MATEMÁTICA

DE INFERENCIAS Y CONCLUSIONES: ¿CÓMO DECIDIR SI ES VÁLIDO?

En matemática, ¿se prueba igual que en otras áreas? | Inferir, inducir, deducir… | Razonamiento, explicación, prueba y demostración | La inducción en la clase de matemática | **Ingredientes "hereditarios" en razonamientos matemáticos** | El principio de inducción matemática: formulación | El principio de inducción matemática: orígenes | Las pruebas de los alumnos

Autora: Prof. Ana Lía Crippa | **Colaboradora:** Prof. Laura del Río | **Lectura crítica:** Lic. Mónica Agrasar y Mg. Graciela Chemello.

VERSIÓN PRELIMINAR

INTRODUCCIÓN

En este fascículo nos referiremos a algunos modos de razonar en matemática, especialmente los utilizados al validar, considerando algunos ejemplos del campo de los Números Naturales y sus operaciones. En particular, discutiremos el lugar de la inducción en la producción de conocimientos de esta disciplina, tanto en su propio ámbito como en el escolar, estableceremos diferencias con el lugar que ocupa en otras áreas y caracterizaremos a la inducción matemática o inducción completa. Esta elección obedece a varios motivos.

Por una parte, adherimos a una concepción de matemática que focaliza la mirada en sus formas de producción, es decir, en las diferentes prácticas que un matemático realiza como parte de su trabajo: buscar soluciones a problemas planteados, plantear nuevos problemas, elaborar conjeturas, generalizar, probar, comunicar el resultado de su trabajo. En esta perspectiva se considera a la actividad matemática como una actividad humana, es decir, como una producción del hombre que surge de la interacción entre diferentes personas pertenecientes a una misma comunidad.

En el proceso de producción de conocimientos se utilizan diferentes formas de razonar. Así, la resolución de un problema suele iniciarse con una fase heurística, de búsqueda de relaciones, de ensayos, de elaboración de conjeturas y, durante su transcurso, se ponen en juego distintos tipos de prácticas argumentativas. En ocasiones se plantea un análisis de casos particulares, o de un problema parecido ya resuelto, o de uno parecido pero más sencillo de abordar para luego volver al problema original. Sin embargo, en el momento de dar cuenta de los conocimientos producidos y arribar a resultados que sean legitimados en esta comunidad científica, la racionalidad matemática exigirá dejar de lado las explicaciones basadas en formas no deductivas.

Desde ese modo de entender la matemática, pensamos que durante el aprendizaje el funcionamiento del conocimiento del alumno debe aproximarse al funcionamiento en el saber de referencia, es decir, que el alumno debe involucrarse en un proceso de producción matemática como el descripto, con las adecuaciones pertinentes al nivel de su escolaridad. Por ello, consideramos de especial interés detenernos en analizar propuestas de enseñanza que permitan a los alumnos avanzar en sus formas naturales de razonar hacia formas cada vez más próximas a las utilizadas en la comunidad matemática.

Por otra parte, asistimos a una creciente y veloz producción de saberes indispensables para el hombre del siglo XXI, imposibles de abordar en su totalidad en la Escuela Secundaria. De aquí también la importancia de centrarnos en aspectos del quehacer matemático que atraviesan diferentes temáticas de esta disciplina, como es el caso de las formas de razonar. Es menester tener en cuenta que estos aspectos del quehacer matemático se aprenden a propósito de esas temáticas, y que en algunos casos adquieren características específicas según se trabaje en aritmética, álgebra, geometría, es decir, según la rama de la matemática.

EN MATEMÁTICA, ¿SE PRUEBA IGUAL QUE EN OTRAS ÁREAS?

En el diccionario de la Real Academia Española encontramos que las palabras "inferir" y "deducir" son consideradas sinónimos. Sin embargo, en la vida cotidiana o en campos de conocimientos tales como las ciencias Naturales, las ciencias Sociales, la matemática, entre otros, esos términos adquieren significados muy diferentes. La palabra inferencia se utiliza tanto para hacer referencia a razonamientos inductivos como a razonamientos deductivos. Pasamos a caracterizar tales formas de razonar.

INFERIR, INDUCIR, DEDUCIR...

A diario extraemos conclusiones mediante la observación de un número limitado de casos, en los cuales se reitera una característica común a todos: hemos realizado una inferencia inductiva. Sin embargo, la conclusión es válida sólo si hemos verificado uno a uno todos los casos posibles, es decir si realizamos una inferencia inductiva completa.

Si no hubiésemos verificado todos los casos posibles sino alguno de ellos, ya sea porque no estuvieran todos a nuestro alcance, por ser demasiado numerosos o por propia elección, se trataría de una *inferencia inductiva incompleta*. Este tipo de inferencia nos permite obtener una conclusión incierta referida a una característica de los casos observados, siempre que no haya surgido una excepción. La conclusión es tanto más probable cuanto mayor sea la cantidad de observaciones.

Estas inferencias, realizadas a partir de experiencias reiteradas, son muy utilizadas tanto en la vida diaria como en numerosas áreas de conocimiento para validar supuestos o hipótesis: la predicción de que el Sol sale en oriente y se pone en occidente es considerada válida. Pero en matemática la validez de una conjetura no se determina del mismo modo: es necesario acudir a una demostración.

En las ciencias Naturales, por ejemplo, las teorías aceptadas en un determinado momento histórico son válidas si no surge algún fenómeno que no pueda ser explicado por ellas. Pero si esto sucede, se

VERSIÓN PRELIMINAR

elaboran nuevas teorías que reemplazan a las anteriores. En matemática, una vez demostrada una conjetura, no es posible encontrar un ejemplo que la contradiga. La evolución histórica de esta disciplina da cuenta de que las nuevas teorías no se contraponen con las anteriores.

Las conclusiones surgidas por medio de inferencias inductivas (completas o incompletas) no son proposiciones demostradas en el sentido matemático del término. Podemos decir que han sido verificadas (en forma total o parcial, respectivamente).

RAZONAMIENTO, EXPLICACIÓN, PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN

Balacheff (1987) establece una diferenciación entre los términos razonamiento, explicación, prueba y demostración que utilizaremos en adelante en el sentido aquí propuesto.

