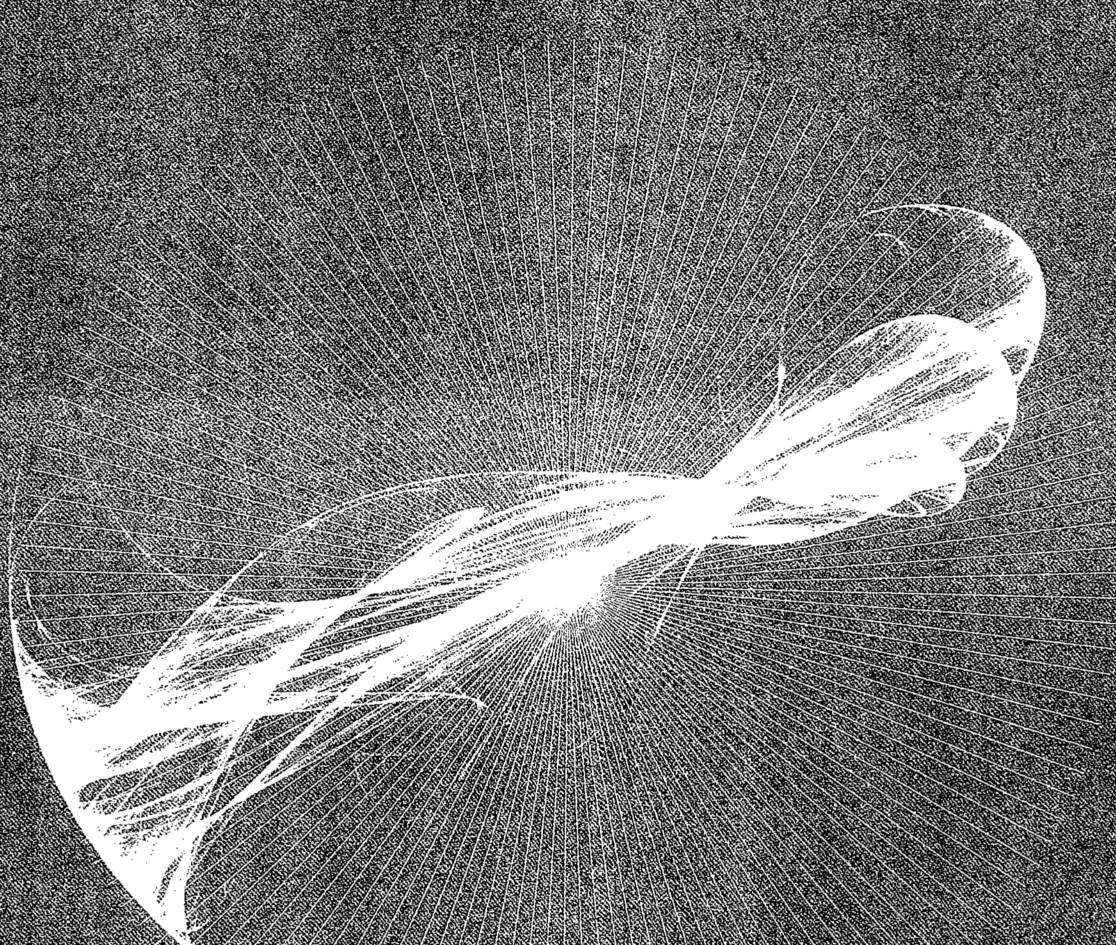
THOMSON

Introducción al cálculo

James Stewart y otros
Rodrigo Hernández y Constanza Sanmiguel



PRÓLOGO A ESTA EDICIÓN

Pareciera que el estado actual de cosas, en su sentido más amplio, evidencia la necesidad de una definición precisa acerca de qué se debe aprender en Matemática. El desarrollo extraordinario que están teniendo las ciencias y la tecnología nos lleva a preguntarnos, entre otros aspectos, cuáles son los temas, las aplicaciones, el grado de profundidad, la metodología, más apropiados para que el aprendizaje de las Matemáticas agregue valor real al sujeto que aprende. Así, buscamos la combinación más adecuada de los elementos que naturalmente concurren hoy en el aprendizaje; pero, quizás hoy nuestros afanes no se justifican en encontrar una fórmula correctamente ponderada para lograr el aprendizaje óptimo de la Matemática, sino, en poder responder a través de un nuevo paradigma, a las preguntas sobre qué Matemáticas se debe procurar enseñar y cómo se debe guiar el proceso de aprendizaje de esta ciencia.

Notemos que los procedimientos de evaluación que se utilizan para medir el avance en el aprendizaje, se basan en mediciones de logros parciales que se suman o promedian ponderadamente. Esta atomización de objetivos conduce a profesores y estudiantes a confrontar sus progresos revisando "pirámides" de logros parciales diseñadas para tal propósito. Muy bien sabemos que aquellos objetivos que hoy no logramos y que son tanto de la mayor importancia como también de la mayor intangibilidad, inevitablemente escapan a las dimensiones que las pirámides de logros parciales despliegan.

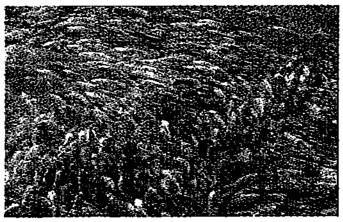
Es en este estado de cosas nace una nueva edición de este texto de Precálculo. Nace bajo los signos del cambio de paradigmas que se presiente; con autores, cada uno de ellos, de culturas nacionales muy diferentes; y, por sobre todo, alentado por la convicción común que el camino que andamos hoy, nos conduce hacia una restauración del pensamiento matemático desde una visión que sitúa a la Matemática como una actividad genuinamente humana, y que, por tanto, es capaz de ejercer un poderoso efecto en la realización y transformación personal de aquellos individuos que se acercan a ella.

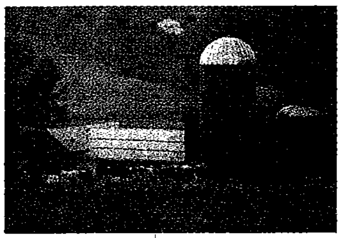
Ciertamente, es un objetivo principal de este texto acercar a los estudiantes a la Matemática y a su esencial naturaleza: el pensamiento matemático. La perspectiva elegida para ello ha sido la de la modelación matemática, ya que ella brinda la mayor variedad de ámbitos para el desarrollo de este pensamiento: la realidad, las teorías, los ambientes virtuales. Es al pensamiento matemático a lo que se expondrá el lector en los variados temas que se tratan en este libro. Y no hay pensamiento matemático que no se origine desde la experiencia de la realidad y sus leyes, dada la obligada condición de todo hombre o mujer en el mundo. De aquí el rol preponderante que la modelación adquiere en esta propuesta de apropiación de la Matemática por parte del lector.

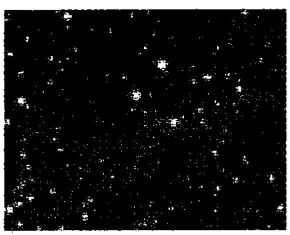
El contexto desde el cual nace la visión que se presenta en este texto, ha venido forjándose desde hace algunos años en la Universidad Adolfo Ibáñez. Un plan innovador para la carrera de Ingeniería Industrial y la propia preocupación de nosotros, los profesores, por realizar una contribución del más alto valor en la formación de nuestros estudiantes, nos ha llevado a dedicar especiales esfuerzos y estudios para comprender mejor el rol de las Matemáticas en la formación de un individuo a nivel de educación superior. Hoy ya podemos afirmar que avanzar en la dirección correcta no está libre de obstáculos, que requiere de gran valor y de una decisión inquebrantable por enunciar la verdad que nos es dado hallar; que exige irrenunciable amor al conocimiento y, muy en particular, a la Matemática que profesamos como vocación de vida. De todo esto se impregna esta primera versión multinacional basada en el texto clásico de Precálculo, tercera edición, de Stewart y col. Esperamos que la lectura de este texto también impregne al lector del espíritu que ha motivado a sus autores para poner a disposición de él la variedad, riqueza, y profundidad del pensamiento matemático.

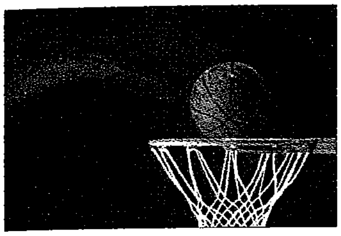
Héctor Hevia, Ph. D.
Profesor Titular, Universidad Adolfo Ibáñez

CONTENIDO

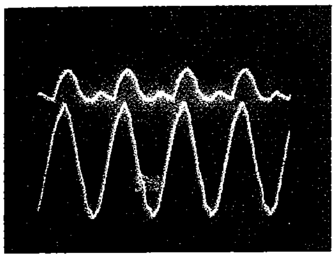




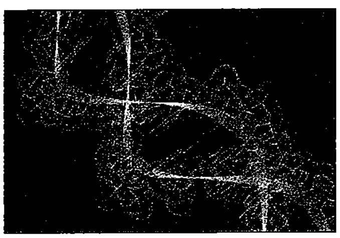




9



10



11

CALCULADORAS Y CÁLCULOS

Las calculadoras son esenciales en la mayor parte de los temas matemáticos y científicos. Nos liberan de llevar a cabo tareas rutinarias, de manera que podemos enfocarnos con mayor claridad en los conceptos que estudiamos. Las calculadoras son herramientas poderosas, pero sus resultados necesitan interpretarse con cuidado. A continuación describiremos las características de una calculadora adecuada para un curso de precálculo, y daremos guías de acción para interpretar los resultados de sus cálculos.

CALCULADORAS CIENTÍFICAS Y GRÁFICAS

En este curso necesitará una calculadora *científica* —que tenga, como mínimo, las operaciones aritméticas usuales (+, −, ×, ÷) y funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas (e^x, 10^x, ln, log, sin, cos, tan). Además, será de utilidad una memoria y por lo menos, algún grado de programabilidad. Muchas calculadoras científicas pueden llevar a cabo operaciones sobre matrices y determinantes.

Su instructor pudiera recomendarle o hacerle ver la conveniencia de adquirir una calculadora *gráfica*. Este libro tiene subsecciones y ejercicios opcionales, en los que es necesario el uso de una calculadora gráfica, o de una computadora con software de graficación. Estas subsecciones y ejercicios especiales han quedado identificadas por el símbolo .

Es importante darse cuenta que, debido a una resolución limitada, una calculadora gráfica sólo da una *aproximación* de la gráfica de una función. Puede trazar únicamente un número finito de puntos, y entonces conectarlos para formar una *representación* de la gráfica. En muchos ejemplos hacemos notar que se debe tener cuidado al interpretar las gráficas producidas por las calculadoras.

CÁLCULOS Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

La mayor parte de los ejemplos y ejercicios de este libro involucran valores aproximados. Por ejemplo, un ejercicio dice que la Luna tiene un radio de 1074 millas. Eso no significa que su radio sea exactamente de 1074 millas, simplemente es el radio redondeado a la milla más próxima.

Un método simple para especificar la exactitud de una cifra es indicar cuántas **cifras significativas** tiene. Las cifras significativas en un número son aquellas desde la primera cifra diferente de cero hasta la última cifra diferente de cero (leyendo de izquierda a derecha). Por lo que 1074 tiene 4 cifras significativas, 1070 tiene 3, 1100 tiene 2 y 1000 sólo tiene una cifra significativa. Esta regla a veces conduce a ambigüedades. Por ejemplo, si una distancia es igual a 200 km redondeado al kilómetro más próximo, entonces realmente el número 200 contiene 3 cifras significativas, no simplemente una.

Esta ambigüedad se evita si se utiliza la notación científica —esto es, si se expresa el número como un múltiplo de una potencia de 10.

$$2.00 \times 10^2$$

Cuando se trabaja con valores aproximados, los estudiantes a menudo cometen el error de dar una respuesta final con *más* cifras significativas que los datos originales. Esto es incorrecto, ya que no se puede "crear exactitud utilizando una calculadora. El resultado final no puede ser más exacto que las mediciones recibidas en el problema. Por ejemplo, suponga que nos dicen que los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo son de 1.25 y de 2.33 pulgadas de largo. Si aplicamos el teorema de Pitágoras y utilizamos una calculadora, encontramos que la hipotenusa tiene como longitud

$$\sqrt{1.25^2 + 2.33^2} \approx 2.644125564 \text{ in}$$

Pero en vista que las longitudes dadas fueron expresadas hasta tres cifras significativas, la respuesta no puede ser más exacta. Podemos, por tanto, únicamente decir que la hipotenusa tiene 2.64 pulgadas de largo, redondeando a la centésima más próxima.

En general, la respuesta final deberá expresarse con la misma exactitud que la medición con menor exactitud dada en el enunciado del problema. Las siguientes reglas hacen más preciso este principio.

Al multiplicar o dividir, redondee el resultado final de manera que tenga tantas *cifras significativas* como las que tiene el valor dado con el número más bajo de cifras significativas.

Al sumar o restar, redondee el valor del resultado final de manera que su último dígito significativo esté en el *lugar decimal* que ocupa el último dígito significativo del valor de menor exactitud dado como dato.

Al elevar a potencias o extraer raíces, redondee el resultado final de manera que tenga el mismo número de *cifras significativas* que el valor dado.

Suponga que se mide la parte superior rectangular de una mesa y es de 122.64 pulgadas por 37.3 pulgadas. Su área y su perímetro se expresan de la siguiente manera:

Área = longitud × ancho = $122.64 \times 37.3 \approx 4570 \text{pulg}^2$ Tres cifras significativas

Perímetro = 2(longitud + ancho) = $2(122.64 + 37.3) \approx 319.9$ pulgadas. Dígito de décimos

Note que en la fórmula para el perímetro, el valor 2 es un valor exacto, no una medición aproximada. Por tanto, no afecta la exactitud del resultado final. En general, si un problema involucra sólo valores exactos, podemos expresar la respuesta final con tantas cifras significativas como queramos.

Note también que para hacer que el resultado final sea tan exacto como sea posible, *deberá esperar hasta el último paso para redondear su respuesta*. De ser necesario, utilice la memoria de su calculadora, para retener los resultados de cálculos intermedios.

FÓRMULAS ALGEBRAICAS

RECTAS

Pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta con pendiente m y ordenada al origen b:

$$y = mx + b$$

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \pi 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$
$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

DESIGUALDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

$|a| < b$ si, y sólo si, $-b < a < b$

FÓRMULAS DE DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

Distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio entre P_1P_2: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + y^n,$$

$$\text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

$$y = a^x \quad \longleftrightarrow \quad x = \log_a y$$
$$y = e^x \quad \longleftrightarrow \quad x = \ln y = \log_e y$$
$$a^0 = 1,\ a^1 = a \quad ; \quad \log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$$
$$a^x = e^{x \ln a} \quad ; \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad ; \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \quad ; \quad \log_a x^y = y \log_a x$$
$$(ab)^x = a^x b^x \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Cuando n es entero, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

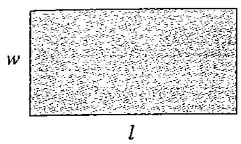
FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas para el área A, perímetro P, circunferencia C y volumen V:

Rectángulo

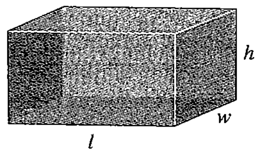
$A = lw$

$P = 2l + 2w$



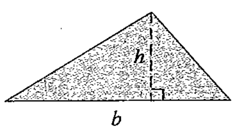
Paralelepípedo

$V = lwh$



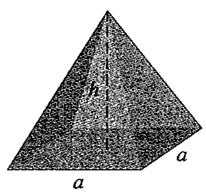
Triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$



Pirámide

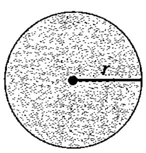
$V = \frac{1}{3}ha^2$



Círculo

$A = \pi r^2$

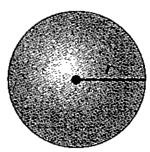
$C = 2\pi r$



Esfera

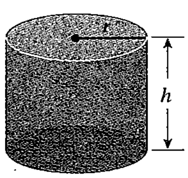
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



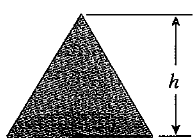
Cilindro

$V = \pi r^2 h$



Cono

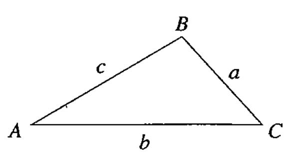
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



FÓRMULA DE HERÓN

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

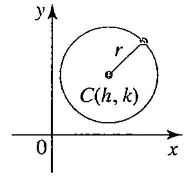
donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$



SECCIONES CÓNICAS

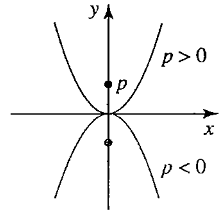
Círculos

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$



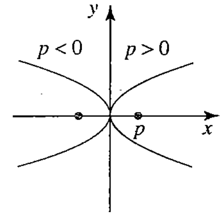
Parábolas

$x^2 = 4py$

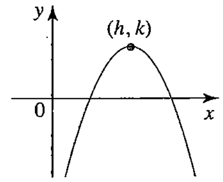


Foco $(0, p)$, directriz $y = -p$

$y^2 = 4px$

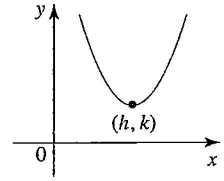


Foco $(p, 0)$, directriz $x = -p$



$y = a(x-h)^2 + k,$

$a < 0, \quad h > 0, \quad k > 0$

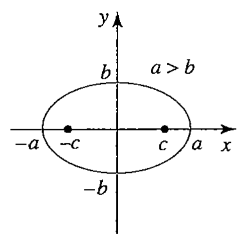


$y = a(x-h)^2 + k,$

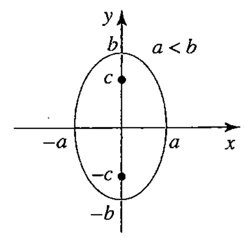
$a > 0, \quad h > 0, \quad k > 0$

Elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



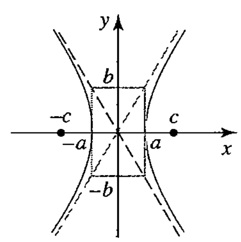
Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$



Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = b^2 - a^2$

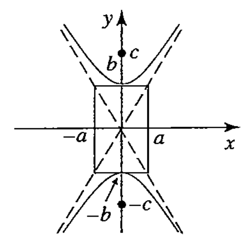
Hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$

TEOREMA DE DEMOIVRE

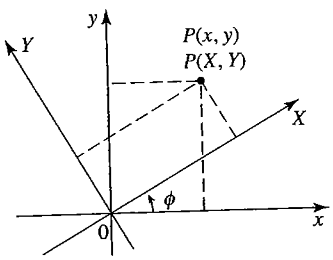
$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

$$\sqrt[n]{z} = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{1/n}$$

$$= r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

ROTACIÓN DE EJES



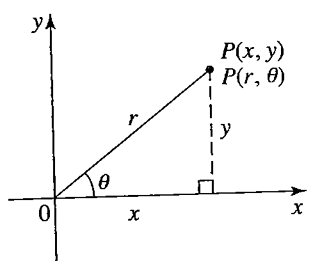
Fórmula de rotación de los ejes

$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi$ $\qquad$ $y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$

Fórmula del ángulo de rotación para secciones cónicas

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

COORDENADAS POLARES



$x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

ECUACIONES POLARES DE SECCIONES CÓNICAS

La gráfica de una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}$$

Es una sección cónica con excentricidad e y con un foco en el origen. La sección cónica es

1. una parábola, si $e = 1$
2. una elipse, si $e < 1$
3. una hipérbola, si $e > 1$

REFERENCIAS PARA EL CÁLCULO

Muchos estudiantes tienen dificultades en sus cursos de cálculo con las matemáticas de *precálculo*. El cálculo requiere que usted comprenda y recuerde los temas del precálculo. Por esta razón, pudiera ser útil conservar este libro como referencia de consulta durante su curso de cálculo. Con esa finalidad fue escrito.

Algunas referencias a temas de cálculo incluidas en este libro:

Asíntotas • páginas 361, 534

Cálculo de funciones trigonométricas • página 405

Componentes de un vector • página 503

Cicloide • página 573

Definición del número e • página 268

Cocientes de diferencias • páginas 54

Factorización con exponentes fraccionarios • página 54

Fórmulas para reducir las potencias de seno y coseno • página 467

Expresiones fraccionarias • página 54

Fórmulas del ángulo medio • página 468

Funciones crecientes y decrecientes • página 231

Límites • páginas 361

Máximos y mínimos locales • páginas 323

Función exponencial natural • página 268

Función logarítmo natural • página 283

Ley de enfriamiento de Newton • página 304

Métodos numéricos • página 405

Curvas paramétricas • página 570

Coordenadas polares • página 554

Ecuaciones polares de secciones cónicas • página 565

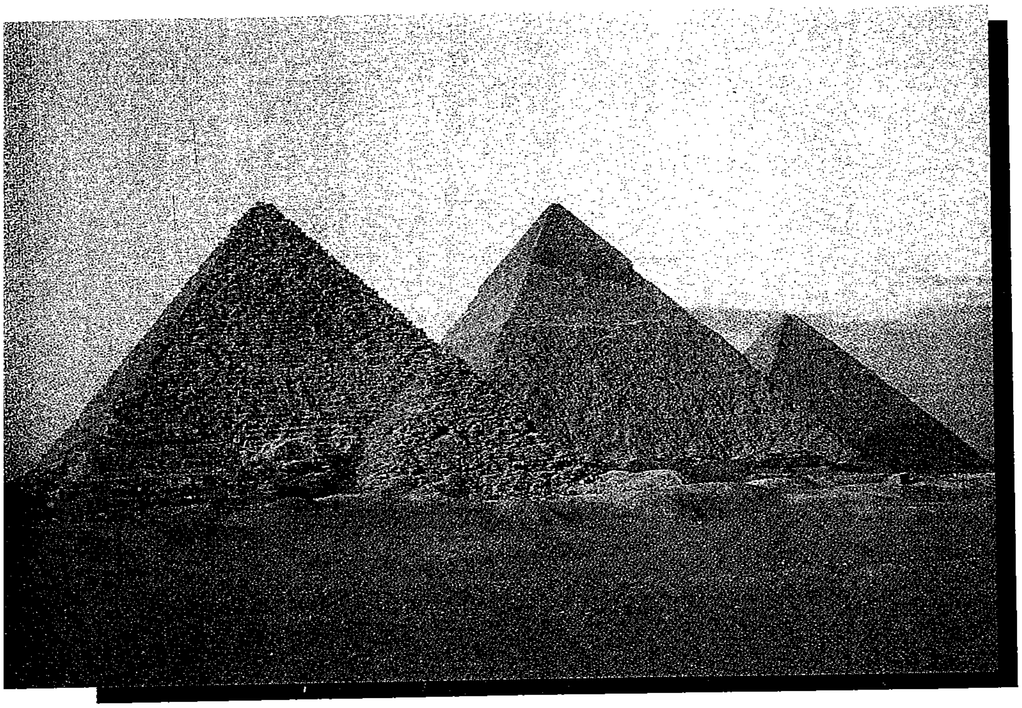
Medición en radianes • página 387

Sustitución trigonométrica • página 451

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES



Para los antiguos sacerdotes egipcios, el cálculo del volumen de una pirámide era un proceso complicado debido a que el lenguaje del álgebra todavía no se había inventado. Sin embargo, con la notación algebraica podemos calcular fácilmente el volumen de una pirámide utilizando la fórmula $V = \frac{1}{3}b^2h$.

Uno aprende haciendo las cosas; porque aunque piense que lo sabe, no tendrá la certidumbre hasta que lo intente.

SÓFOCLES

En este primer capítulo repasaremos los conceptos básicos del álgebra y la geometría analítica que necesitaremos a lo largo del libro.

1.1 NÚMEROS REALES

Recordemos los diferentes tipos de números que forman el sistema de los números reales. Empezamos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los **enteros** son los números naturales, junto con los negativos y el cero:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** mediante razones entre números enteros. Así, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{donde } m \text{ y } n \text{ son enteros y } n \neq 0$$

Ejemplos de esto son

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división 0 no es válida en ningún caso, por lo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ están indefinidas.) También existen números reales, como $\sqrt{2}$, que no se expresan como una razón entre números enteros, por lo tanto, se conocen como **números irracionales**. Se puede demostrar, con diversos grados de dificultad, que cada uno de los números siguientes es también un número irracional:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

El conjunto de todos los números reales, por lo general, se denota mediante el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando utilizamos la palabra *número* sin adjetivo, queremos decir "número real." La figura 1 muestra un diagrama de los diferentes tipos de números reales con los que trabajaremos en este libro.

Diofanto vivió en Alejandría aproximadamente en el año 250 a.C. Escribió un libro titulado *Aritmética*, el cual se considera como el primero acerca de álgebra. En él se plantean métodos para obtener soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. Este texto se ha leído por más de mil años. Fermat (véase la página 458) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos mientras estudiaba este libro. La principal contribución de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque su simbolismo no es tan sencillo como el que se utiliza hoy en día, fue un avance importante en comparación con escribir con palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\upsilon}\alpha\zeta\theta\,\Delta^{\upsilon}\eta M\varepsilon\iota\kappa\delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no se utilizó de forma común sino hasta el siglo XVII.

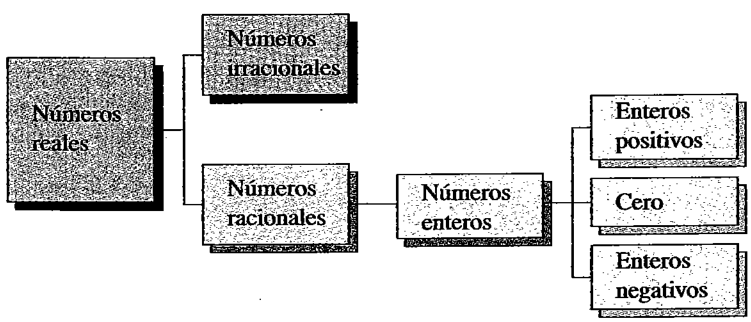


FIGURA 1
El sistema de los números reales

Todo número real posee una representación decimal. Si el número es racional, entonces su parte decimal correspondiente se repite. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

Una parte decimal que se repite como en el caso de

$$x = 3.5474747\ldots$$

corresponde a un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ \underline{10x} &\underline{= 35.47474747\ldots} \\ 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

por lo que $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por las potencias adecuadas de 10, y después restar para eliminar la parte que se repite.)

(La barra indica que la secuencia de dígitos señalados se repite por siempre.) Si el número es irracional, la representación decimal no es repetitiva:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en un cierto lugar, obtenemos una expresión aproximada del número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo $\approx$ se lee como "es aproximadamente igual a". Mientras más decimales tengamos, mejor será la aproximación que obtendremos.

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 2. La dirección positiva (hacia la derecha) se indica mediante una flecha. Escogemos un punto arbitrario de referencia O, llamado el **origen,** que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad conveniente de medición, cada número positivo x está representado por un punto en la recta a una distancia de x unidades hacia la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por un punto que se encuentra a x unidades hacia la izquierda del origen. Así, todos los números reales están representados mediante un punto en la recta, y cada punto P sobre la recta corresponde exactamente a un número real. El número asociado con el punto P se conoce como la coordenada de P, y la recta entonces se conoce como **recta de coordenadas**, o la **recta de los números reales** o simplemente **recta real**. A menudo identificamos el punto con su coordenada y pensamos en un número como un punto sobre la recta real.

