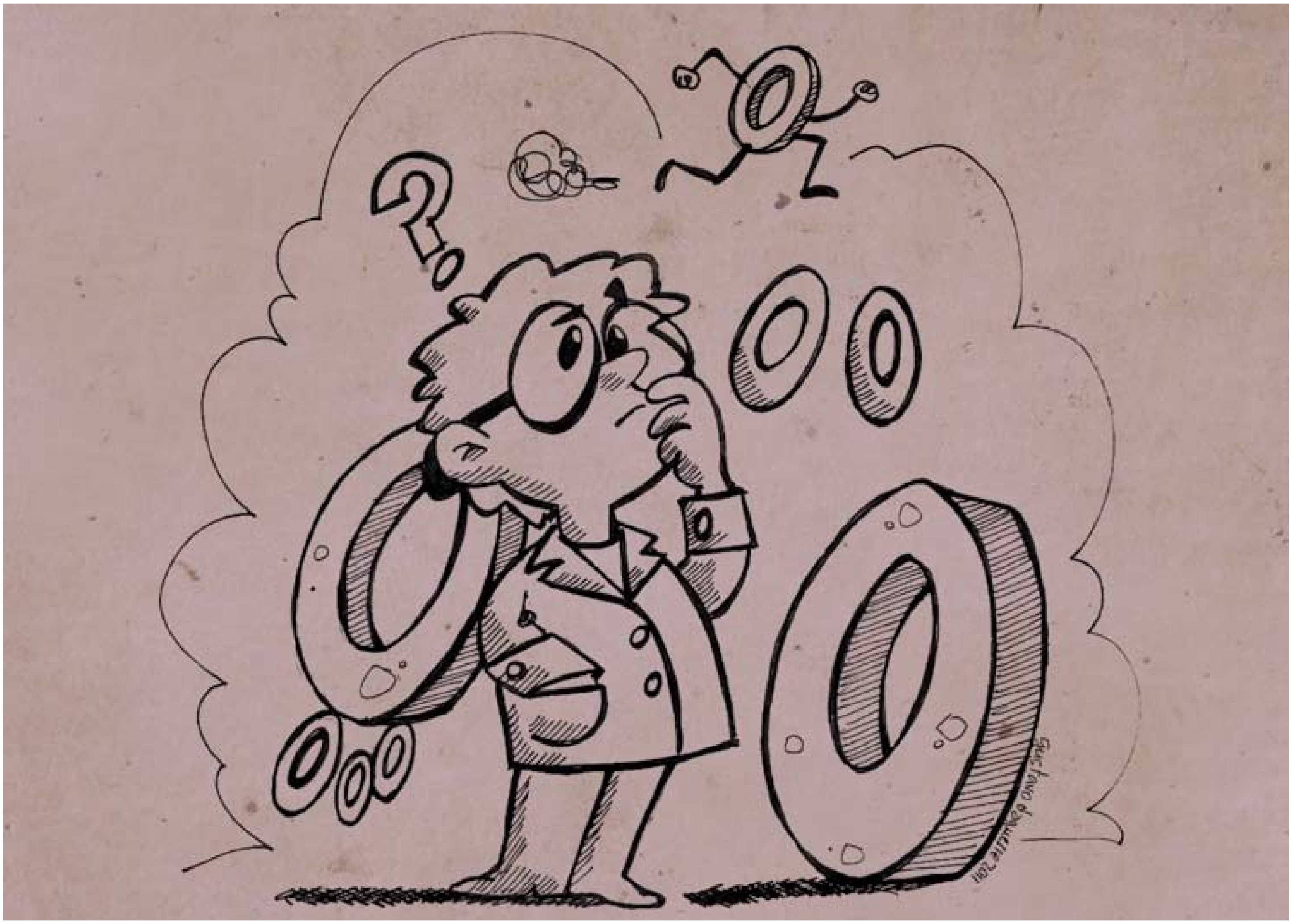
EXPLORA
LAS CIENCIAS EN EL MUNDO CONTEMPORÁNEO

PROGRAMA
DE CAPACITACIÓN
MULTIMEDIAL

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

MATEMÁTICA

¿QUÉ PERMITE Y QUÉ NO PERMITE HACER EL CERO?



Autora: Prof. Ana Lía Crippa | **Colaboradora:** Prof. Laura del Río | **Lectura crítica:** Lic. Mónica Agrasar y Mg. Graciela Chemello.

VERSIÓN PRELIMINAR

INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos ocuparemos de un número tal vez diferente a los demás: el cero. Nos detendremos en sus controvertidos orígenes y analizaremos sus peculiaridades matemáticas vinculándolas con la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, intentando de este modo iluminar algunas producciones de los alumnos y pensar en diferentes abordajes para clases en las que se enseñen temas que involucran el uso de este número.

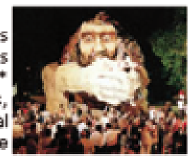
¡EL CERO CAUSA PROBLEMAS!

El 1 de Enero de 2000 en el mundo festejamos la llegada del nuevo milenio. Pero en realidad, ¡celebramos el paso de 1999 años desde el inicio de esta era! Podemos comprender esta confusión pues el calendario ¡no tiene ningún año cero especificado! Aunque a algunos pueda sorprenderlos, ¡el tercer milenio y el siglo XXI comenzaron el 1 de Enero de 2001!

EL DIA
Edición Internet

2 de Enero de 2000 — TITULARES

Festiva bienvenida al nuevo milenio

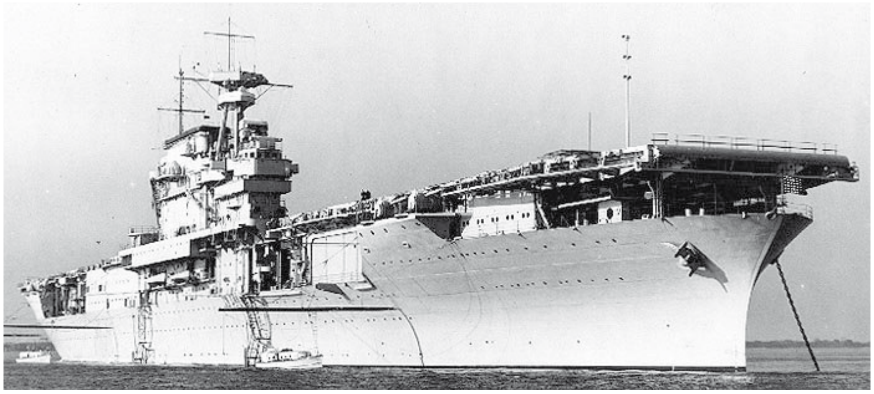


. El mundo entero participó de una gran celebración * Las principales capitales fueron escenarios de brillantes fiestas populares * La Plata estalló en fuegos artificiales * Y vivió con intensidad el tradicional rito de la quema de muñecos * Miles de platenses salieron a festejar a las calles * Y lo mismo ocurrió en el resto del país, desde Jujuy hasta Tierra del Fuego * Hubo una gran algarabía y todo el mundo brindó emocionado * En Ushuaia se hizo el espectáculo más importante del país, proyectado por TV al resto del mundo * Ahí estuvo De la Rúa * Al final, la temida falla informática no provocó perjuicios, al menos hasta ahora * En los bancos y las empresas de servicios aseguran que todo está bajo control * Tampoco se cumplieron las amenazas de atentados en Estados Unidos * El ingreso al nuevo siglo fue ordenado y sin sobresaltos * En La Plata, la euforia no se tradujo en descontrol * Y esa fue la nota característica en casi todo el país * Hasta se registró una baja en el número de lesionados por pirotecnia * Para el inicio del 2000, en definitiva, el mundo vivió la fiesta más grande de la historia * Y los peores pronósticos no se cumplieron

