ACERCA DE LA COMPRENSIÓN Y SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Cecilia Crespo Crespo
ISP "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires (Argentina)
Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN. (México)
crccrespo@gmail.com

RESUMEN

Este trabajo presenta una serie de reflexiones originadas a partir de la observación de respuestas y afirmaciones realizadas tanto por estudiantes de escuela media, como de los primeros años de profesorado en relación a los números irracionales. A través de estas respuestas es posible inferir que los números irracionales no son comprendidos plenamente por los estudiantes y que este hecho se refleja en errores y usos incorrectos que demuestran la falta de significatividad que poseen estos números para los estudiantes en la construcción que realizan en el aula.
En algunas oportunidades, los estudiantes hacen uso de una concepción del infinito que se asemeja al infinito potencial aristotélico, y es usual que al ser interrogados dejen ver que asumen que la cantidad de cifras decimales no enteras de un número irracional es finita, aunque tan grande como se desee. Asimismo muestran dificultades en la diferenciación de la definición de irracional y sus propiedades.
La manera en la que los alumnos construyen el concepto de irracionalidad se refleja también en sus concepciones del número real y posteriormente acarrea problemas en el aprendizaje del análisis matemático, poniendo en evidencia obstáculos epistemológicos y didácticos en el aula. Por ello creemos que resulta indispensable prestar atención a ciertas respuestas que están denotando concepciones que devendrán en errores.

INTRODUCCIÓN

En el aula de matemática, uno de los conceptos que los alumnos van construyendo en sucesivos momentos del aprendizaje a través de su ciclo escolar, es el de número real. Muchas veces los docentes creemos que estos números han sido construidos apropiadamente, sin embargo emergen en oportunidades indicios que muestran que los números irracionales no son correctamente construidos. La irracionalidad de algunos números reales es un concepto que muchas veces carece de significado para los estudiantes.

La matemática educativa, propone un enfoque sistémico y situado en el que se intenta estudiar las condiciones y circunstancias ligadas a la emergencia y construcción del conocimiento matemático (Cantoral & Farfán, 2003). Encontrar contextos significativos de aprendizaje es de primordial importancia para lograr la construcción sólida del conocimiento. En la búsqueda de esos contextos hay tener en cuenta los factores socioculturales propios del escenario correspondiente. Las prácticas que se desarrollan en la comunidad de la clase deben ser diseñadas con el objetivo de ayudar a los alumnos a dotar de sentido el conocimiento que han producido asimilando dicho conocimiento de manera que los capacite para ir más allá de su mera reproducción, orientándose a la interpretación, la evaluación, el análisis, la síntesis y la organización de información que caracteriza un progreso cognitivo auténtico.

En la escuela actual, que hace hincapié en la construcción de contenidos aritméticos y algebraicos, muchos estudiantes, guiados probablemente por la manera en que acceden a la matemática, no la conciben como una disciplina en la que sus objetos deben tener significado y sentido, sino como una colección de símbolos, reglas y procedimientos de forzosa aplicación que manipulan mecánicamente. Es la ausencia de significado la que provoca, en ocasiones en este escenario, una manipulación errónea según supuestas reglas que se centran en aspectos sintácticos, sin cobrar significados en su construcción.

En diversas publicaciones se reporta que los números irracionales dan origen en el aula obstáculos epistemológicos basados en sus características que los ligan al infinito (Arredondo Velásquez, et al., 2004). También se manifiesta la presencia de obstáculos de tipo didáctico (Romero & y Rico, 1999; Vicario & Carrillo, 2005; Crespo Crespo et al., 2008).

LA DEFINICIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL Y SUS PROPIEDADES

Los números racionales son presentados en el aula como una necesidad para “rellenar” la recta numérica, para darle completitud a los números reales y solucionar operaciones como la radicación.

Un número *racional* es aquel que puede expresarse como el cociente de dos números enteros, con el denominador distinto de cero. Una propiedad que se deriva de esta definición y que relaciona la misma con los sistemas de numeración, se refiere a la periodicidad. Un número es *racional* si y sólo si su expresión decimal es periódica. Más aún, puede demostrar que un número es irracional si y sólo si no puede ser escrito en forma periódica en ninguna base. Los números racionales son utilizados por los estudiantes tanto dentro como fuera de la escuela.

Usualmente, la manera de impartir el tema de los números reales en el bachillerato, se basa por lo general en la presentación de los diversos números y sus conjuntos correspondientes, tales como los números naturales, enteros, racionales e irracionales, para después ilustrar algunas de sus características más importantes (Arredondo et al., 2004) y operar con ellos.