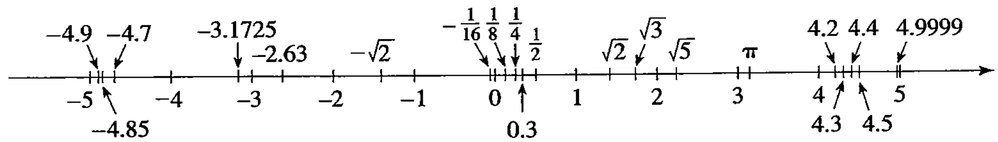


FIGURA 2
La recta real

Los números reales están *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a se encuentra a la izquierda de b en la recta real. (De manera equivalente, podemos decir que b es mayor que a y escribir $b > a$.) El símbolo $a \leqslant b$ (o $b \geqslant a$) significa que $a < b$ o $a = b$ y se lee "a es menor o igual a b". Por ejemplo, las siguientes desigualdades son verdaderas (véase la figura 3):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

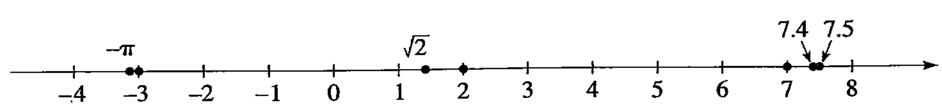


FIGURA 3

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Al combinar los números reales utilizando las operaciones familiares de suma y multiplicación, utilizamos las siguientes propiedades de los números reales.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedad	Ejemplo	Nombre y Descripción
$a+b=b+a$	$7+3=3+7$	**Propiedad conmutativa de la suma** Cuando sumamos dos números, el orden no tiene importancia.
$ab=ba$	$3\cdot 5=5\cdot 3$	**Propiedad conmutativa de la multiplicación** Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+4)+7=2+(4+7)$	**Propiedad asociativa de la suma** Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos sumamos primero.
$(ab)c=a(bc)$	$(3\cdot 7)\cdot 5=3.(7\cdot 5)$	**Propiedad asociativa de la multiplicación** Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos multiplicamos primero.
$a(b+c)=ab+ac$ $(b+c)a=ab+ac$	$2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5$ $(3+5)\cdot 2=2\cdot 3+2\cdot 5$	**Propiedad distributiva** Cuando multiplicamos un número por la suma de otros dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y a continuación sumamos los resultados.

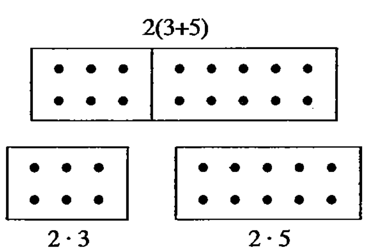


FIGURA 4
Propiedad distributiva

De nuestra experiencia con los números sabemos intuitivamente que estas propiedades son verdaderas. Para revisar éstas, calcule las expresiones a ambos lados del signo igual en cada uno de los ejemplos de la tabla. Las operaciones en los paréntesis deben efectuarse primero. Así, por ejemplo

$$(2+4)+7=6+7=13 \qquad \text{y} \qquad 2+(4+7)=2+11=13$$

La propiedad distributiva es muy importante en álgebra, ya que describe la forma en que la suma y la multiplicación se relacionan entre sí. Es aplicable siempre que multipliquemos un número por una suma. La figura 4 explica por qué esta propiedad funciona para el caso en el cual todos los números son enteros positivos; sin embargo, la propiedad es verdadera para cualesquier números reales a, b y c.

EJEMPLO 1 ■ **Uso de las propiedades de los números reales**

Sean x, y, z y w números reales.

(a) $(x+y)(2zw)=(2zw)(x+y)$ Propiedad conmutativa de la multiplicación

(b) $(x+y)(z+w) = (x+y)z + (x+y)w$ Propiedad distributiva (con $a = x + y$)

$= (zx + zy) + (wx + wy)$ Propiedad distributiva

$= zx + zy + wx + wy$ Propiedad asociativa de la suma

En el último paso eliminamos los paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, como se agrupen los sumandos no importa. ■

No cometa el error de suponer que $-a$ es un número negativo. Si $-a$ es negativo o positivo dependerá del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$ entonces $-a = -5$, un número negativo; pero si $a = -5$ entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2) es un número positivo.

El número 0 es especial en el caso de la suma; se conoce como **neutro aditivo,** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un negativo, $-a$, que satisface la ecuación $a + (-a) = 0$. La resta (**o sustracción**) es la operación inversa de la suma; para restar un número de otro, simplemente sumamos el negativo de dicho número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales que involucran negativos, utilizamos las propiedades siguientes.

PROPIEDADES DE LOS NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a+b) = -a - b$	$-(3+5) = -3 - 5$
6. $-(a-b) = b - a$	$-(5-8) = 8 - 5$

La propiedad 6 establece el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son los negativos el uno del otro. La propiedad 5 a menudo se utiliza con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 ■ Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales

(a) $-(x+2) = -x - 2$ Propiedad 5

(b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ Propiedad 5

$= -x - y + z$ Propiedad 2 ■

El número 1 es especial para la multiplicación; se conoce como **neutro multiplicativo,** ya que $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Cualquier número real a diferente de cero tiene un **inverso**, $1/a$, que satisface la ecuación $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación inversa de la multiplicación; para dividir un número, multiplicamos por el inverso de dicho número.

Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** de a y b o como la fracción de a sobre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales utilizando la operación de división, aplicamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para multiplicar fracciones, multiplique los numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Para sumar fracciones con un mismo denominador, sume los numeradores
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para sumar fracciones con diferentes denominadores, obtenga un denominador común. Después sume los numeradores
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	Cancele los números que son factores comunes tanto en el numerador como en el denominador
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	Multiplique en forma cruzada

Cuando se suman fracciones con denominadores diferentes, por lo general no utilizamos la propiedad 4. En lugar de esto volvemos a escribir las fracciones, de manera que tengan un denominador común (normalmente menor al producto de los denominadores) y entonces utilizamos la propiedad 3. Este denominador es el **Mínimo Común Denominador (MCD)** que se describe en el ejemplo siguiente

EJEMPLO 3 ■ Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN Al descomponer cada denominador en sus factores primos obtenemos

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Determinamos el mínimo común denominador (MCD) formando el producto de todos los factores obtenidos en la descomposición, utilizando la potencia más elevada de cada uno de ellos. Así, el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{5}{36} + \frac{7}{120} &= \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} && \text{Propiedad 5} \\ &= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} \\ &= \frac{71}{360} && \text{Propiedad 3} \end{aligned}$$

■

CONJUNTOS E INTERVALOS

En el análisis que sigue, es necesario que utilicemos la notación de conjuntos. Un **conjunto** es una colección de objetos, conocidos como los elementos del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $\in$ significa que a es un elemento de S, y $\notin$ significa que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de los enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos se pueden describir listando sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** en la forma

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

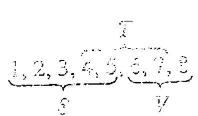
que se lee "A es el conjunto de todas las x tal que x sea un entero y $0 < x < 7$".

Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto constituido por todos los elementos que están en S o en T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras $S \cap T$ es la parte común de S y de T. El **conjunto vacío** denotado como $\varnothing$ es el conjunto que no contiene ningún elemento.

EJEMPLO 4 ■ Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$ y $V = \{6, 7, 8\}$, obtenga los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN



$$\begin{aligned} S \cup T &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} && \text{Todos los elementos en } S \text{ o en } T \\ S \cap T &= \{4, 5\} && \text{Elementos comunes tanto a } S \text{ como a } T \\ S \cap V &= \varnothing && S \text{ y } V \text{ no tienen ningún elemento en común} \end{aligned}$$

■

Ciertos conjuntos de números reales, conocidos como **intervalos**, se presentan con frecuencia en el cálculo y geométricamente corresponden a segmentos de recta. Por ejemplo, si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** desde a hasta b está integrado por todos

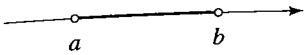


FIGURA 5
El intervalo abierto (a,b)

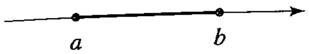


FIGURA 6
El intervalo cerrado $[a,b]$

los números entre a y b y se denota mediante el símbolo (a,b). Utilizando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Note que los puntos extremos, a y b, no están incluidos en este intervalo. Este hecho queda indicado por los paréntesis ( ) en la notación de intervalos y por los círculos en blanco de la figura 5 en la gráfica del intervalo.

El **intervalo cerrado** de a a b es el conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

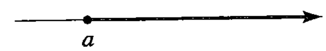
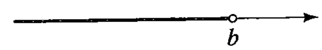
Aquí los puntos extremos del intervalo han quedado incluidos. Esto se indica mediante corchetes [ ] en la notación de intervalos y con los círculos sólidos de la figura 6 en la gráfica del intervalo. También es posible incluir sólo un punto extremo en un intervalo, como se muestra más abajo en la tabla de intervalos.

Necesitamos considerar también intervalos infinitos, como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

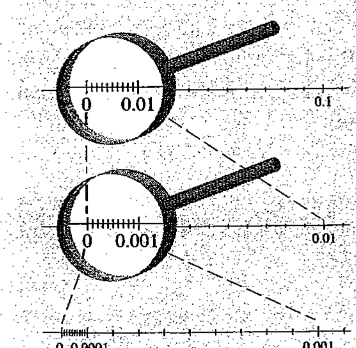
Esto no significa que el ∞ ("infinito") sea un número. La notación (a, ∞) corresponde al conjunto de todos los números que son mayores que a, por lo que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende de manera indefinida en la dirección positiva.

La siguiente tabla lista los nueve tipos posibles de intervalos. Cuando éstos se analicen, siempre supondremos que $a < b$.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leqslant x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

En un intervalo abierto no existe un número más grande o uno más pequeño

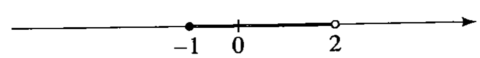
Cualquier intervalo contiene una infinidad de números; cada uno de los puntos de la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0,1]$ el número más pequeño es 0 y el más grande es 1, pero el intervalo abierto $(0,1)$ no contiene algún número que sea el más grande o el más pequeño. Para verlo, observe que 0.01 está cerca de 0, pero 0.001 está aún más cerca, 0.0001 todavía más cerca y así sucesivamente, por lo que siempre podemos encontrar un número en el intervalo $(0,1)$ más cerca de cero que cualquier otro número dado. Ya que el 0 mismo no está en el intervalo, éste no contiene ningún número que sea el más pequeño. De forma análoga, 0.99 está cerca de 1, pero 0.999 está más cerca, 0.9999 aún más cerca. Debido a que 1 mismo no está dentro del intervalo, éste no contiene algún número que sea el más grande.



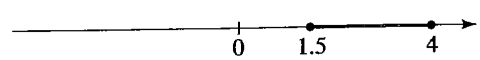
EJEMPLO 5 ■ Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y grafíquelos.

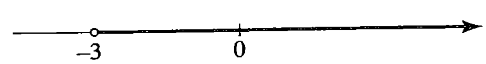
(a) $[-1, 2] = \{x \mid -1 \leqslant x < 2\}$



(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leqslant x \leqslant 4\}$



(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$ ■



EJEMPLO 6 ■ **Determinación de uniones e intersecciones de intervalos**

Grafique cada conjunto

(a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ (b) $(-2, -1) \cup (1, 2)$

SOLUCIÓN

(a) La intersección de dos intervalos está formada por los números que se encuentran en ambos. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \quad \text{y} \quad 2 \leqslant x \leqslant 7\}\\ &= \{x \mid 2 \leqslant x < 3\}\\ &= [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto aparece ilustrado en la figura 7.

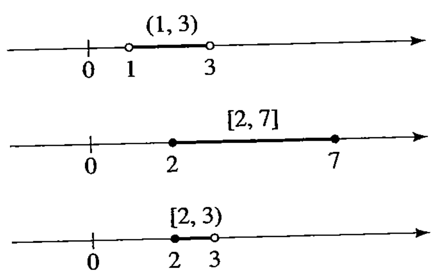


FIGURA 7
$(1, 3) \cap [2, 7]$

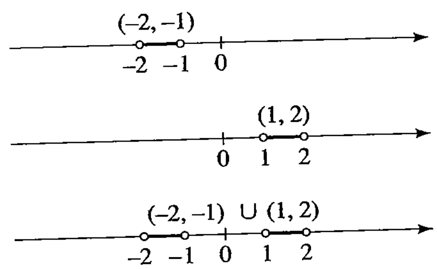


FIGURA 8
$(-2. -1) \cup (1, 2)$

(b) La unión de los intervalos $(-2, -1)$ y $(1,2)$ la conforman los números que se encuentran ya sea en $(-2, -1)$ o en $(1,2)$, por lo que

$$(-2, -1) \cup (1, 2) = \{x \mid -2 < x < -1 \quad \text{o bien,} \quad 1 < x < 2\}$$

Este conjunto aparece ilustrado en la figura 8. ■

VALOR ABSOLUTO Y DISTANCIA

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 en la recta de los números reales (véase la figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, por lo que tenemos $|a| \geqslant 0$ para todo número a. Al recordar que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la definición siguiente:

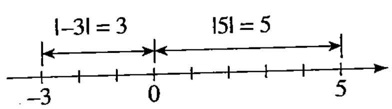


FIGURA 9

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de valores absolutos

(a) $|3| = 3$

(b) $|-3| = -(-3) = 3$

(c) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (puesto que $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

(d) Si $x \geqslant 4$, entonces $|x - 4| = x - 4$ (puesto que en este caso $x - 4 \geqslant 0$)

(e) Si $x < 4$, entonces $|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x$ (puesto que en este caso $x - 4 < 0$) ■

Al aplicar la definición de valor absoluto se pueden demostrar las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Descripción
1. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto
2. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3. $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4. $\lvert a^n \rvert = \lvert a \rvert^n$	El valor absoluto de una potencia es la potencia del valor absoluto.

EJEMPLO 8 ■ Simplificación del valor absoluto en una expresión

(a) $|-4 - x^2| = |-(4 + x^2)| = |4 + x^2| = 4 + x^2$ Propiedad 1 y el hecho de que $4 + x^2 > 0$

(b) $|2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3|$ Propiedad 2 ■

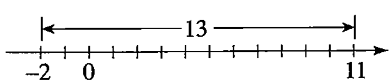


FIGURA 10

¿Cuál es la distancia entre los números -2 y 11 en la recta real? A partir de la figura 10 vemos que la distancia es 13. Obtendríamos esto calculando $|11 - (-2)| = 13$ o bien $|(-2) - 11| = 13$. Partiendo de esta observación, podemos hacer la siguiente definición (véase la figura 11).

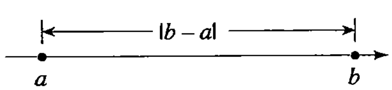


FIGURA 11
Longitud de un segmento de recta = $|b - a|$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS EN LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De la propiedad 6 de los negativos se desprende que

$$|b - a| = |a - b|$$

Esto confirma que, como esperaríamos, la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a.

EJEMPLO 9 ■ Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre lo números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos verificar este cálculo geométricamente, como se muestra en la figura 12. ■

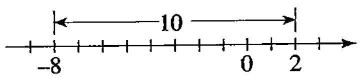


FIGURA 12

1.1 EJERCICIOS

1-8 ■ Enuncie la propiedad de los números reales que se está usando

1. $2x + y = y + 2x$

2. $c(a + b) = (a + b)c$

3. $(x + y) + 5z = x + (y + 5z)$

4. $2(w + x) = 2w + 2x$

5. $3(5x + 1) = 15x + 3$

6. $(xy)S = x(yS)$

7. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

8. $a(x + y + z) = ax + ay + az$

9-16 ■ Utilice las propiedades de los números reales para escribir la expresión sin paréntesis

9. $3(x + y)$ **10.** $8(a - b)$

11. $4(2m)$ **12.** $\frac{1}{2}(10z)$

13. $\frac{4}{3}(-6y)$ **14.** $-2(r + s)$

15. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **16.** $(3a)(b + c - 2d)$

17-20 ■ Efectúe las operaciones indicadas.

17. (a) $\frac{4}{13} + \frac{3}{13}$ (b) $\frac{3}{10} \cdot \frac{25}{27}$

18. (a) $\frac{7}{45} \cdot \frac{9}{10}$ (b) $\frac{5}{14} - \frac{1}{21} + 1$

19. (a) $\frac{2}{5} \div \frac{9}{10}$ (b) $\left(4 \div \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$

20. (a) $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \div \frac{1}{72}$ (b) $\left(2 \div \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} \div 2\right)$

21-24 ■ Diga si cada una de las desigualdades es verdadera o falsa

21. (a) $-6 < -10$ (b) $\sqrt{2} > 1.41$

22. (a) $\frac{10}{11} < \frac{12}{13}$ (b) $8 \leqslant 8$

23. (a) $-\pi > -3$ (b) $8 \leqslant 9$

24. (a) $1.1 > 1.\overline{1}$ (b) $-\frac{1}{2} < -1$

25-26 ■ Escriba cada uno de los enunciados en términos de desigualdades.

25. (a) x es positivo
(b) t es menor que 4
(c) a es mayor que o igual a π
(d) x es menor que $\frac{1}{3}$ y es mayor que -5
(e) la distancia máxima de p a 3 es 5

26. (a) y es negativo
(b) z es mayor que 1
(c) b es a lo más 8
(d) w es positivo y es menor que o igual a 17
(e) y está al menos a 2 unidades de π

27-30 ■ Obtenga el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

27. (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$

28. (a) $B \cup C$ (b) $B \cap C$

29. (a) $A \cup C$ (b) $A \cap C$

30. (a) $A \cup B \cup C$ (b) $A \cap B \cap C$

31-32 ■ Obtenga el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x > -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x < 5\}$$

31. (a) $B \cup C$ (b) $B \cap C$

32. (a) $A \cap C$ (b) $A \cap B$

33-38 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y grafíquelo.

33. $(-3, 0)$ **34.** $(2, 8]$

35. $[2, 8)$ **36.** $[-6, \frac{1}{2}]$

37. $[2, \infty)$ **38.** $(-\infty, 1)$

39-44 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y realice las gráficas correspondientes.

39. $x \leqslant 1$ **40.** $1 \leqslant x \leqslant 2$

41. $-2 < x \leqslant 1$ **42.** $x \geqslant -5$

43. $x > -1$ **44.** $-5 < x < 2$

45-50 ■ Grafique el conjunto.

45. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **46.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

47. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **48.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

49. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **50.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

51-54 ■ Evalúe cada una de las expresiones.

51. (a) $|100|$ (b) $|-73|$

52. (a) $|-8 - (-2)|$ (b) $|\pi - 10|$

53. (a) $\big||-6| - |-4|\big|$ (b) $\dfrac{-1}{|-1|}$

54. (a) $\big|2 - |-12|\big|$ (b) $-1 - \big|1 - |-1|\big|$

55-60 ■ Utilice las propiedades del valor absoluto (como en el ejemplo 8) para simplificar la expresión.

55. $|3x + 9|$ **56.** $|4x - 16|$

57. $\left|\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right|$ **58.** $|-2x - 10|$

59. $|-x^2 - 9|$ **60.** $\left|\dfrac{x-1}{1-x}\right|$

61-62 ■ Determine la distancia entre los números dados.

61. (a) 2 y 17
(b) −3 y 21
(c) $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

62. (a) $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$
(b) −38 y −57
(c) −2.6 y −1.8

63-64 ■ Exprese cada número dado como una fracción. (Véase la nota al margen de la página 4.)

63. (a) $0.\overline{7}$ (a) $0.2\overline{8}$ (a) $0.\overline{57}$

64. (a) $5.\overline{23}$ (a) $1.3\overline{7}$ (a) $2.1\overline{35}$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

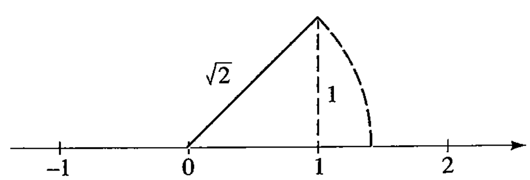
65. Sumas y productos de números racionales y números irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales es un número racional. ¿El producto de dos números irracionales es un número irracional? ¿Qué pasa con la suma?

66. Comportamiento límite de los recíprocos Complete las tablas. ¿Qué ocurre con el tamaño de la fracción $\dfrac{1}{x}$ conforme x se hace grande? ¿Y conforme x se hace pequeña?

x	$\dfrac{1}{x}$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$\dfrac{1}{x}$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

67. Números irracionales y geometría A partir de la figura siguiente, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en la recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ utilizando un método similar? ¿Y qué pasa respecto a $\sqrt{6}$? Liste otros números irracionales que se pueden localizar con este procedimiento.



1.2 EXPONENTES Y RADICALES

En esta sección le damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para ello, necesitamos recordar algunos hechos sobre los exponentes enteros, radicales y raíces n–ésimas.

EXPONENTES ENTEROS

Un producto de números iguales por lo general se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la definición siguiente.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la ***n*–ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se conoce como la **base** y n como el **exponente**

EJEMPLO 1 ■ Notación exponencial

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

(b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$ ■

Note la diferencia entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica a -3, pero en -3^4 el exponente sólo modifica a 3.

Podemos enunciar varias reglas útiles para trabajar con la notación exponencial. Para descubrir la regla para la multiplicación, multiplicamos 5^4 por 5^2:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}}\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias con una misma base, sumamos sus exponentes*. En general, podemos confirmar lo anterior considerando cualquier número real a y cualesquiera enteros positivos m y n:

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Así, hemos demostrado que

$$\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$$

siempre y cuando m y n sean enteros positivos.

Si queremos que esta regla sea verdadera, incluso cuando m y n son 0 o enteros negativos, entonces, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

pero esto sólo ocurre si $2^0 = 1$. De la misma manera, debemos tener que

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto es verdadero si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones nos llevan a la definición siguiente:

EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$\text{(a) } a^0 = 1 \qquad \text{(b) } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO 2 ■ Exponentes cero y negativos

(a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

(b) $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$

(c) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$ ■

Es esencial familiarizarse con las siguientes reglas para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

LEYES DE LOS EXPONENTES

Ley	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador como el denominador a la potencia.

Ya hemos visto cómo probar la ley 1 siempre que m y n son enteros positivos, pero al utilizar la definición de los exponentes negativos puede probarse para cualquier exponente entero. Ahora damos las pruebas de las leyes 3 y 4. Las demostraciones de las leyes 2 y 5 se piden en el ejercicio 77 de esta sección.

Demostración de la ley 3 Si m y n son enteros positivos, tenemos

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n \\ &= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupos de factores}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}\end{aligned}$$

Los casos en los cuales $m \leqslant 0$ o $n \leqslant 0$, se prueban con la definición para los exponentes negativos. □

Demostración de la ley 4 Para el caso en el cual m y n son enteros positivos, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ factores}} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}) = a^n b^n$$

Aquí hemos utilizado de manera repetida las propiedades asociativa y conmutativa. Para $m \leqslant 0$ o $n \leqslant 0$, se puede probar la ley 4 con la definición de los exponentes negativos. □

EJEMPLO 3 ■ Uso de las leyes de los exponentes

(a) $x^4x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1

(b) $y^4y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ Ley 1

(c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2

(d) $(b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20}$ Ley 3

(e) $(3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3$ Ley 4

(f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ Ley 5 ■

EJEMPLO 4 ■ Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique: (a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ (b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

SOLUCIÓN

(a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3 = (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3]$ Ley 4

$= (2a^3b^2)(27a^3b^{12})$ Ley 3

$= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12}$ Agrupe los factores con la misma base

$= 54a^6b^{14}$ Ley 1

(b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4 = \dfrac{x^3}{y^3}\dfrac{(y^2)^4x^4}{z^4}$ Leyes 5 y 4

$= \dfrac{x^3}{y^3}\dfrac{y^8x^4}{z^4}$ Ley 3

$= (x^3x^4)\left(\dfrac{y^8}{y^3}\right)\dfrac{1}{z^4}$ Agrupe los factores con la misma base

$= \dfrac{x^7y^5}{z^4}$ Leyes 1 y 2

Al simplificar una expresión, encontrará que caminos diferentes conducen a un mismo resultado; por tanto es libre de utilizar cualquiera de las reglas de los exponentes hasta llegar a un método propio. Ahora damos dos leyes adicionales que son útiles para la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ — Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.

7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$ — Para mover del numerador al denominador o del denominador al numerador un número elevado a una potencia, cambie el signo del exponente.

Demostración de la ley 7 Utilizando primero la definición de los exponentes negativos y a continuación la propiedad 2 de las fracciones, tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

La comprobación de la ley 6 se pide en el ejercicio 77.

EJEMPLO 5 ■ Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine los exponentes negativos y simplifique cada expresión

(a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ (b) $\left(\dfrac{y}{3z^2}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN

(a) Utilizamos la ley 7, que nos permite mover del numerador al denominador (o viceversa) un número elevado a una potencia cambiando el signo del exponente.

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^4t^2} \qquad \text{Ley 7}$$

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

(b) Utilizamos la ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertirla.

$$\left(\frac{y}{3z^2}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^2}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^4}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$ ■

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los científicos utilizan la notación exponencial como una forma compacta de escribir cifras muy grandes o muy pequeñas. Por ejemplo, la estrella más cercana al Sol, Próxima Centauri, está alejada aproximadamente 40,000,000,000,000 de kilómetros. La masa de un átomo de hidrógeno es de aproximadamente 0.00000000000000000000000166 gramos. Los científicos por lo general escriben estos números de una manera más conveniente, conocida como *notación científica*. Se dice que un número positivo x se escribe en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$\boxed{x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Próxima Centauri es de 4×10^{13} kilómetros, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe moverse 13 lugares hacia la *derecha*:

$$4 \times 10^{13} = 4\underbrace{0{,}000{,}000{,}000{,}000}_{13 \text{ lugares}}$$

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es de 1.66×10^{-24} gramos, el exponente −24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares hacia la *izquierda*:

$$1.66 \times 10^{-24} = \underbrace{0.00000000000000000000000\,1}_{24 \text{ lugares}}66$$

EJEMPLO 6 ■ Escritura de números en notación científica

(a) $56920 = 5.692 \times 10^4$ (b) $0.000093 = 9.3 \times 10^{-5}$ ■

Para emplear la notación científica en una calculadora, utilice la tecla identificada como $\boxed{\text{EE}}$ o $\boxed{\text{EXP}}$ o $\boxed{\text{EEX}}$ para introducir el exponente. Por ejemplo, para introducir el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-82, tecleamos

3.629 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{EE}}$ 15

y en la pantalla se lee

$\boxed{\text{3.629E15}}$

Con frecuencia se utiliza la notación científica en una calculadora para desplegar un número muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, si utilizamos una calculadora para obtener el cuadrado del número 1,111,111, la pantalla muestra (dependiendo del modelo de calculadora), la aproximación

$\boxed{\text{1.234568 12}}$ o bien $\boxed{\text{1.234568 E12}}$

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10, e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

EJEMPLO 7 ■ Uso de la notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$ y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, utilice una calculadora para estimar el cociente ab/c.

SOLUCIÓN Tecleamos los datos utilizando la notación científica, o utilizamos las leyes de los exponentes como sigue:

$$\frac{ab}{c} \approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}}$$

$$= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18}$$

$$\approx 2.7 \times 10^{36}$$

Damos la respuesta a 2 cifras correctas, porque los números dados tienen al menos cifras correctas. ■

RADICALES

Sabemos lo que significa 2^n, siempre que n es un entero. Para darle significado a una potencia como $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, es necesario que analicemos los radicales.

El símbolo $\sqrt{}$ significa "raíz cuadrada positiva de". Así,

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \text{significa} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geqslant 0}$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y −3, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (conocida a veces como la *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos la raíz cuadrada negativa, *debemos* escribir $-\sqrt{9}$ que es −3.

Dado que $a = b^2 \geqslant 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geqslant 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad 3 \geqslant 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n-ésimas. La raíz n-ésima de x es el número que, al ser elevado a la n-ésima potencia, nos da x.

DEFINICIÓN DE LA RAÍZ n-ÉSIMA

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz n–ésima principal** de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa} \qquad b^n = a$$

Si n es par, tenemos que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$.

Así,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \quad \text{y} \quad 3 \geqslant 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidos. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definido, porque el cuadrado de cualquier número real es no negativo.) Las raíces impares son únicas, pero las raíces pares no lo son.

La ecuación $x^5 = 31$ sólo tiene una solución real $x = \sqrt[5]{31}$.

La ecuación $x^4 = 31$ tiene dos soluciones reales $x = \pm\sqrt[4]{31}$.

Observe que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Así, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; sólo es verdadera cuando $a \geqslant 0$. Sin embargo, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$ Esta última ecuación es verdadera no sólo para las raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas para trabajar con raíces n–ésimas aparecen listadas en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que todas las raíces dadas existen.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES N-ÉSIMAS

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\,\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = 6$
2. $\sqrt[2]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5,\ \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

EJEMPLO 8 ■ Uso de las propiedades de las raíces de orden n–ésimas

(a) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{20\cdot 5} = \sqrt{100} = 10$ Propiedad 1

(b) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$ Propiedad 2

(c) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$ Propiedad 3 ■

EJEMPLO 9 ■ Simplificación de expresiones que incluyen raíces n–ésimas

(a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3x}$ Factorice la potencia cúbica más grande

$= \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{x}$ Propiedad 1

$= x\sqrt[3]{x}$ Propiedad 4

(b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\,\sqrt[4]{x^8}\,\sqrt[4]{y^4}$ Propiedad 1

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|y|$ Propiedad 5

$= 3x^2\,|y|$ Propiedad 5 ■

Con frecuencia es útil combinar radicales similares en una expresión como $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se hace al emplear la propiedad distributiva. Así

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

Evite cometer el error siguiente:

$$\sqrt{a+b} \;\cancel{=}\; \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si suponemos que $a = 9$ y $b = 16$, entonces podemos observar el error:

$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$

$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$

$5 \stackrel{?}{=} 7$ ¡Incorrecto!