Titulares Sección Inicio de nota

"El navío americano Yorktown fue alcanzado por el cero como por un torpedo. El 21 de septiembre de 1997, cuando navegaba frente a la costa de Virginia, el crucero portamisiles de un billón de dólares se estremeció y se detuvo. El Yorktown quedó inerte en el agua.
Los buques de guerra están diseñados para soportar el impacto de un torpedo o la explosión de una mina, pero aunque el Yorktown había sido blindado a prueba de armas, nadie había pensado en protegerlo del cero. Y esto había sido un craso error.
Las computadoras del Yorktown acababan de estrenar un nuevo software que controlaba los motores. Por desgracia, nadie había detectado la bomba de relojería que yacía agazapada en el código, un cero que los ingenieros tenían que haber suprimido cuando instalaron el software. Pero, el cero pasó inadvertido y quedó oculto en el código, oculto, claro está, hasta que el software lo activó y se paralizó.
Cuando el sistema informático de Yorktown intentó dividir por cero, los 80.000 caballos de potencia quedaron al instante fuera de servicio. Fueron precisas más de tres horas para conectar controles de emergencia a los motores, y el Yorktown, renqueante, pudo entonces arribar a puerto. Los ingenieros tardaron dos días en desembarazarse del cero, reparar los motores y dejar el nuevo Yorktown listo para el combate".

Seife, (2006) *La biografía de una idea peligrosa.*



Pero el cero no sólo causa problemas en la vida corriente o en otras disciplinas. También lo hace en la Matemática: no tener en cuenta que no está definida la división por cero permite probar[1] absurdos tales como por ejemplo: ¡0 =1!

ANTES Y DESPUÉS DEL CERO, ¿QUÉ MATEMÁTICA?

Hoy día parecería imposible prescindir del cero, tanto en el mundo científico como en el no científico: hablamos de cero grado de temperatura pero también de tolerancia cero, por ejemplo. Sin embargo, no siempre fue así: transcurrieron muchos siglos hasta que este número hizo su aparición.

Desde los orígenes del hombre surge la necesidad de contar. Pero como al principio las cantidades se expresaban mediante el habla, no es posible precisar la fecha exacta de dichos orígenes. En esos tiempos se contaban cosas concretas y sólo se sabía distinguir entre uno y muchos. Así por ejemplo, un habitante de las cavernas tenía una lanza o muchas lanzas. Posteriormente se comenzó a distinguir entre uno, dos y muchos, y luego entre uno, dos, tres y muchos. El cero no era necesario en estas instancias (Collette,1985).

A esta altura seguramente se preguntarán cómo y cuando surgió el cero. Sin embargo, no es posible responder esta pregunta con precisión: los orígenes del cero son difusos pues los registros históricos no coinciden totalmente.

Pero antes de avanzar en el problema del origen del cero es importante diferenciar dos usos del cero, bien diferentes. Uno de ellos se refiere a su función de símbolo para indicar un lugar de posición vacía en los sistemas de numeración posicionales, como nuestro sistema decimal (todos sabemos que 1023 es diferente a 123). El otro uso del cero es como número en sí mismo.

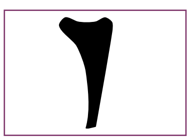
EL CERO COMO INDICADOR DE POSICIÓN

No es posible precisar el surgimiento del cero como símbolo para representar una posición vacía en un sistema de numeración posicional. Boyer (1994) sostiene que se trata de una cuestión complicada, dado que según varios indicios, surgió independientemente tanto en el mundo oriental asiático como en el occidental.

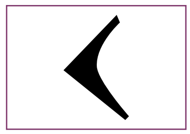
Numerosos historiadores coinciden en que fueron los babilonios quienes lo usaron por primera vez en su sistema de numeración posicional de base 60. Sin embargo, previo a la aparición del cero este sistema de numeración fue utilizado durante muchísimos años y no hay evidencias de que haya habido problemas derivados de esta ambigüedad.

Las primeras escrituras babilónicas aparecen en el tercer milenio aC, y se caracterizan por el uso de símbolos para representar cantidades. Estos símbolos se combinaban y se reducían para lograr escrituras más simples (Collette, 1985).

La cuña vertical representa la unidad y puede repetirse nueve veces para representar el número nueve.



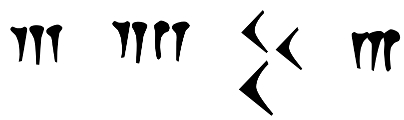
La cuña horizontal se utilizaba para representar las decenas.



Puede repetirse, combinándolo con la unidad para representar los números 11 a 59. Se trata de un agrupamiento simple para los números menores que 59, y a partir de este número se utilizaba un criterio posicional.

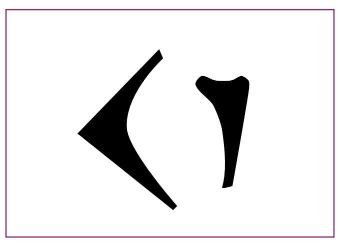
Por ejemplo,

El 3 veces 60^2 + 4 veces 60 + 3 dieces y un 3 se representaba:



No obstante los babilonios utilizaban un espacio en blanco considerable para indicar posiciones vacías (Collette, 1985).

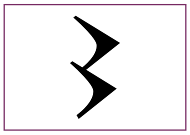
Por ejemplo,



Sim embargo, puede representar tanto el 11, el 11.60, el 11.602, etc.

1. Más adelante nos detendremos en este error.

Durante los primeros siglos antes de Cristo aparece por primera vez un símbolo para representar el cero.



Pero en esa misma época rara vez aparecía el cero al final de una representación numérica (Collette, 1985) y nunca figuró solo.

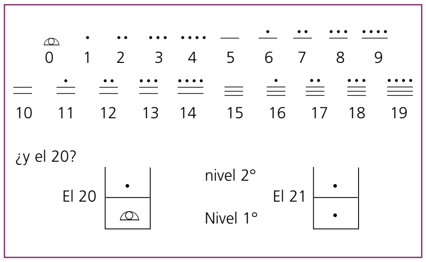
El sistema de numeración que describimos fue el primer sistema posicional y su origen parecería proceder de las unidades de medida.