Históricamente, el surgimiento de los números irracionales se vincula con la geometría. En época de los pitagóricos, unido a la aparición de magnitudes inconmensurables, en un escenario en el que se consideraba que todo el universo estaba construido armónicamente y que esa armonía podía expresarse como cociente de números enteros. Sin embargo en ese contexto, se manifiestan los números irracionales en la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Pitágoras suponía que dados dos segmentos cualesquiera, siempre serían conmensurables. Sin embargo, descubrió que si se traza un cuadrado de lado 1, su diagonal que por la aplicación del teorema de Pitágoras es tal que el cuadrado de su longitud vale 2, no es conmensurable con el lado del cuadrado, o dicho de otra manera, ninguna fracción corresponde a un número cuyo cuadrado es 2. Esto se contradecía claramente con la teoría de las proporciones y la armonía del universo. El descubrimiento de un segmento que no se puede escribir como cociente de dos segmentos dados, produjo una crisis en la sociedad matemática de aquella época. Suele mencionarse ésta como la primera gran crisis de los fundamentos de la matemática. Según llega a nosotros, la contradicción inmovilizó a la sociedad matemática, se dice que intentaron ocultar el descubrimiento pues conspiraba en contra de la estabilidad de la teoría sustentada, contra una cosmovisión regida por la omnipotencia del número, esencia de todo el universo. Sin embargo, no todos los habitantes de este escenario deben haber actuado de la misma manera. Algunos deben haber seguido analizando tal contradicción intentando construir un concepto matemático que permitiera seguir dando sustento a la teoría desarrollada y que permitiera incorporar el emergente de esta contradicción como algo coherente dentro de la nueva teoría. De esta contradicción puesta de manifiesto en la escuela pitagórica, surge la teoría de los inconmensurables. (Crespo Crespo, 2007). En la época de Platón ya se conocía la irracionalidad de los números, sin embargo, hasta mediados del siglo XIX los matemáticos se contentaban con una visión intuitiva de los números y sus propiedades no son establecidas formalmente hasta el siglo XIX. La introducción del rigor en el análisis puso de manifiesto la falta de claridad y la imprecisión del sistema de los números reales, y exigía su estructuración lógica sobre bases aritméticas

La demostración atribuida a los pitagóricos para la inconmensurabilidad de 2 con 1, procedía según Aristóteles por "reductio ad absurdum". Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad para la irracionalidad de 2 y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los Elementos de Euclides, como Proposición 117 del Libro X (Euclides, 1991). Este tipo de argumentación, cuyo fundamento lógico básico consiste en que al no poder ser cierta la negación de la tesis, por conducir a una contradicción, a un absurdo, permite inferir la necesidad de que la tesis sea verdadera. Sin embargo, las argumentaciones por reducción al absurdo al ser introducidas en el aula, no siempre son aceptadas por los estudiantes (Crespo Crespo & Farfán, 2005).

El número irracional que quizá sea el primero con el que los alumnos toman contacto es π. Lo conocen y operan con sus aproximaciones antes de encontrarse con otros irracionales, e incluso antes de caracterizar a los números irracionales. Su relación con la geometría es claro y los alumnos utilizan su valor aproximado para el cálculo de la longitud de la circunferencia o el área del círculo desde los primeros años de la escuela.

TRES DIÁLOGOS EN EL AULA. LOS ALUMNOS, LOS NÚMEROS IRRACIONALES Y SUS REPRESENTACIONES

A continuación se presentan tres diálogos que se suscitaron en el aula de matemática con estudiantes de primer año de profesorado. En ellas es posible inferir que la construcción realizada en la escuela para los números irracionales no es correcta, sino más bien poco sólida. El concepto de irracionalidad no ha sido construido por algunos de estos estudiantes y los números irracionales no han adquirido significatividad para ellos. A través de estos episodios escolares es posible acceder a algunas de las ideas que manejan estos alumnos acerca de los números irracionales y cómo esas ideas se convierten en obstáculos para la comprensión del conocimiento matemático.