Razonamiento: es la actividad intelectual –la mayor parte del tiempo no explícita– de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de ciertos datos

Explicación: discurso de un locutor que intenta hacer inteligible a otro el carácter de verdad, adquirido por él, de una proposición.

Prueba: es una explicación aceptada por una comunidad en un momento dado (lo que exige determinar un sistema de validación común entre los interlocutores).

Demostración: prueba particular que poseen las características siguientes:

- Una característica social: son las únicas pruebas aceptadas por la comunidad de los matemáticos.
- Una característica sobre la forma: respetan algunas reglas. Un cierto número de enunciados son considerados como verdaderos (axiomas), otros son deducidos de estos o de enunciados precedentemente demostrados a partir de reglas de deducciones tomadas de un conjunto de reglas lógicas.

En matemática la mayoría de las veces trabajamos con infinitos elementos, por lo que no es posible asegurar la validez de una afirmación mediante una verificación de todos los casos. Además, basta que un solo caso contradiga una conjetura para que la misma sea considerada inválida, por lo que la inferencia inductiva no es una forma de prueba aceptada en los ámbitos de producción de esta disciplina.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que el matemático conjetura propiedades antes de demostrarlas, y que en el proceso de conjeturar muchas veces se infiere inductivamente

Como resalta Panizza (2005). *"Ni los matemáticos ni los alumnos razonan solamente motivados por la idea de demostrar, sino que razonan buscando explicaciones, intentando comprender, formular hipótesis, buscar regularidades. Estos procesos, a veces explícitos (verbales o no), a veces conscientes, constituyen (también) un medio por el cual un sujeto construye conocimiento nuevo".*

Pero para aceptar la validez de una conjetura, en esta disciplina es necesario, como dijimos en la Introducción, que la misma sea probada mediante inferencias deductivas, es decir, mediante demostraciones.

EL MATEMÁTICO, EL FÍSICO, EL INGENIERO Y EL MÉDICO

A un matemático le gusta mucho contar una anécdota referida a tres colegas suyos:

Dice el matemático "El físico está convencido de que 60 es divisible por todos los números. Se fija en que 60 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Verifica, tomando algunos otros números, por ejemplo 10, 15, 20, 30, 'al azar', cómo él dice. Como 60 es divisible por ellos también estima que los datos experimentales son suficientes".

Dice el físico "Pero mira al ingeniero, él sospecha que los números impares son primos.

En todo caso, el 1 puede ser considerado como primo. Después vienen el 3, el 5 y el 7, que son incontestablemente primos. A continuación viene el 9, un caso triste. El 9 no es, en apariencia, un número primo. Pero el 11 y el 13 sí que lo son. Volvamos al 9… Para concluir que 'el 9 es un error en la experiencia'."

Dice el ingeniero "Pero fijaros en el médico. Permite que un enfermo desahuciado de uremia coma puchero, y el enfermo se cura. El médico escribe una obra científica afirmando que el puchero cura la uremia. A continuación, le da puchero a otro urémico y el enfermo fallece. Entonces, el médico corrige los datos: "el puchero es aconsejable en el 50% de los casos".

Adaptación de Khourguine, (1972) Des mathématiques partout

VERSIÓN PRELIMINAR

LA INDUCCIÓN EN LA CLASE DE MATEMÁTICA: PARECE VÁLIDO PERO NO LO ES

La fuerte presencia de inferencias inductivas tanto en la vida diaria como en numerosas áreas de conocimiento lleva a que, frente a diversos problemas matemáticos, el alumno se contente muchas veces con verificar la conjetura sólo en algunos casos particulares y concluir que es válida.

La apropiación por parte de los alumnos de las formas de validar en matemática requiere de una negociación que les permita aceptar normas, reglas, diferentes de las habituales, cuyo aprendizaje no se produce naturalmente, es decir, es necesario enseñarlas.

Arsac (1992) identifica estas reglas, que denomina "reglas del debate" y que se refieren a enunciados cuyo dominio de validez es infinito. Las mismas cuestionan los modos de probar que remiten al uso de reglas externas a la matemática, pero que resultan naturales para todos los que no han estudiado esta disciplina.

En este módulo nos referiremos a dos de ellas:

- **En matemática, no son suficientes algunos ejemplos que verifican un enunciado para probar que es verdadero.**
- **Un contraejemplo es suficiente para validar la falsedad de un enunciado.**

Para que los alumnos se apropien de esas reglas es necesario desarrollar propuestas que favorezcan su puesta en juego en un trabajo sostenido, al abordar diferentes contenidos. A continuación se analiza una clase[1] cuyo propósito es la enseñanza de dichas reglas, durante el tratamiento de la divisibilidad en Z. Previamente se había trabajado con las nociones de cociente exacto, múltiplo y divisor.

El problema seleccionado fue el siguiente[2]:

Actividad para los alumnos

Si en la expresión n x n – n + 11 se reemplaza n por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?

Podemos notar que para **n= 0, 1…., 10** el número **n x n – n + 11** es primo, mientras que para **n = 11**, es igual a $\mathbf{11}^2$, es decir, no es primo, lo que da lugar a que los alumnos prueben con algunos ejemplos y respondan afirmativamente.

La propuesta se desarrolló en dos clases. La primera tuvo una duración de dos horas reloj. En un comienzo se planteó una actividad preliminar a fin de de que los alumnos trabajasen en la búsqueda sistemática de los divisores de un número y actualizaran el hecho de que hay algunos números que tienen exactamente dos divisores, que son los que denominamos "primos".

Se presentó el siguiente problema:

Actividad para los alumnos

Busquen todos los divisores naturales de los siguientes números y anoten cuántos divisores tiene cada uno: 8; 5; 1; 54, 2; 17; 105; 169; 31; 77

Las elecciones de los números propuestos obedecieron a los siguientes criterios:

Números compuestos: dos de ellos son potencias perfectas de números primos: 8 y 169.

Tres de ellos no son potencias perfectas: 54, 105 y 77, de estos dos son impares. La elección de números compuestos impares obedece al hecho que es usual la confusión entre números primos e impares.