La producción matemática de los griegos surge en la época en que el cero como indicador de posición vacía empezaba a usarse por los matemáticos babilonios, alrededor de 500 aC. Sin embargo, los matemáticos griegos no utilizaron un sistema de numeración posicional. Pero en ese entonces, que fue la época de mayor esplendor de la astronomía antigua, se difunden los escritos babilónicos que, como hemos dicho, utilizan el cero como indicador de posición. Algunos historiadores coinciden en que los astrónomos griegos utilizaron el cero en sus tablas, empleando un símbolo, *o*, denominado omicrón, muy similar a nuestro cero actual. También suponen que la elección de este símbolo obedece a que es la primera letra de la palabra "ouden" (con letra griega), que significa "nada". Pero una vez que terminaban de hacer sus cálculos, transformaban los resultados a su sistema de numeración que no lo incluía.

Otros autores consideran poco probable que los griegos utilizaran el cero dado que era muy rechazado (Seife, 2006).

Tampoco utilizaron el cero en la numeración romana, pese a sus proezas, al igual que los griegos, en cuestiones de ingeniería.

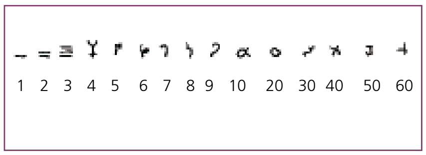
Los estudiosos de las escrituras mayas afirman que fueron los mayas que habitaban en Yucatán quienes utilizaron el cero por primera vez en su sistema de numeración vigesimal posicional. Escribían sus símbolos en cajas o niveles, en forma vertical de abajo hacia arriba, de acuerdo con los criterios de un agrupamiento simple para los números menores que 20, y, a partir de él, siguiendo las reglas de los sistemas posicionales cambiaban de nivel. Con un punto representaban la unidad y con una barra horizontal el cinco. El caparazón de la tortuga era utilizado para representar el cero (Gómez Alonso, 1993, pp. 39).



Al ser un sistema vigesimal, o sea, que considera el 20 como unidad básica para la cuenta, cada espacio que se avanza en el número representa 20 veces más que el espacio anterior. Esto se entiende mejor si lo comparamos con el sistema que usamos nosotros.

Alrededor de 300 años antes de Cristo en India se utilizaba un sistema no posicional, que puede considerarse el origen de nuestro sistema de cifras actual. Por tal motivo nos detendremos especialmente, analizando el surgimiento del cero en esta cultura.

En principio se valían de representaciones como las siguientes:



Posteriormente se suprimieron algunos símbolos, quedándose sólo con los nueve primeros. En esta instancia todavía no utilizaban el cero.

Según datos que aporta George Ifrah (1985), los indios utilizaban un sistema de numeración verbal en lengua sánscrita. A cada uno de los nueve primeros números los llamaban de un modo particular.

eka	dvi	tri	catur	pañca	sat	sapta	asta	nava
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Puede notarse la similitud con nuestro sistema actual: dvi: dos, catur: cuatro; sapta: siete, nave: nueve.

Además, asignaban nombres particulares a las potencias de diez y daban nombres compuestos a los demás números. El orden de presentación era de izquierda a derecha en sentido creciente de dichas potencias, contrario al que usamos actualmente.

dasa	sata	sahara	ayuta	laksa	...
10	100	1.000	10.000	100.000	...

El problema que supuso la ausencia de unidades se superó utilizando la palabra sunya, que significa "vacío". Por ejemplo,

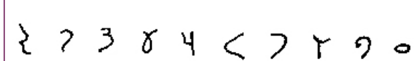
eka	sunya	tri
uno	vacío	tres

LA PALABRA "CERO"

Según los eruditos, numerosos indios también llamaron *cifrae*, deformación de al-cifr, traducción al árabe de la palabra *sunya* y cuya latinización culta es *zephirae* o *sephirum* que dio lugar a la palabra *cero* (Gómez Alonso, 1993).

A partir del siglo V se abandonó la referencia a las palabras. En ese entonces en India se contaba con un sistema de numeración cifrado, que incluía el cero, era posicional y decimal.

Sobre esa base se elaboró la numeración indoarábiga.



India, 876 d. de C

EL CERO COMO NÚMERO EN SÍ MISMO

Pese a los avances de su producción matemática y aún teniendo una idea de vacío, los griegos no interpretaron el cero como número, tal como hicieron los indios (Boyer, 1994). Entre estos últimos, se atribuye a Brahmagupta (628 dC), el primer tratamiento del cero como número, quien avanzó en la elaboración de reglas para operar con él.

El impacto del trabajo numérico en India fue muy profundo. A diferencia de los griegos[2], los indios no vincularon los números con figuras, lo que no contribuyó en su cultura al desarrollo de la Geometría. Sin embargo, esta particularidad tuvo un efecto inesperado: en India se liberaron de las limitaciones del pensamiento griego y de su rechazo al cero, dando lugar al nacimiento del Álgebra.

Las particularidades del cero requirieron de algunos ajustes en el campo de la aritmética que no resultaron sencillos. La mayor dificultad se encontró en la división por cero. Brahmagupta no se pronuncia respecto de la división por cero de un número distinto de cero, pero si de 0/0 afirmando que es igual a 0 y revelando así una inconsistencia.

El matemático indio Bhaskara (1114-1185) continúa con la obra de Brahmagupta y aborda, entre otros problemas, el de la división por cero. Propone que un número diferente de cero dividido cero es infinito.

Si bien, como señala Boyer, la proposición parece prometedora, en otra parte de su escrito el mismo Bhaskara afirma que:

a/0. 0 = a que como sabemos, es incorrecto.

LAS REGLAS DE BRAHMAGUPTA

- La suma de cero y un número positivo es positiva.
- La suma de cero y un número negativo es negativa.
- La suma de un positivo y un negativo es su diferencia; o, si son iguales, cero.
- Cero dividido por un número positivo o negativo, o bien es cero, o bien se expresa como una fracción con el cero como numerador y la cantidad finita como denominador.

Brahmagupta, 628 dC.

¿POR QUÉ NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO?

Para comprender por qué no se puede dividir por cero pensemos del siguiente modo:

Sabemos que 10: 2 = 5 porque 5x2=10

Si tratamos de razonar análogamente para determinar el cociente entre 10 y 0 (10: 0), tendríamos que buscar un número b tal que bx0=10. Pero bx0=0, lo que nos conduce a la igualdad ¡0=10! que es absurda.

BHASKARA Y LA DIVISIÓN POR CERO

“Proposición: Dividendo 3. Divisor 0. Cociente la fracción 3/0. Esta fracción de la que el denominador es cifra se llama cantidad infinita. En esta cantidad que consiste en lo que tiene cifra como divisor no hay alteración posible por mucho que se añada o se extraiga, lo mismo que no hay cambio en Dios infinito e inmutable”.

(Boyer, 1994)

CERO E INFINITO, ¿QUÉ VINCULACIONES?