EJEMPLO 10 ■ Combinación de radicales

(a) $10\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} = (10 + 7 - 2)\sqrt[3]{4}$ Propiedad distributiva

$= 15\sqrt[3]{4}$

(b) $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16\cdot 2} + \sqrt{100\cdot 2}$ Factorice las potencias cuadradas más grandes

$= \sqrt{16}\,\sqrt{2} + \sqrt{100}\,\sqrt{2}$ Propiedad 1

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ Propiedad distributiva

(c) Si $b > 0$, entonces

$b\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = b\sqrt{25}\,\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\,\sqrt{b}$ Propiedad 1

$= 5b\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ Propiedad 5

$= (5b - b)\sqrt{b}$ Propiedad distributiva

$= 4b\sqrt{b}$

(d) $\sqrt[3]{8a^8} + \sqrt[3]{27a^5} = \sqrt[3]{(8a^6)a^2} + \sqrt[3]{(27a^3)a^2}$ Factorice las potencias cúbicas más grandes

$= \sqrt[3]{8a^6}\,\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{27a^3}\,\sqrt[3]{a^2}$ Propiedad 1

$= 2a^2\sqrt[3]{a^2} + 3a\sqrt[3]{a^2}$ Determine las raíces cúbicas

$= a\sqrt[3]{a^2}\,(2a + 3)$ Propiedad distributiva ■

EXPONENTES RACIONALES

Para definir un *exponente racional* o su equivalente, un *exponente fraccionario* como $a^{1/3}$, es necesario utilizar radicales. A fin de darle significado al símbolo $a^{1/n}$ en una forma consistente con las leyes de los exponentes, tenemos que

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Por esto, a partir de la definición de la raíz n–ésima

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

En general, definimos los exponentes racionales como sigue.

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n expresado en su forma más simplificada, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

o, de manera equivalente $\quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geqslant 0$.

Con esta definición se puede comprobar que *las leyes de los exponentes también son válidas para los exponentes racionales.*

EJEMPLO 11 ■ Uso de la definición de los exponentes racionales

(a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$

(c) $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ Solución alterna $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

(d) $(125)^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$ ■

EJEMPLO 12 ■ Uso de las leyes de los exponentes con exponentes racionales

(a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1

(b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Leyes 1 y 2

(c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ — Ley 4

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ — Ley 3

$= 2\sqrt{2}\, a^{9/2} b^6$

(d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \cdot (y^4 x^{1/2})$ — Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y} \cdot y^4 x^{1/2}$ — Ley 3

$= 8x^{11/4} y^3$ — Leyes 1 y 2 ■

EJEMPLO 13 ■ Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

(a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ — Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ — Ley 1

(b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ — Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ — Ley 1

$= x^{3/4}$ — Ley 3 ■

Con frecuencia resulta útil eliminar el radical en el denominador, multiplicando tanto el numerador como el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se conoce como **racionalización del denominador**. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$. Al hacerlo multiplicamos la cantidad dada por 1, por lo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Observe que el denominador de la última fracción no contiene ningún radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ se racionalizará el denominador, ya que (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo 14 ■ Racionalización de denominadores

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

(c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\,\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$ ■

1.2 EJERCICIOS

1-10 ▪ Evalúe cada uno de los números dados.

1. (a) $(-2)^4$ (b) -2^4 (c) π^0

2. (a) $(\frac{1}{3})^4 4^{-3}$ (b) $(\frac{1}{4})^{-2}$ (c) $(\frac{4}{9})^0 \cdot 2^{-3}$

3. (a) $2^{-3}\, 5^4$ (b) $\dfrac{10^9}{10^4}$ (c) $(2^4 \cdot 2^2)^2$

4. (a) $(\frac{2}{3})^{-1}$ (b) $\sqrt[3]{-64}$ (c) $\sqrt[5]{-32}$

5. (a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (b) $\sqrt[4]{256}$ (c) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

6. (a) $\sqrt{7}\,\sqrt{28}$ (b) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9}$ (c) $\sqrt[4]{24}\,\sqrt[4]{54}$

7. (a) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{\frac{9}{25}}$

8. (a) $9^{7/2}$ (b) $(-32)^{2/5}$ (c) $(-125)^{-1/3}$

9. (a) $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ (b) $(-\frac{27}{8})^{2/3}$ (c) $(\frac{25}{64})^{3/2}$

10. (a) $1024^{-0.1}$ (b) $3^{2/7}3^{5/7}$ (c) $3^{1/2}9^{1/4}$

11-14 ▪ Simplifique la expresión.

11. $\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{32}$

12. $\sqrt{8} + \sqrt{50}$

13. $\sqrt{245} - \sqrt{125}$

14. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

15-32 ▪ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente negativo.

15. $t^7 t^{-2}$

16. $(4x^2)(6x^7)$

17. $(12x^2y^4)(\frac{1}{2}x^5y)$

18. $(6y)^3$

19. $\dfrac{x^9(2x)^4}{x^3}$

20. $\dfrac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$

21. $b^4(\frac{1}{3}b^2)(12b^{-8})$

22. $(2s^3t^{-1})(\frac{1}{4}s^6)(16t^4)$

23. $(rs)^3(2s)^{-2}(4r)^4$

24. $(2u^2v^3)^3(3u^3v)^{-2}$

25. $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

26. $\dfrac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4}$

27. $\dfrac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$

28. $\left(\dfrac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\dfrac{d^2}{c^3}\right)^3$

29. $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3}$

30. $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

31. $\left(\dfrac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

32. $(3ab^2c)\left(\dfrac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$

33-48 ▪ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente negativo. Suponga que todas las letras indican números positivos.

33. $x^{2/3}x^{1/5}$

34. $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

35. $(4b)^{1/2}(8b^{2/5})$

36. $(8x^6)^{-2/3}$

37. $(c^2d^3)^{-1/3}$

38. $(4x^6y^8)^{3/2}$

39. $(y^{3/4})^{2/3}$

40. $(a^{2/5})^{-3/4}$

41. $(2x^4y^{-4/5})^3(8y^2)^{2/3}$

42. $(x^{-5}y^3z^{10})^{-3/5}$

43. $\left(\dfrac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$

44. $\left(\dfrac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$

45. $\left(\dfrac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$

46. $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$

47. $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$

48. $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$

49-56 ▪ Simplifique la expresión. Suponga que las letras indican números reales.

49. $\sqrt[4]{x^4}$

50. $\sqrt[3]{x^3y^6}$

51. $\sqrt[3]{x^3y}$

52. $\sqrt{x^4y^4}$

53. $\sqrt[5]{a^6b^7}$

54. $\sqrt[3]{a^2b}\ \sqrt[3]{a^4b}$

55. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$

56. $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

57-60 ▪ Racionalice el denominador.

57. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{x}{3y}}$ (c) $\sqrt{\dfrac{3}{20}}$

58. (a) $\sqrt{\dfrac{x^5}{2}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (c) $\sqrt{\dfrac{1}{2x^3y^5}}$

59. (a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$

60. (a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

61-62 ▪ Escriba cada número en notación científica.

60. (a) 69,300,000
(b) 0.000028536
(c) 129,540,000

61. (a) 7,259,000,000
(b) 0.0000000014
(c) 0.0007029

63-64 Escriba cada número en notación decimal ordinaria.

63. (a) 3.19×10^5
(b) 2.670×10^{-8}
(c) 7.1×10^{14}

64. (a) 8.55×10^{-3}
(b) 6×10^{12}
(c) 6.257×10^{-10}

65-66 Escriba el número indicado en cada enunciado en notación científica.

65 (a) Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es aproximadamente 5,900,000,000,000 millas.
(b) El diámetro de un electrón es aproximadamente 0.0000000000004 centímetros.
(c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

66. (a) La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente 93 millones de millas.
(b) La masa de una molécula de oxígeno es aproximadamente 0.000000000000000000000053 gramos.
(c) La masa de la Tierra es de aproximadamente 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kilos.

67-72 Utilice notación científica, leyes de exponentes y una calculadora, para llevar a cabo las operaciones indicadas. Su respuesta correcta debe incluir el número de dígitos significativos indicados por los datos dados.

67. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

68. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

69. $\dfrac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

70. $\dfrac{(73.1)(1.6341) \times 10^{28})}{0.0000000019}$

71. $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594621000)(0.0058)}$

72. $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

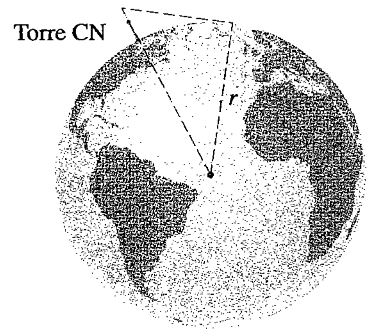
73. La velocidad de la luz es aproximadamente 186,000 millas/segundo. Utilice la información del ejercicio 66(a) para determinar cuánto tiempo le toma a un rayo de luz solar llegar a la Tierra.

74. Sin utilizar calculadora, determine en cada par de números cuál es el más grande.
(a) $7^{1/4}$ y $4^{1/3}$ (b) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{3}$

75. Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que puede verse desde la parte superior de un edificio que tiene una altura h se estima mediante la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

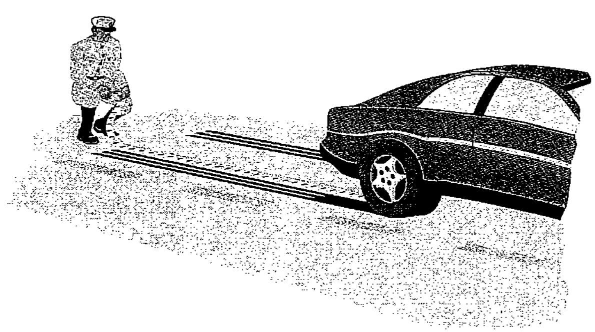
donde $r = 3{,}960$ millas es el radio de la Tierra; D y h también se miden en millas. ¿Cuál es la distancia máxima observable desde la plataforma de la Torre CN de Toronto, que está a 1,135 pies por encima de la superficie terrestre?



76. La policía utiliza la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para estimar la rapidez s (en millas/hora) a la cual está viajando un automóvil, si derrapa d pies después de aplicar los frenos de manera súbita. El número f es el coeficiente de fricción de la carretera, que mide lo "resbaladizo" de la misma. La tabla que sigue da algunos valores típicos estimados para f.

	Asfalto	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Mojado	0.5	0.4	0.1

(a) ¿Si un automóvil derrapa 65 pies en concreto mojado, a qué rapidez se estaba desplazando al aplicar los frenos?
(b) ¿Si un automóvil estaba viajando a 50 millas/hora, cuánto derrapará en asfalto mojado?



77. Demuestre cada una de las leyes de los exponentes dadas para el caso en que m y n sean enteros positivos y que $m > n$.
(a) Ley 2 (b) Ley 5 (c) Ley 6

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

78. Comportamiento límite de las potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre con la raíz n–ésima de 2 al hacerse n grande? ¿Qué le pasa a la raíz n–ésima de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$(\frac{1}{2})^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

79. Distancias entre potencias ¿Cuál de los siguientes pares de números está más cerca uno del otro?

$$10^{10} \text{ y } 10^{50} \qquad \text{o} \qquad 10^{100} \text{ y } 10^{101}$$

80. Relatividad La teoría de la relatividad establece que conforme un objeto se traslada con una rapidez v, su masa en reposo m_0 cambia a una masa m dada por la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

donde $c \approx 3.0 \times 10^8$ metros/segundo, que es la rapidez de la luz. ¿Por qué factor se multiplica la masa en reposo de una nave espacial, si la nave se desplaza a una décima parte de la rapidez de la luz? ¿A la mitad de la velocidad de la luz? ¿Al 90% de la rapidez de la luz? ¿De qué manera cambia la masa de la nave espacial al trasladarse a una rapidez muy cercana a la rapidez de la luz? ¿Necesitamos saber el valor real de la rapidez de la luz para responder a estas preguntas?

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresiones algebraicas tales como

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad ax + b$$

$$\frac{y-1}{y^2+2} \qquad \frac{cx^2y + dy^2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

se obtienen a partir de variables como x, y, y z, constantes como 2, –3, a, b, c, y d, y combinándolas utilizando la suma, resta, multiplicación, división y la exponenciación racional. Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número en un conjunto dado de números, mientras que una **constante** representa un número fijo (o específico). El **dominio** de una variable es el conjunto de valores que puede adoptar la variable. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x}$ el dominio de x es $\{x \mid x \geqslant 0\}$ mientras que en la expresión $2/(x-3)$, el dominio de x es $\{x \mid x \neq 3\}$.

Los tipos más simples de expresiones algebraicas sólo utilizan la suma, la resta y la multiplicación. Estas expresiones se conocen como **polinomios**. La forma general de un polinomio de grado n (donde n es un entero no negativo) en la variable x es

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \dots a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$. El **grado** de un polinomio es la potencia más alta de la variable. Cualquier polinomio es una suma de **términos** de la forma ax^k, llamados **monomios**, donde a es una constante y k un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios, un **trinomio** es la suma de tres monomios, y así sucesivamente. Por esto, $2x^2 - 3x + 4$, $ax + b$, y $x^4 + 2x^3$ son polinomios de grado 2, 1 y 4 respectivamente; el primero es un trinomio, y los otros dos son binomios.

Sumamos y **restamos** polinomios utilizando las propiedades de los números reales analizados en la sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (estos es, términos con la misma variable elevada a la misma potencia) utilizando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$ac + bc = (a + b)c$

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

En la resta de polinomios, tenemos que recordar que si un signo menos antecede a una expresión entre paréntesis, entonces cuando eliminamos dichos paréntesis todos los términos dentro del mismo cambian de signo.

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente un caso de la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 ■ Suma y resta de polinomios

(a) Calcule la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (3x^3 + 5x^2 - 4x)$.
(b) Calcule la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (3x^3 + 5x^2 - 4x)$.

SOLUCIÓN

(a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (3x^3 + 5x^2 - 4x)$

$$= (x^3 + 3x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 4x) + 4 \qquad \text{Agrupe términos semejantes}$$

$$= 4x^3 - x^2 - 2x + 4 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

(b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (3x^3 + 5x^2 - 4x)$

$$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= (x^3 - 3x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 4x) + 4 \qquad \text{Agrupe términos semejantes}$$

$$= -2x^3 - 11x^2 + 6x + 4 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

■

Para obtener el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, necesitamos utilizar varias veces la propiedad distributiva. En particular, si se utiliza tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor, y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

Las siglas PEIU nos ayudan a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los Primeros términos, de los términos Exteriores, de los términos Interiores y de los Últimos términos

$$(a + b)(c + d) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P}}}{\overline{ac}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{E}}}{\overline{ad}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I}}}{\overline{bc}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{U}}}{\overline{bd}}$$

EJEMPLO 2 ■ Multiplicación de binomios

(a) $(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$ Propiedad distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ Combine términos semejantes

(b) $3(x - 1)(4x + 3) = 3(4x^2 + 3x - 4x - 3)$ Propiedad distributiva

$= 3(4x^2 - x - 3)$ Combine términos semejantes

$= 12x^2 - 3x - 9$ Propiedad distributiva ■

En general podemos multiplicar cualesquiera dos polinomios utilizando la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 3 ■ Multiplicación de polinomios

Calcule el producto $(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1)$.

SOLUCIÓN Empezamos considerando el segundo factor como un solo número y utilizando la propiedad distributiva:

$(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1) = x^2(x^3 + 2x + 1) - 3(x^3 + 2x + 1)$ Propiedad distributiva

$= x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 6x - 3$ Propiedad distributiva

$= x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$ Combine términos semejantes ■

El siguiente ejemplo muestra que los métodos que hemos utilizado para multiplicar polinomios, también son aplicables a otras expresiones algebraicas.

EJEMPLO 4 ■ Multiplicación de expresiones algebraicas

(a) $\sqrt{x}(x^2 + 2x + \sqrt{x}) = x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x}$ Propiedad distributiva

$= x^{5/2} + 2x^{3/2} + x$ Leyes de los exponentes

(b) $(1 + \sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x}) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3(\sqrt{x})^2$ Propiedad distributiva

$= 2 - \sqrt{x} - 3x$ Combine términos semejantes

■

También podemos considerar los polinomios en dos o más variables. Por ejemplo,

$$4x^2y^3 - 2xy + 6$$

es un polinomio en las variables x y y. Las técnicas para la combinación de estos polinomios son análogas a las correspondientes a los polinomios de una sola variable.

EJEMPLO 5 ■ Multiplicación de polinomios con más de una variable

Calcule el producto $(x^2 - xy + y^2)(x - y)$.

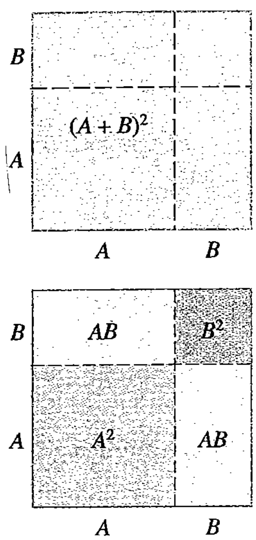
SOLUCIÓN

$(x^2 - xy + y^2)(x - y) = (x^2 - xy + y^2)x - (x^2 - xy + y^2)y$	Propiedad distributiva
$= x^3 - x^2y + xy^2 - x^2y + xy^2 - y^3$	Propiedad distributiva
$= x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3$	Combine términos semejantes

Ciertos tipos de productos se representan con tanta frecuencia que deberá memorizarlos. Puede verificar cada una de las fórmulas siguientes efectuando las multiplicaciones.

Las figuras dan una interpretación geométrica de la fórmula.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$



FÓRMULAS DE PRODUCTOS ESPECIALES

1. $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o de cualquier otra fórmula en álgebra) es el **principio de sustitución**: dentro de una fórmula podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra. Por ejemplo, para determinar $(x^2 + y^3)^2$ utilizamos la fórmula de producto 2:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Sustituimos x^2 por A y y^3 por B para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

Este tipo de sustitución es válida porque toda expresión algebraica (en este caso, x^2 o y^3) representa un número.

EJEMPLO 6 ■ Uso de las fórmulas de productos especiales

Utilice las fórmulas de productos especiales para determinar cada uno de los productos

(a) $(3x + 5)^2$ (b) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ (c) $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

(a) Fórmula de producto 2, con $A = 3x$ y $B = 5$, lo que nos da

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) Utilizando la fórmula de producto 1, con $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ tenemos

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(c) Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la fórmula de producto 5, obtenemos

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

FACTORIZACIÓN

Utilizamos la propiedad distributiva para desarrollar expresiones algebraicas. Algunas veces necesitamos invertir este proceso (utilizando de nuevo la propiedad distributiva) **factorizando** una expresión como un producto de elementos más sencillos. Por ejemplo, escribimos

FACTORIZACIÓN

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

DESARROLLO

y podemos decir que $x - 2$ y $x + 2$ son los **factores** de $x^2 - 4$. El tipo más sencillo de factorización ocurre cuando los términos tienen un factor común.

Ejemplo 7 ■ Factorizar factores comunes

Factorice cada una de las expresiones.

(a) $3x^2 - 6x$ (b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

SOLUCIÓN

(a) El factor común más grande de los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, por lo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Multiplicando nos da

$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$ ✓

(b) Observamos que

8, 6 y -2 tienen como factor común más grande al 2

x^2, x^3 y x tienen como factor común más grande a x

y^2, y^3 y y^4 tienen como factor común más grande a y^2

Por lo que el factor común más grande de los tres términos en el polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned}8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)\end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Multiplicando nos da

$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$ ✓

Para factorizar un polinomio de segundo grado, es decir **cuadrático**, de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO 8 ■ Factorización de $x^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factor: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN En este caso, $rs = 12$ y por lo tanto r y s deben ser factores de 12 y su suma debe ser 7. Enumeramos los factores de ensayo de 12:

r	1	2	3
s	12	6	4
Suma	13	8	7

Por lo tanto, $r = 3$ y $s = 4$ son los factores de 12 cuya suma es 7. La factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3(x + 4) \qquad ■$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Multiplicando obtenemos

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12 \quad ✓$$

Para factorizar una expresión cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Factores de a

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$$

Factores de c

Por lo tanto, intentamos determinar los números p, q, r y s de forma que

$$pq = a \qquad rs = c \qquad ps + qr = b$$

Si estos números son todos enteros, entonces tendremos un número limitado de posibilidades a intentar para determinar p, q, r y s.

EJEMPLO 9 ■ Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorizar: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o como $3 \cdot 2$, y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Intentando estas posibilidades, llegamos a la factorización

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1) \qquad ■$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Multiplicando obtenemos

$$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5 \quad ✓$$

Algunas expresiones algebraicas especiales se pueden factorizar utilizando las fórmulas siguientes. Las primeras tres son simplemente las fórmulas de productos especiales, escritas al revés.

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)\ (A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)\ (A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

EJEMPLO 10 ■ Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice cada polinomio

(a) $4x^2 - 25$ (b) $9x^4 - y^6$ (c) $(x + y)^2 - x^2$

SOLUCIÓN

(a) Utilizando la fórmula para la diferencia de cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25 &= (2x)^2 - 5^2 \\ &= (2x - 5)(2x + 5) \end{aligned}$$

(b) Reconocemos que $9x^4 = (3x^2)^2$ y que $y^6 = (y^3)^2$ y por lo tanto la expresión es una diferencia de cuadrados. Podemos utilizar la fórmula para la diferencia de cuadrados con $A = 3x^2$ y $B = y^3$. Tenemos

$$\begin{aligned} 9x^4 - y^6 &= (3x^2)^2 - (y^3)^2 \\ &= (3x^2 - y^3)(3x^2 + y^3) \end{aligned}$$

(c) Utilizamos la fórmula para la diferencia de cuadrados con $A = x + y$ y $B = x$.

$$\begin{aligned} (x + y)^2 - x^2 &= [(x + y) - x][(x + y) + x] \\ &= y(2x + y) \end{aligned}$$

■

Factorización de números

Factorizar completamente un número entero significa escribirlo como el producto de números enteros más pequeños que a su vez no pueden ser factorizados, es decir, como un producto de números primos. Por ejemplo, $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. La factorización de un número muy grande puede resultar una tarea difícil. A computadoras de alta velocidad, empleando los métodos más rápidos conocidos, les tomaría aproximadamente un día para factorizar un número arbitrario de 30 dígitos, y aproximadamente 1 millón de años para factorizar un número de 40 dígitos. Ted Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman se basaron en este hecho en los 70 para diseñar el código RSA que envía mensajes secretos. Este código utiliza un número extremadamente grande para codificar un mensaje, pero requiere el conocimiento de los factores para descifrarlo. Dado que la multiplicación de los números es fácil, pero la factorización del resultado es difícil, este código resulta muy difícil de descifrar. Al principio se pensó que un número de 80 dígitos cuidadosamente seleccionado proporcionaría un cogido indescifrable, pero adelantos recientes en el estudio de la factorización han hecho necesarios números con mucho más dígitos para asegurar una seguridad total.

EJEMPLO 11 ■ Factorización de cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio: (a) $x^2 + 6x + 9$ (b) $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

(a) Utilizando la fórmula 2 con $a = x$ y $b = 3$, obtenemos

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3x) + 3^2 = (x + 3)^2$$

(b) Aquí utilizamos $A = 2x$ y $B = y$ en la fórmula 3.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy + y^2 &= (2x)^2 - 2(2x)y + y^2 \\ &= (2x - y)^2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 12 ■ Factorización de diferencias y de sumas de cubos

Factorice cada polinomio: (a) $27x^3 - 1$ (b) $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

(a) Utilizando la fórmula para la diferencia de cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 &= (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

(b) aplicando la fórmula para la suma de cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

Cuando factorizamos una expresión, el resultado a veces se factoriza aún más. En general, primero factorizamos factores comunes, a continuación estudiamos el resultado para ver si se puede factorizar por cualesquiera de los demás métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta factorizar totalmente la expresión.

EJEMPLO 13 ■ Factorización total de una expresión

Factorice totalmente cada expresión

(a) $2x^4 - 8x^2$ (b) $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos la potencia de x con el exponente más pequeño

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x-2)(x+2) && \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

(b) Primero factorizamos las potencias de x y y con los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Factorizar } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo factorizamos las variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

EJEMPLO 14 ■ Factorización de variables con exponentes fraccionarios

Factorice cada expresión.

(a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (b) $(1 + x)^{-2/3}x + (1 + x)^{1/3}$

SOLUCIÓN

(a) Factorice la potencia de x con el *exponente más pequeño*, esto es, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x-1)(x-2) && \text{Factorice la cuadrática } x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

(b) Factorice la potencia de $1 + x$ con el exponente más pequeño, esto es, $(1 + x)^{-2/3}$.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-2/3}x + (1+x)^{1/3} &= (1+x)^{-2/3}[x + (1+x)] && \text{Factorice } (1+x)^{-2/3}. \\ &= (1+x)^{-2/3}(1+2x) \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Para confirmar que hizo la factorización correctamente, multiplique utilizando las leyes de los exponentes.

(a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$
$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✓

(b) $(1 + x)^{-2/3}[x + (1 + x)]$
$= (1 + x)^{-2/3}x + (1 + x)^{1/3}$ ✓

Los polinomios con por lo menos cuatro términos, a veces se pueden factorizar agrupando términos. El ejemplo siguiente ilustra la idea.

Ejemplo 15 ■ Factorización mediante agrupación

Factorice cada polinomio.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ (b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ Agrupar términos

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ Factorice los factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ Factorice $x + 1$ de cada término

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ Factorice los factores comunes

$= (x^2 - 3)(x - 2)$ Factorice $x - 2$ de cada término

■

1.3 EJERCICIOS

1-40 ■ Lleve a cabo las operaciones indicadas y simplifique.

1. $2(x - 1) + 4(x + 2)$

2. $5(2x + 3) - 7(2x - 3)$

3. $(2x^2 + x + 1) + (x^2 - 3x + 5)$

4. $(2x^2 + x + 1) - (x^2 - 3x + 5)$

5. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

6. $4(x^2 - x + 2) - 5(x^2 - 2x + 1)$

7. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

8. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

9. $\sqrt{x}\,(x - \sqrt{x})$

10. $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

11. $\sqrt[3]{y}\,(y^2 - 1)$

12. $(4x - 1)(3x + 7)$

13. $(3t - 2)(7t - 5)$

14. $(t + 6)(t + 5) - 3(t + 4)$

15. $(x + 2y)(3x - y)$

16. $(4x - 3y)(2x + 5y)$

17. $(1 - 2y)^2$

18. $(3x + 4)^2$

19. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$

20. $(x^2 + 3)(5x - 6)$

21. $x(x - 1)(x + 2)$

22. $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

23. $y^4(6 - y)\,(5 + y)$

24. $(t - 5)^2 - 2(t + 3)(8t - 1)$

25. $(2x^2 + 3y^2)^2$

26. $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

27. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$

28. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

29. $(1 + a^3)^3$

30. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

31. $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right)$

32. $\left(c + \frac{1}{c}\right)^2$

33. $(x^2 + x - 2)(x^3 - x + 1)$

34. $(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)$

35. $(1 + x^{4/3})(1 - x^{2/3})$

36. $(x^{3/2} - x + 1)(x^2 + x^{1/2} - 2)$

37. $(1 - b)^2(1 - b)^2$

38. $(1 + x - x^2)^2$

39. $(3x^2y + 7xy^2)(x^2y^3 - 2y^2)$

40. $(x^4y - y^5)(x^2 + xy + y^2)$

41-90 ■ Factorice la expresión completamente.

41. $2x + 12x^3$

42. $8x^5 + 4x^3$

43. $6y^4 - 15y^3$

44. $5ab - 8abc$

45. $x^2 + 7x + 6$

46. $x^2 - x - 6$

47. $x^2 - 2x - 8$

48. $x^2 - 14x + 48$

49. $y^2 - 8y + 15$

50. $z^2 + 6z - 16$

51. $2x^2 + 5x + 3$

52. $2x^2 + 7x - 4$

53. $9x^2 - 36$

54. $8x^2 + 10x + 3$

55. $6x^2 - 5x - 6$

56. $6 + 5t - 6t^2$

57. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

58. $(x + 1)^3x - 2(x + 1)^2x^2 + x^3(x + 1)$

59. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

60. $n(x - y) + (n - 1)(y - x)$

61. $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

62. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

63. $t^3 + 1$

64. $4t^2 - 9s^2$

65. $4t^2 - 12t + 9$

66. $x^3 - 27$

67. $x^3 + 2x^2 + x$

68. $3x^3 - 27x$

69. $4x^2 + 4xy + y^2$

70. $4r^2 - 12rs + 9s^2$

71. $x^4 + 2x^3 - 3x^2$

72. $x^6 + 64$

73. $8x^3 - 125$

74. $x^4 + 2x^2 + 1$

75. $x^4 + x^2 - 2$

76. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

77. $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

78. $y^3 - y^2 + y - 1$

79. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$

80. $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

81. $x^6 - y^6$

82. $x^8 - 1$

83. $x^{5/2} - x^{1/2}$

84. $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$

85. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

86. $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$

87. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

88. $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

89. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

90. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

91. Factorice $x^4 + 3x^2 + 4$. [*Sugerencia*: Escriba la expresión en la forma $(x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$ y observe que se trata de una diferencia de cuadrados.]

92. Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

93. Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

94. Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$ es un cuadrado perfecto

95. Factorice completamente la expresión:

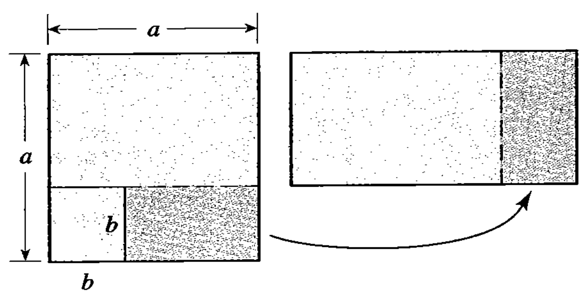
$$4a^2c^2 - (c^2 - b^2 + a^2)^2$$

96. Verifique algebraicamente cada una de las fórmulas siguientes:
(a) Fórmulas de productos especiales 1 y 2
(b) Fórmulas de productos especiales 3 y 4
(c) La fórmula para una diferencia de cubos
(d) La fórmula para una suma de cubos

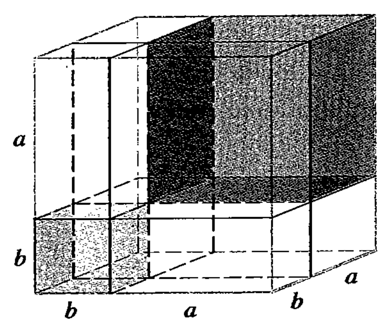
DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

94. Interpretación geométrica de expresiones algebraicas
Explique la forma en que cada una de estas figuras verifica la fórmula dada.
En cada caso $a > b > 0$.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



¿Es posible crear una figura como las anteriores para ilustrar la fórmula del producto para $(a + b)^4$? Explique su respuesta. (Piense en las dimensiones de los objetos de las figuras.)

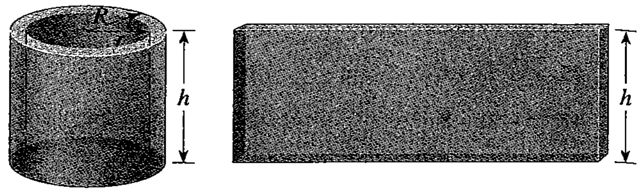
94. Volumen de un casquillo cilíndrico Utilizando la fórmula para el volumen de un cilindro dado al inicio de este libro, explique por qué el volumen del casquillo cilíndrico que se muestra a la derecha es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorizar lo anterior para demostrar que

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$$

Utilice el diagrama "desenrollado" para explicar el significado geométrico de esto.



1.4 EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Un cociente de dos expresiones algebraicas se conoce como una **expresión fraccionaria**. Suponemos que todas las fracciones están definidas; esto es, *tratamos únicamente con valores de las variables tales que los denominadores no son cero.*

Un tipo común de expresión fraccionaria ocurre cuando tanto el numerador como el denominador son polinomios. Esto se conoce como una **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{4x^3 + 2x + 5}{x + 3}$$

es una expresión racional cuyo denominador es 0 cuando $x = -3$. Por esto, al tratar con esta expresión, implícitamente suponemos que $x \neq -3$.

En la simplificación de las expresiones racionales factorizamos tanto el numerador como el denominador y utilizamos la propiedad siguiente de las fracciones:

$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}}$$

Con la cual podemos **cancelar** factores comunes del numerador y del denominador.

EJEMPLO 1 ■ Simplificación de expresiones fraccionarias mediante cancelación

Simplifique: (a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^3 + 5x^2 - 3x}{6 - x - x^2}$

SOLUCIÓN

No podemos cancelar la x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ ya que x^2 no es un factor.

(a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)}$ Factorice

$= \dfrac{x + 1}{x + 2}$ Cancele factores comunes

(b) $$\frac{2x^3 + 5x^2 - 3x}{6 - x - x^2} = \frac{x(2x^2 + 5x - 3)}{-(x^2 + x - 6)} = \frac{x(2x - 1)(x + 3)}{-(x - 2)(x + 3)}$$ Factorice

$$= -\frac{x(2x - 1)}{x - 2}$$ Cancele factores comunes

Al multiplicar expresiones fraccionarias, utilizamos la siguiente propiedad de las fracciones

$$\boxed{\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones, multiplicamos sus numeradores y sus denominadores.

EJEMPLO 2 ■ Multiplicación de expresiones fraccionarias

Realice la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1}$$ Factorizar

$$= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2}$$ Propiedad de las fracciones

$$= \frac{3(x + 3)}{x + 4}$$ Cancelar factores comunes

Al dividir expresiones fraccionarias, utilizamos la siguiente propiedad de las fracciones.

$$\boxed{\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}}$$

Esto dice que para dividir una fracción por otra invertimos la fracción divisor y multiplicamos.

EJEMPLO 3 ■ División de expresiones fraccionarias

Realice la división indicada y simplifique: $\dfrac{x-4}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} \qquad \text{Invierta y multiplique}$$

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Cancele factores comunes}$$

■

Evite cometer el error siguiente:

$$\frac{A}{B+C} \cancel{=} \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos que $A = 2$, $B = 1$, y $C = 1$, entonces veremos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \text{ ¡Incorrecto!}$$

Al sumar y restar fracciones racionales, primero obtenemos un denominador común y a continuación utilizamos la siguiente propiedad de las fracciones:

$$\boxed{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}}$$

Aunque cualquier denominador común funcionará, lo mejor es utilizar el **mínimo común denominador** (MCD), tal y como se indicó en la sección 1.1. El MCD se obtiene al factorizar cada denominador y tomar el producto de los factores diferentes, utilizando la potencia más elevada que aparezca en cualquiera de los factores.

EJEMPLO 4 ■ Suma y resta de expresiones fraccionarias

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

(a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ (b) $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto $(x-1)(x+2)$, por lo que tenemos

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Escriba las fracciones utilizando el mínimo común denominador}$$

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Sume las fracciones}$$

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} \qquad \text{Combine términos en el numerador}$$

(b) El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$, por lo que tenemos

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \qquad \text{Combine las fracciones utilizando el MCD}$$

$$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)^2} \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{3 - x}{(x-1)(x+1)^2} \qquad \text{Combine términos en el numerador}$$

■

En el siguiente ejemplo simplificamos una **fracción compuesta**, que contiene una fracción tanto en el numerador como en el denominador.

EJEMPLO 5 ■ Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}}$

SOLUCIÓN 1 Combinamos los términos en el numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo para el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{x}{x-y}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$

SOLUCIÓN 2 Obtenemos el mínimo común denominador (MCD) de todas las fracciones dentro de la expresión, y entonces multiplicamos el numerador y el denominador por éste. En este ejemplo el MCD de todas las fracciones es xy. Por lo tanto

$$\frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x}{y} + 1}{1 - \dfrac{y}{x}} \cdot \frac{xy}{xy} \qquad \text{Multiplique el numerador y el denominador por } xy$$

$$= \frac{x^2 + xy}{xy - y^2} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)} \qquad \text{Factorice}$$

■

Los ejemplos restantes muestran situaciones que se presentan en cálculo y que requieren la habilidad de trabajar con expresiones fraccionarias.

EJEMPLO 6 ■ Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h}$

SOLUCIÓN Igual que en la primer solución del ejemplo 5, empezamos combinando las fracciones en el numerador, utilizando un denominador común.

$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h} &= \frac{\dfrac{a^2-(a+h)^2}{(a+h)^2a^2}}{h} && \text{Combine fracciones en el numerador}\\
&= \frac{a^2-(a+h)^2}{(a+h)^2a^2}\cdot\frac{1}{h} && \text{Propiedad 2 de las fracciones (invierta el divisor y multiplique)}\\
&= \frac{a^2-(a^2+2ah+h^2)}{(a+h)^2a^2}\cdot\frac{1}{h} && \text{Fórmula de producto 2}\\
&= \frac{-2ah-h^2}{h(a+h)^2a^2} && \text{Reste}\\
&= \frac{h(-2a-h)}{h(a+h)^2a^2} && \text{Factorice } h\\
&= \frac{2a+h}{(a+h)^2a^2} && \text{Propiedad 5 de las fracciones (cancelar factores comunes)}
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 7 ■ Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} &= \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2)-x^2]}{1+x^2}\\
&= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

SOLUCIÓN 2 Puesto que $(1+x^2)^{-1/2} = 1/(1+x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos simplificar todas las fracciones multiplicando el numerador y el denominador por $(1+x^2)^{1/2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} &= \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}\\
&= \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

■

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$ podemos racionalizar el denominador multiplicando el numerador y el denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto es útil dado que, mediante la fórmula de producto 1 de la sección 1.3, el producto del denominador y de su radical conjugado no contiene un radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

EJEMPLO 8 ■ Racionalización del denominador

Racionalice el denominador $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

SOLUCIÓN Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el radical conjugado de $1 + \sqrt{2}$ que es $1 - \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$ Multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado

Fórmula de producto 1
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula de producto 1

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$ ■

EJEMPLO 9 ■ Racionalización de un numerador

Racionalice el numerador $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

SOLUCIÓN Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h} + 2$, lo cual nos permite utilizar la fórmula de producto 1, y entonces los radicales desaparecen del numerador.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$ Multiplique el numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$ Fórmula de producto 1

$$= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$ Propiedad 5 de las fracciones (cancele factores comunes)

■

No cometamos el error de aplicar propiedades de multiplicación a la operación de suma. Muchos de los errores comunes en álgebra involucran hacer lo anterior. La tabla del ejemplo 4 de la sección anterior, enumera varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicar éstas a la adición.

Propiedad de multiplicación correcta	Error común con la suma
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geqslant 0)$	$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geqslant 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
$\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \cdot b}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \neq \dfrac{1}{a+b}$
$\dfrac{ab}{a} = b$	$\dfrac{a+b}{a} \neq b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \neq (a+b)^{-1}$

Para verificar que las fórmulas de la columna de la derecha están equivocadas, simplemente sustituya números en lugar de a y b y calcule cada uno de los términos. Por ejemplo, si en la cuarta propiedad hacemos $a = 2$ y $b = 2$, obtenemos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

en tanto que el derecho es

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Dado que $1 \neq \frac{1}{4}$, la fórmula enunciada está equivocada. Deberá convencerse de manera similar del error en cada una de las demás fórmulas.

1.4 EJERCICIOS

1-48 ■ Simplifique las expresiones.

1. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 6}$

2. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

3. $\dfrac{y - y^2}{y^2 - 1}$

4. $\dfrac{2y^2 - 9y - 18}{4y^2 + 16y + 15}$

5. $\dfrac{2x^3 - x^2 - 6x}{2x^2 - 7x + 6}$

6. $\dfrac{1 - x^2}{x^3 - 1}$

7. $\dfrac{t-3}{t^2+9} \cdot \dfrac{t+3}{t^2-9}$

8. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} \cdot \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x - 3}$

9. $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 3x + 2} \cdot \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 9}$

10. $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} \cdot \dfrac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - xy - 2y^2}$

11. $\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x - 15} \div \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x^2 - 7x + 3}$

12. $\dfrac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \div \dfrac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6}$

13. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2 + 2x + 1}}$

14. $\dfrac{\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}}{\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 2}}$

15. $\dfrac{x/y}{z}$

16. $\dfrac{x}{y/z}$

17. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

18. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

19. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

20. $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

21. $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

22. $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3}{(2x-3)^2}$

23. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

24. $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

25. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$

26. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

27. $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}$

28. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}$

29. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

30. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

31. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-x}$

32. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

33. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

34. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-1}$

35. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

36. $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

36. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

38. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

39. $\dfrac{\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}$

40. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a+b}{a}}$

41. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

42. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

43. $\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}$

44. $\dfrac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}$

45. $\dfrac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\dfrac{1-x}{2+x}}{h}$

46. $\dfrac{(x+h)^3-7(x+h)-(x^3-7x)}{h}$

47. $\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$

48. $\sqrt{1+\left(x^3-\dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

49-52 ▪ Simplifique la expresión.

49. $\dfrac{2(1+x)^{1/2}-x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

50. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}+x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

51. $\dfrac{3(1+x)^{1/3}-x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

52. $\dfrac{(7-3x)^{1/2}+\frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

53-56 ▪ Racionalice el denominador.

53. $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$

54. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

55. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

56. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

57-62 ▪ Racionalice el numerador.

57. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$

58. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

59. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$

60. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

61. $\sqrt{x^2+1}-x$

62. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

3-72 ■ Diga si la ecuación dada es verdadera para todos los vaores de las variables. (No tome en consideración ningún valor que aga el denominador igual a cero.)

3. $\dfrac{16+a}{16} = 1 + \dfrac{a}{16}$

64. $\dfrac{b}{b-c} = 1 - \dfrac{b}{c}$

5. $\dfrac{2}{4+x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x}$

66. $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{x}{y}$

7. $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{1}{1+y}$

68. $2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{2a}{2b}$

9. $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

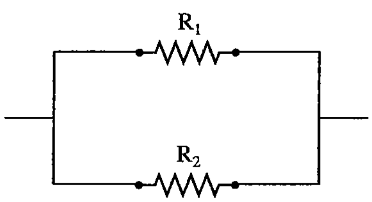
70. $\dfrac{1+x+x^2}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + x$

1. $\dfrac{x^2+1}{x^2+x-1} = \dfrac{1}{x-1}$

72. $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$

3. Si dos resistores eléctricos con resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo (véase la figura), entonces la resistencia total R está dada por

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$



(a) Simplifique la expresión para R.
(b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia total R?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

74. Comportamiento límite de una expresión racional La expresión racional

$$\frac{x^2-9}{x-3}$$

no está definida para $x = 3$. Complete las tablas y determine a qué valor se acerca la expresión conforme x se acerca más a 3. ¿Por qué esto es razonable? (Para ver por qué, factorice el numerador de la expresión y simplifique.)

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

75. ¿Esto es racionalización? En la expresión

$$\frac{2}{\sqrt{x}}$$

eliminaríamos el radical si eleváramos al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Esto es lo mismo que racionalizar el denominador?

1.5 ECUACIONES

Una ecuación es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Pero no es una ecuación muy interesante –simplemente expresa un hecho aritmético simple. La mayor parte de las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen **variables**, las cuales son símbolos (por lo general letras) que representan números. En las ecuaciones

$$(w-4)(w+4)=w^2-16 \qquad \text{y} \qquad 4x+7=19$$

las letras w y x son variables. La primera de estas ecuaciones es verdadera, independientemente del valor que represente la variable w. Esta ecuación es la fórmula de la "diferencia de cuadrados" de la sección 1.3. Es verdadera para todas las w, por lo que decimos que se trata de una **identidad**. La segunda ecuación *no es* verdadera para todos los valores de la variable x. Los valores de x que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman **soluciones** o **raíces** de la misma, y el proceso de determinar éstas se conoce como **resolución de la ecuación**.

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes**, si tienen las mismas soluciones. Para resolver una ecuación, intentamos determinar una que sea más simple y equivalente, y que tenga la variable sola en uno de los lados del signo "igual". A continuación se presentan las propiedades que utilizamos para resolver una ecuación. (En éstas, A, B y c representan cualquier expresión algebraica, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a".)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A=B \Leftrightarrow A+c=B+c$	Al sumar la misma cantidad a ambos lados, se obtiene una ecuación equivalente.
2. $A=B \Leftrightarrow cA=cB \quad (c \neq 0)$	Multiplicando ambos lados por una misma cantidad diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

Estas propiedades establecen que al resolver una ecuación, *efectúe la misma operación en ambos lados*. Por ejemplo, si decimos "sume –7", lo que queremos expresar es "*sume* –7 a cada lado de la ecuación".

Así es como utilizamos las propiedades de la igualdad para resolver $4x+7=19$:

$$4x+7+(-7)=19+(-7) \qquad \text{Sume } -7$$

$$4x=12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot 4x=\tfrac{1}{4}\cdot 12 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{4}$$

$$x=3 \qquad \text{Simplifique}$$

La solución es $x=3$. Para verificar esto, sustituimos $x=3$ y comprobamos que este valor hace verdadera la ecuación:

$$\boxed{x=3}$$
$$\downarrow$$
$$4(3)+7 \stackrel{?}{=} 19$$

$$19=19 \qquad \text{¡Correcto!}$$

ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones lineales

$4x - 5 = 3$

$2x = \frac{1}{2}x - 5$

Ecuaciones no lineales

$x^2 + 2x = 8$

$\sqrt{x} - \frac{3}{x} = 6x - 1$

El tipo más simple de ecuación es la **ecuación lineal**, o de primer grado. En ésta, cada uno de los términos es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable. Así, una ecuación lineal es equivalente a una ecuación de la forma $ax + b = 0$; a y b representan números reales con $a \neq 0$, y x es la incógnita que hay que determinar. La ecuación del siguiente ejemplo es lineal.

EJEMPLO 1 ■ Resolución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Ésta se resuelve transformándola a una ecuación equivalente que tenga de un lado los términos que incluyen a la variable x y del otro los valores constantes.

$$7x - 4 = 3x + 8$$

$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4 \qquad \text{Sume 4}$$

$$7x = 3x + 12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x \qquad \text{Reste } 3x$$

$$4x = 12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot 4x = \tfrac{1}{4} \cdot 12 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{4}$$

$$x = 3 \qquad \text{Simplifique}$$

Debido a que todas estas ecuaciones son equivalentes, la solución es 3. Para verificar la respuesta *revisamos el proceso anterior* (uno de los principios de resolución de problemas introducido en las páginas 122–124) sustituyendo $x = 3$ en la ecuación original.

$$7(3) - 4 \stackrel{?}{=} 3(3) + 8$$

$$17 = 17$$

La última igualdad es verdadera, por lo que $x = 3$ es la solución. ■

El término *álgebra* proviene del libro árabe del siglo IX *Hisâb al-Jabr w'al-Muqabala*, escrito por al-Khowarizmi. El título se refiere a la transposición y combinación de términos, dos procesos utilizados en la resolución de ecuaciones y en las traducciones latinas; este título fue abreviado como *Aljabr*, de donde surgió la palabra álgebra. Por otro lado, el nombre del autor se incorporó al español en el vocablo *algoritmo*.

Puesto que verificar la respuesta es muy importante, haremos esto en los ejemplos siguientes. En este procedimiento, LI significa "lado izquierdo" de la ecuación original y LD significa "lado derecho".

En el siguiente ejemplo resolveremos una ecuación que no parece lineal, pero que se simplifica a una lineal que es equivalente.

EJEMPLO 2 ■ Una ecuación que se reduce a una lineal

Resuelva la ecuación $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{2x-3}$

SOLUCIÓN Si $x \neq -1$ y $x \neq \frac{3}{2}$, entonces los denominadores de las fracciones de esta ecuación son distintos de cero, y podemos multiplicar cada lado de la misma por el mínimo común denominador que es $(x + 1)(2x - 3)$.

$$(x+1)(2x-3)\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x+1)(2x-3)\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right) \qquad \text{Multiplique por el MCD}$$

$$(2x-3)x = (x+1)(2x+1) \qquad \text{Simplifique}$$

$$2x^2 - 3x = 2x^2 + 3x + 1 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$-3x = 3x + 1 \qquad \text{Reste } 2x^2$$

$$-6x = 1 \qquad \text{Sustituya } 3x$$

$$x = -\frac{1}{6} \qquad \text{Divida por } -6$$

La solución es $-\frac{1}{6}$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -\frac{1}{6}$:

$$\text{LI} = \frac{-\frac{1}{6}}{\left(-\frac{1}{6}\right)+1} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{1}{5} \qquad \text{LD} = \frac{2\left(-\frac{1}{6}\right)+1}{2\left(-\frac{1}{6}\right)-3} = \frac{\frac{4}{6}}{-\frac{20}{6}} = -\frac{1}{5}$$

LI = LD ✓

EJEMPLO 3 ■ solución para una variable en función de otras

Resuelva la siguiente ecuación para la variable M.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Ésta es la Ley de la gravedad de Newton.

SOLUCIÓN Aunque esta ecuación involucra más de una variable, la resolvemos dejando a M de un lado y tratando a las demás variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del LD}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplifique}$$

La Solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$. ■

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = 0$, mientras que las cuadráticas son de segundo grado e incluyen un término adicional que es el cuadrado de la variable.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver utilizando factorización y la siguiente propiedad básica de los números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (u otra), entonces la resolvemos igualando a cero cada uno de los factores. **Este método se puede aplicar únicamente cuando el lado derecho de la ecuación es 0.**

EJEMPLO 4 ■ Resolución de una ecuación cuadrática mediante factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$

SOLUCIÓN Primero tenemos que reescribir la ecuación de manera que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Haga cada factor igual a 0}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Resuelva}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$. ■

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✓

$x = -8$

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✓

Una ecuación de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, y las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SIMPLE

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$

Euclides (circa 300 a.C.) enseñó en Alejandría. Su *Elementos* es el libro científico de mayor influencia en la historia. Durante 2,000 años en las escuelas fue la introducción obligada a la geometría, y por muchas generaciones se consideró la mejor manera de desarrollar el razonamiento lógico. Por ejemplo, Abraham Lincoln estudió los *Elementos* con la intención de aguzar su discernimiento. Se dice que en una ocasión el rey Ptolomeo le preguntó a Euclides si existía una manera más rápida de aprender geometría, y éste contestó que "para la geometría no existía camino real", dando a entender que las matemáticas están más allá de la riqueza y la posición social. Euclides fue respetado en vida y conocido con el título de "El Geómetra" o "El autor de los *Elementos*". La grandeza de los *Elementos* radica en el tratamiento preciso, lógico y sistemático de la geometría. Respecto a la igualdad, Euclides listó las reglas siguientes que denotó como "nociones comunes".

1. Cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.

2. Si iguales se agregan a iguales, las sumas son iguales.

3. Si se restan iguales de iguales, los resultados son iguales.

4. Cosas que coinciden con otra, son iguales.

5. El todo es mayor que la parte.

EJEMPLO 5 ■ Resolución de cuadráticas simples

Resuelva las siguientes ecuaciones (a) $x^2 = 5$ (b) $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) Al aplicar el principio del recuadro anterior, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

(b) Calculamos la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm\sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

Como vimos en el ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x + a)^2 =$ entonces podemos resolverla extrayendo la raíz de ambos lados. En una ecuación (esta forma, el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión l neal en x. Si una ecuación cuadrática no se puede factorizar fácilmente, entonc podemos resolverla utilizando la técnica de **completar el cuadrado**. Esto significa q sumamos una constante a una expresión, para convertirla en un cuadrado perfecto. P ejemplo, para hacer de $x^2 - 6x$ un cuadrado perfecto debemos sumar 9, ya que $x^2 -$ ($+ 9 = (x - 3)^2$. En general, a partir de la identidad

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

se deduce que para hacer de $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto, debemos sumar el cuadrac de la mitad del coeficiente de x. (Observe que esto es válido independientemente de q b sea positivo o negativo.)

CÓMO COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer de $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

EJEMPLO 6 ■ Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva las siguientes ecuaciones.

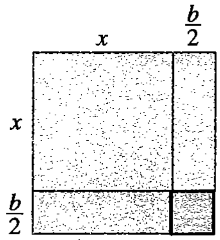
(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ (b) $3x^2 - 12x + 4 = 0$

Cómo completar el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Para "completar el cuadrado" agregue un pequeño cuadrado de área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.



SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$

$x^2 - 8x \quad = -13$	Reste 13
$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$	Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$
$(x-4)^2 = 3$	Cuadrado perfecto
$x - 4 = \pm\sqrt{3}$	Tome la raíz cuadrada
$x = 4 \pm \sqrt{3}$	Sume 4

(b) Después de restar 4 de ambos lados, debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) para poder completar el cuadrado.

$3x^2 - 12x + 4 = 0$	
$3x^2 - 12x \quad = -4$	Reste 4
$3(x^2 - 4x \quad) = -4$	Factorice el 3 del LI

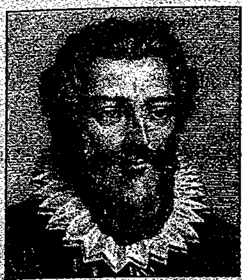
Ahora completamos el cuadrado sumando $(-2)^2 = 4$ dentro del paréntesis. Puesto que todo lo que está dentro se ha multiplicado por 3, lo que realmente estamos sumando es $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Por lo que también debemos sumar 12 al lado derecho.

$3(x^2 - 4x + 4) = -4 + 3 \cdot 4$	Complete el cuadrado
$3(x-2)^2 = 8$	Cuadrado perfecto
$(x-2)^2 = \frac{8}{3}$	Divida por 3
$x - 2 = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$	Obtenga la raíz cuadrada Racionalice el denominador
$x = 2 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$	Sume 2

■

Podemos utilizar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$. Primero dividimos cada lado de la ecuación entre a y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo así

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$



François Viète (1540–1603) fue un matemático francés conocido también por la forma latina de su nombre, Vieta. Introdujo un nuevo nivel de abstracción en el álgebra, al utilizar letras para denotar las cantidades *conocidas* de una ecuación. Antes del tiempo de Viète, cada ecuación tenía que resolverse en cada caso particular. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

tenían que resolverse por separado. La idea de Viète fue considerar las ecuaciones cuadráticas de manera general, al escribir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son cantidades conocidas. Gracias a esto es posible escribir una *fórmula* (en este caso la fórmula cuadrática) en términos de a, b y c, la cual se puede utilizar para resolver cualquier ecuación de este tipo.

Ahora completamos el cuadrado sumando $[b/(2a)]^2$ en ambos lados:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Obtenga la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

Ésta es la fórmula cuadrática.

FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se puede utilizar la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones de los ejemplos 4, 5, y 6. Debe efectuar los detalles de estos cálculos.

EJEMPLO 7 ■ Uso de la fórmula cuadrática

Determine todas las soluciones de cada ecuación

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ (b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ (c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(a) Aplicamos la fórmula cuadrática con $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$, de manera que

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean valores aproximados, utilizamos la calculadora y obtenemos

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Al sustituir en la fórmula cuadrática $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$, obtenemos

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación sólo tiene una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

Otro método

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = 0$$
$$2x + 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2}$$

(c) Al introducir en la fórmula cuadrática $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$, el resultado es

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Debido a que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$. No está definida en el sistema de los números reales. La ecuación no tiene solución real. ■

En la sección 3.3 estudiaremos el sistema de los números complejos, en el cual la raíz cuadrada de los números negativos si está definida. En este sistema la ecuación del ejemplo 7(c) sí tiene soluciones.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece dentro del signo de la raíz cuadrada en la fórmula cuadrática, se conoce como el **discriminante** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y se denota con el símbolo D. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida, y por lo tanto la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el ejemplo 7(c). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el ejemplo 7(b). Finalmente, si $D > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el ejemplo 7(a).

El recuadro que sigue resume lo que hemos señalado en relación con el discriminante.

DISCRIMINANTE

El discriminante de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 8 ■ Uso del discriminante

Utilice el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación

(a) $x^2 + 2x + 8 = 0$ (b) $3x^2 - 5x + \frac{3}{2} = 0$

SOLUCIÓN

(a) El discriminante es

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0$$

Por lo tanto, esta ecuación no tiene solución real.

(b) El discriminantes es $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 25 - 18 = 7 > 0$, y la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. ■

OTRAS ECUACIONES

Consideraremos ahora otros tipos de ecuaciones, incluyendo aquellas que involucran potencias o radicales de mayor orden.

EJEMPLO 9 ■ Solución de ecuaciones raíces n-ésimas.

Determine las soluciones reales de las ecuaciones siguientes.

