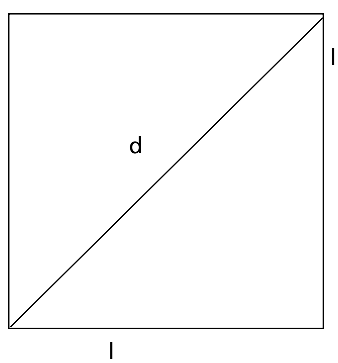
Puede observarse que el único número repetido en las filas ´Ultima cifra de a^2" y "Última cifra de 2 b^2" es el 0. Esto permite concluir que si a^2 y 2 b^2 son iguales, deben terminar en cero, y esto ocurre sólo si a termina en 0 y si b termina en 0 o 5. Pero si esto fuera así, el criterio de divisibilidad por 5 indicaría tanto a como b serían múltiplos de 5, lo cual no puede ser porque se había establecido que a y b debían ser coprimos.

En esta instancia el profesor puede notar que se ha llegado a una contradicción, un absurdo, al suponer que existe una fracción cuyo cuadrado es igual a dos, resaltando entonces que no existe ninguna fracción que elevada al cuadrado de por resultado 2.

Esto da lugar a la presentación del número irracional √2.

A continuación es un momento propicio para retomar el problema a fin de abordar la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado respecto de su lado. Para ello hay que considerar que la razón entre la medida de la diagonal del cuadrado de 10 cm de lado y su lado es 10 x /10, es decir x, que es igual a √2.

En general:



$\mathbf{d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2}$

$\mathbf{d = \sqrt{2}\, l}$

Luego: $\mathbf{d/l} = \mathbf{\sqrt{2}}$

RAZONES Y FRACCIONES

Es importante detenerse en la diferenciación de estos términos, que habitualmente se los utiliza como sinónimos.

Mientras que las razones expresan cocientes entre cantidades de magnitudes, con divisor no nulo, las fracciones expresan cocientes entre números enteros, con divisor no nulo, es decir, expresan números racionales.

De tales aclaraciones surge que las razones no siempre son números racionales y por ende, no siempre pueden expresarse mediante una fracción.

Por ejemplo, la razón entre la longitud de la diagonal de un cuadrado y su lado es una razón irracional: √2.

LA COMPUTADORA EN LA CLASE

Finalmente puede ser conveniente proponer una actividad orientada a la representación de diferentes irracionales en la recta real, muy conocida por todos los profesores. Para ello, el Geogebra es una herramienta que facilita la tarea de representación.

PROFUNDIZACIÓN DE LAS NOCIONES DE INCONMENSURABILIDAD E IRRACIONALIDAD

Los docentes sabemos que la mayoría de las nociones se construyen en largos períodos de tiempo. En particular, los problemas que tales nociones permiten resolver, y que contribuyen a otorgarles sentido, no tienen la misma dificultad y sólo podrán ser abordados en forma progresiva.

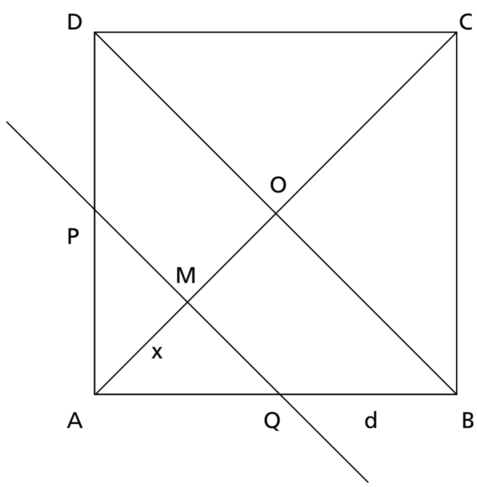
Por ello, para cada noción es necesario poder establecer un amplio conjunto de problemas que la misma permita resolver, y para cada problema identificar qué conocimientos deberán tener disponibles los alumnos para abordarlos. También es necesario considerar en qué momento los alumnos podrán resolver los problemas con procedimientos personales y en qué momento podrán comprender procedimientos más eficientes.