Como dijimos anteriormente, existen coincidencias en que el cero nace y se desarrolla en Oriente, tanto en su uso como indicador de posición como en su carácter de número en sí mismo. Sin embargo, tal vez por protegerse de una idea oriental, tal vez porque la nada era muy temida, tal vez por la vinculación entre números y figuras, el cero no se utilizó en la vasta producción matemática de sus máximos exponentes de Occidente, los antiguos griegos. Pero los griegos no sólo rechazaban el cero; también rechazaban el infinito. Recordemos que la doctrina pitagórica dominaba la filosofía occidental: el universo estaba gobernado por números y proporciones: los planetas se movían en esferas celestiales que giraban emitiendo música. Aristóteles y los filósofos posteriores sostenían que no podía haber un número infinito de esferas una dentro de otra. En el marco de esta perspectiva filosófica no cabía la idea de infinito (Seife, 2006).

Además de las vinculaciones filosóficas y religiosas que la mente griega establecía entre el vacío y el infinito, es posible relacionar matemáticamente cero e infinito. El infinito comienza a instalarse en la matemática occidental a partir de la obra de Zenón de Elea (450 aC), específicamente a partir de sus paradojas más célebres: “El corredor en el Estadio” y la de “Aquiles y la tortuga”.

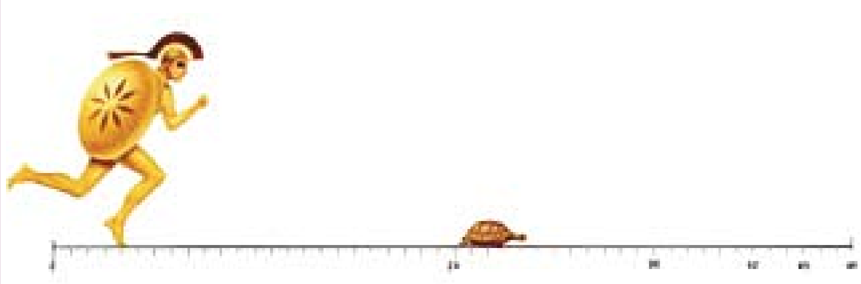
En la primera de ellas, Zenón plantea que

LAS PARADOJAS

Siguiendo a Martin Gadner (1983) podemos caracterizar a las paradojas del siguiente modo:

- Afirmaciones que parecen falsas, pero que en realidad son verdaderas.
- Afirmaciones que parecen verdaderas, pero en realidad son falsas.
- Cadenas de razonamiento impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas (falacias).
- Declaraciones cuya verdad o falsedad es indecidible.

2. Se recomienda releer el Fascículo 1 para profundizar acerca del tratamiento que los griegos realizan de los números.



no se puede llegar al final de una pista de carreras porque luego de atravesar la mitad de la totalidad hay que atravesar la mitad de lo que falta y así sucesivamente, lo que lleva a la idea de infinito.

La paradoja de Aquiles y la tortuga es similar. El más veloz de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la tortuga, si en una carrera se da a ésta una ventaja inicial.

Para facilitar la comprensión supongamos que Aquiles le da a la tortuga una ventaja de un metro y que sólo corre dos veces más rápido que la tortuga. Comienzan a correr en simultáneo y Aquiles llega al lugar desde el que salió la tortuga: recorrió entonces un metro. La tortuga habrá avanzado entonces medio metro. Si Aquiles vuelve a avanzar recorriendo medio metro, la tortuga también lo hará recorriendo un cuarto metro. Si a partir de ese lugar Aquiles recorre un cuarto metro, la tortuga recorrerá un octavo de metro, y así sucesivamente. Aquiles nunca alcanzará a la tortuga aunque se vaya aproximando infinitamente a la ella, dando un número infinito de pasos: ¡la tortuga le llevará la ventaja hasta distancias infinitamente pequeñas!

Todos sabemos que en la vida real Aquiles alcanzará a la tortuga. Pero los filósofos de esa época fueron incapaces de encontrar un error que permitiera refutar el razonamiento de Zenón: sus pasos son correctos.

La paradoja de Zenón[3] permite vincular el infinito y el cero: Aquiles debía dar un número infinito de pasos, cuya longitud es cada vez menor, es decir, como expresamos en matemática esa longitud “tiende a cero”. Y, como dijimos, los griegos no utilizaban este número.

Para comprender la paradoja debemos tener en cuenta las distancias que recorre Aquiles: comenzamos por el tramo cuya longitud es 1 m, luego recorremos ½ m, luego ¼ m, luego 1/8 m y así sucesivamente. Los tramos son cada vez más pequeños, cada vez más cercanos a cero. Para los griegos esos números no tendían a nada pero hoy día sabemos que los números 1, ½, ¼, 1/8, $1/2^n$ tienden a cero, que es su límite. Es decir, el viaje de Aquiles tiene un destino.

Como sabemos hoy día, el infinito, el cero y la noción de límite están estrechamente relacionados. Pero los filósofos griegos no advirtieron esa relación; ni el propio Zenón pudo aportar una solución a esta paradoja.

EL CERO Y LAS PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS

Detenernos en las producciones de los alumnos resulta esencial para comprender cómo conciben ellos las nociones matemáticas que están aprendiendo y qué errores frecuentes se vinculan con las mismas, a fin de tomarlos como puntos de partida para diseñar propuestas de enseñanza que permitan desplegar una práctica matemática como la que apuntamos[4].

En este apartado analizaremos producciones de alumnos en los que interviene este número particular; el cero. Para ello, reflexionaremos previamente sobre el rol del error y su tratamiento en el aprendizaje la matemática.

ERRORES Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Pese a que aprender a partir de los propios errores es tan antiguo como el hombre, la consideración de su rol constructivo en los aprendizajes escolares es un aporte reciente.

En la enseñanza tradicional los errores se consideraban como una disfunción de los conocimientos del alumno, por lo que una buena enseñanza debía evitarlos.

Al respecto, Rouche (1991) destaca que “... hay un sistema de enseñanza enteramente basado en la idea de evitar todo error: en la enseñanza programada lineal (es decir, sin bucles laterales), la serie de las preguntas es puesta a punto mediante ajustes sucesivos para que los alumnos no den ningún paso en falso, comprendan todo, en seguida ¡lo que puede parecer como un ideal!”.

Desde la perspectiva acerca de la enseñanza de la Matemática que adoptamos, existen numerosos trabajos e investigaciones que parten del estudio de los errores y las dificultades de los alumnos tratando de identificar, a través de las regularidades que se encuentran en las diferentes producciones, cuáles son las concepciones de los alumnos, cuáles de ellas pueden constituir obstáculos para

3. Este análisis se basa en lo desarrollado en Seife, (2006), *La biografía de una idea peligrosa*.

4. Le sugerimos volver sobre las características de la práctica matemática, que está abordado en el Fascículo 1.

la producción de conocimientos y bajo qué condiciones estas concepciones, a veces muy resistentes, pueden ser modificadas, abriendo así el horizonte pedagógico hacia el *"derecho al error"*.

En este sentido Berté (2000) plantea que "el cerebro humano no es una página en blanco sobre la cual se imprime automáticamente lo que el profesor le dice.