Números primos: cuatro, incluido el 2 por ser primo par: 17, 31, 5 y 2.

El número 1, por no ser primo ni compuesto.

La clase tuvo una duración de una hora reloj. Luego de entregar el problema en un papelito, la profesora lo leyó aclarando todas las dudas que surgieron. Propuso entonces un trabajo individual, posteriormente uno grupal a fin de que los alumnos compartan sus producciones y finalmente una puesta en común. Previamente había anunciado que elegiría a un representante del grupo para comentar las respuestas.

Durante la puesta en común la docente eligió para exponer al principio a los grupos con soluciones menos avanzadas.

Luego de un debate los alumnos elaboraron las siguientes conclusiones, que la profesora retomó y copiaron en la carpeta:

"El 1, aparece siempre", "El 1 es divisor de todos"

"El mismo número siempre aparece", "El número se puede dividir por sí mismo"

"El 1 tiene un solo divisor, él mismo"

"Algunos números tienen dos divisores nada más, y se llaman primos"

"Los números primos no son pares, salvo el 2. A los otros (pares) los podés dividir siempre por 2". En todos los casos solicitó que expliquen por qué, preguntando al resto si entendían. Se recordó cómo realizar una búsqueda exhaustiva de los divisores de un número, a partir de la división por números primos.

Finalizada la primera hora, a cada uno se le entregó una copia del segundo problema; se leyó en forma individual y luego en voz alta para ver si se comprendía.

1. La clase se desarrolló en 2° G (correspondiente a 8° año, en la anterior estructura educativa) en la Escuela de Enseñanza Media N° 3 de Los Hornos, La Plata. Se trata de una escuela pública y la profesora a cargo es Laura del Río.

2. El problema seleccionado, como así también el presentado previamente, fueron adaptados de Arsac (1992).

Actividad para los alumnos

Si en la expresión n x n – n + 11 se reemplaza n por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?

Como no surgieron dudas se propuso un tiempo de trabajo individual y la profesora sugirió utilizar la calculadora. En este caso, la finalidad de la utilización de la calculadora era agilizar el cálculo al reemplazar los valores de la variable.

En forma casi inmediata algunos alumnos preguntaron si en el lugar de una letra "se pone el mismo número o se pueden poner números distintos a la vez".

La profesora sugirió que recuerden cómo trabajaban cuando reemplazaban en las fórmulas de, por ejemplo, cálculo de áreas y perímetros donde aparece "varias veces la misma letra", como en **P= a + a + l + l; A = l x l**. Luego retomó la conclusión de algunos alumnos, que todos debieron anotar en la carpeta: "Cuando en una fórmula aparece una letra repetida tenemos que reemplazarla por el mismo número"

En forma individual la mayoría de los alumnos experimentó utilizando varios números (entre uno y cinco) y concluyeron que siempre se obtenía un número primo. Si bien varios alumnos reemplazaron por 11; dos de ellos hicieron mal las cuentas y los otros afirmaron que 121 es primo, sin realizar una búsqueda exhaustiva de divisores. En ese momento se aproximaba el final de la clase, por lo que la profesora anunció que continuarían con ese trabajo en la clase siguiente.

ENSEÑAR A LEER Y ESCRIBIR EN MATEMÁTICA

En toda actividad matemática, tanto en la comunidad científica como en el aula, está presente alguna de las formas propias de definir, explicar, probar, ejemplificar, generalizar, representar de otra manera, que pueden aparecer tanto en forma oral como escrita.

La posibilidad de comprender un texto implica poder interpretar lo leído en ausencia del autor, lo que establece una diferencia esencial con la comunicación oral que permite la negociación de los significados atribuidos a las expresiones utilizadas. Para que el significado atribuido por el lector sea admisible en términos de la cultura matemática, habrá que tener en cuenta que debe enfrentarse con diferentes tipos de expresiones.

Es necesario entonces otorgar un espacio de importancia a la enseñanza de las particularidades que adquiere la lectura y la elaboración de textos en esta disciplina. Entre ellas, las escrituras en lenguaje algebraico ocupan un lugar relevante en los inicios de la Escuela Secundaria.

Al iniciar la segunda clase la profesora pidió que tratasen de recordar lo que hicieron en la clase anterior, y que para ello utilizaran la carpeta. A continuación los alumnos leyeron las conclusiones que surgieron de la primera actividad. Con relación a la segunda casi todos dijeron: "Reemplazamos y vimos que es primo".

La clase se organizó en ocho grupos de tres o cuatro integrantes. La profesora pidió que compartieran lo que hicieron para sacar una conclusión, y que escribieran en una hoja para leer en la puesta en común. Al igual que en la clase anterior, comentó que iba a elegir un representante para leer dicha conclusión y explicarla. La organización propuesta dio lugar a que en todos los grupos se contara con varias experimentaciones, como puede observarse en las producciones siguientes.

Si en la expresión n x n – n + 11 se reemplaza n por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 6 \\ \hline 36 \\ -\ \ 6 \\ \hline 30 \\ +11 \\ \hline 41 \end{array}$$

CONCLUSIÓN: aunque reemplacemos "n" por un número natural siempre se obtiene un número primo

3 x 3 – 3 + 11=17   **1x1-1+11=**

VERSIÓN PRELIMINAR

*Si en la expresión **n x n – n + 11** se reemplaza **n** por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?*

1x1-1+11=11

3x3-3+11=17

5x5-5+11=31

2x2-2+11=13

6x6-6+11=41

4x4-4+11=23

Conclusión: Si reemplaza "n" por un número natural el resultado siempre dará como resultado un número primo.

---

*Si en la expresión **n x n – n + 11** se reemplaza **n** por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?*

15.15-15+11=
225-15+11=
210+11= $\boxed{221}$

2.2-2+11=
4-2+11=
2+11= $\boxed{13}$

6.6-6+11=
36-6+11=
30+11= $\boxed{41}$

5.5-5+11=
25-5+11=
30+11= $\boxed{41}$

1.1-1+11=
1-1+11=
0+11= $\boxed{11}$

Se obtienen números primos.