(a) $x^3 = -8$ (b) $16x^4 = 81$

SOLUCIÓN

(a) Puesto que todo número real tiene exactamente una raíz cúbica real, podemos resolver esta ecuación tomando la raíz cúbica de ambos lados

$$(x^3)^{1/3} = (-8)^{1/3}$$
$$x = -2$$

(b) Aquí debemos recordar que si n es par, entonces todo número real positivo tiene *dos* raíces n–esimas reales, una positiva y otra negativa.

$$x^4 = \tfrac{81}{16} \qquad \text{Divida por 16}$$
$$(x^4)^{1/4} = \pm\left(\tfrac{81}{16}\right)^{1/4} \qquad \text{Tome la raíz cuarta}$$
$$x = \pm\tfrac{3}{2}$$

■

Algunas ecuaciones que a primera vista no parecen cuadráticas, se pueden convertir a esta forma efectuando simples operaciones algebraicas como multiplicar ambos lados por un denominador común, o elevar al cuadrado. Debe tenerse el cuidado de evitar *soluciones extrañas* que pudieran introducirse al manipular las ecuaciones.

EJEMPLO 10 ■ Cómo tratar soluciones extrañas

Resuelva cada ecuación.

(a) $x + 3 = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{x - 3}$ (b) $x = 1 - \sqrt{2 - \dfrac{x}{2}}$

SOLUCIÓN

(a) Podemos multiplicar ambos lados por $x - 3$ para eliminar el denominador, siempre y cuando $x \neq 3$.

$$(x+3)(x-3) = \left(\frac{-2x^2 + 7x - 3}{x - 3}\right)(x - 3)$$

$$x^2 - 9 = -2x^2 + 7x - 3 \qquad \text{Desarrolle y cancele}$$
$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \qquad \text{Pase todos los términos a LI y simplifique}$$
$$(3x + 2)(x - 3) = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$x = -\tfrac{2}{3} \quad \text{o} \quad x = 3 \qquad \text{Haga cada factor igual a 0}$$

Así, $x = -\frac{2}{3}$, o bien $x = 3$. Sin embargo, $x = 3$ no satisface la ecuación original (la división por 0 es imposible) por lo que la única solución es $x = -\frac{2}{3}$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{2}{3}$

$$\text{LI} = \left(-\tfrac{2}{3}\right) + 3 = \tfrac{7}{3}$$

$$\text{LD} = \frac{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 7\left(-\frac{2}{3}\right) - 3}{-\frac{2}{3} - 3} = \frac{-\frac{8}{9} - \frac{14}{3} - 3}{-\frac{11}{3}} = \frac{\frac{77}{9}}{\frac{11}{3}} = \frac{7}{3}$$

LI = LD ✓

$x = 3$;

$$\text{LI} = 3 + 3 = 6$$

$$\text{LD} = \frac{-2(3)^2 + 7(3) - 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

LD no está definido, por lo que $x = 3$ no es una solución ✗

(b) Para eliminar la raíz cuadrada, primero la dejamos sola en un lado del signo de igual.

$$x - 1 = -\sqrt{2 - \frac{x}{2}} \qquad \text{Reste 1}$$

$$(x-1)^2 = 2 - \frac{x}{2} \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz cuadrada}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2 - \frac{x}{2} \qquad \text{Desarrolle LI}$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 4 - x \qquad \text{Multiplique por 2 para eliminar el denominador}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad \text{Pase todos los términos al LI}$$

$$(x-2)(2x+1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

Al hacer cada factor igual a 0 obtenemos $x = 2$ y $x = -\frac{1}{2}$ como soluciones posibles. Si sustituimos éstas en la ecuación original (véase *verifique sus respuestas*) concluimos que $x = -\frac{1}{2}$ es una solución, y que $x = 2$ no lo es. La única solución es

$$x = -\tfrac{1}{2}$$ ■

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{2}$

$\text{LI} = -\frac{1}{2}$

$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - \frac{(-\frac{1}{2})}{2}}$

$= 1 - \sqrt{\frac{9}{4}} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$\text{LI} = \text{LD}$ ✓

$x = 2$;

$\text{LI} = 2$

$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - \frac{2}{2}}$

$= 1 - 1 = 0$

$\text{LI} \neq \text{LD}$, por lo que $x = 2$ no es una solución ✗

El motivo por el que con frecuencia se introducen soluciones extrañas al elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación, es que la operación puede convertir una igualdad falsa en verdadera. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Así, la ecuación al cuadrado puede ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original, por esto **siempre debemos verificar nuestras respuestas para asegurarnos de que cada una satisface la ecuación original.**

Como se muestra en el ejemplo siguiente, en algunos casos se pueden convertir ecuaciones de cuarto grado (o de grado superior) en cuadráticas, efectuando substituciones algebraicas.

EJEMPLO 11 ■ Una ecuación de tipo cuadrático

Determine las soluciones reales de $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$

SOLUCIÓN Si hacemos que $w = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática en la nueva variable w.

$$x^4 - 2x^2 - 2 = (x^2)^2 - 2x^2 - 2$$

$$= w^2 - 2w - 2 = 0 \qquad \text{Haga } w = x^2$$

Al aplicar la fórmula cuadrática tenemos

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Puesto que $x^2 = w$, el resultado es $x = \pm\sqrt{w}$. Las posibles soluciones son $\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{3}}$. Luego de observar que en el sistema de los números reales no se puede obtener la raíz cuadrada de un número negativo como $1 - \sqrt{3}$, se concluye que

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

son las únicas soluciones reales de la ecuación original. ■

EJEMPLO 12 ■ Resolución de una ecuación que involucra exponentes fraccionarios

Determine todas las soluciones de la ecuación $x^{5/6} + x^{2/3} = 2x^{1/2}$.

SOLUCIÓN

$x^{1/6} = w$
$x^{1/3} = w^2$
$x^{1/2} = w^3$

$$x^{5/6} + x^{2/3} - 2x^{1/2} = 0 \qquad \text{Pase todos los términos al LI}$$

$$x^{1/2}(x^{1/3} + x^{1/6} - 2) = 0 \qquad \text{Factorice } x^{1/2} \text{ (potencia más baja de } x\text{)}$$

$$w^3(w^2 + w - 2) = 0 \qquad \text{Sustituya } w = x^{1/6}$$

$$w^3(w - 1)(w + 2) = 0 \qquad \text{Factorice la expresión cuadrática}$$

Por lo tanto $w = 0$ o $w = 1$ o $w = -2$

$x^{1/6} = 0$ $\quad$ $x^{1/6} = 1$ $\quad$ $x^{1/6} = -2$

$x = 0$ $\quad$ $x = 1^6 = 1$ $\quad$ $x = (-2)^6 = 64$

Al verificar estas respuestas, concluimos que $x = 0$ y $x = 1$ son soluciones, pero $x = 64$ no lo es (véase *verifique sus respuestas*). Por tanto las únicas soluciones son 0 y 1.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:	$x = 1$:	$x = 64$:
$\text{LI} = 0^{5/6} + 0^{2/3}$	$\text{LI} = 1^{5/6} + 1^{2/3}$	$\text{LI} = 64^{5/6} + 64^{2/3}$
$= 0$	$= 2$	$= 32 + 16 = 48$
$\text{LD} = 2 \cdot 0^{1/2}$	$\text{LD} = 2 \cdot 1^{1/2}$	$\text{LD} = 2 \cdot 64^{1/2}$
$= 0$	$= 2$	$= 2 \cdot 8 = 16$
LI = LD ✓	LI = LD ✓	LI = LD ✗

■

Dividir ambos lados de la ecuación original del ejemplo 12 entre $x^{1/2}$, es un error porque al hacerlo se pierde la solución $x = 0$. **Nunca divida ambos lados por una expresión que contenga la variable (a menos que sepa que la expresión no puede ser igual a 0).**

EJEMPLO 13 ■ Una ecuación de valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{o} \quad 2x - 5 = -3$$

$$2x = 8 \qquad\qquad 2x = 2$$

$$x = 4 \qquad\qquad x = 1$$

Las soluciones son $x = 1, x = 4$. ■

1.5 EJERCICIOS

1-4 ■ Determine si los valores dados de las variables son solución de la ecuación.

1. $2x - 3 = x + 1$
(a) $x = 4$ (b) $x = \frac{3}{2}$

2. $4(x - 1) - (2 - x) = 5(x - 2) + 4$
(a) $x = -3$ (b) $x = 0$

3. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 3} = \dfrac{1}{6}$
(a) $x = -3$ (b) $x = 3$

4. $\sqrt{x^2 - 7} = x - 1$
(a) $x = 4$ (b) $x = -4$

5-28 ■ Resuelva la ecuación

5. $3x - 5 = 7$

6. $4x + 7 = 9x - 13$

7. $-7w = 15 - 2w$

8. $5t - 13 = 12 - 5t$

9. $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

10. $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$

11. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

12. $5(x + 3) + 9 = -2(x - 2) - 1$

13. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$

14. $\dfrac{2}{t + 6} = \dfrac{3}{t - 1}$

15. $\dfrac{1}{t - 1} + \dfrac{t}{3t - 2} = \dfrac{1}{3}$

16. $r - 2[1 - 3(2r + 4)] = 61$

17. $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$

18. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{9}$

19. $\dfrac{2}{x} - 5 = \dfrac{6}{x} + 4$

20. $\dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{35}{x^2 - 1}$

21. $\dfrac{2x - 7}{2x + 4} = \dfrac{2}{3}$

22. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2z} - \dfrac{1}{5z} = \dfrac{10}{z + 1}$

23. $\sqrt{x - 4} = \sqrt{2x}$

24. $\sqrt{2x + 8} = \sqrt{6x}$

25. $\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{5}{x^2 - 9} = \dfrac{2}{x - 3}$

26. $x^2 = 49$

27. $x^2 = 18$

28. $x^2 - 24 = 0$

29-32 ■ Obtenga la solución de la ecuación mediante factorización

29. $x^2 - x - 6 = 0$

30. $x^2 + 2x = 8$

31. $x^2 + 4 = 4x$

32. $2y^2 + 7y + 3 = 0$

33-36 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado

33. $x^2 - 4x + 2 = 0$

34. $x^2 - 6x - 9 = 0$

35. $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$

36. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

37-74 ■ Determine las soluciones reales de la ecuación

37. $x^2 - 2x - 8 = 0$

38. $2x^2 + x - 3 = 0$

39. $x^2 + 12x - 27 = 0$

40. $8x^2 - 6x - 9 = 0$

41. $3x^2 + 6x - 5 = 0$

42. $x^2 - 6x + 1 = 0$

43. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

44. $0 = x^2 - 4x + 1$

45. $3 + 5z + z^2 = 0$

46. $w^2 = 3(w - 1)$

47. $x^2 - \sqrt{5}\,x + 1 = 0$

48. $\sqrt{6}\,x^2 + 2x - \sqrt{\frac{3}{2}} = 0$

49. $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$

50. $1 + \dfrac{2x}{(x + 3)(x + 4)} = \dfrac{2}{x + 3} + \dfrac{4}{x + 4}$

51. $\dfrac{x + 5}{x - 2} = \dfrac{5}{x + 2} + \dfrac{28}{x^2 - 4}$

52. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

53. $x^4 - 16 = 0$

54. $64x^6 = 27$

55. $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$

56. $(x - 2)^5 - 9(x - 2)^3 = 0$

57. $\sqrt{2x + 1} + 1 = x$

58. $x - \sqrt{9 - 3x} = 0$

59. $\sqrt{5 - x} + 1 = x - 2$

60. $2x + \sqrt{x + 1} = 8$

61. $\sqrt{\sqrt{x - 5} + x} = 5$

62. $(x+5)^2 - 3(x+5) - 10 = 0$

63. $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$

64. $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

65. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

66. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

67. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

68. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

69. $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{x} = 0$

70. $4x^{-4} - 16x^{-2} + 4 = 0$

71. $|2x| = 3$

72. $|3x + 5| = 1$

73. $|x - 4| = 0.01$

74. $|x - 6| = -1$

75-78 ■ Obtenga la solución o soluciones correctas a dos lugares decimales

75. $2.15x - 4.63 = x + 1.19$

76. $3.16(x + 4.63) = 4.19(x - 7.24)$

77. $x^2 - 2.45x + 1.50 = 0$

78. $x^2 - 2.45x + 1.51 = 0$

79-90 ■ Resuelva la ecuación para la variable indicada

79. $PV = nRT$; para R

80. $P = 2l + 2w$; para w

81. $A = 2lw + 2wh + 2lh$; para h

82. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; para R_1

83. $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 2$; para x

84. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; para x

85. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; para r

86. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; para r

87. $a^2 + b^2 = c^2$; para b

88. $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$; para n

89. $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; para i

90. $\dfrac{1}{s+a} + \dfrac{1}{s+b} = \dfrac{1}{c}$; para s

91-94 ■ Utilice el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación

91. $x^2 - 6x + 1 = 0$

92. $x^2 = 6x - 9$

93. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

94. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

95-96 ■ Determine los valores de k que hacen que la ecuación dada tenga una solución.

95. $4x^2 + kx + 25 = 0$

96. $kx^2 + 36x + k = 0$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

97. **Encuentre el error** Determine el error cometido en la solución siguiente, y resuelva correctamente.

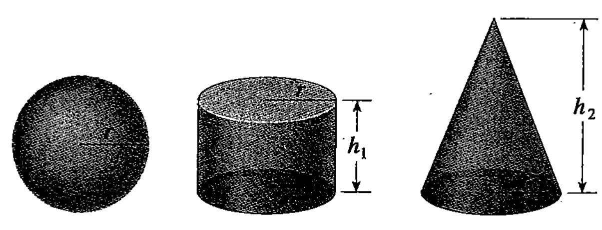
$$x^2 + 6x + 5 = x^2 - 1$$

$$(x+5)(x+1) = (x-1)(x+1) \qquad \text{Factorice}$$

$$x + 5 = x - 1 \qquad \text{Divida por } x + 1$$

$$5 \stackrel{?}{=} -1 \qquad \text{Reste } x$$

98. **Volumen de los sólidos** La esfera, el cilindro y el cono que se muestran aquí, tienen el mismo radio r y volumen V. Exprese las alturas del cilindro y del cono en función de r. (Utilice las fórmulas dadas en la primera de forros de este libro.)



99. **Tipos de ecuaciones** Mediante la variable x, plantee un ejemplo de cada uno de los siguientes tipos de ecuaciones: una identidad, una lineal, una cuadrática y una que no tenga solución. Describa el conjunto de soluciones de cada ecuación.

1.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES

El álgebra es muy útil, porque muchos problemas de las ciencias, la economía, las finanzas, la medicina y de otros campos, se pueden plantear en términos algebraicos. En esta sección estudiaremos algunos principios de resolución de problemas, que son útiles para abordar problemas aplicados.

EJEMPLO 1 ■ Interés sobre una inversión

Mary hereda $100,000 y los invierte en dos certificados de depósito. Un certificado paga 6% y el otro $4\frac{1}{2}$% anual de interés simple. Si el interés total es de $5,025 al año, ¿cuánto dinero está invertido a cada una de las tasas?

SOLUCIÓN La clave para resolver cualquier problema aplicado es traducir la información dada al lenguaje algebraico, y para ello primero necesitamos identificar cuáles son las variables. Generalmente esto se puede hacer leyendo cuidadosamente la pregunta que se pide responder en el problema. Aquí se trata de determinar cuánto dinero está invertido a cada tasa. Por esto hacemos que

Identifique la variable

$$x = \text{cantidad invertida al } 6\%$$

Exprese todas las incógnitas en términos de la variable

El resto del dinero está invertido al $4\frac{1}{2}$%, por lo que

$$100{,}000 - x = \text{cantidad invertida al } 4\tfrac{1}{2}\%$$

Ahora planteamos en forma de ecuación el hecho de que el interés anual total es de $5,025

Relacione las cantidades

$$(\text{interés al } 6\%) + (\text{interés al } 4\tfrac{1}{2}\%) = 5{,}025$$

Como x dólares están invertidos a 6%, el interés anual pagado por este certificado es de 6% de x, es decir $0.06x$. Análogamente, el obtenido del certificado al $4\frac{1}{2}$% será de $0.045\,(100{,}000 - x)$, y la ecuación en términos de x es

Establezca una ecuación

$$0.06x + 0.045(100{,}000 - x) = 5{,}025$$

Resuelva

Ahora resolvemos para de x:

$$0.06x + 4{,}500 - 0.045x = 5{,}025 \qquad \text{Multiplique}$$

$$0.015x + 4{,}500 = 5{,}025 \qquad \text{Reduzca los términos en } x$$

$$0.015x = 525 \qquad \text{Reste } 4{,}500$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35{,}000$$

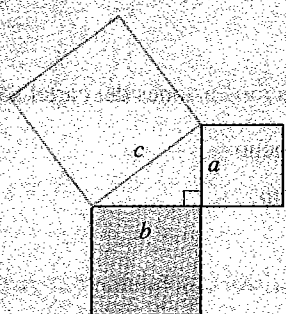
Mary ha invertido $35,000 al 6% y los restantes $65,000 a $4\frac{1}{2}$%. ■

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Interés total = 6% de $35,000
+
$4\frac{1}{2}$% de $65,000
= $2,100 + $2,925
= $5,025 ✓

Pitágoras (aprox. 580–500 a.C.) fundó en Crotona, al sur de Italia, una escuela donde se estudiaba aritmética, música, geometría y astronomía. Los pitagóricos, como eran conocidos, fueron una sociedad secreta con reglas y ritos de iniciación muy peculiares. No anotaban nada, y no debían revelar a nadie lo que aprendían del maestro. Aunque la ley prohibía a las mujeres que asistieran a las reuniones públicas, Pitágoras permitía que ingresaran a su escuela y su estudiante más famosa fue Teano, quien posteriormente se convirtió en su esposa.

Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas eran los fundamentos de todas las cosas". Su lema era "todo es número", refiriéndose con ello a los números *enteros*. La contribución más extraordinaria de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre: en un triángulo rectángulo el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los otros dos lados.



$c^2 = a^2 + b^2$

Ahora estableceremos los principios de resolución de problemas dados en las páginas 122–124, como un proceso de traducir un "problema dado en palabras" a una expresión en términos algebraicos. Las siguientes pautas de acción nos deben ayudar a establecer la ecuación que exprese el enunciado de un problema. Estas recomendaciones se dan al margen de los ejemplos de esta sección.

REGLAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DADOS EN PALABRAS

1. IDENTIFIQUE LA VARIABLE. Reconozca la cantidad que se pide determinar. Generalmente se identifica mediante una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final del problema. **Introduzca una notación** para la variable (denótela con x o con cualquier otra letra). Asegúrese de escribir claramente lo que representa la variable.

2. EXPRESE TODAS LAS INCÓGNITAS EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE. Lea de nuevo cada una de las frases del problema, y exprese todas las cantidades mencionadas mediante la variable definida. Para organizar esta información, algunas veces resulta útil **dibujar un diagrama** o **elaborar una tabla** (véanse los ejemplos 2 y 6 de esta sección).

3. RELACIONE LAS CANTIDADES. Identifique la condición del problema que relaciona dos o más de las expresiones establecidas en el paso anterior. Un enunciado que dice que una cantidad "es igual a" o "es lo mismo que" otra, generalmente señala el tipo de relación que estamos buscando.

4. ESTABLEZCA UNA ECUACIÓN. Plantee una ecuación que exprese la condición del problema identificada en el paso 3. Aquí necesitará una fórmula para obtener la expresión algebraica. (Como en el caso del ejemplo 1 donde fue necesario que supiéramos que *interés* = *tasa* × *principal* para establecer la ecuación.)

5. RESUELVA EL PROBLEMA Y VERIFIQUE SU RESPUESTA. Resuelva la ecuación, verifique que su solución satisface el problema original, y exprese la respuesta en la forma de un enunciado, que responda a la pregunta planteada en el problema.

EJEMPLO 2 ■ Dimensiones de un cartel

Un cartel tiene impresa un área rectangular de 100 por 140 centímetros, enmarcada con una banda de ancho constante. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el del área impresa. ¿Cuál es el ancho de la banda, y cuáles son las dimensiones del cartel?

SOLUCIÓN En un problema como éste que está relacionado con la geometría, es esencial dibujar un diagrama como el que se muestra en la figura 1 de la página 60.

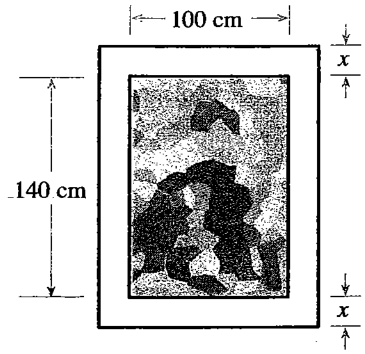


FIGURA 1

Identifique la variable

Sea

$$x = \text{ancho de la banda}$$

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

A partir de la figura vemos que el cartel tiene $(100 + 2x)$ cm por $(140 + 2x)$ cm, por lo que su perímetro es $2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$, y el del área impresa es $2(100) + 2(140) = 480$ cm. Nos dicen que

Relacione las cantidades

$$(\text{Perímetro del cartel}) = \tfrac{3}{2} \times (\text{Perímetro de la parte impresa})$$

Por lo que

Establezca una ecuación

$$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x) = \tfrac{3}{2} \cdot 480$$

Resuelva

$$480 + 8x = 720 \qquad \text{Elimine paréntesis y reduzca términos semejantes en el LI}$$

$$8x = 240 \qquad \text{Reste 480}$$

$$x = 30 \qquad \text{Divida por 8}$$

La banda tiene 30 centímetros de ancho, por lo que las dimensiones del cartel son

$$100 + 30 + 30 = 160 \text{ de ancho}$$

por $$140 + 30 + 30 = 200 \text{ de alto}$$ ■

EJEMPLO 3 ■ Determinación de la altura de un edificio, utilizando triángulos semejantes

Una persona de 6 pies de altura desea calcular la altura de cierto edificio de cuatro pisos. Mide la sombra del edificio y determina que tiene 28 pies de largo, mientras que su propia sombra es de $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Identifique la variable

SOLUCIÓN Primero establezcamos que h representa la altura del edificio. Para relacionar los lados correspondientes podemos utilizar el hecho de que los triángulos de la figura 2 son semejantes. Puesto que las razones de los lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, obtenemos la ecuación

Relacione las cantidades

Establezca una ecuación

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

Resuelva

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48$$

Así, el edificio tiene 48 pies de altura.

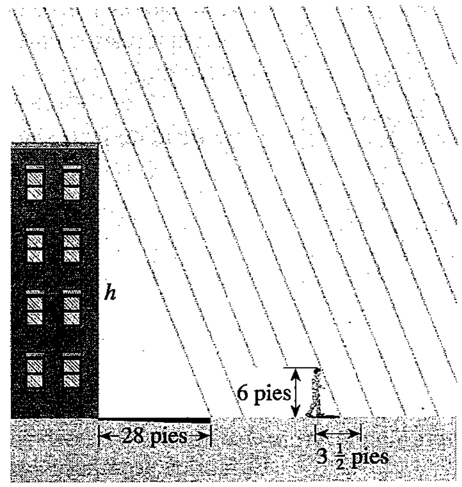
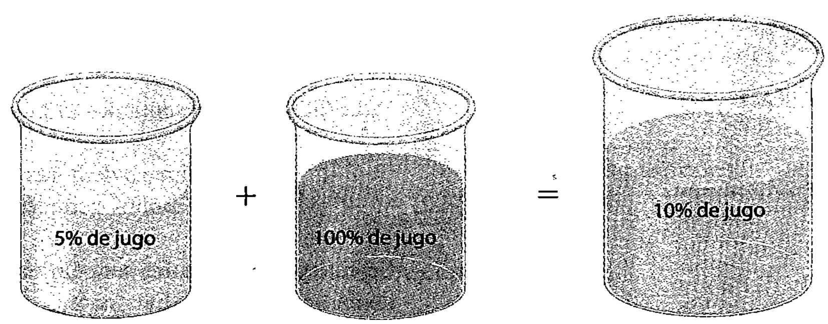


FIGURA 2

EJEMPLO 4 ■ Mezclas y concentraciones

Un fabricante de refrescos produce uno de naranja que es anunciado como de "sabor natural" aunque sólo contiene 5% de jugo. Una nueva reglamentación gubernamental estipula que para que una bebida se anuncie como "natural" deberá contener por lo menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja debe agregar el fabricante a 900 galones de refresco de naranja, para cumplir con la nueva reglamentación?

SOLUCIÓN En cualquier problema de este tipo —en el que dos sustancias diferentes deben mezclarse— es útil usar un diagrama para establecer la ecuación necesaria (véase al figura 3)



Volumen	900 galones	x galones	$900 + x$ galones
Cantidad de jugo de naranja	5% de 900 galones = 45 galones	100% de x galones = x galones	10% de $900 + x$ galones = $0.1(900 + x)$ galones

FIGURA 3

Identifique la variable

Sea x la cantidad (en galones) de jugo que debe agregarse. Entonces se obtendrán $900 + x$ galones de refresco de naranja con 10% de jugo natural. El aspecto clave para

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

convertir la información de la figura en una ecuación, es observar que la cantidad total de jugo en ambos lados del signo = es el mismo. El jugo de naranja en el primer recipiente es 5% de 900 galones, es decir 45 galones, mientras que el segundo contiene x galones y el tercero $0.1(900 + x)$ galones.

Igualando las cantidades totales de jugo antes y después de la mezcla, obtenemos la ecuación

Relacione las cantidades

cantidad de jugo antes de la mezcla = cantidad de jugo después de la mezcla

Establezca una ecuación

$$45 + x = 0.1(900 + x) \qquad \text{De la figura 3}$$

Resuelva

$$45 + x = 90 + 0.1x \qquad \text{Multiplique}$$

$$0.9x = 45 \qquad \text{Reste } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \qquad \text{Divida por } 0.9$$

El fabricante deberá agregar 50 galones de jugo al refresco.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Cantidad de jugo antes de la mezcla = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo

= 45 galones + 50 galones = 95 galones

Cantidad de jugo después de la mezcla = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✓ ■

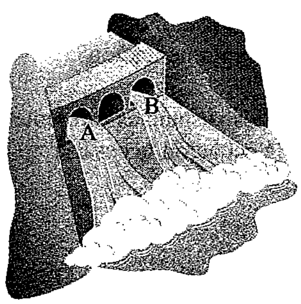


FIGURA 4

EJEMPLO 5 ■ Tiempo necesario para hacer un trabajo

Debido a que se pronostica una fuerte lluvia, el nivel del agua en una presa debe ser reducido en 1 pie. Al abrir el vertedero A se reduce al nivel necesario en 4 horas, mientras que con el vertedero B más pequeño se hace en 6 horas. ¿Cuánto tomará reducir el nivel del agua en 1 pie si se abren ambos?

Identifique la variable

SOLUCIÓN Representamos el número que estamos buscando por una x.

x = número de horas que toma reducir el nivel del agua en un pie si ambos vertederos están abiertos.

En este problema no es sencillo obtener una ecuación que relacione a la x con las demás cantidades. Obviamente x no es simplemente $4 + 6$, ya que esto significaría que ambos vertederos reducirían el nivel del agua en más tiempo del que lo haría cada uno. En lugar de esto, *determinemos la fracción de trabajo que puede efectuar cada uno en una hora*.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

A reduce el nivel en un $\frac{1}{4}$ de pie en 1 hora

B reduce el nivel en $\frac{1}{6}$ de pie en 1 hora

Ambos reducen el nivel en $\dfrac{1}{x}$ de pie en 1 hora

Por lo tanto, obtenemos la ecuación

Relacione las cantidades

(fracción realizada por A) + (fracción realizada por B) = (fracción realizada por ambos)

Establezca una ecuación

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

Resuelva

$$3x + 2x = 12 \quad \text{Multiplique por el mínimo común denominador, } 12x$$

$$5x = 12 \quad \text{Sume}$$

$$x = \frac{12}{5} \quad \text{Divida por 5}$$

Tomará $2\frac{2}{5}$ de hora, es decir 2 horas 24 minutos, reducir el nivel del agua en un pie si ambos vertederos están abiertos. ■

El siguiente ejemplo está relacionado con la distancia, la rapidez y el tiempo. La fórmula que hay que tener presente es

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$

donde la rapidez de un objeto en movimiento es constante o bien un promedio. Por ejemplo, al conducir a 60 millas por hora durante 4 horas, recorrerá una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

EJEMPLO 6 ■ Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4,200 kilómetros. La rapidez del viaje de regreso fue de 100 kilómetros por hora mayor que la de ida. Si el total del viaje tomó 13 horas, ¿cuál fue la rapidez de Nueva York a Los Ángeles?