El alumno posee conocimientos y los nuevos deben construirse a partir de los ya poseídos. Rara vez se trata sólo de una acumulación de conocimientos.

La mayoría de las veces el nuevo conocimiento debe producir una reestructuración del anterior y de esta manera tendrá posibilidad de ser integrado.

Pero el ya existente resiste, y es normal, porque uno nuevo se construye contra uno anterior".

En matemática, algunos docentes creen poder solucionar el problema pidiéndoles que olviden lo aprendido y dando una nueva explicación, pero no sucede nada de eso.

En el proceso de construcción de los conocimientos, los alumnos pasan siempre por conocimientos incompletos o insuficientes que:

- a menudo se convierten en obstáculos
- son necesarios para que el alumno pueda construir un saber.

Algunos errores de los alumnos se originan en conocimientos que han resultado útiles en un cierto dominio pero que en otro son inadecuados. Estos errores pueden ser interpretados en términos de concepciones de los alumnos.

"Son algo así como las piedras sobre las cuales se constituirá un edificio, edificio provisorio que, tal vez, será un obstáculo después, pero a partir de allí habrá que operar una nueva transformación para ir más lejos. Es una metáfora, pero nos parece, que permite comprender mejor lo que sucede" (Berté, A 1999).

Las producciones de los alumnos permiten registrar gran variedad de errores.

Algunos de ellos no merecen una atención especial pues pueden haberse originado por causas externas al aprendizaje y la enseñanza, como por ejemplo falta de tiempo, cansancio de los alumnos, proximidades de algún festejo, entre otras.

Pero otros pueden obedecer a causas de real significación pues, como dijimos, pueden provenir de verdaderos obstáculos para la adquisición de nuevos conocimientos.

Podemos caracterizar a un obstáculo del siguiente modo:

- Se trata de un conocimiento y no de una ausencia de conocimiento.
- Permite producir respuestas adaptadas a ciertos problemas o clases de problemas.
- Conduce a respuestas erróneas en otro tipo de problemas.
- Presenta una resistencia a toda modificación o transformación, y se manifiesta de manera recurrente.
- El rechazo a ese conocimiento desembocará en un conocimiento nuevo.

Es importante tener en cuenta que los errores persistentes no pueden ser superados por medio de una observación de parte del docente.

En muchas clases los docentes asumen la responsabilidad de decir lo que está bien y lo que está mal, lo que hace que muchos alumnos piensen que no tienen que controlar su trabajo. De este modo la reflexión acerca de los errores se minimiza o, más aún, se deja de lado.

Es necesario pensar en actividades de **remediación**, no en el sentido de un remedio, sino de situaciones que involucren nuevas mediaciones entre el alumno y el saber. Por ejemplo, una actividad que promueva un cambio de registro de representación puede ayudar a los alumnos/as a interpretar el porqué de los errores cometidos.

Otra posibilidad de remediación es mante-

OBJETOS MATEMÁTICOS Y REPRESENTACIONES

Una característica distintiva de los objetos matemáticos es que no es posible acceder a ellos mediante los sentidos, como lo es para los objetos denominados "reales" o "físicos", sino exclusivamente a través de sus representaciones.

En matemática se utilizan numerosos registros de expresión y representación: registro del lenguaje natural, gráfico, figurativo (incluye dibujos), tabla, de escritura para los números, etc.

Esa particularidad otorga a las representaciones un lugar esencial en el aprendizaje de la matemática pues no es posible producir conocimiento matemático si no se dispone de las herramientas que se utilizan para representar los objetos propios de esta disciplina.

Es necesario que los alumnos conozcan las diferentes formas de representar un objeto matemático, seleccionando la más adecuada en función del problema a resolver, y diferenciando el objeto de su representación.

También es necesario poder articular dichos registros de representación ya sea para facilitar la resolución de un problema o para controlar procedimientos y resultados.

ner una conversación con el alumno o los alumnos que cometieron el error para que expliquen sus resoluciones e identifiquen los procedimientos que han puesto en juego y que los han conducido a soluciones incorrectas.
En esta instancia, el profesor podrá plantear nuevas preguntas o la revisión de lo realizado.
También puede ser adecuado intentar que los alumnos identifiquen los errores producidos, promoviendo interacciones entre los mismos a fin de que cada uno de ellos pueda explicitar las razones por las cuales piensan que sus procedimientos son correctos.
Sin embargo, debe considerarse el riesgo de que surjan dificultades sociales ("yo tengo razón porque tengo mejor nota", etc.), por lo que es conveniente organizar los equipos de trabajo teniendo en cuenta dichas dificultades.

EL CERO Y ALGUNOS ERRORES DE INTERÉS

Las particularidades aritméticas del cero que, como dijimos, resultaron inexplicables para los pueblos antiguos, suelen provocar errores en las producciones de los alumnos. Como sabemos, la suma no presenta dificultades mayores: sumar cero a un número deja a éste inalterado.
Mientras que multiplicar cero por cualquier número da cero como solución, lo que no resulta de simple comprensión. Pero, la mayor dificultad se encuentra en la división por cero.

ERRORES VINCULADOS CON PRODUCTOS IGUALADOS A CERO

A continuación comentaremos una situación descripta por Mabel Panizza[5] (2005) en la cual surgen errores asociados con el uso de la propiedad del producto nulo.
La misma fue extraída de una investigación que se realizó con ingresantes de la Universidad de Buenos Aires que recién comenzaban a cursar el Ciclo Básico Común. Se propone a los alumnos discutir sobre la resolución de un sistema de ecuaciones por parte de un alumno imaginario, Juan:

> Un estudiante, Juan, tiene que solucionar el sistema siguiente:
>
> $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2=25 \\ xy=0 \end{cases}$$
>
> Y él dice que la solución es el conjunto de puntos dado por:
> $x^2 + y^2=25$
> Indique si su solución es correcta o no.
> Por favor, explique en términos matemáticos cómo considera que ha pensado Juan.

Este hipotético alumno, Juan, ha cometido un error y ha llegado a una solución incorrecta del sistema. Su error radica en haber sustituido la expresión por el número 0 en la primera ecuación, como si fuese una tercera variable en el problema, que no guarda relación con las variables x e y.
Al hacer esta sustitución, obtiene una nueva ecuación, $x^2+y^2=25$, con la cual describe al conjunto solución, que no es equivalente al sistema dado. Juan podría haber notado su error si hubiera realizado algún tipo de control de su solución, por ejemplo, pasando al registro gráfico (al menos notando que la ecuación obtenida corresponde a la ecuación de una circunferencia, en la cual hay puntos en los que la segunda ecuación no se satisface).
Analicemos algunas de las producciones de los alumnos a propósito de este problema. Algunos alumnos sostienen que "Juan tiene razón, hizo una sustitución" y al mismo tiempo resuelven correctamente el sistema, sin percibir la contradicción en la que han incurrido. Un ejemplo representativo de este tipo de respuesta es la siguiente:
"Juan hizo bien, él hizo una substitución, puso xy=0 en la ecuación $x^2+xy+y^2=25$ y obtuvo $x^2+y^2=25$. Como xy=0 entonces: x = 0 ó y = 0.
En el primer caso, deducimos que $y^2=25$, y en el segundo que $x^2=25$".
Aparentemente, estos alumnos conocen y usan (mecánicamente) la propiedad del producto nulo, pero no comprenden su sentido, ya que no les permite cuestionar la forma en la que Juan resolvió el problema. Otros alumnos, sí cuestionaron el razonamiento de Juan, pero no por incorrecto sino por *incompleto*. Un ejemplo representativo de este tipo de respuesta es el siguiente: "Juan ha hecho bien, pero de una manera incompleta" porque "él no sabía cuál de las dos (x ó y) era 0; si él hubiera sabido por ejemplo que y=0 él podría haber continuado, y hubiera escrito $x^2=25$".
Este grupo de alumnos también conoce, evidentemente, la propiedad del producto