---

*Si en la expresión **n x n – n + 11** se reemplaza n por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?*
Rta: sí, se obtiene un número primo (17) – 13 – 23 – 31 – 41 – 53

3	5	6	7	8	11	2	4
x 3	x 5	x 6	x 7	x 8	x 11	x 2	x 4
9	25	36	49	64	121	4	16
- 3	- 5	- 6	- 7	- 8	- 11	- 2	- 4
6	20	30	42	56	110	2	12
+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11
17	31	41	53	67	121	13	23

Rta: a veces no se obtiene un número primo y a veces sí.

VERSIÓN PRELIMINAR

Luego de un tiempo de discusión en los diferentes grupos, la profesora organizó la puesta en común. En primer lugar dio la palabra al grupo que probó con menos números, en este caso tres, preguntando si se podía estar seguro probando con tres. Varios alumnos intervinieron diciendo "Nosotros probamos con seis y nos dio primo".
Continuaron exponiendo los restantes grupos y se fueron anotando todos los cálculos diferentes en el pizarrón. Al finalizar la profesora invitó a exponer al grupo en el que habían probado con 11, que sin buscar exhaustivamente los divisores de 121 aseguraron que era primo. Preguntó entonces a toda la clase si era correcto lo que afirmaban sus compañeros y pidió que encontraran los divisores de 121.

Cuando los alumnos se dieron cuenta de que 121 no era primo la profesora preguntó:
"¿Podemos poner entonces que siempre obtenemos un número primo?"
Una alumna respondió "Es primo en algunos casos y en otros no".
Varios alumnos estaban de acuerdo con su respuesta.
Entonces, la profesora realizó una síntesis. "Fíjense, probaron con los 10 primeros números naturales y dio siempre. Hasta aquí estábamos convencidos que siempre da un número primo. Probamos con 11 y no dio primo. ¿Qué podemos decir de probar con muchos ejemplos?"
Un alumno respondió. "No alcanza con probar con muchos ejemplos para decir que siempre es verdadero algo. Probando con 11 nos da un número que no es primo."
La profesora dijo entonces: "Con ése solo ya podemos decir que el resultado no es primo."
A continuación pidió que hicieran un repaso general de lo que había pasado en la clase. Transcribimos algunas afirmaciones de los alumnos, que se copiaron en el pizarrón:
"Afirmamos cosas que no teníamos que afirmar."
"Hubo un caso que nos contradijo todo"
"Probando con muchos ejemplos no podemos decir que es verdad, porque aparece uno como el 11 que te arruina todo"

RESOLVER, EXPLICAR, DEBATIR

Resolver problemas es una condición necesaria pero no suficiente para aprender matemática. No aprende lo mismo quien resuelve un problema y el profesor le dice si está bien o está mal, y luego pasa a otro o lo corrige, que quien resuelve y explica cómo lo resolvió y por qué.
En las clases de matemática la resolución de un problema tiene que ser acompañada de explicaciones que avalen lo hecho, que permitan explicitar las ideas sobre las que el alumno se basó. También es necesario que el alumno pueda escuchar las objeciones de los demás, que ponen a prueba su producción. Estos momentos de trabajo hacen que los alumnos se enfrenten a una práctica de la matemática no mecánica y fundamentada.
Debatir promueve la explicitación de los procedimientos utilizados, el análisis y la comparación entre las diferentes producciones de los alumnos. También facilita que los alumnos mejoren sus explicaciones a partir de los cuestionamientos de otros compañeros, al defender el propio punto de vista. El pasaje de lo implícito a lo explícito permite nombrar el conocimiento, hacerlo público y, por ende, reconfirmarlo o modificarlo.
Para ello la gestión del docente es fundamental. Si interviniese diciendo lo que "está bien" o lo que "está mal", el debate dejaría de tener sentido. Del mismo modo, si se "hace pasar" a un alumno que "resolvió bien" al pizarrón para que los demás controlen.

VERDADES Y FALSEDADES EN MATEMÁTICA

La regla: *Un enunciado matemático es verdadero o es falso* es el principio del tercero excluido y es otra de las reglas del debate identificadas por Arsac (1992).

Si bien a los profesores de matemática esto nos puede parecer "evidente", es usual que muchos alumnos piensen que una propiedad matemática puede ser a veces verdadera y a veces falsa.

La profesora retomó las afirmaciones de los alumnos del siguiente modo:

- "Para probar que un enunciado matemático es verdadero no es suficiente verificar con ejemplos, aún cuando esos ejemplos sean numerosos."

- "Con un ejemplo en el que no se cumpla un enunciado es suficiente para probar que el enunciado es falso. Este ejemplo se llama contraejemplo."

Los alumnos copiaron todas las conclusiones en la carpeta, con lo que finalizó la clase.

Como dijimos anteriormente, es necesario tener en cuenta que cuestionar las inferencias inductivas como formas de prueba, no implica dejarlas de lado en el trabajo matemático.
Resultan un recurso fértil a la hora de elaborar conjeturas tanto en el mundo disciplinar como en el aula.

VERSIÓN PRELIMINAR

LA COMPUTADORA EN LA CLASE

Una propuesta interesante, cuando se cuenta con computadoras en el aula, es explorar, por ejemplo con una hoja de cálculo, la producción de numerosos ejemplos a partir de una fórmula.
En lugar del problema anterior, se puede proponer entonces un problema como el propuesto por Leonhard Euler (1707-1783), que permite cuestionar las mismas reglas del debate pero requiere de numerosas experimentaciones para ello, para lo cual el trabajo con computadoras es muy eficaz.

Si en la expresión n x n +n + 41 se reemplaza n por cualquier número natural, ¿se obtiene un número primo?