Caso 1: *Números irracionales y aproximaciones*

Se les pide a los alumnos determinar los ceros de la función $y = x^2 - 2$ para poder graficar la parábola correspondiente. Uno de los estudiantes A_1 pasa al frente, resuelve y obtiene:

$x_1 = \sqrt{2}$

$x_2 = -\sqrt{2}$

A continuación, tras hacer uso de una calculadora escribe:

$x_1 = \sqrt{2} = 1{,}41$

$x_2 = -\sqrt{2} = -1{,}41$

Se le observa que $\sqrt{2} \neq 1{,}41$, que se trata de un número irracional, pero se suscita el siguiente diálogo entre el profesor P y varios de los alumnos del curso:

A_2: Ponele más decimales
A_1: La calculadora dice: 1,414213562. ¿Pongo todos?
P: Eso es también una aproximación
A_1: Son todas las cifras que me da la calculadora. ¿está mal?
P: Es también una aproximación, el número tiene infinitas cifras decimales
A_2: Pero necesitamos hacer la cuenta para marcar en el eje
P: Utilizamos la calculadora para obtener una aproximación y marcar en la recta numérica, para ubicar por dónde está $\sqrt{2}$, pero tenemos que saber que $\sqrt{2}$ no es 1,41, no podemos escribir que son iguales
A_1: Pero, ¿en la recta pongo $\sqrt{2}$ o 1,41?
P: Ponemos $\sqrt{2}$, que es el cero de la función
A_1: ¿En 1,41?

P: Sí
A_1: O sea que en el fondo es lo mismo
P: No. Es aproximadamente igual. Lo que se está marcando es aproximado
A_1 (sin decir nada, marca $\sqrt{2}$ y - $\sqrt{2}$ y se sienta)

En esta situación de aula, se pone de manifiesto la autoridad que los estudiantes otorgan a la calculadora. Hace un tiempo, esa autoridad era depositada en el libro, en el docente, en el hermano mayor que estudiaba ingeniería; actualmente es el recurso tecnológico y sus resultados los que son tomados como depositarios de la autoridad.

Claramente se pone de manifiesto que los estudiantes no diferencian entre los números irracionales y sus aproximaciones. Los alumnos no aceptan que se trate de un número, de un resultado una expresión que contenga operaciones, en este caso radicación. Expresan la necesidad que sienten de realizar las operaciones y devolver un resultado en el que no aparezcan operaciones. Para ellos los resultados deben ser expresados en sistema decimal, tal como la calculadora los expresa.

Al analizar el intercambio de ideas que surgen en este diálogo, no podemos menos que preguntarnos si finalmente el estudiante comprende realmente lo que hace cuando marca finalmente los valores de las raíces en la recta numérica, o bien si lo hacen finalmente por satisfacer a la docente.

Caso 2: *"Cuentas sin terminar"*

Durante el cálculo de un límite de una función, el resultado obtenido fue: $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Uno de los alumnos A_3 escribe en el pizarrón ese resultado y lo recuadra. Uno de sus compañeros inicia el siguiente diálogo:

A_4: Escribí el resultado
A_3: Ya lo hice
A_4: No, está sin terminar la cuenta (toma su calculadora y hace cálculos): A mí me dio 1,207106781
P: No, el resultado es $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
A_4: ¿Por qué no terminamos la cuenta?
P: $\sqrt{2}$ es un número irracional. Lo que obtuviste con la calculadora es un valor aproximado
A_4: Pero así está sin terminar
A_5: Tenés razón, está sin terminar. Si lo dejo así no sé cuánto da
P: No

A_5: A veces usted deja cuentas sin hacer en el resultado
P: ¿Cuentas sin hacer?
A_5: Sí, esto es lo mismo que cuando en el ejercicio de principio de la guía usted dejó $\frac{1}{2}$ en vez de hacer la cuenta y poner 0,5 que es el resultado
P: $\frac{1}{2}$ y 0,5 son el mismo número en un caso expresado como fracción y en el otro con su expresión decimal
A_4: Pero el que está bien es 0,5, porque está terminado
P: No, los dos están bien
A_4: La calculadora da 0,5, ese debe ser el resultado, o ¿no?
P: Si colocás 0,5 o dejás $\frac{1}{2}$, los dos están bien. Son dos formas de expresar el mismo número
A_5: Entonces acá está bien escribir $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, pero también 1,207106781
P: No
A_4: ¿Viste? Tenemos que hacer la cuenta y escribir todos los decimales. Es 1,207106781
P: No, justo eso es lo que está mal
A_4: Pero la calculadora da eso
P: $\sqrt{2}$ es un número irracional.
A_4: Pero da 1,414213562
P: La calculadora te da una aproximación. $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales
A_4: Y, ¿cómo sabe que son infinitas? Si son muchas no sé si no acaban de golpe
P: Está demostrado. Desde la época de los griegos se sabe...
A_3: Es como π, que puedo siempre encontrar siempre una cifra más.
A_4: Pero usamos 3,14
P: Sí, en general usamos dos cifras decimales para hacer cálculos, pero sabemos que tiene infinitas
A_5: En la práctica, si es un número sirve para hacer cuentas y entonces tengo que considerarlo con cierta cantidad de cifras decimales. O, ¿para qué sirven si no los números?
P: Pero tenemos que aceptar que lo que usamos al tomar una cantidad determinada de cifras es un número racional tan cercano como quiera, pero que $\sqrt{2}$ (o π también), no es ese número racional, sino que ese racional está tan cerca como queremos de él, pero que $\sqrt{2}$ no es 1,4142, así como π no es 3,14. Cuando se hacen cuentas no se obtiene el resultado exacto
A_4: Pero si son distintos no es lo mismo