> **UNA SOLUCIÓN CORRECTA**
>
> Para resolver este sistema es conveniente analizar en primer lugar la segunda ecuación. La misma se satisface tanto si x=0 como si y=0.
> Si x=0, para satisfacer la primera ecuación y^2 debe ser igual a 25, con lo cual y puede ser 5 ó -5. De esta manera obtenemos dos soluciones para este sistema: (0,5) y (0,-5) Se puede verificar fácilmente que son soluciones reemplazando en el sistema de ecuaciones.
> Si y=0, para satisfacer la segunda ecuación x^2 debe ser igual a 25, con lo cual, x puede ser 5 ó -5. De esta manera obtenemos otras dos soluciones para este sistema: (5,0) y (-5,0). Se verifica de la misma manera que mencionamos antes.
> Como ya agotamos todas las alternativas que teníamos para verificar la segunda ecuación, podemos asegurar que no hay más que esas cuatro soluciones.

5. Algunos elementos del análisis fueron tomados de http://www.clame.org.mx/documentos/alme15_1.pdf Recomendamos la lectura de ambos artículos.

nulo, pero tienen dificultades para utilizar un razonamiento de tipo hipotético para resolver el sistema. Para ellos, decir "o bien x=0, o bien y=0", implica que una de las dos variables es, efectivamente, cero, y que no tenemos información suficiente para determinar cuál de ellas es igual a cero.

Cuando se preguntó a uno de los alumnos de este grupo en qué sentido consideraba que el razonamiento de Juan era incompleto, profundizó de la siguiente manera: "Uno de los dos números x o y es igual a 0, pero no sé cuál. No tengo ningún elemento para decidir". Continúa: "Si yo pudiera saber cuál es cero, si por ejemplo supiera que y=0, entonces podría escribir como solución $x^2=25$". Ante esta explicación, el entrevistador le pregunta: "¿Usted recuerda una situación similar, en la cual sí haya podido decidir?" El alumno responde que sí y propone, como ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2=25 \\ 3 - y=0 \end{cases}$$

Aquí se hace evidente que el problema principal para abordar la resolución de este sistema radica en la naturaleza de la segunda ecuación (que es la que el alumno decide cambiar). Es probable que también fuera capaz de resolver el problema si la segunda ecuación fuera, por ejemplo, y=3-x, en cuyo caso realizaría una sustitución como de costumbre, y obtendría una ecuación cuadrática con una sola incógnita que es posible resolver. Incluso si la ecuación hubiera sido de la forma x.y = C con C = 0 con le hubiera sido posible resolver, ya que hubiera podido despejar/de esa ecuación, por ejemplo, y en función de x y así obtener, al sustituir en la primera, una ecuación bicuadrática de una sola incógnita.

Como mencionamos anteriormente, proponer a los alumnos un cambio de registro de representación puede ser muy útil a la hora de controlar sus respuestas o de remedar errores. La primera ecuación es la ecuación de una elipse, como puede verificarse utilizando un programa graficador en la computadora.

Para interpretar la segunda ecuación, habría que recordar que se satisface tanto cuando y=0 (sería el conjunto de puntos que conforman el eje de abscisas) como cuando x=0 (serían los puntos del eje de ordenadas). La gráfica de la ecuación es entonces ese par de rectas.

La solución del sistema se encontraría en los puntos de intersección de la elipse con cualquiera de los ejes coordenados.

Para trabajar con los alumnos que tienen dificultades con el razonamiento hipotético que requiere esta situación, y que dicen saber que una de las dos, x o y, ha de ser igual a 0, pero que no pueden saber cuál es, se les puede sugerir un camino de control para el cual necesitan tener en claro qué es una solución a un sistema de ecuaciones.

Se les puede pedir que prueben reemplazar los dos pares (x,y) que obtienen al tomar x=0, y que decidan si esos pares ordenados son o no solución del sistema.

Deberían concluir que sí lo son, pues satisfacen ambas ecuaciones. A continuación, se les puede pedir que hagan lo mismo con los dos pares que obtendrían si y=0, y tendrían que concluir que también esos pares son solución, y que por tanto no hay razón para descartar ninguno de los cuatro encontrados.

Pasamos ahora a comentar otro error vinculado con el producto nulo, que proviene de lo que suele denominarse *generalización abusiva*.

Recordemos antes que uno de los procesos esenciales de la actividad matemática es la generalización.

Generalizar implica pasar de una colección de casos particulares a una propiedad o expresión común que los englobe y también transferir a una situación procedimientos y propiedades que se cumplen en otra. Pero como todos los procesos, la generalización puede provocar errores por un uso incorrecto o abusivo.

Dichos errores pueden provenir de extender a una situación procedimientos o propiedades que se cumplen en otras y utilizarlos sin tener en cuenta el dominio de validez de los mismos; se trata de una "generalización abusiva".

Tal es el caso que presentamos a continuación. La propiedad que expresa que un producto igualado a cero implica que uno de sus factores (o ambos) es cero permite resolver ecuaciones expresadas mediante una factorización igualada a cero:

$(x – 9).(x + 3) = 0$
Luego $(x-9) = 0$
o $(x+3) = 0$
Por lo tanto
$x_1 = 9$ y $x_2 = -3$

La extensión de esa propiedad a una situación en apariencia similar, una ecuación factorizada e igualada a un número distinto de cero, puede dar lugar a errores como el siguiente:

$(x – 9).(x + 3) = 11$
Luego $(x – 9) = 11$
o $(x + 3) = 11$
Por lo tanto
$x_1 = 20$ y $x_2 = 8$

Para cuestionar este error, una posibilidad consiste en pedir a los alumnos que verifiquen con un ejemplo, es decir, un contraejemplo que demuestre que la propiedad utilizada no es válida, lo que podrá abrir camino para buscar el procedimiento equivocado.

Otra posibilidad, y muy adecuada a las condiciones escolares actuales, es proponer una remediación trabajando con la computadora, como la que incluimos a continuación. Notemos que se propicia un cambio de registro, pues se promueve un pasaje del registro algebraico al gráfico.