Esta expresión se verifica para n=1, 2, 3,...39, pero no para 40: $40 \times 40 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

INGREDIENTES "HEREDITARIOS" EN RAZONAMIENTOS MATEMÁTICOS

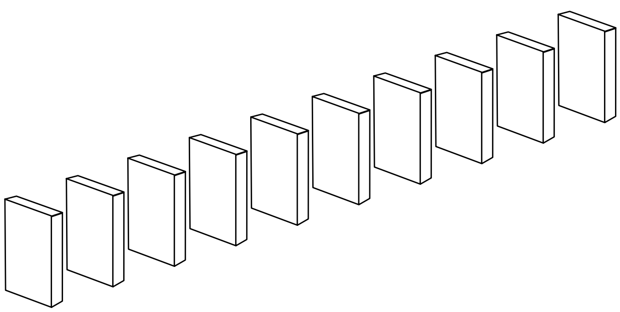
En matemática se utiliza una forma de demostración, no de verificación, denominada *inducción matemática, inducción completa o recurrencia*[3]. Este principio permite *inferir deductivamente*, es decir deducir, propiedades válidas en una infinidad de casos que puedan numerarse, sin requerir de una infinidad de verificaciones. Es muy diferente a la inducción que se utiliza, por ejemplo, en las ciencias Naturales.
Pensamos que el tratamiento de este principio excede los propósitos de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria. Sin embargo, es posible plantear problemas que permiten poner en juego razonamientos que comparten algunas características y que propician la evolución de las formas de validar de los alumnos hacia las propias de esta disciplina.

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA: FORMULACIÓN

El principio de inducción matemática se basa en el hecho de que todo número natural se puede considerar como suma de unidades ya que, partiendo de 0 ó de 1, se obtienen todos los números naturales por adiciones sucesivas de la unidad[4].
De esto resulta que:
Si se verifica una propiedad para el primer natural (0 ó 1) y, suponiendo que es verdadera para otro número se deduce que es verdadera para el siguiente. La propiedad se cumple para todos los números naturales.
Podemos observar que este principio se encuadra en la caracterización de demostración realizada por Balacheff (1987), a la que hicimos referencia.

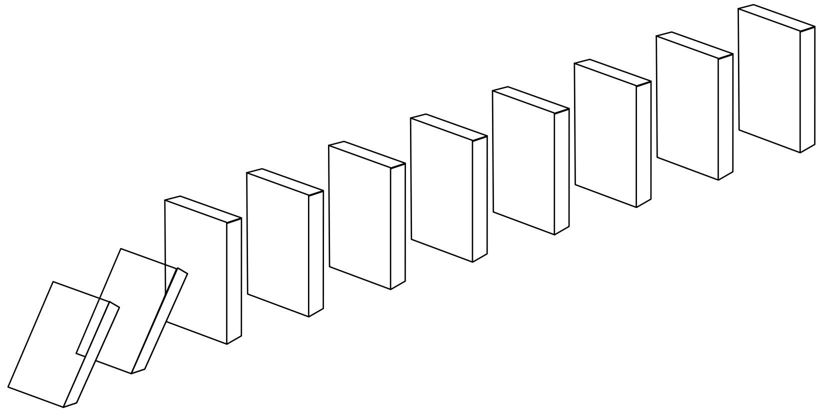
LAS FICHAS DEL DOMINÓ: UNA METÁFORA DE LA INDUCCIÓN COMPLETA

Imaginemos que tenemos una hilera de fichas de dominó paradas como muestra el dibujo



Observemos que las fichas están dispuestas de manera tal que si se cae una se caen las siguientes. Podemos hacer que se caigan todas empujando la primera ficha.

3. Varios autores advierten las dificultades de utilizar la palabra inducción, por ello optan por hablar de "recurrencia". Sin embargo, la palabra recurrencia también genera ambigüedades pues es necesario diferenciar el principio de recurrencia de las definiciones por recurrencia (de las que no nos ocuparemos), como por ejemplo, las utilizadas para definir progresiones aritméticas y geométricas.
4. Considerar 0 ó 1 como primer número natural es convencional.



Este ejemplo de las fichas cayendo se asocia al Principio de inducción completa.

Principio de inducción matemática
Supongamos que tenemos una afirmación P(n), donde n es un número natural y queremos demostrar que es válida para todo número natural.
Verificamos que P(1) ó P(0)) es verdadera.
Sea n= K un número natural cualquiera.
Demostramos que si P(k) es verdadera, entonces P(k+1) es verdadera.
Concluimos que P(n) es verdadera para todo número natural.

Consideremos la siguiente afirmación:
La suma de los n primeros números impares es igual al n-ésimo número cuadrado.
Es decir P(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

a. P (1): $1 = 1^2$
b. Suponemos que se cumple para n= k, lo que representa nuestra hipótesis P(k):
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
   Sumamos a ambos miembros el término de orden *k + 1*, es decir,
   $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$. Luego:
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + 2k + 1 = (k + 1)^2$
c. P(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, es válida para todo número natural n.

Las características del principio de inducción matemática están dadas por:

- la existencia de un "ingrediente hereditario", es decir, que si un número verifica la propiedad en cuestión, entonces la verifica su sucesor.
- la presencia de una sucesión que tiene primer elemento pero que no termina.

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA: ORÍGENES

Aunque no es posible asegurarlo, algunos testimonios dan cuenta del empleo de ingredientes hereditarios en argumentaciones que datan de varios siglos antes de Cristo (Del Busto, 1995).

Para probar afirmaciones matemáticas, los griegos y los sicilianos emplearon razonamientos de esas características. Entre estos últimos cabe señalar a Arquímedes (287 a 212 aC), quien los utilizó en problemas geométricos y a Maurólico (1494-1575), quien es considerado el precursor del principio de inducción completa, que se perfeccionara en años posteriores. Se atribuye a Pascal (1654) el haber desarrollado una exposición clara y precisa de este principio, quien comparte con Fermat, entre otros autores, el mérito de haber desarrollado esta forma de demostración (Boyer, 1994).

Al iniciar el tratamiento de un conjunto de proposiciones aritméticas, Maurólico declara abiertamente que está "anhelando muchas veces demostrarlas por un camino más fácil" y – prosigue– "o bien hacer la demostración de algunas proposiciones antes descuidadas u olvidadas". El camino "más fácil", en el decir de Maurólico, es el método de recurrencia (Del Busto, 1965).