P: Exactamente
A_4: Entonces, ¿por qué la calculadora me da así?, ¿está mal?
P: La calculadora te da una aproximación para que puedas hacer un cálculo. No puede darte todas las cifras decimales porque son infinitas.
A_3: Entonces está mal lo que dice la calculadora, porque da el resultado al apretar el signo "=". De todas maneras la calculadora tendría que decir que no es igual, que no es el verdadero resultado
A_4: Pero con infinitas cifras, ¿cómo se hacen cuentas?
P: Por eso la calculadora nos da las primeras cifras, pero tenemos que saber que son sólo algunas, que es sólo una aproximación. No podemos hacer cuentas con infinitas cifras decimales
A_5: Entonces, ¿para qué sirven los irracionales?...
(la pregunta queda sin respuesta y la clase continúa...)

Nuevamente en este diálogo entre los estudiantes y su docente, surge como una de las ideas centrales, la necesidad que sienten los alumnos de que un resultado no contenga operaciones, a pesar de que se trata de un número irracional, aparece la propuesta de realizar los cálculos indicados mediante una calculadora. En esta situación, nuevamente el resultado que da la calculadora es considerado correcto, más allá de que no tenga en cuenta el concepto de irracionalidad. La expresión de un número irracional es considerado por ellos como una "cuenta sin terminar". Se pone de manifiesto la autoridad que otorgan a las calculadoras.

Otro de los conceptos cuya comprensión errónea se manifiestan en este diálogo, es la confusión entre un número y sus representaciones. Es usual que nuestros alumnos crean que un número es su representación, ya sea decimal o fraccionaria, y no identifican éstas como simples maneras de expresar un mismo número. La situación, en este sentido no fue bien aprovechada por la docente, ya que no retoma esa diferencia y la posibilidad de expresar un número a través de representaciones diversas.

El hecho de que un número irracional posea infinitas cifras decimales, es pensado por los alumnos como una dificultad para la realización de cuentas, y en ese momento aparece, tal vez de manera inesperada el cuestionamiento acerca de la utilidad práctica de los números irracionales.

Caso 3: *La no aceptación encubierta del infinito*

Al graficar la función y = sen(x), la profesora explica cómo obtener los valores del seno de un ángulo gráficamente a partir de la circunferencia trigonométrica y los segmentos determinados en ella. En la explicación marca en el eje de abscisas los valores en radianes y mediante la participación de los alumnos, va marcando valores en el plano cartesiano, los une e indica a los estudiantes que copien. Mientras copian del pizarrón, tiene lugar el siguiente diálogo:

A_6: ¿Por qué pusimos $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π en vez de colocar los grados?

P: Porque estamos midiendo los ángulos en radianes. Por ejemplo: 90° es $\frac{\pi}{2}$, 180° es π…

A_6: ¿Por qué π?

P: π es la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Y un radián es el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

A_6: ¿Por qué no le ponemos el valor?

P: Es π

A_6: ¿Por qué no 3,14?

P: 3,14 no es π, se aproxima a π

A_7: Sí es 3,141592. Lo da la calculadora

P: Y sigue… tiene infinitas cifras no periódicas. Siempre puedo encontrar otra.

A_7: Entonces, ¿cuando escribo π es porque no puedo escribir todo?

P: Sí

A_6: Pero entonces no es un número

P: Es un número irracional y por eso tiene infinitas cifras no periódicas.

A_6: Pero, ¿π es como una variable, que no sé cuánto vale?

P: No, es constante, π no es cualquier número, se sabe cuánto vale

A_6: Es como cuando escribo a o b en un ejercicio, no como cuando escribo x o y...