SOLUCIÓN

Identifique la variable

Sea s = rapidez de Nueva York a Los Ángeles

Entonces $s + 100$ = rapidez de Los Ángeles a Nueva York

En problemas relacionados con movimiento, es muy útil organizar la información en una tabla, como se muestra en la página 64. Primero registramos los datos de la columna "distancia", ya que sabemos que las ciudades están separadas 4,200 kilómetros. Después llenamos la columna "rapidez", puesto que hemos expresado ambas en términos de la variable s. Finalmente, calculamos los valores para la columna "tiempo", utilizando

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

	Distancia (kilómetros)	Rapidez (kilómetros/hora)	Tiempo (horas)
Nueva York a Los Ángeles	4,200	s	$\frac{42,00}{s}$
Los Ángeles a Nueva York	4,200	$s + 100$	$\frac{42,00}{s + 100}$

Relacione las cantidades

El recorrido total tomó 13 horas, por lo que tenemos la ecuación

Establezca una ecuación

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

Al multiplicar por el común denominador, $s(s + 100)$, obtenemos

$$4200(s + 100) + 4200s = 13s(s + 100)$$

$$8400s + 420,000 = 13s^2 + 1300s$$

$$0 = 13s^2 - 7100s - 420,000$$

Aunque esta ecuación se puede factorizar, con números tan grandes lo más fácil es utilizar la fórmula cuadrática y una calculadora.

Resuelva

$$s = \frac{7100 \pm \sqrt{(7100)^2 - 4(13)(-420,000)}}{2(13)}$$

$$= \frac{7100 \pm 8500}{26}$$

$$s = 600 \qquad \text{o} \qquad s = \frac{-700}{13} \approx -53.8$$

Como s representa la rapidez, descartamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles fue de 600 kilómetros/hora. ■

EJEMPLO 7 ■ Trayectoria de un proyectil

Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba a una rapidez inicial de v_0 pies/segundo alcanzará una altura de h pies después de t segundos. Aquí h y t están relacionados mediante la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

(Esta fórmula se obtiene en los cursos elementales de física, y depende del hecho de que cerca de la superficie de la tierra la aceleración debida a la gravedad es constante. No se considera el efecto de la resistencia del aire.)

Suponga que una bala se dispara verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial de 800 pies/segundo. Su trayectoria se muestra en la figura 5.

(a) ¿En qué tiempo estará de regreso en tierra?

(b) ¿Cuánto tarda en llegar a una altura de 6,400 pies?

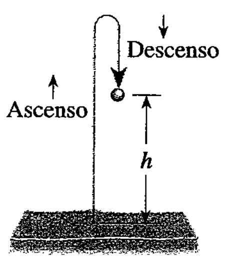
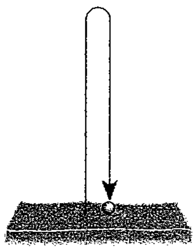


FIGURA 5

(c) ¿Qué tiempo le toma alcanzar una altura de 2 millas?
(d) ¿A qué altura máxima llega la bala?

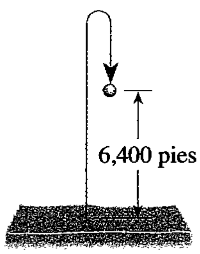
SOLUCIÓN Puesto que la rapidez inicial en este caso es $v_0 = 800$ pies/segundo, la fórmula es $h = -16t^2 + 800t$.



(a) El nivel de tierra corresponde a $h = 0$, por lo que debemos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t$$
$$0 = -16t(t - 50)$$

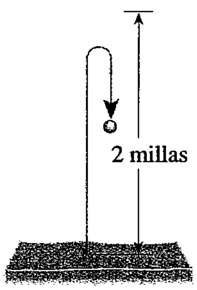
Por tanto, $t = 0$ o $t = 50$. Esto significa que la bala inicia su viaje en ($t = 0$) y regresa a tierra después de 50 segundos.



(b) Haciendo $h = 6{,}400$ obtenemos la ecuación

$$
\begin{aligned}
6{,}400 &= -16t^2 + 800t \\
16t^2 - 800t + 6{,}400 &= 0 \\
t^2 - 50t + 400 &= 0 && \text{Divida por 16} \\
(t - 10)(t - 40) &= 0 && \text{Factorice} \\
t = 10 \quad &\text{o} \quad t = 40
\end{aligned}
$$

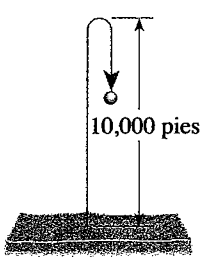
La bala alcanza los 6,400 pies después de 10 segundos (en su ascenso) y de nuevo después de 40 segundos (en su descenso a tierra).



(c) Dos millas equivalen a $2 \times 5{,}280 = 10{,}560$ pies

$$
\begin{aligned}
10{,}560 &= -16t^2 + 800t \\
16t^2 - 800t + 10{,}560 &= 0 \\
t^2 - 50t + 660 &= 0 && \text{Divida por 16}
\end{aligned}
$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$. Por lo tanto esta ecuación no tiene solución real. La bala nunca alcanza una altura de 2 millas.



(d) La bala alcanza cada altura dos veces, una en su ascenso y otra en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que sólo se alcanza una vez. Esto significa que para el mayor valor de h, la ecuación

$$h = -16t^2 + 800t$$

o

$$16t^2 - 800t + h = 0$$

sólo tiene una solución para t. A su vez esto significa que el discriminante de la ecuación es cero, por lo que

$$
\begin{aligned}
D = (-800)^2 - 4(16)h &= 0 \\
640{,}000 - 64h &= 0 \\
h &= 10{,}000
\end{aligned}
$$

La altura máxima alcanzada es de 10,000 pies. ■

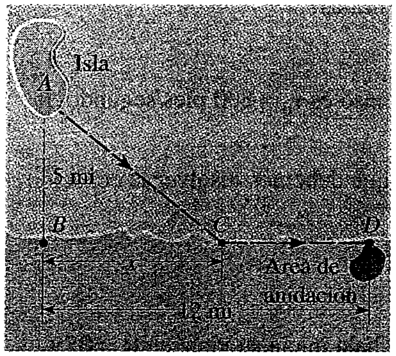


FIGURA 6

EJEMPLO 8 ■ Energía consumida por un pájaro en vuelo.

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de pájaros tienden a evitar volar sobre grandes extensiones de agua durante el día, porque durante estas horas el aire generalmente se eleva sobre tierra y cae sobre el agua, lo que hace que volar sobre el agua requiera de más energía. En una isla se libera un pájaro desde el punto A que se encuentra a 5 millas (en línea recta) del punto B más cercano de una costa. El ave vuela al punto C de la costa y luego a lo largo de la misma hasta su área de anidación en D, como se muestra en la figura 6. Suponga que el pájaro tiene una reserva de energía de 170 kilocalorías, y que utiliza 10 kilocalorías por milla al volar sobre la tierra y 14 kilocalorías por milla al hacerlo sobre el agua.

(a) ¿Dónde deberá estar localizado el punto C, de manera que utilice exactamente 170 kilocalorías durante su vuelo?

(b) ¿Tiene el ave suficiente reserva de energía para volar directamente de A hasta D?

SOLUCIÓN

Identifique la variable

(a) Sea x la distancia en millas desde B a C. Entonces

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

$$\text{Distancia recorrida sobre agua} = \sqrt{x^2 + 25} \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$\text{Distancia recorrida en tierra} = 12 - x$$

Puesto que

$$\text{Energía consumida} = (\text{energía por milla}) \times (\text{millas voladas})$$

y como

Relacione las cantidades

$$\text{Energía total} = (\text{energía consumida sobre el agua}) + (\text{energía consumida en la tierra})$$

para la energía que el pájaro consume durante el vuelo, planteamos la ecuación

Establezca una ecuación

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Para resolver esta ecuación, dejamos sola la raíz cuadrada pasando todos los términos a la izquierda del signo de igual y después elevamos al cuadrado ambos lados.

Resuelva

$$\begin{aligned} 170 - 10(12 - x) &= 14\sqrt{x^2 + 25} && \text{Deje sola la raíz cuadrada en el LD} \\ 50 + 10x &= 14\sqrt{x^2 + 25} && \text{Simplifique el LI} \\ (50 + 10x)^2 &= (14)^2(x^2 + 25) && \text{Eleve al cuadrado ambos lados} \\ 2{,}500 + 1{,}000x + 100x^2 &= 196x^2 + 4{,}900 && \text{Desarrolle} \\ 0 &= 96x^2 - 1{,}000x + 2{,}400 && \text{Pase todos los términos al LD} \end{aligned}$$

Esta ecuación pudo haber sido factorizada, pero como los números son tan grandes es más fácil utilizar la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{1{,}000 \pm \sqrt{(-1{,}000)^2 - 4(96)(2{,}400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1{,}000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \qquad \text{o} \qquad 3\tfrac{3}{4}$$

El punto C debe estar a $6\frac{2}{3}$ de milla o a $3\frac{3}{4}$ de milla de B, para que el ave utilice 170 kilocalorías durante su vuelo.

(b) Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la ruta de A a D es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ por lo que la energía que el pájaro requiere para esta ruta es $14 \times 13 = 182$. Ésta es más energía de la disponible, por lo que no es una ruta que pueda ser tomada. ■

1.6 EJERCICIOS

1-6 ■ Exprese la cantidad dada en términos de la variable indicada.

1. El interés obtenido después de 2 años en una inversión al interés simple del 7% por año; x = número de dólares invertidos

2. El perímetro (en centímetros) de un rectángulo que es 5 centímetros más largo que ancho; w = ancho del rectángulo (en centímetros)

3. El área (en pulgadas cuadradas) de un rectángulo que tiene una longitud de 50 pulgadas; w = ancho del rectángulo (pulgadas)

4. Tiempo (en horas) que toma recorrer una distancia dada a 55 millas/hora; d = distancia dada (millas)

5. La distancia (millas) recorrida al conducir a una cierta rapidez durante 2 horas, y después a 15 millas/horas más rápido durante otra hora; s = rapidez inicial (en millas/hora)

6. La concentración (en onzas/galón) de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera, que contiene 25 onzas de sal, a la cual se le ha agregado algo de agua pura; x = volumen de agua pura agregada (en galones)

7-64 ■ Utilice los principios de resolución de problemas descritos en esta sección para responder a la pregunta que se plantea.

7. Durante su carrera en las ligas mayores, Hank Aaron conectó 31 cuadrangulares más que Babe Ruth. Juntos batearon 1,459. ¿Cuántos conectó Babe Ruth?

8. Un estudiante tiene calificaciones de 79, 81 y 72 en sus tres primeras pruebas. Necesita un promedio de por lo menos 80 para obtener una calificación de B. ¿Qué calificaciones necesita obtener en su cuarta prueba para elevar su promedio de pruebas a 80?

9. Determine tres enteros consecutivos cuya suma sea 336.

10. Obtenga 4 enteros impares consecutivos cuya suma sea 272.

11. Calcule dos números cuya suma sea 55 y cuyo producto 684.

12. La suma de los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es 1,252. Encuentre los enteros.

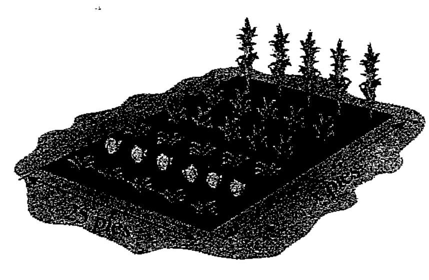
13. Phyllis invirtió \$12,000; una parte de esta cantidad a una tasa de interés simple de $4\frac{1}{2}$% por año, y el resto a una de 4% por año. Después de 1 año, el interés total ganado fue de \$525. ¿Cuánto dinero invirtió en cada una de las tasas?

14. Si Ben invierte \$4,000 al 4% de interés al año, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al $5\frac{1}{2}$%, para que el interés que reciba cada año sea el $4\frac{1}{2}$% de la inversión total?

15. ¿Qué tasa anual de interés tendrá que ganar en una inversión de \$3,500 para recibir \$262.50 de interés después de un año?

16. Jack invierte \$1,000 a una cierta tasa de interés anual, y otros \$2,000 a una que tiene medio punto más de interés. ¿Si recibe un total de \$190 de interés en un año, a qué tasa están invertidos los \$1,000?

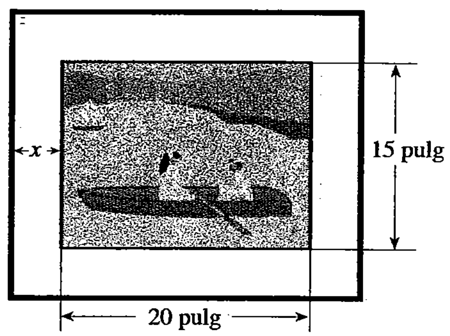
17. Un jardín rectangular tiene 25 pies de ancho. Si su área es de 1,125 pies cuadrados, ¿cuál es su longitud?



18. Una habitación tiene de largo $1\frac{1}{2}$ veces de su ancho. Su perímetro es de 80 pies. ¿Cuál es el ancho del cuarto?

19. Al pinta con acuarelas en una hoja de papel de 20 pulgadas de ancho por 15 pulgadas de alto. Coloca su hoja en una

alfombra, de manera que aparezca una banda de ancho constante alrededor de la imagen. El perímetro de la alfombra es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la banda alrededor de la pintura?

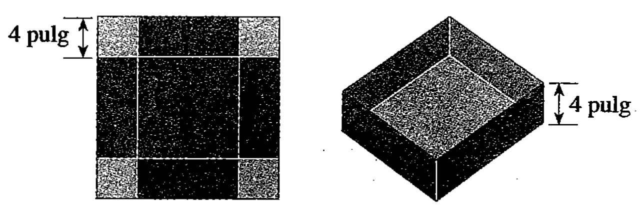


20. Se debe construir una fábrica en un lote que mide 180 por 240 pies. Un código de construcción local especifica que la fábrica debe estar rodeada por un césped de ancho constante e igual en área a la de la fábrica. ¿Cuál debe ser el ancho de este césped y cuáles son las dimensiones de la fábrica?

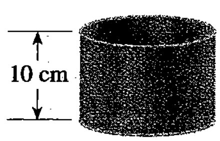
21. Un jardín rectangular es 10 pies más largo que ancho. Su área es de 875 pies cuadrados. ¿Cuáles son su dimensiones?

22. Un terreno tiene 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal de una esquina a la opuesta tiene 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

23. Se debe fabricar una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de un trozo cuadrado de cartón, cortando cuadrados de 4 pulgadas en cada una de las esquinas y doblando los costados, como se muestra en la figura. La caja debe tener 100 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es el tamaño de la pieza de cartón necesaria?



24. Una lata cilíndrica tiene un volumen de 40π cm^3 y 10 centímetros de altura. ¿Cuál es su diámetro?[*Sugerencia*: utilice la fórmula de volumen que se da en la primera de forros de este libro.]



25. Un jet comercial despegó de Kansas City hacia San Francisco, y recorrió una distancia de 2,550 kilómetros a una rapidez de 800 km./h. Al mismo tiempo, un jet privado salió de San Francisco a 900 km./h en dirección a Kansas City. ¿Cuánto tiempo después del despegue se encontraron?

26. Después de robar un banco en Dodge City, el ladrón galopa a 14 millas/hora. 10 minutos después, el marshall sale en su persecución, cabalgando a 16 millas/hora. ¿Cuánto tarda el marshall en alcanzar al robabancos?

27. Wilma condujo a una rapidez promedio de 50 millas/hora desde su casa en Boston, para visitar a su hermana en Búfalo. Se quedó en Búfalo 10 horas, y en su recorrido de regreso promedió 45 millas/hora. Regresó a casa 29 horas después de haber salido. ¿Cuántas millas separan a Búfalo de Boston?

28. Un bote de la guardia costera que patrulla un río que separa dos países se desplaza a 20 nudos (millas náuticas/hora) en aguas tranquilas. El río fluye a 4 nudos. Para cada patrullaje se le ordena al capitán del barco vaya corriente arriba y después regrese. Su recorrido toma exactamente 6 horas. ¿Qué tan lejos corriente arriba se desplaza el barco?

29. Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, desplazándose una distancia de 300 millas. Recorrió la primera parte del camino en autobús, y llegó a la estación de trenes justo a tiempo para completar su viaje por tren. El autobús promedió 40 millas/hora y el tren 60 millas/hora. Todo el viaje tomó $5\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuánto tiempo estuvo Wendy en el tren?

30. A una tripulación le tomó 2 horas 40 minutos remar 6 kilómetros corriente arriba y de regreso. Si la rapidez de la corriente era de 3 kilómetros/hora, ¿cuál fue la rapidez a la que remó la tripulación en aguas tranquilas?

31. Un vendedor condujo de Ajax a Barrington, que se encuentran a una distancia de 120 millas, a rapidez constante. Luego para recorrer las 150 millas de Barrington a Collins, incrementó su rapidez en 10 millas por hora. Si el segundo recorrido tomó 6 minutos más que el primero, ¿cuál era la rapidez a la cual iba conduciendo entre Ajax y Barrington?

32. Kiran condujo de Tortula a Cactus, que están separados una distancia de 250 millas. Aumentó su rapidez en 10 millas/hora para el viaje de 360 millas de Cactus a Dry Junction. Si todo el viaje tomó 11 horas, ¿cuál fue su rapidez de Tortula a Cactus?

33. ¿Qué volumen de solución de ácido a 60% debe mezclarse con una solución a 30% para producir 300 mililitros de solución al 50%?

34. Un recipiente contiene 6 litros de salmuera con una concentración de 120 gramos por litro. ¿Qué volumen del agua debe ser evaporada, para incrementar la concentración a 200 gramos/litro?

35. Un joyero tiene 5 anillos, cada uno pesa 18 gramos y está fabricado con una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Desea fundir los anillos y agregar suficiente plata para reducir el contenido de oro hasta 75%. ¿Cuánta plata debe agregar?

36. En una clínica se utiliza una solución de blanqueador para esterilizar las cajas de petri en las que se preparan cultivos. El tanque de esterilización contiene 100 galones de una solución de blanqueador normal doméstico a 2%, mezclado con agua pura destilada. Nuevas investigaciones indican que para una esterilización completa, la concentración de blanqueador debe ser de 5%. ¿Qué cantidad de la solución debe ser drenada y reemplazada con blanqueador, para incrementar el contenido de éste al recomendado?

37. El radiador de un automóvil se llena con una solución de 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante sugiere que en verano se obtiene un enfriamiento óptimo del motor con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es de 3.6 litros, ¿cuánto refrigerante debe ser drenado y reemplazado con agua, para reducir la concentración de anticongelante al nivel recomendado?

38. Una botella contiene 750 mililitros de refresco de fruta, con una concentración de 50% de jugo. Jill bebe 100 mililitros del refresco y a continuación vuelve a llenar la botella con otro de una marca más barata. Si la concentración de jugo en la botella ahora quedó reducida a 48%, ¿cuál es la concentración del refresco que agregó Jill?

39. Candy y Tim comparten una ruta de distribución de periódicos. A Candy le toma 70 minutos cubrir toda la ruta, mientras que Tim necesita 80 minutos. ¿Cuánto les tomaría, si trabajaran juntos?

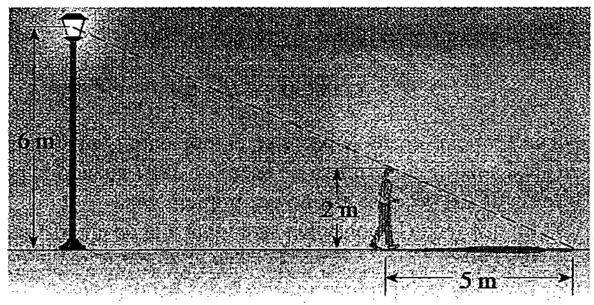
40. Si trabajan juntos, Stan e Hilda pueden podar el césped en 40 minutos. Si Hilda trabaja dos veces más rápido que Stan, ¿cuánto le tomaría a éste podar el césped?

41. Bety y Karen han sido contratadas para pintar las casas de un nuevo desarrollo departamental. Trabajando juntas, pueden pintar una casa en dos terceras partes del tiempo que le toma a Karen trabajando Sola. Bety necesita 6 horas para pintar ella sola una casa. ¿Cuánto le toma a Karen pintar una casa trabajando sola?

42. Henry e Irene trabajando juntos pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 hora 48 minutos. Trabajando solo, Henry necesita $1\frac{1}{2}$ hora más que Irene para hacer el trabajo. ¿Cuánto tiempo le toma a cada una de estas personas lavar todas las ventanas?

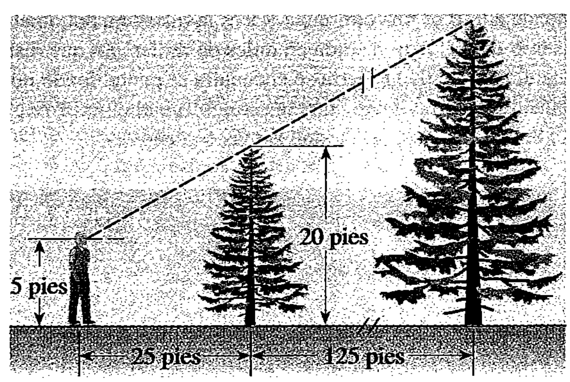
43. Jack, Kay y Lynn entregan folletos publicitarios en una pequeña ciudad. Si cada persona trabaja sola, a Jack le toma 4 horas distribuir todos los volantes y Lynn tarda una hora más que Kay. Trabajando juntos pueden entregar todos los volantes en el 40% del tiempo que le toma a Kay. ¿Cuánto tiempo tarda Kay en entregar todos los volantes?

44. Una persona está caminando alejándose de un farol, con una fuente de luz a 6 metros del piso. Esta persona tiene 2 metros de altura. ¿A qué distancia del farol estará cuando su sombra tenga 5 metros de largo? [*Sugerencia*: utilice triángulos semejantes.]



45. A las 3:00 P.M. un hombre de 165 centímetros de altura tiene una sombra de 132 centímetros de largo. Al mismo tiempo, un edificio alto de las cercanías produce una sombra de 160 metros de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

46. Un leñador determina la altura de un árbol alto midiendo primero uno más bajo a 125 pies de distancia, y moviéndose a continuación, de manera que su línea de visión esté en la dirección de las puntas de los árboles. Finalmente mide la distancia a la que se encuentra del árbol pequeño (véase la figura). Suponga que el árbol pequeño tiene 20 pies de altura, que el hombre está a 25 pies de éste y que el nivel de sus ojos está a 5 pies del piso. ¿Cuál es la altura del árbol más alto?



47. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 40 pies/segundo. Utilice la fórmula $h = -16t^2 + v_0t$ analizada en el ejemplo 7 para responder a las preguntas siguientes.
(a) ¿En qué tiempo alcanza una altura de 24 pies?
(b) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 48 pies?
(c) ¿Cuál es la altura más alta alcanzada?
(d) ¿Cuánto le toma alcanzar el punto más alto de su trayectoria?
(e) ¿Cuánto tarda en regresar a tierra?

48. ¿A qué rapidez debe lanzarse una pelota hacia arriba para que alcance una altura de 100 pies? [*Sugerencia:* consulte la fórmula del ejemplo 7 y utilice el discriminante de la ecuación $16t^2 - V_0t + h = 0$.]

49. La población de peces de un lago aumenta y disminuye de acuerdo con la fórmula

$$F = 1{,}000(30 + 17t - t^2$$

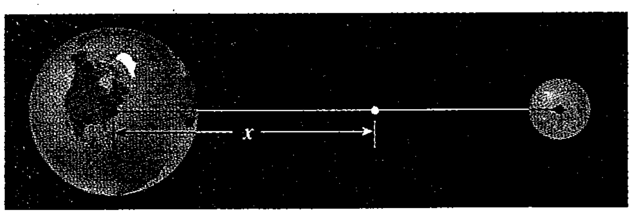
donde F es el número de peces en el momento t, que se mide en años a partir del primero de enero de 1997 cuando la población de los peces se estimó por primera vez.
(a) ¿En qué fecha la población será igual a la de enero 1 de 1997?
(b) ¿Para qué fecha habrán muerto todos los peces?

50. Un fabricante de pequeños aparatos domésticos determina que la utilidad P en dólares generada por la producción de x hornos de microondas por semana está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre y cuando $0 \leq x \leq 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana para obtener una utilidad de \$1,250?

51. Si se traza una recta imaginaria entre el centro de la Tierra y el de la Luna, la fuerza gravitacional neta F que actúa sobre un objeto situado sobre esta recta es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

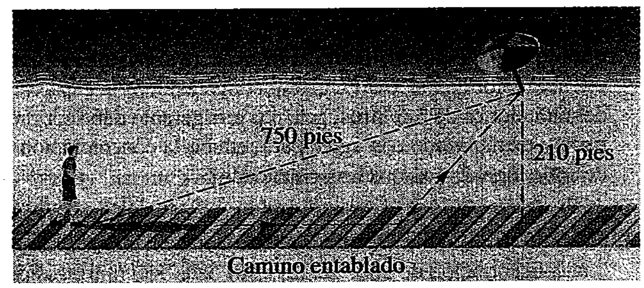
donde $K > 0$ es una constante y x es la distancia del objeto al centro de la Tierra medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el punto donde ninguna fuerza gravitacional neta actúa sobre el objeto? Exprese su respuesta al millar de millas más cercano.



52. Un depósito esférico tiene una capacidad de 750 galones. Tomando en consideración que un galón es igual a aproximadamente 0.1337 pies cúbicos, determine el radio del depósito (al centésimo más cercano de un pie)

53. Un terreno tiene forma de triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es 7 pies más larga que uno de los otros lados. El perímetro del predio es de 392 pies. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los tres lados?

54. Un camino entablado es paralelo a una costa recta y está a 210 pies de ésta. La playa llena el espacio entre el camino y el mar. Una persona está de pie sobre el camino, exactamente a 750 pies de su sombrilla de playa que se encuentra justo al borde del mar. El hombre anda a 4 pies por segundo sobre el camino, y a 2 pies por segundo sobre la arena. ¿Qué tan lejos deberá andar sobre el camino antes de desviarse hacia la arena, si desea llegar a su sombrilla en 4 minutos 45 segundos?



55. Helen gana \$7.50 por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana se le paga $1\frac{1}{2}$ veces su salario normal por las horas adicionales que trabaje. En una semana su salario fue de \$352.50. ¿Cuántas horas de tiempo trabajó esa semana?

56. Un monedero contiene un número igual de monedas de 1,5 y 10 centavos. La suma total de las monedas es \$1.44. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene el monedero?

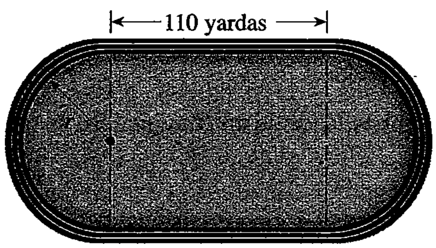
57. En una familia de 4 niños, el mayor tiene dos veces la edad del más joven. Los dos niños intermedios tienen 10 y 11 años. Si el promedio de edad de los cuatro es de $10\frac{1}{2}$ años, ¿cuál es la edad del más joven?

58. En su curso, el profesor de psicología de Rochelle pone una calificación de A para un promedio de 90 o más, y B para uno de 80 o más. En sus exámenes de mitad de curso Rochelle ha obtenido calificaciones de 82, 75 y 71. Si el examen final vale el doble que el de mitad de curso, ¿qué calificación debe tener en su examen final para obtener una B? ¿Para obtener una A? (Suponga que la calificación máxima posible en cada prueba es de 100.)

59. El consumo de combustible del automóvil de Williams es de 30 millas/galón en carretera y de 25 millas/galón en ciudad. En un viaje de vacaciones de 400 millas utilizó 14 galones de gasolina. ¿Cuántas millas de carretera recorrió en este viaje?

60. Un predio rectangular tiene 50 pies de ancho. La longitud de la diagonal entre esquinas opuestas mide 10 pies más que el largo del predio. ¿Cuál es el largo?

61. Una pista de carreras tiene la forma que se muestra en la figura, con lados rectos y extremos semicirculares. Si la longitud de la pista es de 440 yardas, y las dos partes rectas tienen cada una 110 yardas, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares (aproximando a la yarda más cercana)?

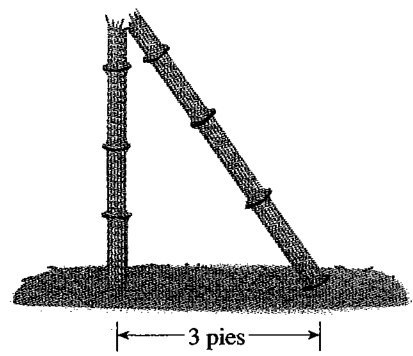


62. Bob y Jim son vecinos y utilizan las mangueras de jardín de sus casas para llenar la piscina de Bob. Saben que esto toma 18 horas utilizando ambas mangueras, y que si se utiliza sólo la de Bob se tardan 20% menos del tiempo que con la de Jim. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras por separado?