Podemos notar que el error descripto se pro-

LA COMPUTADORA EN LA CLASE

Actividad para los alumnos
Consideren los siguientes sistemas:
S1

$$\begin{cases} y = (x - 9)\,(x + 3) \\ y = 0 \end{cases}$$

S2

$$\begin{cases} y = (x - 9)\,(x + 3) \\ y = 11 \end{cases}$$

Utilizando alguno de los programas de sus computadoras, determinen las soluciones de S1 y S2.
Sobre la base de las soluciones encontradas analicen la pertinencia de las siguientes resoluciones estableciendo vinculaciones entre las resoluciones gráficas y algebraicas, e identificando errores si fuera necesario.

Resolución 1
$(x - 9)\,(x + 3) = 0$ *implica que* $(x - 9) = 0$. *Luego* $x_1 = 9$
O bien, $(x + 3) = 0$. *Luego* $x_2 = -3$

Resolución 2
$(x - 9)\,(x + 3) = 11$ *implica que* $(x - 9) = 11$. *Luego* $x_1 = 20$
O bien, $(x + 3) = 11$. *Luego* $x_2 = 8$

duce al no tener en cuenta el papel esencial que cumple el cero en la primera resolución, y que no es transferible a otros números. Un asunto central de la generalización es encontrar lo que es propio de un caso y distinguirlo de lo que es común y válido para todos (Grupo Azarquiel, 1993).

ERRORES VINCULADOS CON LA DIVISIÓN

POR CERO

Como dijimos, la mayor dificultad de la aritmética del cero se vincula con el lugar del cero como divisor. En la escuela secundaria es frecuente observar errores como el siguiente. Al resolver la ecuación:

$$\frac{x^2 - 3}{x - 5} = 8 + \frac{22}{x - 5}$$

Muchos alumnos proceden del siguiente modo, sin reparar que el denominador no puede ser cero ($x - 5 \neq 0$)

$$\frac{x^2 - 3}{x - 5} = 8 + \frac{22}{x - 5}$$

Multiplicando por $x - 5$:

$x^2 - 3 = 8x - 40 + 22$

o bien:

$x^3 - 8x + 15 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado concluyen que las soluciones son:

$x_1 = 3$ y $x_2 = 5$

Pero $x = 5$ no es solución de la ecuación planteada, es una "raíz extraña".

Cuando se multiplica ambos miembros de la igualdad por (x-5) se obtiene una ecuación que es equivalente a la anterior salvo para x=5; por eso es que x=5 es raíz de la última ecuación, pero no de la primera, y en ese sentido se habla de "raíz extraña".

El no tener en cuenta el dominio de validez de la ecuación (en este caso $x - 5 \neq 0$) origina el error en cuestión.

Para el error que acabamos de comentar un trabajo con la computadora como el anteriormente descripto también puede facilitar una remediación pertinente.

Otra posibilidad de abordar la remediación del error en cuestión es proponer a los alumnos la siguiente actividad.

Actividad para los alumnos
Encuentren el error en la demostración siguiente:
Supongamos que a y b son iguales a 1. Luego podemos escribir la siguiente igualdad:
$b^2 = a\,b$
Dado que a es igual a si mismo es válida la igualdad siguiente:
$a^2=a^2$
Restando miembro a miembro 1 de 2:
$a^2-b^2=a^2-ab$
Factorizando ambos miembros de la ecuación
$(a+b)(a-b)=a(a-b)$
Dividiendo ambos miembros por a – b obtenemos
$a+b=a$
Restando a en ambos miembros de la igualdad:
$b=0$.
Pero partimos de que b=1.
Luego, ¡1=0!

Como dijimos anteriormente, sería conveniente promover la discusión entre pares y luego organizar una puesta en común para que pueda comprenderse con claridad que el error proviene de dividir por a – b, pues partimos de que a = b, por lo que ¡dividir por a – b es dividir por cero!

LA SUPERACIÓN DE ERRORES HABITUALES

Con mucha frecuencia, los profesores de Matemática observamos errores como los siguientes: $\frac{a+3}{b+3} = \frac{a}{b}$

y especialmente en casos tales como:

$$\frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$$

o $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$

Y también muy a menudo nos valemos de contraejemplos intentando ayudar a nuestros alumnos a superar tales errores. Por ejemplo, planteamos comparar

$\frac{1}{2}$ y $\frac{1+2}{2+2}$ es decir $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$

Sin embargo, si bien el contraejemplo es la forma de prueba adecuada en este caso y resulta claro para los alumnos, el error persiste en muchísimos casos.
De modo complementario, es posible acudir a otra manera de poner en cuestión el mencionado error; se trata de una prueba en la que interviene especialmente el cero.

Supongamos que:
$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$

Luego, $a\,(b+x) = b\,(a+x)$

Si $x \neq 0$, entonces $a = b$.
Es decir, sólo existe la igualdad si a=b.

Si $x = 0$, entonces $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$
en todos los casos.

EL CERO Y LAS PRUEBAS DE LOS ALUMNOS

Tal como señalamos en el Fascículo 1, hoy día adherimos a una concepción de matemática que focaliza la mirada no sólo en sus resultados sino también en sus formas de producción, es decir, en las diferentes prácticas que un matemático realiza como parte de su trabajo: buscar soluciones a problemas planteados, plantear nuevos problemas, elaborar conjeturas, generalizar, probar, comunicar el resultado de su trabajo. Desde ese modo de entender la matemática, sostenemos que su aprendizaje se vincula con el desarrollo de prácticas de estas características, lo que permitirá que los alumnos otorguen sentido a los conocimientos, que los conceptualicen, los utilicen apropiadamente y los organicen, es decir que produzcan matemática.
En este contexto resulta fundamental que en la Escuela Secundaria los alumnos avancen en la producción de pruebas basadas en propiedades, aproximándose así al tipo de pruebas válidas en esta disciplina.
Sin embargo, no siempre se promueve un trabajo de esa naturaleza. Por ejemplo, en las clases de Matemática de la escuela secundaria es frecuente que se presenten las conocidas "reglas de los signos" para las operaciones con números enteros sin ningún tipo de justificación.

Las reglas de los signos

Operaciones con números enteros
Para operar con números enteros es necesario memorizar las reglas de los signos:

Más por más, es más: (+ 2) x (+ 6) = + 12
Más por menos, es menos: (- 2) x (+ 6) = - 12
Menos por menos, es más: (- 2) x (- 6) = + 12

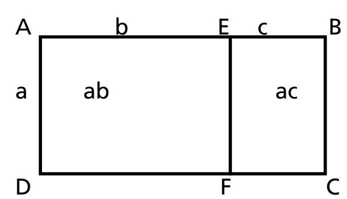
Las propiedades aritméticas del cero intervienen en pruebas totalmente adecuadas para trabajar en la Escuela Secundaria y que permiten a los alumnos comprender el porqué de las mencionadas reglas.
Por ejemplo, la que incluimos en el recuadro de la derecha.