P: Cuando vemos π, todos sabemos qué número es, no es una constante cualquiera

En este diálogo aparece por una parte la no comprensión del valor de π y de su valor. Los alumnos suelen pensar los ángulos en grados y los radianes les resultan una unidad artificial y sin significado.

Se confunde en la conversación de los estudiantes las ideas de variables, constantes y parámetros. Las variables se unen al uso de las x y las y; las primeras letras del alfabeto son reservadas para las constantes.

En la consideración del número π, nuevamente se manifiestan dificultades en aceptar la existencia de infinitas cifras decimales no periódicas. Al igual que en el caso anterior, el infinito es considerado en su carácter potencial.

ALGUNAS REFLEXIONES

El análisis de los episodios anteriores abre algunas reflexiones acerca de la comprensión de la naturaliza de los números reales que logran nuestros estudiantes. Por una parte surge fuertemente la influencia de concepciones del infinito que han sido construidas por ellos en escenarios no académicos (Lestón, 2008). La consideración de las expresiones decimales infinitas no periódicas constituyó uno de los focos fundamentales de problema. El infinito que utilizan los alumnos es asimilado a considerar una cantidad de cifras tan grande como se desee, pero que está involucrando el infinito potencial, y no el infinito actual. En este ámbito, el infinito potencial en la expresión decimal del numero, muestra que los estudiantes tienen asimilado que para un número irracional, si bien aceptan que tiene infinitas cifras decimales, lo cortan en determinado momento con "tantas cifras como deseen", pero operan con estas aproximaciones sin comprender que no se trata del número correspondiente, sino de una aproximación.

La necesidad de mostrar a los números mediante su expresión decimal, y de escribirlos a través de esta representación se encuentra sin lugar a dudas influida por el uso de la tecnología, por una concepción operatoria de la matemática. Esta visión es producto del tipo de actividades que se desarrollan en el aula, sin que se oriente la enseñanza a la construcción de significados de los conceptos matemáticos. La matemática es , para muchos alumnos, la ciencia que permite hacer cálculos. En muchas oportunidades, ese significado de los conceptos puede surgir de la consideración de los problemas que dieron origen al surgimiento histórico de los conocimientos matemáticos.

A MODO DE CIERRE

Los docentes tenemos tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos, como el de número, están implícitamente claros para los alumnos y son compartidos por la comunidad de la clase. Los estudiantes construyen aunque no nos lo propongamos explícitamente, nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas. El profesor debe estar atento a observar las conexiones explicitadas por sus alumnos. De esta manera, puede reforzar aquéllas que presentan más ventaja para avanzar en la comprensión y buscar modos de refutar las que son inapropiadas.

Si pretendemos que el concepto de *número real* se asimile de forma significativa, debemos contar con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los alumnos han de integrar diferentes conjuntos numéricos, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, alcanzar una comprensión en profundidad de los procesos infinitos.

El concepto de número real y en particular de número irracional no puede construirse por medio de un enfoque que demande de los estudiantes únicamente un entendimiento superficial de algunos puntos aislados, como podría ser la asimilación de reglas para la lectura, escritura y las operaciones con estos números. La obtención de significados en el terreno geométrico puede ayudar a los alumnos a avanzar en la comprensión de la geometría como algo separado del álgebra.

Necesariamente deberá promoverse la comprensión de las representaciones de los números irracionales como números decimales no periódicos. El impacto de las ideas intuitivas en el caso del infinito es innegable, pero al entrar a la escuela esta idea que se construyó fuera de ella, debe observarse si esta transferencia de escenario es realizada correctamente o bien si no trae características que colapsan con las construcciones escolares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arredondo Velásquez, J.; Zúñiga Becerra, B. y Torres Hernández, J. (2004). *Los números reales y procesos infinitos en el bachillerato.* En L. Díaz (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 17. México: Clame (pp.918-923).

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 6 (1), 27-40.

Crespo Crespo, C., Farfán Márquez, R. (2005). Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 287-317.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C.; Homilka, L., Lestón, P. (2008). Los números irracionales: reflexiones acerca de la construcción del concepto de irracionalidad en el aula. Ponencia aceptada para su presentación en el *VI Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática CVEM*. Guadalajara (México).

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV.* Madrid: Gredos.

Lestón, P. (2008). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (2), 259-272.

Vicario, V., Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. el caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. *Comunicaciones presentadas al IX Simposio SEIEM, Córdoba*. Recuperado el 27/7/2008, de: www.uco.es/~ma1mamaa/Simposio_Cordoba/3-Vicario_Carrillo.pdf