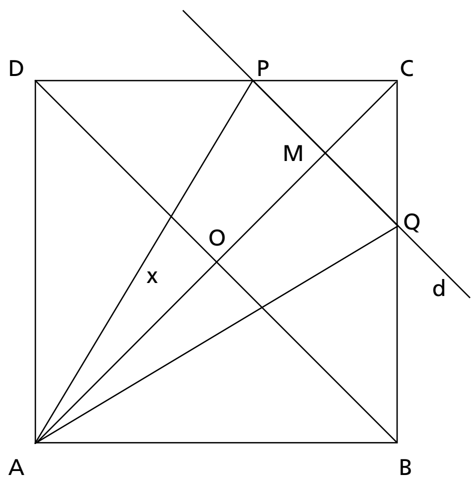
La necesidad de hacer avanzar los procedimientos de los alumnos remite a pensar en un aprendizaje a largo plazo, en muchos casos a lo largo de varios años.

En ese sentido, a continuación presentamos una actividad para ser trabajada en los últimos años de la escuela secundaria, una vez abordadas las nociones de inconmensurabilidad e irracionalidad.

ACTIVIDAD PARA LOS ALUMNOS[6]

ABCD es un cuadrado de centro O y de lado 2. M es un punto cualquiera del segmento AC, distinto de A y de C. La recta d es paralela a la diagonal BD y pasa por M.
PQ es el segmento de recta d incluido en el cuadrado ABCD.
Cuando M pertenece al segmente AO, P está sobre el lado AD y Q sobre AB.
Cuando M pertenece al segmente OC, P está sobre el lado DC y Q sobre BC.
Llamamos x = AM y notamos T(x) al área del triángulo APQ.





a) Expliquen por qué el dominio de la función es $(0,\ 2\sqrt{2})$
b) ¿Es cierto que si $x \in (0; \sqrt{2}]$*, entonces* $T(x) = x^2$*?*
c) ¿Es cierto que si $x \in [\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2})$*, entonces* $T(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}\,x$*?*

7. Este problema ha sido adaptado de Pihoue, D. (1996) L`Entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe se seconde. Francia: INRP.

Podemos notar que las medidas irracionales son una herramienta necesaria para resolver un problema, lo que contribuye a profundizar su sentido.

Se trata de una actividad en la que necesariamente interviene un cambio entre el marco geométrico y el algebraico. El pasaje del marco geométrico al algebraico es necesario para iniciar la resolución y del marco algebraico al geométrico para interpretar las soluciones halladas. También es necesario considerar diferentes registros de representación: registro figurativo, registro discursivo y registro algebraico y sus articulaciones.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

a) ABCD es un cuadrado de lado 2, por lo que su diagonal AC mide $2\sqrt{2}$. Por otra parte M es un punto del segmento AC distinto de A y de C y como $x = AM$, $x \in (0, 2\sqrt{2})$

b) Si $x \in (0, \sqrt{2}]$, M se mueve sobre el segmento AO, sin coincidir con A. ABCD es un cuadrado donde OA = OB y AOB es un triángulo isósceles en O, por lo que los ángulos de la base son iguales. Además, d es paralela a BD, entonces el triángulo AMQ es isósceles por tener sus ángulos de la base iguales. Luego, MQ= AM= x.

Por un razonamiento similar con los triángulos AOD y AMP, concluimos que PM= AM= x.

Luego, PQ= 2 x.

Por otra parte, el triángulo AOB es rectángulo en O porque ABCD es un cuadrado; el triángulo AMQ es entonces rectángulo en M por ser d paralela a BD. Luego, el área del triángulo PAQ es

$T(x) = 2 \cdot \frac{x \cdot x}{2}$ o lo que es lo mismo,

$T(x) = x^2$

Si $x \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, M se mueve sobre el segmento OC, sin coincidir con C. Considerando el triángulo PCQ y razonemos como en el caso anterior con PAQ, con $MC = 2\sqrt{2} - x$ y $PQ = 2(2\sqrt{2} - x)$.