El resultado del cálculo (+ 2)[(+ 3) + (- 3)] debe ser igual a 0 pues (+ 3) + (- 3) es cero dado que se trata de una suma de opuestos y que la multiplicación por cero da por resultado 0.
Pero como al ampliar los conjuntos numéricos pasando de los naturales a los enteros se mantienen las propiedades de los naturales, entre ellas la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma resulta:
(+ 2) [(+ 3) + (- 3)] = (+ 2)(+ 3) + (+ 2)(- 3) .
Como (+2) (+3) = 6, entonces (+2) (-3) debe ser el opuesto de 6, es decir, - 6.
Luego, (+ 2) (- 3) = (- 6)
¡Hemos probado entonces la conocida regla más por menos es menos!

De manera análoga es posible probar que menos por menos es más:
Es importante observar que las pruebas propuestas tienen las características que mencionamos pues, si bien utilizan números, los mismos son concebidos de modo general.
Sin embargo, el hecho de que el producto de dos números negativos sea positivo suele ser rechazado con frecuencia por los alumnos, aún en casos donde se hayan promovido pruebas como las que describimos. Para superar tal dificultad puede complementarse la propuesta con un tratamiento geométrico, específicamente en términos de áreas.

(- 2) [(+ 3) + (- 3)] = 0 pues (+ 3) + (- 3) = 0 es cero dado que se trata de una suma de opuestos y que la multiplicación por cero da por resultado 0.
Pero (- 2) [(+ 3) + (- 3)] = (- 2)(+ 3) + (- 2)(- 3) .
Como (- 2) (3) = -6 , (- 2) (- 3) debe ser el opuesto de -6, es decir, 6.
Luego: (- 2) (- 3) = 6

Dicho tratamiento requiere trabajar previamente la interpretación de propiedad distributiva de números positivos en términos de áreas de rectángulos del siguiente modo.
En primer lugar, se prueba la propiedad distributiva en términos de equivalencia de áreas para números naturales:



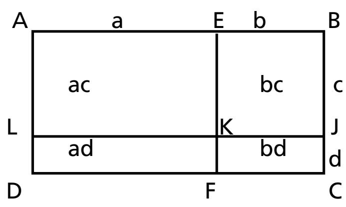
Área ABCD = Área AEFD+Área EBCF

Pero Área ABCD = a(b+c) y además,

Área AEFD+Área EBCF = ab+ac

Luego, a(b+c) = ab+ac

Posteriormente se prueba la doble distributiva, también para números naturales:



Área ABCD = Área AEKL+Área EBJK+ Área LKFD+ Área KJCF

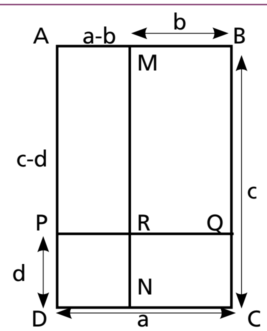
Pero Área ABCD = $(a+b)(c+d)$ y además,

Área AEKL+Área EBJK+Área LKFD+Área KJCF=

$=ac+bc+ad+bd$

Luego, $(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$

Finalmente, consideramos la equivalencia de áreas para cualquier par de números enteros para probar que "menos por menos es más".



Área AMRP = Área ABCD-Área MBCN-Área PQCD+Área RQCN
Sumamos el área de RQCN porque la restamos dos veces.
Pero Área AMRP = $(a-b)(c-d)$ y además,
Área ABCD-Área MBCN-Área PQCD+Área RQCN = $ac-bc-ad+bd$
Luego, $(a-b)(c-d)= ac-bc-ad+bd$ (1)
Si se interpreta $(a-b)(c-d)$ como $(a+ (-b)(c+(-d)))$, por la doble propiedad distributiva podemos escribir:
$(a+(-b))(c+(-d)) = ac+(-b)\,c+a\,(-d)+(-b)\,(-d)$ (2)
Pero sabiendo que $(-b)c = -bc$ y que $a(-d) =-ad$,de1 y 2 podemos deducir que:
$(-b)(-d) = bd$
Es necesario tener en cuenta que previamente se debe probar que "menos por más es menos".

LA PRUEBA DE STEVIN

Esta última prueba fue propuesta por el matemático flamenco Simón Stevin en su obra L' Arithmetique que data de 1634. Recordemos que en ese entonces los negativos no eran considerados números. La vinculación de los números con las magnitudes hizo que se rechace el status de números para los negativos, al igual que para el cero.
Es Stevin quien por primera vez reconoce la existencia de los negativos como símbolos independientes del cálculo numérico. Sin embargo, duda también del carácter de los mismos, lo que se pone de manifiesto en se definición de número: "un número es aquello que expresa cantidad" (Vargas-Machuca, Jimeno e Iriarte, 1990).

A MODO DE CIERRE

Hemos intentado mostrar que, tal como sucedió en los orígenes, las particularidades aritméticas del cero le confieren una complejidad epistemológica que es necesario atender desde la enseñanza.
Esperamos que las sugerencias incluidas en esa línea resulten un aporte para los docentes, permitiéndoles abordar la complejidad que involucra gestionar propuestas en las que los alumnos se ubiquen como productores del conocimiento puesto en juego, y en tal sentido puedan aprender a partir de sus errores, cuestionándolos con argumentos matemáticamente adecuados.

Bibliografía

Berté, Annie (2000): Matemática dinámica, Buenos Aires, a-Z Editora.
Boyer, Carl (1994): Historia de la matemática, Madrid, Alianza Universidad Textos.
Cérilly, Tommy (2011): 50 cosas que hay que saber sobre Matemáticas, Buenos Aires, Paidós.
Collete, Jean- Paul (1985): Historia de las Matemáticas I, Madrid, Siglo XXI.
Gómez Alfonso, Bernardo (1993): Numeración y cálculo, España, Editorial Síntesis.
Gónzalez, José Luis y otros (1990): Números Enteros, España, Editorial Síntesis.
Grupo Arzaquiel (1993): Ideas y actividades para enseñar álgebra, España, Editorial Síntesis.
Panizza, Mabel (2005): Razonar y conocer, Buenos Aires, Libros del Zorzal. Extraído el 27 de junio de 2011 de http://www.clame.org.mx/documentos/alme15_1.pdf.
Seife, Charles (2006): La biografía de una idea peligros, España, Ellago Ediciones, Colección Las Islas.

Ministro de Educación, Prof. Alberto Estanislao Sileoni
Secretaria de Educación, Prof. María Inés Abrile De Vollmer
Jefe de Gabinete, Lic. Jaime Perczyk
Subsecretaria de Equidad y Calidad Educativa, Lic. Mara Brawer
Directora Nacional de Gestión Educativa, Lic. Marisa Díaz
Director de Educación Secundaria, Prof. Guillermo Golzman

Coordinadora de Áreas Curriculares, Lic. Cecilia Cresta
Coordinadores del Área de Capacitación, Lic. Carlos Ruiz, Lic. Margarita Marturet
Coordinadoras del Programa de Capacitación Explora, Lic. Paula Linietsky, Lic. Adriana Vendrov

Edición y corrección, Lic. Marina Rocha
Diseño y diagramación, DG Julia Jara
Ilustración, Gustavo Daguerre
http://portal.educacion.gov.ar/secundaria