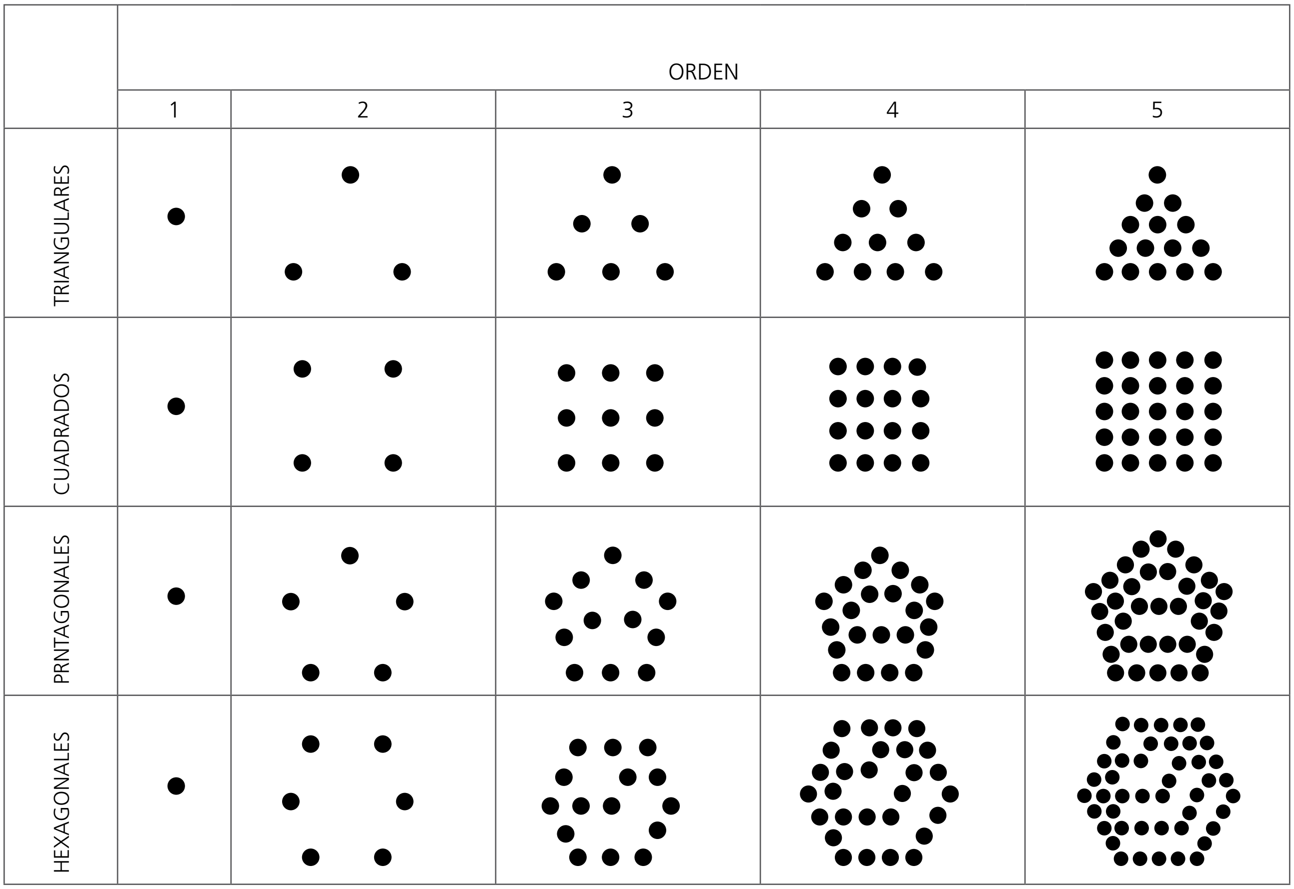
El asunto que preocupaba a Maurólico en las proposiciones se refería a ciertas propiedades numéricas. Presentaba una tabla de números con la disposición que sigue, que incluía los denominados "números figurados" y preguntaba por algunas relaciones entre diferentes columnas de números naturales.

NÚMEROS FIGURADOS

"Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número, pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido" (Filolao, Escuela Pitagórica). La frase de Filolao da clara cuenta del lugar relevante que ocupaban los números en la Escuela Pitagórica. Dicho interés se pone de manifiesto en algunos números que los griegos consideraban privilegiados: los "números figurados". Pitágoras desarrolló un método de representar los números mediante agrupamientos de piedras (de hecho, la palabra cálculo significa "manejo de piedra"). También son de números figurados los "números cuadrados", los "números pentagonales", los "números hexagonales", "números rectangulares", entre otros.

5. El ejemplo que analizamos tiene como finalidad actualizar este método de demostración. No está pensado para llevar al aula, como comentaremos más adelante.

VERSIÓN PRELIMINAR



LA TABLA DE MAURÓLICO.

Números Naturales	Pares	Impares	Triaungulares	Cuadrados	Números de la forma N (n-1)
1	0	1	1	1	0
2	2	3	3	4	2
3	4	5	6	9	6
4	6	7	10	16	12
5	8	9	15	25	20
6	10	11	21	36	30
7	12	13	28	49	42
...	...	...	...	...	...

La tabla y las demostraciones propuestas han sido extraídas de del Busto (1968).

VERSIÓN PRELIMINAR

A los números ubicados en la misma fila y distinta columna Maurólico llamaba “colaterales”. A partir de la tabla anterior probó varias propiedades numéricas, utilizando, frecuentemente los cinco primeros números naturales (Collette, 1985). Nos detendremos en algunas de ellas.

Un número cuadrado más el impar colateral del siguiente da el cuadrado siguiente.

Hoy día podemos escribir la fórmula:

$P(n) = (n-1)^2 + (2 \times n - 1) = n^2$

La suma de los n primeros números impares es igual al n-ésimo número cuadrado.

Podríamos escribir

$P(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots. + (2n - 1) = n^2$

Prueba:

Vemos que 1+3=4, segundo número cuadrado. Este 4 agregado al tercer impar, que es 5, da 9: tercer número cuadrado. Análogamente 9+7=16, cuarto número cuadrado.

Y así sucesivamente. La proposición queda probada apoyándosela en un teorema anterior de Maurólico: “Todo número cuadrado más el siguiente impar colateral iguala al cuadrado siguiente”.