El área del triángulo AQP es entonces:

$T(x) = \frac{2(2\sqrt{2} - x) \cdot x}{2}$ ó lo que es lo mismo,

$T(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}\,x$

A MODO DE CIERRE

Resaltamos nuevamente que las dificultades derivadas del surgimiento de la inconmensurabilidad y la irracionalidad en la historia de la matemática se vinculan estrechamente con las referidas a la enseñanza de estas nociones en la escuela secundaria. Hemos incluido algunas propuestas para llevar al aula que intentan superar tales dificultades.

Pero fundamentalmente, queremos destacar que para lograr avances en los conocimientos de los alumnos es necesario pensar en un aprendizaje a largo plazo, en muchos casos articulado a lo largo de varios años en función de los temas seleccionados para cada año.

Es habitual identificar "tiempos de enseñanza" con "tiempos de aprendizaje". Sin embargo, estos últimos son más largos y dificultosos, lo que debe preverse a la hora de planificar y secuenciar. También es necesario pensar en un tiempo para que los alumnos puedan volver hacia atrás con relación a lo trabajado anteriormente, no para hacer lo mismo, sino para "revisitar" nociones y procedimientos desde otra óptica, lo que permitirá profundizar los conocimientos puestos en juego.

Esto implica aceptar que un tiempo aparentemente "perdido" en cuanto a "cantidad" de conocimientos abordados, es un tiempo "ganado", en cuanto a conocimientos "menos numerosos" pero más anclados y disponibles.

VERSIÓN PRELIMINAR

Bibliografía

Arsac, Gilbert (1987): "El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica", en Recherche en *Didactique des Mathematiques*, Vol 8 N° 3, pp. 267 -312.
Balacheff, Nicolás (2000): *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*, Bogotá, Una empresa docente.
Bergé, Analía y Sessa, Carmen (2003): *Completitud y continuidad revisada a través de 23 siglos. Aportes para una investigación didáctica,* México, Relime, Vol. 6, N° 3 pp.163-197.
Berté, Annie (2000): *Matemática dinámica,* Buenos Aires, A-Z Editora.
Boyer, Carl (1994): *Historia de la matemática,* Madrid, Alianza Universidad Textos.
Brousseau, Guy (1983): "Les obstacles épistémologie et les problemes en Mathématiques", *en Recherches en didactiques de mathématiques*, Volumen 4/2, Francia, La Pensée Sauvage.
Chemello, Graciela y Crippa, Ana Lía (2011): "Enseñar a demostrar, una tarea posible", en *La enseñanza de la Matemática en la Escuela Media,* Buenos Aires, Biblos.
Collete, Jean- Paul (1985): *Historia de las Matemáticas I,* Madrid, Siglo XXI.
Courant, Richard y Robbins, Herbert (1979): *¿Qué es la Matemática?*, España, Editorial Aguilar.
Douady, Regine (1986): "Jeux de cadre et dialectiqir outil-objet", en *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7.2, Grenoble, La pensée Sauvage.
Panizza, Mabel (2005): *Razonar y conocer*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.
Pihoue, D. (1996): *L`Entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe se seconde*, Francia, INRP.
Reynes, Francis (2000): *La notion de mesure exacte*, Francia, Petit X N° 53, pp. 69-79.
Rico, Luis (1996): *Pensamiento numérico*. Documento extraído de cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL96-41.PDF

Ministro de Educación, Prof. Alberto Estanislao Sileoni
Secretaria de Educación, Prof. María Inés Abrile De Vollmer
Jefe de Gabinete, Lic. Jaime Perczyk
Subsecretaria de Equidad y Calidad Educativa, Lic. Mara Brawer
Directora Nacional de Gestión Educativa, Lic. Marisa Díaz
Director de Educación Secundaria, Prof. Guillermo Golzman

Coordinadora de Áreas Curriculares, Lic. Cecilia Cresta
Coordinadores del Área de Capacitación, Lic. Carlos Ruiz, Lic. Margarita Marturet
Coordinadoras del Programa de Capacitación Explora, Lic. Paula Linietsky, Lic. Adriana Vendrov

Edición y corrección, Lic. Marina Rocha
Diseño y diagramación, DG Julia Jara
Ilustración, Gustavo Daguerre
http://portal.educacion.gov.ar/secundaria