Si observamos el procedimiento seguido en la prueba anterior podemos notar que en primer lugar se verifica la propiedad para un primer elemento, que después se busca convalidar dicha propiedad respecto de un elemento distinto del primero, para observar que es un procedimiento “hereditario” que continúa sin modificaciones, indefinidamente.

LAS PRUEBAS DE LOS ALUMNOS

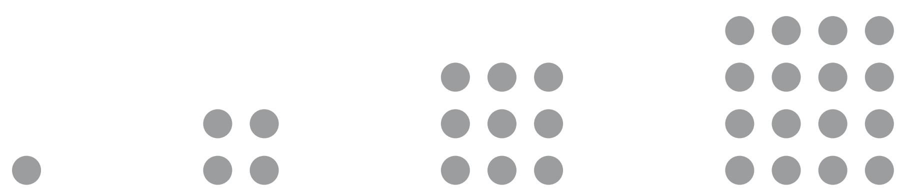
Una de las tareas características del quehacer matemático es la generalización. Generalizar es un proceso que permite encontrar características comunes en una configuración y puede o no terminar con la elaboración de una fórmula. En la escuela secundaria muchos procesos de generalización ponen de manifiesto componentes “hereditarios”, expresados usualmente con “etc” o “así sucesivamente”.

En lo que respecta a la enseñanza de los Números y las operaciones, si bien en el nivel primario es pertinente plantear un trabajo sobre lo general sin que necesariamente concluya con la elaboración de una fórmula, una de las responsabilidades de la escuela secundaria es avanzar con el mismo, para lograr que los alumnos produzcan las escrituras algebraicas que expresen el resultado de dicho proceso. En tal sentido, los problemas que presentamos a continuación apuntan a la búsqueda de regularidades para elaborar una fórmula que permita generalizar el procedimiento utilizado, favoreciendo la puesta en juego de razonamientos con ingredientes “hereditarios”. Para que ello suceda es necesario gestionar una clase con las características que describimos antes.

Actividad para los alumnos

LOS “NÚMEROS CUADRADOS"

A continuación representamos los cuatro primeros “números cuadrados”, llamados así por Pitágoras pues con la cantidad de puntos que lo integran se puede formar cuadrados:



a. ¿Cuál es el quinto número cuadrado? ¿Y el vigésimo?

b. ¿Cómo se forman los números cuadrados?

c. Reúnanse con sus compañeros en grupos pequeños y traten de encontrar una fórmula que permita expresarla simbólicamente. Confronten la respuesta obtenida con otros grupos. ¿Todos pensaron lo mismo? ¿Otros pensaron diferente?

UN PROBLEMA, MUCHOS PROCEDIMIENTOS

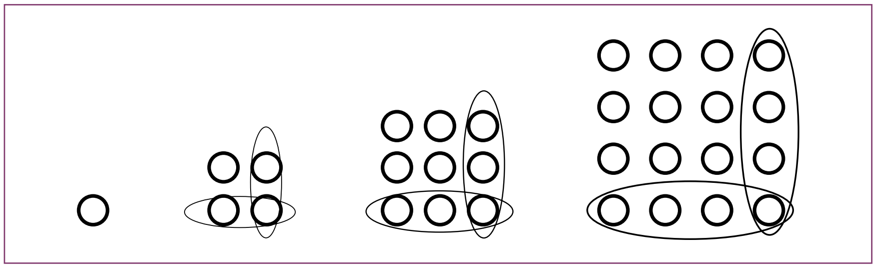
En situaciones como la descripta es posible observar algunas cuestiones didácticas:

Se trata de un problema potente pues:

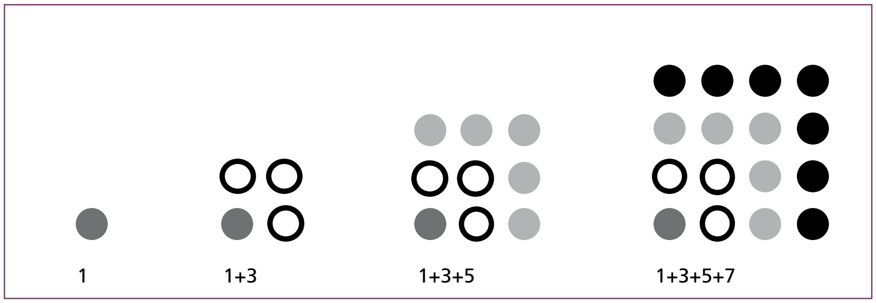
- da lugar a diferentes procedimientos de resolución que dependen de los conocimientos previos de los alumnos. La fertilidad del problema se incrementa a partir de los debates que se instalen a propósito de dichos procedimientos.
- admite varias respuestas diferentes. Es importante que los alumnos establezcan la relación entre las diferentes respuestas. En este caso se trata de probar la equivalencia de las fórmulas encontradas. Las características de dichas pruebas también dependerán de las experiencias previas (desde una verificación haciendo funcionar las diferentes fórmulas para los mismos valores, a una explicación de cómo las generaron, hasta una prueba por inducción completa, si se trata de cursos muy avanzados).

VERSIÓN PRELIMINAR

Este problema da lugar a diferentes procedimientos. Puede suceder que algunos alumnos se limiten a contar las piedras en varios casos, y examinando los números concluyan que se trata de "cuadrados perfectos".
También es posible que otros observen que los números cuadrados se obtienen elevando al cuadrado la cantidad de "piedras" de cada lado: $P(n) = n \times n = n^2$.



Otro procedimiento surge al considerar que los números cuadrados son aquellos que se forman con la suma de los números impares consecutivos, partiendo del uno:
$Pn = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$



Otra regularidad diferente a la anterior consiste en considerar que si a un número cuadrado le sumamos el doble del lado más uno se obtiene el siguiente número cuadrado:
$Pn = (n-1)^2 + [\, 2\,(n - 1) + 1 \,] = n^2$
Puede notarse que "el doble del lado más uno" es el "impar colateral del siguiente" en términos de Maurólico.

En todos los casos se trata de búsqueda de regularidades y generalizaciones. Pero es en los dos últimos donde puede observarse la puesta en juego de procedimientos "hereditarios", pues se basan en regularidades en las que se considera cómo se genera un número a partir del anterior.
Para enseñar a pensar deductivamente es necesario que los alumnos elaboren pruebas cada vez más próximas a las intelectuales y debatan sobre ellas, pero también que analicen pruebas realizadas por otros. En este caso, puede resultar enriquecedor proponer la lectura de las pruebas de Maurólico para que los alumnos establezcan similitudes y diferencias con las que ellos elaboraron.
Finalmente queremos resaltar que las pruebas producidas por los alumnos –igual que las producidas a lo largo de la historia de la matemática–, son de naturaleza muy diversa.
Desde el punto de vista de la actividad matemática Balacheff (1987) identifica dos tipos de pruebas: **pruebas pragmáticas** y **pruebas intelectuales.**
En las **pruebas pragmáticas**, la justificación de la actividad está asociada a su eficacia para la resolución de la cuestión planteada. Son pruebas íntimamente ligadas a la acción y a la experiencia de los que las producen. Por ejemplo, contar las "piedras" de los cuadrados, 1, 4, 9, y observar que son los números cuadrados perfectos es una prueba pragmática.
En las pruebas intelectuales, la justificación de la actividad es conocer la verdad. Son pruebas en las que sus autores tomaron distancia de la acción. Dentro de las pruebas intelectuales, se ubica la demostración.
Debemos tener en cuenta que existen pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales de diferente grado de avance, y que muchas de ellas se encuentran en el límite de ambos tipos de prueba.
Si bien no son pruebas intelectuales en sentido estricto las generalizaciones que realizan los alumnos mediante razonamientos con ingredientes hereditarios, resultan más cercanas a las formas de prueba válidas en esta disciplina.

A MODO DE CIERRE

Desde las pruebas de Maurólico hasta la formulación del *Principio de inducción matemática* transcurrieron siglos de avances y rectificaciones respecto de este modo de razonar en matemática.

Sin trasladar lo sucedido en la historia de esta disciplina al ámbito de la enseñanza, sí es posible tener en cuenta que es un aspecto más que abona a la comprensión de la necesaria provisoriedad que deben tener los conocimientos de los alumnos. Los modos de validar, en cuanto conocimientos a enseñar, también son provisorios en la escuela. Es necesario que el docente lo acepte, que gestione la evolución de las pruebas elaboradas por los alumnos de modo tal que, aunque no lleguen a constituirse en "demostraciones formales", se aproximen a las mismas.

Bibliografía
Arsac, Gilbert y otros (1992): Initiation au raisonnement déductif, France, Presses Universitaires de Lyon.
Balacheff, Nicolás (1987): “Processus de preuves et situations de validation”, Educational Studies in Mathematics, 18 (2) 147-176.
Balacheff, Nicolás (1999) « Apprendre la preuve ». En Sallantin, J. Szczeciniarz (eds.) Le concept de preuve à la lumière de l’intelligence artificielle, Paris.
Balacheff, Nicolás (2000): Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas, Bogotá, Una empresa docente.
Barallobres, Gustavo (2000): “Algunos elementos de la didáctica del Álgebra”, en Estrategias para la enseñanza de la matemática, Argentina, UVQ.
Barallobres, Gustavo, G. (2000): “La producción de pruebas intelectuales en el dominio del álgebra”, Buenos Aires, Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Mimeo.
Boyer, Carl (1994): Historia de la matemática, Madrid, Alianza Universidad Textos.
Chemello, Graciela y Crippa, Ana Lía (2010): “Enseñar a demostrar, una tarea posible”. En proceso de corrección.
Chevallard Yves, GASCÓN, Joseph. y Bosch, Mariana, (1997): Estudiar matemática, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona, Editorial Horsori.
Chretien, Claude. y Gaud, Dominique: (1996) “Interdisciplinaridad entre las Matemáticas y la Filosofía. Un ejemplo: el razonamiento recurrente”, en Barbin, Eveline y Douady, Régine, La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y las prácticas, Francia, Topiques editions.
Collete, Jean- Paul (1985) : Historia de las Matemáticas, Madrid, Siglo XXI.
Courant, Richard y Robbins, Herbert (1979) : ¿Qué es la matemática ?, España, Editorial Aguilar.
Del Busto, Eduardo (1968): La inducción matemática, La Plata, Bachillerato de la Escuela Superior de Bellas Artes de la Universidad Nacional de La Plata.
Khourguine, I. (1972) Des mathématiques partout, Editorial Mir. Citado por Chretien, Claude. y Gaud, Dominique: (1996) “Interdisciplinaridad entre las Matemáticas y la Filosofía. Un ejemplo: el razonamiento recurrente”, Francia, Topiques editions.
Margolinas, Claire. (1993) : De l’importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, Francia, La Pensée Sauvage Editions.
Panizza, Mabel (2005): Razonar y conocer, Buenos Aires: Libros del Zorzal.
Sadovsky, Patricia (2005): Enseñar Matemática hoy, Buenos Aires, Editorial El Zorzal.
Sessa, Carmen (2005): Iniciación al estudio Didáctico del Álgebra, Buenos Aires, Editorial El Zorzal.

Ministro de Educación, Prof. Alberto Estanislao Sileoni
Secretaria de Educación, Prof. María Inés Abrile De Vollmer
Jefe de Gabinete, Lic. Jaime Perczyk
Subsecretaria de Equidad y Calidad Educativa, Lic. Mara Brawer
Directora Nacional de Gestión Educativa, Lic. Marisa Díaz
Director de Educación Secundaria, Prof. Guillermo Golzman

Coordinadora de Áreas Curriculares, Lic. Cecilia Cresta
Coordinadores del Área de Capacitación, Lic. Carlos Ruiz, Lic. Margarita Marturet
Coordinadoras del Programa de Capacitación Explora, Lic. Paula Linietsky, Lic. Adriana Vendrov

Edición y corrección, Lic. Marina Rocha
Diseño y diagramación, DG Julia Jara
Ilustración, Gustavo Daguerre
http://portal.educacion.gov.ar/secundaria