63. Este problema está tomado del libro de matemáticas chino conocido como *Chui–chang suan–shu*, o *Los nueve capítulos del arte matemático*, que fue escrito aproximadamente 250 años a. C.

Un vástago de bambú de 10 pies de largo se rompe de forma tal que su punta toca la tierra a 3 pies de la base, como se muestra en la figura. ¿A qué altura se rompió?

[*Sugerencia*: aplique el teorema de Pitágoras.]



64. Una persona desea determinar el nivel de agua de un pozo profundo, por lo que deja caer una piedra y oye que ésta golpea el agua 3 segundos más tarde. Si la piedra cae $16t^2$ pies después de t segundos, y la velocidad del sonido es de 1,090 pies/segundo ¿a qué distancia por debajo de la apertura del pozo, está la superficie del agua (al pie más cercano)?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

65. **Investigación histórica** Lea las notas biográficas acerca de Pitágoras (página 73), Euclides (página 63) y Viète (página 65). Escoja uno de estos matemáticos e investigue más respecto de él, y escriba un breve ensayo. Incluya tanto información biográfica como una descripción de las investigaciones matemáticas por las cuales se hizo famoso.

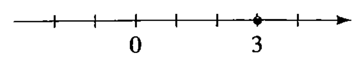
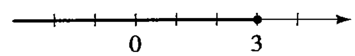
1.7 DESIGUALDADES

Algunos problemas de álgebra se plantea como a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad es como una ecuación, excepto que en lugar del signo igual incluye alguno de los símbolos $<, >, \leqslant$ o $\geqslant$. El siguiente es un ejemplo de desigualdad:

$$4x + 7 \leqslant 19$$

Resolver una desigualdad que incluye una variable significa determinar todos los valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, generalmente una desigualdad tiene infinitas soluciones que forman un intervalo, o una unión de éstos sobre la recta real.

En la figura que sigue se ilustra esta diferencia para el caso de una desigualdad:

			Solución
Ecuación	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad	$4x + 7 \leqslant 19$	$x \leqslant 3$	

Para resolver desigualdades utilizamos las siguientes reglas para dejar de un lado del signo de desigualdad sólo a la variable. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a"), y en ellas los símbolos A, B, y C representan números reales o expresiones algebraicas. Aquí enunciamos las reglas para desigualdades que incluyen el símbolo $\leqslant$, pero son válidas para cada uno de los cuatro símbolos de desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	Descripción
1. $A \leqslant B \Leftrightarrow A + C \leqslant B + C$	**Al sumar** la misma cantidad a ambos lados de una desigualdad se obtiene una que es equivalente.
2. $A \leqslant B \Leftrightarrow A - C \leqslant B - C$	**Al restar** la misma cantidad a ambos lados de una desigualdad resulta una equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leqslant B \Leftrightarrow CA \leqslant CB$	**Al multiplicar** ambos lados de una desigualdad por una misma cantidad *positiva*, se obtiene una que es equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leqslant B \Leftrightarrow CA \geqslant CB$	**Al multiplicar** ambos lados de una desigualdad por una misma cantidad *negativa*, se *invierte la dirección* de la misma.
5. $0 < A \leqslant B \Leftrightarrow \dfrac{1}{A} \geqslant \dfrac{1}{B} > 0$	Al **tomar el recíproco** de cada lado de una desigualdad que involucre cantidades *positivas*, se *invierte la dirección* de la misma.
6. Si $A \leqslant B$ y $C \leqslant D$, entonces $A + C \leqslant B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Las reglas 3 y 4 requieren especial atención: la primera afirma que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la segunda establece que **si multiplicamos cada lado de la desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad**. Por ejemplo, si iniciamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, lo que resulta es

$$-6 > -10$$

EJEMPLO 1 ■ Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y esboce el conjunto solución.

SOLUCIÓN

$$3x < 9x + 4$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \qquad \text{Reste } 9x$$

$$-6x < 4 \qquad \text{Simplifique}$$

$$\left(-\tfrac{1}{6}\right)(-6x) > -\tfrac{1}{6}(4) \qquad \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{6} \text{ (o divida por } -6\text{)}$$

$$x > -\tfrac{2}{3} \qquad \text{Simplifique}$$

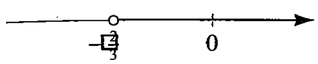
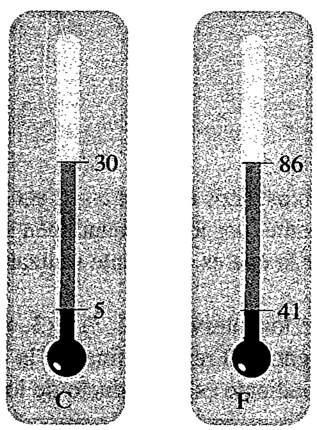


FIGURA 1

El conjunto solución está formado por todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$, cuya gráfica se muestra en la figura 1. ■

EJEMPLO 2 ■ Relación entre las escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en una caja de película indican que ésta debe almacenarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿A qué rango en la escala Fahrenheit corresponden estas temperaturas?



SOLUCIÓN La relación entre grados Celsius (C) y Fahrenheit (F) está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Al expresar el enunciado en la caja en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

por lo que las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

$$5 < \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30$$

$$\tfrac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \tfrac{9}{5} \cdot 30 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{9}{5}$$

$$9 < F - 32 < 54 \qquad \text{Simplifique}$$

$$9 + 32 < F < 54 + 32 \qquad \text{Sume 32}$$

$$41 < F < 86 \qquad \text{Simplifique}$$

La película debe almacenarse a una temperatura entre 41°F y 86°F. ■

En los ejemplos 1 y 2 las desigualdades son **lineales**, es decir, son equivalentes a una de la forma $ax + b > 0$, donde a y b son números reales y el símbolo $>$ puede ser reemplazado por $<$, $\leq$, o $\geq$. Ahora consideraremos desigualdades no lineales.

DESIGUALDADES NO LINEALES

Para resolver desigualdades que incluyen el cuadrado y otras potencias de la variable, utilizamos la factorización junto con el principio siguiente.

SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

Si un producto o cociente tiene una cantidad *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o cociente incluye un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

EJEMPLO 3 ■ Una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

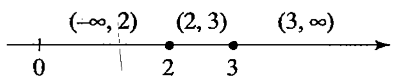


FIGURA 2

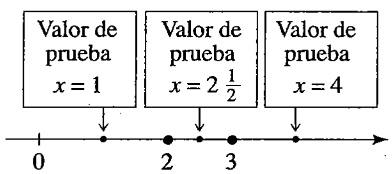


FIGURA 3

Sabemos que la ecuación correspondiente $(x-2)(x-3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Como se muestra en la figura 2, los números 2 y 3 dividen la recta real en los intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada uno de éstos determinamos los signos de los factores, utilizando **valores de prueba**. Para esto, escogemos un número dentro de cada intervalo e identificamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ correspondiente al valor seleccionado. Por ejemplo, si utilizamos el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$ (véase la figura 3) entonces al sustituir en los factores $x - 2$ y $x - 3$ nos da

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

y

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Por lo tanto, en este intervalo ambos factores son negativos. (Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo únicamente en 2 y en 3, respectivamente, por lo que mantienen sus signos a lo largo de cada intervalo. Ésta es la razón por la que es suficiente utilizar un solo valor de prueba en cada intervalo.)

Utilizando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (véase la figura 3), construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del hecho de que la expresión correspondiente es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	−	+	+
Signo de $x - 3$	−	−	+
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	+	−	+

Si lo prefiere, puede representar esta información en una recta numérica como se muestra en el siguiente diagrama de signos. Las líneas verticales indican los puntos en los que la recta real queda dividida en intervalos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Observamos a partir de la tabla o del diagrama que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Por esto, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ es

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3, porque buscamos los valores de x tales que el producto sea menor *o igual a* 0. La solución se muestra en la figura 4. ■

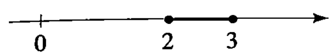


FIGURA 4

Los pasos siguientes son útiles para resolver una desigualdad que puede ser factorizada.

RECOMENDACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES NO LINEALES

1. De ser necesario, reescriba la desigualdad de forma que todos los términos distintos de 0 se encuentran de un lado del signo de desigualdad.

2. Si el lado distinto de 0 de la desigualdad involucra cocientes, conviértalos a un denominador común.

3. Factorice el lado distinto de 0 de la desigualdad.

4. Liste los intervalo determinados a partir de la factorización

5. Utilice valores de prueba para elaborar una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada uno de los intervalos. En el último renglón de la tabla, determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.

6. Determine el conjunto solución a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad se satisface en algunos o en todos los puntos extremos de los intervalos (esto puede ocurrir si la desigualdad involucra $\geqslant$ o $\leqslant$).

La técnica de factorización descrita en estos pasos funciona únicamente si **todos los términos distintos de 0 se encuentran en un solo lado del símbolo de desigualdad.** Si la desigualdad no está escrita en esta forma, proceda a hacerlo como se indica en el paso 1. Esta técnica se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 ■ Una desigualdad que involucra un cociente

Resuelva $\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 1$.

SOLUCIÓN Primero pasamos todos los términos distintos de 0 al lado izquierdo, y a continuación simplificamos utilizando un denominador común

$$\frac{1+x}{1-x} \geqslant 1$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geqslant 0 \qquad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geqslant 0 \qquad \text{Común denominador } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geqslant 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geqslant 0 \qquad \text{Simplifique}$$

El numerador es cero cuando $x = 0$ y el denominador lo es cuando $x = 1$, por lo que construimos la siguiente tabla de signos utilizando estos valores para definir los intervalos sobre la recta real.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $2x$	$-$	$+$	$+$
Signo de $1-x$	$+$	$+$	$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1-x}$	$-$	$+$	$-$

A partir de la tabla observamos que el conjunto solución es $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\} = [0, 1)$. Se incluye el punto extremo 0 debido a que la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor *o igual a* 1. Sin embargo no incluimos el 1, porque el cociente de la desigualdad no está definido para este valor. **Verifique siempre los puntos extremos de los intervalos solución, para determinar si satisfacen la desigualdad original.**

El conjunto de la solución [0,1) se muestra en la figura 5. ■

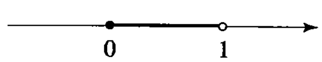


FIGURA 5

EJEMPLO 5 ■ Solución de una desigualdad con tres factores

Resuelva la desigualdad $x < \dfrac{2}{x-1}$.

SOLUCIÓN Después de pasar todos los términos distintos de cero a uno de los lados de la desigualdad, utilizamos un denominador común para combinarlos.

$$x - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Reste } \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Denominador común } x-1$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} < 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-1} < 0 \qquad \text{Factorice el numerador}$$

Los factores en este cociente cambian de signo en -1, 1 y 2, por lo que debemos examinar los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Usando valores de prueba, obtenemos la siguiente tabla de signos.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x+1$ **Signo de $x-2$** **Signo de $x-1$**	$-$ $-$ $-$	$+$ $-$ $-$	$+$ $-$ $+$	$+$ $+$ $+$
Signo de $\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como el cociente debe ser negativo, la solución es

$$(-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

como se muestra en la figura 6. ■

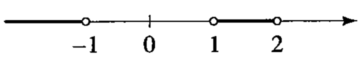
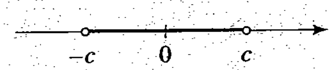
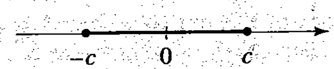
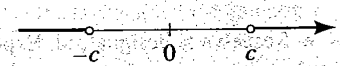
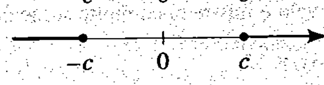


FIGURA 6

DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Las propiedades siguientes son útiles para resolver desigualdades que incluyen valores absolutos, y se pueden comprobar usando la definición de valor absoluto (sección 1.1).

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES DE VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	
2. $\lvert x \rvert \leqslant c$	$-c \leqslant x \leqslant c$	
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $\lvert x \rvert \geqslant c$	$x \leqslant -c$ o $c \leqslant x$	

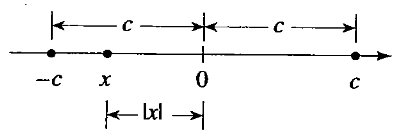


FIGURA 7

Por ejemplo, para verificar la propiedad 1 observamos que la desigualdad $|x| < c$ afirma que la distancia de x a 0 es menor que c, y a partir de la figura 7 se ve que esto es cierto si y sólo si x está entre c y $-c$.

EJEMPLO 6 ■ Resolución de una desigualdad que incluye un valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|x - 5| < 2$.

SOLUCIÓN 1 La desigualdad $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Sume 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$

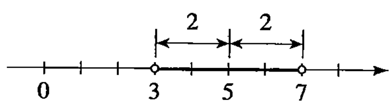


FIGURA 8

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia a 5 sea menor que 2. A partir de la figura 8 vemos que éste es el intervalo $(3, 7)$. ■

EJEMPLO 7 ■ Resolución de una desigualdad que incluye un valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la propiedad 4, la desigualdad $|3x + 2| \geqslant 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{o} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

$$3x \geqslant 2 \qquad\qquad 3x \leqslant -6$$

$$x \geqslant \tfrac{2}{3} \qquad\qquad x \leqslant -2$$

Por tanto el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leqslant -2 \quad \text{o} \quad x \geqslant \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

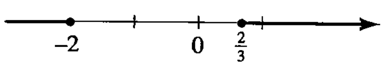


FIGURA 9

El conjunto se muestra gráficamente en la figura 9. ■

1.7 EJERCICIOS

1-4 ■ Sea $S = \{-1, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$. Mediante sustitución determine cuál de los elementos de S satisface la desigualdad dada.

1. $x + 1 \geqslant 0$ **2.** $x - 2 < 0$

3. $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ **4.** $|x - 1| > 1$

5-64 ■ Resuelva la desigualdad. Exprese la solución en forma de intervalo e ilustre el conjunto solución en la recta real.

5. $3x \leqslant 12$ **6.** $-4x > 16$

7. $20 < -4x$ **8.** $-1 \geqslant 7x$

9. $2x - 5 > 3$ **10.** $3x + 11 < 5$

11. $7 - x \geqslant 5$ **12.** $5 - 3x \leqslant -16$

13. $2x + 1 < 0$ **14.** $0 < 5 - 2x$

15. $3x + 11 \leqslant 6x + 8$ **16.** $6 - x \geqslant 2x + 9$

17. $1 - x \leqslant 2$ **18.** $4 - 3x \geqslant 6$

19. $4 - 3x \leqslant -(1 + 8x)$ **20.** $2(7x - 3) \leqslant 12x + 16$

21. $(x - 2)(x - 5) > 0$ **22.** $(3x + 1)(x - 1) \geqslant 0$

23. $x^2 - 3x - 18 \leqslant 0$ **24.** $x^2 + 5x + 6 > 0$

25. $2x^2 + x \geqslant 1$

26. $x^2 < x + 2$

27. $x^2 > 3(x + 6)$

28. $x^2 + 2x > 3$

29. $x^2 < 4$

30. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leqslant 0$

31. $x(x^2 - 4) \geqslant 0$

32. $x^3 > x$

33. $\dfrac{x-3}{x+1} \geqslant 0$

34. $\dfrac{2x+6}{x-2} < 0$

35. $\dfrac{4x}{2x+3} > 2$

36. $-2 < \dfrac{x+1}{x-3}$

37. $\dfrac{2x+1}{x-5} \leqslant 3$

38. $\dfrac{3+x}{3-x} \geqslant 1$

39. $\dfrac{4}{x} < x$

40. $\dfrac{x}{x+1} > 3x$

41. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} \geqslant 0$

42. $\dfrac{x}{x+2} \leqslant \dfrac{1}{x}$

43. $\dfrac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{3}{x}$

44. $\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)} > 0$

45. $\dfrac{x-3}{2x+5} \geqslant 1$

46. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{x+2}$

47. $|x| < 2$

48. $|x| \geqslant 4$

49. $|x - 5| \leqslant 3$

50. $|x - 9| > 9$

51. $|x + 5| < 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0.4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $|x + 6| < 0.001$

56. $\dfrac{1}{|x+7|} > 2$

57. $-1 < 2x - 5 < 7$

58. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

59. $0 \leqslant 1 - x < 1$

60. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

61. $\dfrac{1}{x} < 4$

62. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{1}{x-2} < 1$

63. $x^4 > x^2$

64. $x^5 > x^2$

65. Use la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para determinar el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a $20 \leqslant C \leqslant 30$.

66. ¿A qué rango de temperatura en la escala Celsius corresponde el intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

67. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente 1° C por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 12 km.

(a) Si la temperatura a nivel de suelo es de 20° C, escriba una fórmula para ésta a una altitud h.

(b) ¿Qué rango de temperatura puede esperarse si un aeroplano despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

68. Se estima que el costo anual de conducir un nuevo Destini está dado por la fórmula

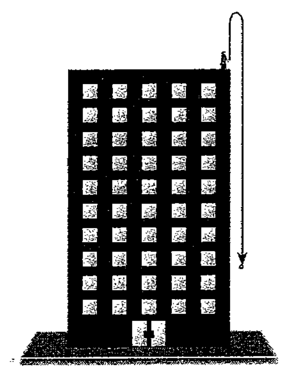
$$C = 0.35m + 2{,}200$$

donde m representa las millas conducidas por año y C el costo en dólares. Jane ha comprado uno de estos autos y decide gastar anualmente entre \$6,400 y \$7,100. ¿Cuál es el rango en millas que podrá recorrer?

69. Mediante el cálculo se puede demostrar que si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 16 pies/segundo desde la parte superior de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura h sobre el piso después de t segundos será de

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 32 pies por arriba del nivel del suelo?



70. La fuerza gravitacional F ejercida por la tierra sobre un cuerpo con una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4{,}000{,}000}{d^2}$$

donde d es la distancia (en km) desde el cuerpo al centro de la tierra, y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué intervalo de distancia la fuerza gravitacional estará entre 0.0004 N y 0.01 N?

71. Cerca de una fogata, la temperatura T en °C a una distancia de x metros del centro del fuego está determinada por

$T = \dfrac{600{,}000}{x^2 + 300}$. ¿En que intervalo de distancias desde el centro de la fogata la temperatura es mayor que 500 °C?

72. El consumo de gasolina en millas por galón de un vehículo, conducido a v millas/hora, está determinado por $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$, siempre que v se mantenga entre 10 millas/hora y 75 millas/hora. ¿Para qué intervalo de velocidades el consumo es de 30 millas/galón o menor?

73-74 ■ Resuelva la desigualdad para x, suponiendo que $0 < a < b < c$.

73. $a(bx - c) \geqslant bc$ **74.** $\dfrac{x^2 + (a - b)x - ab}{x + c} \leqslant 0$

75. Demuestre que si $a < b$ entonces $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

76. Suponga que a, b, c y d son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

77. ¿Las potencias conservan el orden? ¿Si $a < b$, es $a^2 < b^2$? (Verifique tanto para valores positivos como negativos de a y b.) ¿Si $a < b$, es $a^3 < b^3$? A partir de sus observaciones, enuncie una regla general respecto a la relación entre a^n y b^n cuando $a < b$ y n es un entero positivo.

78. Uso de distancias para la resolución de desigualdades de valores absolutos Recuerde que $|a - b|$ es la distancia entre a y b en la recta numérica. Para cualquier número x, ¿qué representa $|x - 1|$ y $|x - 3|$? Utilice esta interpretación para resolver geométricamente la desigualdad $|x - 1| < |x - 3|$. En general, si $a < b$, ¿cuál es la solución de la desigualdad $|x - a| < |x - b|$?

1.8 GEOMETRÍA ANALÍTICA

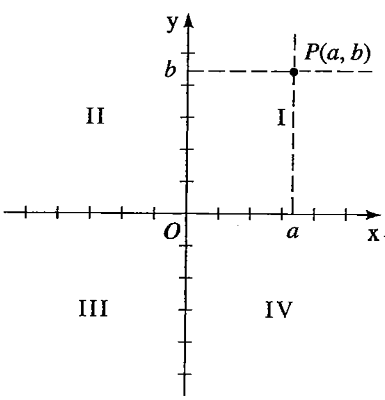


FIGURA 1

Como se explicó en la sección 1.1, los puntos sobre una recta pueden identificarse con números reales al asignarles coordenadas. De forma análoga, los puntos sobre un plano pueden identificarse mediante pares ordenados de números reales. Para esto, empezamos dibujando dos rectas coordenadas perpendiculares entre sí que se cruzan en el **origen** O de cada una. Por lo general una es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y se conoce como **eje** x; la otra es vertical con dirección positiva hacia arriba y se le llama **eje** y.

Cualquier punto P sobre el plano se localiza mediante un par único de números como sigue. Trace un par de rectas que pasen por P y que sean perpendiculares a los ejes x y y. Estas rectas cruzarán los ejes en puntos con coordenadas a y b como se ilustra en la figura 1, y al punto P se le asigna el par ordenado (a,b). El primer número se conoce como la **coordenada** x (o **abscisa**) de P; el segundo como la **coordenada** y (u **ordenada**) de P. Decimos que P es el punto con coordenadas (a,b), e identificamos dicho punto con $P(a,b)$. Podemos pensar en las coordenadas como su "dirección" sobre el plano, puesto que las coordenadas definen la localización del punto. En la figura 2 se muestran varios puntos identificados por sus coordenadas.

Invirtiendo el proceso anterior, a partir de un par ordenado (a,b) podemos identificar el punto P correspondiente. Con frecuencia consideramos como iguales al punto P y al par ordenado (a,b), y decimos el "punto (a,b)". [Aunque la notación utilizada para un intervalo abierto (a,b) es la misma que la de un punto (a,b), del contexto será claro cuál es el significado específico.]

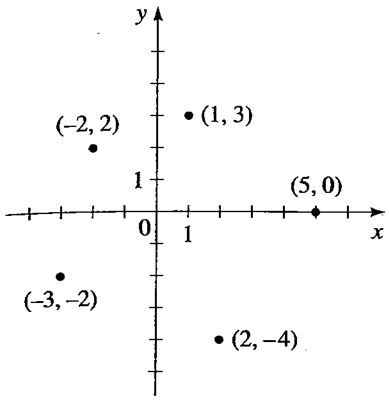


FIGURA 2

Este sistema de ejes se conoce como **sistema de coordenadas rectangular** o **sistema de coordenadas cartesianas**, en honor al matemático francés René Descartes (1596–1650), aunque también el francés Pierre Fermat (1601–1665) creó los principios de la geometría analítica aproximadamente por el mismo tiempo que Descartes. El plano utilizado se conoce como **plano de coordenadas** o **plano cartesiano** y se denota por $\mathbb{R}^2$.

Los ejes x y y, o **ejes de coordenadas**, dividen el plano cartesiano en cuatro cuadrantes, denotados por I, II, III y IV en la figura 1. Note que el cuadrante I está formado por aquellos puntos cuyas coordenadas x y y son ambas positivas. (Los puntos *sobre* los ejes de coordenadas no están asignados a ningún cuadrante.)

EJEMPLO 1 ■ Regiones graficadas en el plano de coordenadas

Describa y trace la región dada por cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUCIÓN

(a) Los puntos cuya coordenada x es 0 o positiva están sobre el eje y o a su derecha, como en la figura 3(a).

(b) El conjunto de todos los puntos con coordenada y *igual* a 1 forma una recta horizontal por encima del eje x, como en la figura 3(b).

(c) Recuerde de la sección 1.7 que

$$|y| < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad -1 < y < 1$$

La región dada consiste en aquellos puntos cuya coordenada y está entre −1 y 1, es decir, de todos los puntos que están entre (pero no sobre) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$, las cuales se muestran como líneas punteadas en la figura 3(c) para indicar que los puntos sobre ellas no pertenecen al conjunto.

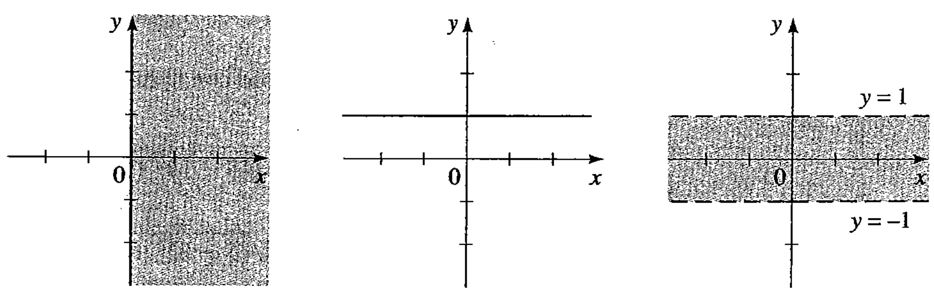


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| \leq 1$

■

Ahora determinamos una fórmula para la distancia $d(A,B)$ entre los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ en el plano. Recuerde de la sección 1.1 que la distancia entre los puntos a y b

de la recta numérica es $d(a, b) = |b - a|$. De la figura 4 vemos que la distancia entre los puntos $A(x_1,y_1)$ y $C(x_2,y_1)$ sobre la recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$ y la que hay entre $B(x_2,y_2)$ y $C(x_2,y_1)$ sobre la vertical debe ser $|y_2 - y_1|$. Puesto que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, a partir del teorema de Pitágoras se obtiene que

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_i|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

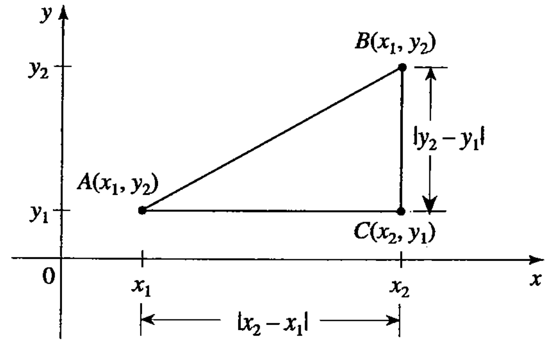


FIGURA 4

FÓRMULA DE LA DISTANCIA

La distancia entre los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ en el plano es

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_i)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 2 ■ Aplicación de la fórmula de la distancia

¿Cuál de los puntos $P(1,-2)$ o $Q(8,9)$ está más cerca de $A(5,3)$?

SOLUCIÓN De acuerdo con la fórmula de la distancia tenemos

$$d(P, A) = \sqrt{(5-1)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$d(Q, A) = \sqrt{(5-8)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

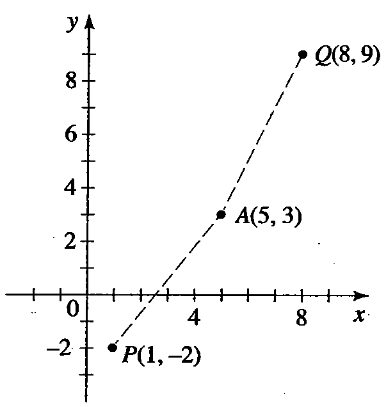


FIGURA 5

Esto muestra que $d(P, A) < d(Q, A)$, por lo que P está más cerca de A (véase la figura 5). ■

Obtengamos ahora las coordenadas (x,y) del punto medio M del segmento de recta que une $A(x_1,y_1)$ con $B(x_2,y_2)$. En la figura 6 observe que los triángulos APM y MQB son congruentes, ya que $d(A, M) = d(M, B)$, y que por esto los ángulos correspondientes son iguales. De ahí que $d(A,P) = d(M,Q)$ y por tanto

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Resolviendo para x obtenemos $2x = x_1 + x_2$, por lo que $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. De manera análoga, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

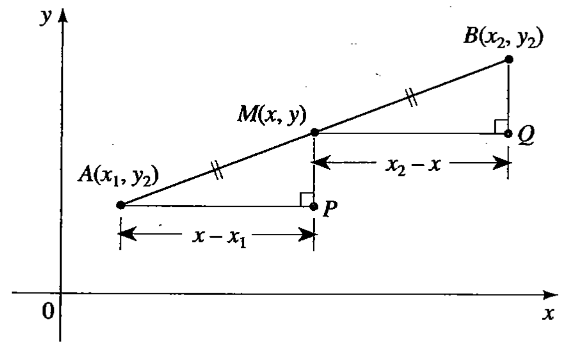
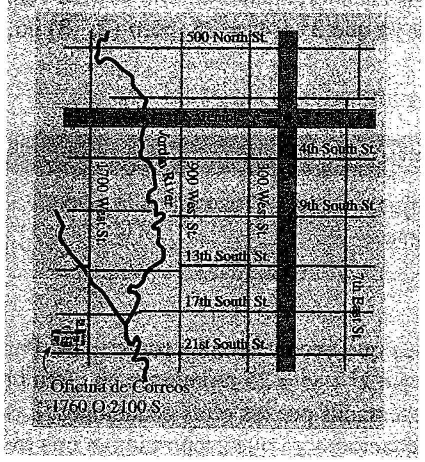


FIGURA 6

Las coordenadas de un punto en el plano xy definen de manera única su localización, y éstas se pueden considerar como la "dirección" del mismo. En Salt Lake City, Utah, la dirección de la mayoría de los edificios se expresa como coordenadas. La ciudad está dividida en cuadrantes con Main Street como eje vertical (Norte–Sur) y S. Temple Street como eje horizontal (Este–Oeste). Una dirección de la forma

1760 O 2100 S

indica una localización ubicada a 17.6 manzanas al oeste de Main Street y 21 al sur de S. Temple Street. (Ésta es la dirección de la Oficina Principal de Correos de la ciudad.) Mediante este sistema lógico es posible que alguien no familiarizado con la ciudad localice cualquier dirección de forma inmediata, con la misma facilidad con que podemos localizar un punto en un plano de coordenadas.



FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

El punto medio de un segmento de recta de $A(x_1,y_1)$ a $B(x_2,y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 3 ■ Determinación del punto medio

El punto medio del segmento de línea recta que une a los puntos $(-2,5)$ y $(4,9)$ es

$$\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 9}{2}\right) = (1,7)$$

Véase la figura 7

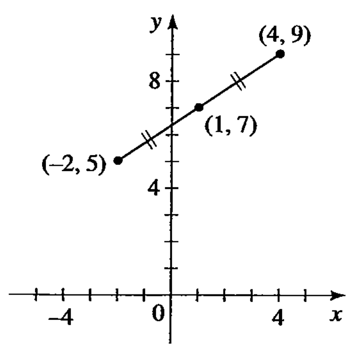


FIGURA 7

■

EJEMPLO 4 ■ Aplicación de la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ y $S(2, 7)$ es un paralelogramo, mostrando que sus diagonales se bisecan entre sí.

SOLUCIÓN Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse entre sí. El punto medio de la diagonal PR es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = \left(3, \tfrac{11}{2}\right)$$

y el correspondiente a QS es

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(3, \tfrac{11}{2}\right)$$

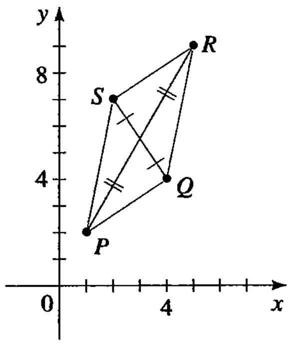


FIGURA 8

por lo que ambas se cruzan en su punto medio, como se muestra en la figura 8. (Un teorema de geometría elemental afirma que por lo tanto el cuadrilátero es un paralelogramo.) ■

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS ECUACIONES

Suponga que tenemos una ecuación que incluye las variables x y y, como en

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{o} \qquad x = y^2 \qquad \text{o} \qquad y = \frac{2}{x}$$

Principio fundamental de la Geometría analítica
Un punto (x,y) pertenece a la gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen a ésta.

Un punto (x,y) **satisface** la ecuación si al sustituir las coordenadas en ella la hace verdadera. Por ejemplo $(3, 4)$ satisface a la primera ya que $3^2 + 4^2 = 25$, pero $(2, -3)$ no, puesto que $2^2 + (-3)^2 = 13 \neq 25$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

La **gráfica** de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano de coordenadas que satisfacen a la misma.

La gráfica de la mayor parte de las ecuaciones que encontraremos son curvas. Por ejemplo, más adelante en esta sección veremos que $x^2 + y^2 = 25$ representa un círculo; posteriormente determinaremos las formas representadas por las otras ecuaciones. Las gráficas son importantes para el estudio de las ecuaciones ya que proporcionan una representación visual de las mismas.

EJEMPLO 5 ■ Esbozo de una gráfica trazando puntos de ésta

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$.

SOLUCIÓN Primero resolvemos la ecuación para y, con lo que obtenemos

$$y = 2x - 3$$

Esta expresión es útil para calcular las coordenadas y de la tabla siguiente.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-1	$(1, -1)$
2	1	$(2, 1)$
3	3	$(3, 3)$
4	5	$(4, 5)$

Naturalmente existe un número infinito de puntos en la gráfica, y es imposible graficarlos todos, pero mientras más grafiquemos mejor nos podremos imaginar la apariencia de la gráfica representada por la ecuación. En la figura 9 graficamos los puntos que se encuentran en la tabla, y aparentemente están todos sobre una recta, por lo que completamos la gráfica uniéndolos. (En la sección 1.10 comprobaremos que la gráfica de una ecuación de este tipo es efectivamente una recta.)

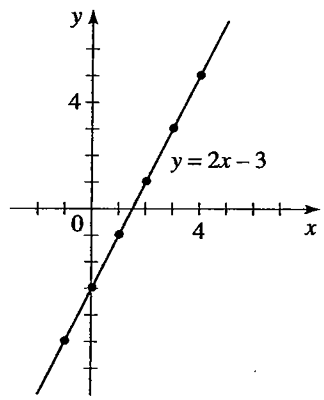


FIGURA 9

■

Un análisis detallado de las parábolas y de sus propiedades geométricas se presenta en el capítulo 9.

EJEMPLO 6 ■ Esbozo de una gráfica trazando puntos de ésta

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$

SOLUCIÓN Presentamos algunos de los puntos que satisfacen la ecuación en la tabla que sigue, y en la figura 10 graficamos éstos y después los unimos mediante una curva continua. Una curva con esta forma se conoce como una *parábola*.

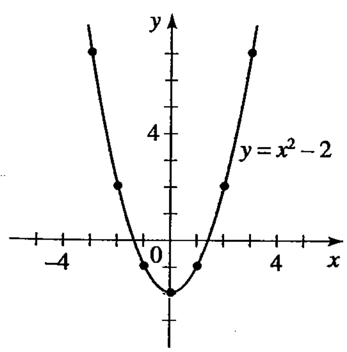


FIGURA 10

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$

■

EJEMPLO 7 ■ Trazado de la gráfica de una ecuación que involucra un valor absoluto

Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.

SOLUCIÓN Elaboramos una tabla de valores

x	$y = \lvert x \rvert$	(x, y)
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$
3	3	$(3, 3)$

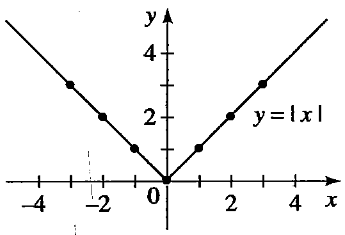
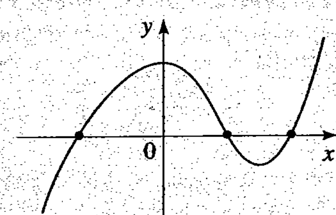
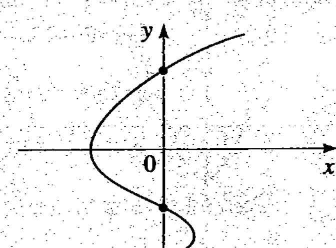


FIGURA 11

En la figura 11 graficamos los puntos con las coordenadas dadas en la tabla y trazamos la gráfica de la ecuación. ■

Las coordenadas x de los puntos en los que la gráfica cruza el eje x se conocen como las **intersecciones con el eje x** de la gráfica y se obtienen haciendo $y = 0$ en la ecuación que se está graficando. Las coordenadas y de los puntos de la gráfica que intersectan al eje y se conocen como las **intersecciones con el eje y** y se obtienen haciendo $x = 0$ en la ecuación.

DEFINICIÓN DE INTERSECCIONES

Intersecciones	Cómo obtenerlas	Dónde se encuentran en la gráfica
intersecciones en x Coordenadas x de los puntos en los que la gráfica cruza el eje x.	Haga $y = 0$ y resuelva para x	
intersecciones en y Coordenadas y de los puntos en los que la gráfica cruza el eje y.	Haga $x = 0$ y resuelva para y	

EJEMPLO 8 ■ Determinación de intersecciones

Determine las intersecciones en x y en y de la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$

SOLUCIÓN Para determinar las intersecciones en x hacemos $y = 0$ y resolvemos para x.

$$0 = x^2 - 2 \qquad \text{Haga } y = 0$$
$$x^2 = 2 \qquad \text{Sume 2 a ambos lados}$$
$$x = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

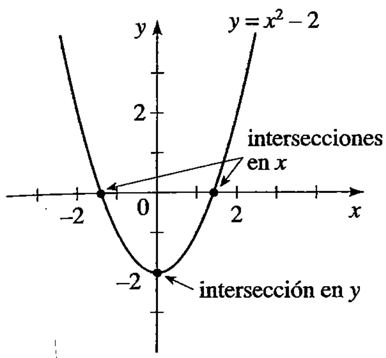


FIGURA 12

Así, las intersecciones x son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para obtener las intersecciones en y, hacemos $x = 0$ y resolvemos para y.

$$y = 0^2 - 2 \qquad \text{Haga } x = 0$$
$$y = -2$$

Por tanto la intersección en y es -2.

La gráfica de esta ecuación fue trazada en el ejemplo 6, y se muestra en la figura 12 junto con las intersecciones en x y y. ■

CÍRCULOS

Hasta ahora hemos visto cómo determinar la gráfica de una ecuación en x y en y. El problema inverso es obtener la ecuación de una gráfica, esto es, una ecuación que represente una curva dada en el plano xy; ésta es satisfecha sólo por las coordenadas de los puntos sobre la curva. Ésta es la otra parte del principio básico de la geometría analítica, como fue formulado por Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede representarse por una ecuación algebraica, entonces se pueden usar las reglas del álgebra para analizar la curva.

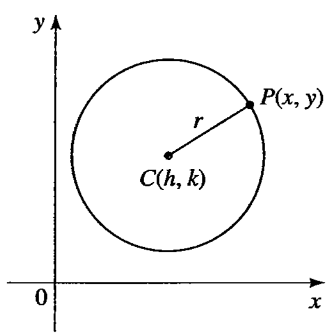


FIGURA 13

Como ejemplo de este tipo de problema, determinemos cuál es la ecuación de un círculo de radio r y centro(h,k). Por definición, el círculo es el conjunto de puntos $P(x,y)$ cuya distancia al centro $C(h,k)$ es r (véase la figura 13). Entonces, P está sobre el círculo si y sólo si $d(P,C) = r$. Según la fórmula de la distancia, tenemos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

Ésta es la ecuación deseada.

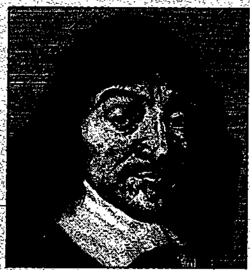
ECUACIÓN DE UN CÍRCULO

La ecuación del círculo con centro (h,k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En particular, cuando el centro está en el origen $(0,0)$ la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$



René Descartes (1596–1650) nació en la ciudad de La Haye en el sur de Francia, y desde temprana edad tuvo afición por las matemáticas debido a "la certidumbre de sus resultados y a la sencillez de su lógica". Creía que a fin de descubrir la verdad, uno debe empezar por dudar de todo, incluyendo la propia existencia; esto lo condujo a formular quizá la frase más conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo". En su libro *Discurso del método,* describió lo que ahora se conoce como el plano cartesiano. Esta idea de combinar el álgebra con la geometría permitió por vez primera a los matemáticos "visualizar" las ecuaciones que estudiaban, y el filósofo John Stuart Mill dijo que esta invención era "el paso individual más grande alguna vez realizado en el avance de las ciencias exactas". Descartes gustaba de levantarse tarde y quedarse en cama por las mañanas pensando y escribiendo. Inventó el plano coordenado al observar a una mosca desplazarse en el cielo raso y razonar que podía describir la localización exacta de la mosca al saber a qué distancia estaba de dos paredes perpendiculares entre sí. En 1649 Descartes se convirtió en el tutor de la Reina Cristina de Suecia, la cual gustaba recibir sus lecciones a las 5 en punto de la mañana cuando, decía, su mente estaba más despejada. Sin embargo, para Descartes el cambio en sus hábitos usuales y la helada biblioteca donde estudiaban resultó inadecuado. En febrero de 1650, justo después de dos meses, contrajo pulmonía y falleció.

EJEMPLO 9 ■ Representación gráfica de un círculo

Trace la gráfica de cada ecuación

(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

SOLUCIÓN

(a) Reescribiendo la ecuación en la forma $x^2 + y^2 = 5^2$, vemos que ésta es la del círculo de radio 5 centrado en el origen, y su gráfica se muestra en la figura 14.

(b) Escribiendo la ecuación como $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$, vemos que ésta es la del círculo de radio 5 con centro en (2,–1), cuya gráfica se muestra en la figura 15

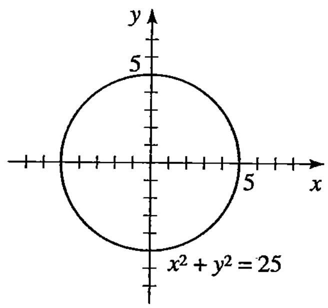


FIGURA 14

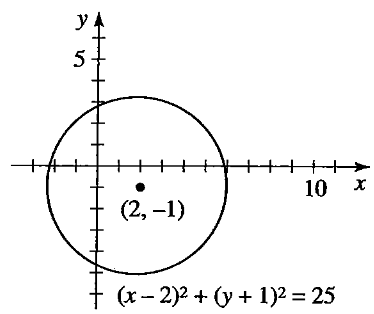


FIGURA 15 ■

EJEMPLO 10 ■ Determinación de la ecuación de un círculo

(a) Obtenga la ecuación del círculo de radio 3 y centro (2,–5)

(b) Determine la ecuación del círculo que contiene los puntos $P(1,8)$ y $Q(5,-6)$ como extremos de un diámetro.

SOLUCIÓN

(a) Usando la ecuación del círculo con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, obtenemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

Su gráfica se muestra en la figura 16.

(b). Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro PQ, por lo que de acuerdo con la fórmula del punto medio el centro es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2}\right) = (3,1)$$

El radio r es la distancia de P al centro, por lo que

$$r^2 = (3-1)^2 + (1-8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por tanto, la ecuación del círculo es

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 53$$

Su gráfica se muestra en la figura 17.

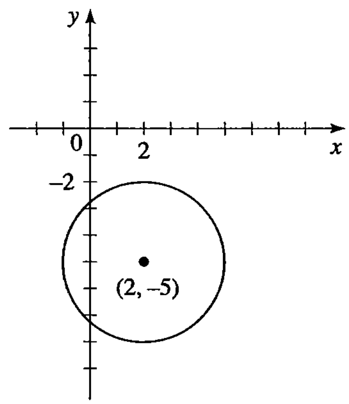


FIGURA 16
$(x-2)^2+(y+5)^2=9$

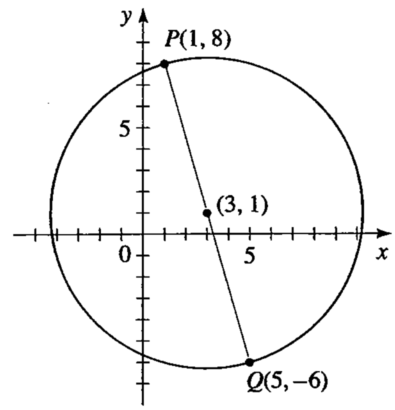
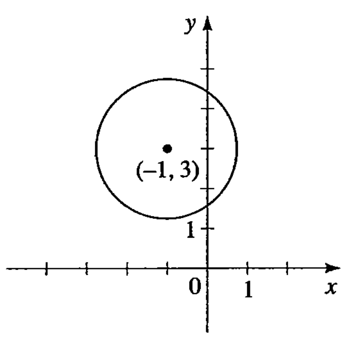


FIGURA 17
$(x-3)^2+(y-1)^2=53$ ■

EJEMPLO 11 ■ Identificación de la ecuación de un círculo

Trace la gráfica de la ecuación $x^2+y^2+2x-6y+7=0$ mostrando primero que ésta representa un círculo y después determinando su centro y radio.



$x^2+y^2+2x-6y+7=0$

FIGURA 18

SOLUCIÓN Primero agrupamos los términos en x y en y. Después completamos el cuadrado dentro de cada grupo (sumando el cuadrado de la mitad tanto del coeficiente de x como del de y a cada lado de la ecuación).

$$(x^2+2x\qquad)+(y^2-6y\qquad)=-7$$ Agrupe términos

$$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)=-7+1+9$$ Complete los cuadrados sumando 1 y 9 a cada lado

$$(x+1)^2+(y-3)^2=3$$

Comparando esta ecuación con la del círculo, vemos que $h=-1$, $k=3$ y $r=\sqrt{3}$, por lo que la ecuación dada representa el círculo con centro $(-1,3)$ y radio $\sqrt{3}$.
Este círculo se muestra en la figura 18. ■

SIMETRÍA

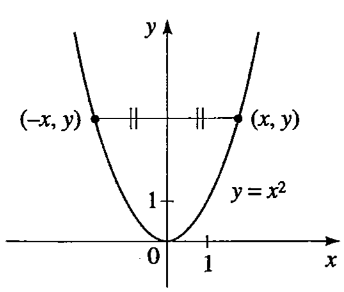
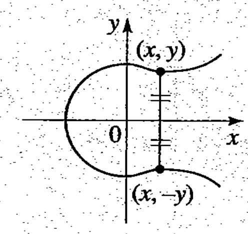
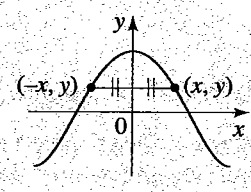
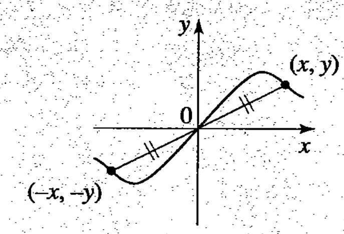


FIGURA 19

En la figura 19 se muestra la gráfica de $y=x^2$; note que la parte que se encuentra a la izquierda del eje y es la imagen de la que está a la derecha. La razón es que si el punto (x,y) está sobre la gráfica, también lo está $(-x,y)$, y ambos son reflexiones el uno del otro respecto al eje y. En este caso decimos que la gráfica es **simétrica respecto al eje y**. De manera análoga, decimos que la gráfica es **simétrica respecto al eje x** si cuando el punto x, y está sobre la gráfica, también lo está $(x,-y)$. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si siempre que (x,y) esté sobre la gráfica, también lo está $(-x,-y)$. En la tabla siguiente se dan las definiciones de los tres tipos de simetría y se explica cómo determinar si la gráfica de una ecuación exhibe alguna de éstas.

DEFINICIÓN DE SIMETRÍA

Tipo de simetría	Prueba de la simetría	Apariencia de la gráfica (figuras de esta sección)	Significado geométrico
Simetría respecto al eje x	La ecuación no cambia al sustituir y por $-y$	 (Figuras 14, 21)	La gráfica no cambia si se refleja sobre el eje x
Simetría respecto al eje y	La ecuación no cambia al sustituir x por $-x$	 (Figuras 10, 11, 12, 14, 19, 21)	La gráfica no cambia si se refleja sobre el eje y
Simetría respecto al origen	La ecuación no cambia al sustituir x por $-x$ y y por $-y$	 (Figuras 14, 20, 21)	La gráfica no cambia si se le gira 180° alrededor del origen. Esto es equivalente a una reflexión en el eje x seguida de una en el eje y.

Una razón por la cual la simetría es importante es que podemos utilizarla para trazar las gráficas de las ecuaciones. Los ejemplos que restan en esta sección ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 12 ■ Uso de la simetría y de las intersecciones para dibujar una gráfica

Determine las intersecciones en x y en y de la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 9x$. Verifique la simetría en la ecuación y dibuje su representación gráfica.

SOLUCIÓN Haciendo $x = 0$ en la ecuación obtenemos $y = 0$, por lo que la intersección en y es 0. Haciendo $y = 0$ se obtiene $x^3 - 9x = 0$, es decir $x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) = 0$. Por tanto, las intersecciones en x son 0, 3 y -3.

Si sustituimos x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación obtenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x)$$

$$-y = -x^3 + 9x$$

$$y = x^3 - 9x$$

y la ecuación no ha cambiado. Ello significa que la gráfica es simétrica respecto al origen, y trazamos ésta primero para los puntos correspondientes a $x > 0$ y después usando la simetría con respecto al origen (véase la figura 20).

x	$y = x^3 - 9x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
1	-8	$(1, -8)$
1.5	-10.125	$(1.5, -10.125)$
2	-10	$(2, -10)$
2.5	-6.875	$(2.5, -6.875)$
3	0	$(3, 0)$
4	28	$(4, 28)$

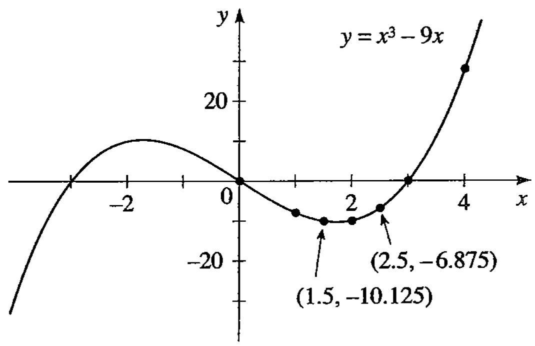


FIGURA 20

EJEMPLO 13 ■ Círculo con los tres tipos de simetría

Verifique la simetría de la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ no cambia cuando se sustituyen a x por $-x$ y a y por $-y$, puesto que $(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$, por lo que el círculo exhibe las tres clases de simetría. Es simétrico respecto al eje x, al eje y y al origen. Véase la figura 21.

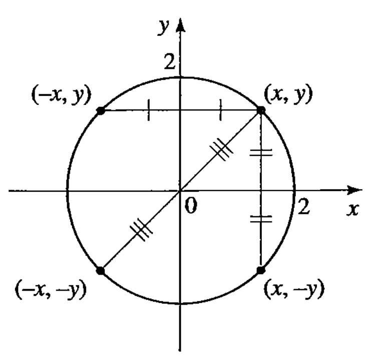


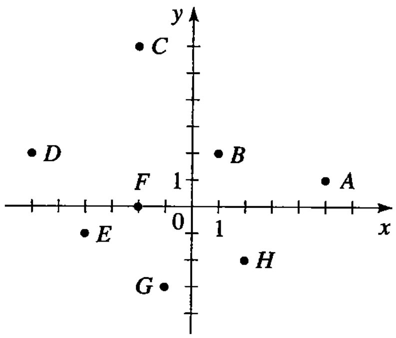
FIGURA 21
$x^2 + y^2 = 4$

1.8 EJERCICIOS

1. Grafique los puntos dados en un plano de coordenadas:

$$(2,3), (-2,3), (4,5), (4,-5), (-4,5), (-4,-5)$$

2. Determine las coordenadas de los puntos que se muestran en la figura.



3-8 ■ Se tiene un par de puntos
(a) Grafíquelos en un plano de coordenadas.
(b) Determine la distancia entre ellos.
(c) Obtenga el punto medio del segmento que los une.

3. $(2,3),\ (5,2)$

4. $(2,-1),\ (4,3)$

5. $(6,-2),\ (-1,3)$

6. $(1,-6),\ (-1,-3)$

7. $(3,4),\ (-3,-4)$

8. $(5,0),\ (0,6)$

9. Trace el rectángulo con vértices $A(1,3)$, $B(5,3)$, $C(1,-3)$ y $D(5,-3)$ en un plano de coordenadas. Determine el área del mismo.

10. Grafique el paralelogramo de vértices $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(3,6)$ y $D(7,6)$ en un plano de coordenadas. Determine el área del mismo.

11. Grafique los puntos $A(1,0)$, $B(5,0)$, $C(4,3)$ y $D(2,3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos AB, BC, CD y DA. ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABCD$ y cuál es su área?

12. Grafique los puntos $P(5,1)$, $Q(0,6)$ y $R(-5,1)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar el punto S a fin de que el cuadrilátero $PQRS$ sea un cuadrado? Determine el área de éste.

13-24 ■ Trace la región expresada por el conjunto dado.

13. $\{(x,y) \mid x \leq 0\}$

14. $\{(x,y) \mid y \geq 0\}$

15. $\{(x,y) \mid x = 3\}$

16. $\{(x,y) \mid y = -2\}$

17. $\{(x,y) \mid 1 < x < 2\}$

18. $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$

19. $\{(x,y) \mid xy < 0\}$

20. $\{(x,y) \mid xy > 0\}$

21. $\{(x,y) \mid x \geq 1 \text{ y } y < 3\}$

22. $\{(x,y) \mid |y| > 1\}$

23. $\{(x,y) \mid |x| \leq 2\}$

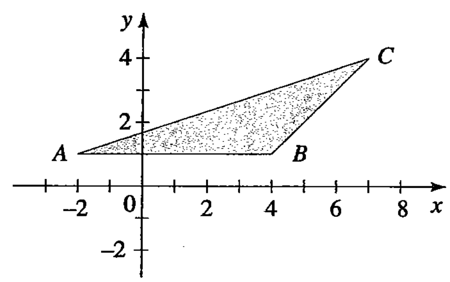
24. $\{(x,y) \mid |x| < 3 \text{ y } |y| > 2\}$

25. ¿Cuál de los puntos $A(6,7)$ o $B(-5,8)$ está más cerca del origen?

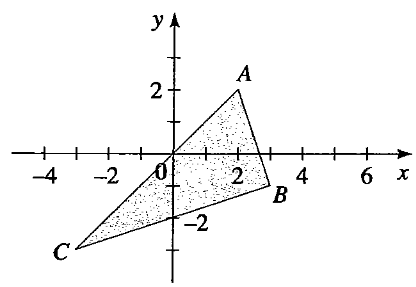
26. ¿Cuál de los puntos $C(-6,3)$ o $D(3,0)$ está más cerca de $E(-2,1)$?

27. Demuestre que el triángulo de vértices $A(0,2)$, $B(-3,-1)$ y $C(-4,3)$ es isósceles.

28. Determine el área del triángulo que se muestra en la figura



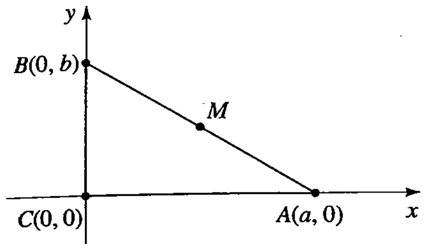
29. Refiérase al triángulo ABC en la figura.
(a) Demuestre que éste es un triángulo rectángulo utilizando el recíproco del teorema de Pitágoras.
(b) Determine el área.



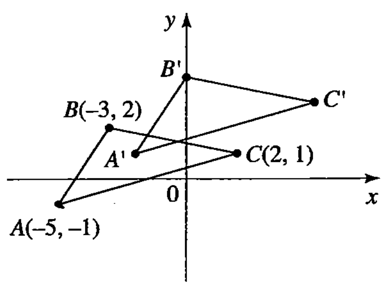
30. Determine un punto sobre el eje y equidistante de los puntos $(5,-5)$ y $(1,1)$.

31. (a) Grafique el paralelogramo de vértices $A(-2,-1)$, $B(4,2)$, $C(7,7)$ y $D(1,4)$
(b) Obtenga los puntos medios de las diagonales de éste.
(c) A partir del inciso (b) concluya que las diagonales se intersectan en su punto medio.

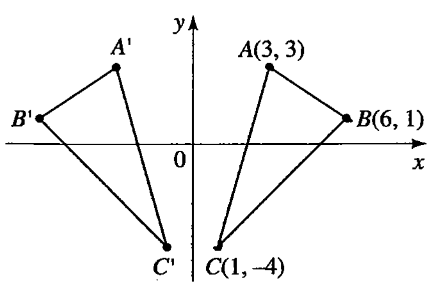
32. El punto M en la figura es el punto medio del segmento AB. Demuestre que M es equidistante de los vértices del triángulo ABC.



33. Suponga que cada punto en el plano de coordenadas es desplazado 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.
(a) ¿A qué nuevo punto es desplazado (5,3)?
(b) ¿En qué nuevo punto queda (a,b)?
(c) El triángulo ABC en la figura es desplazado al $A'B'C'$. Determine las coordenadas de A', B' y C'.



34. Suponga que el eje y actúa como espejo y refleja cada punto a su derecha a un punto a su izquierda.
(a) ¿En qué punto queda reflejado (3,7)?
(b) ¿El punto (a,b) queda reflejado en qué punto?
(c) El triángulo ABC en la figura se refleja en el $A'B'C'$. Determine las coordenadas de A', B' y C'.



35-52 ■ Elabore una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación. Determine las intersecciones en x y en y, e investigue si hay simetría.

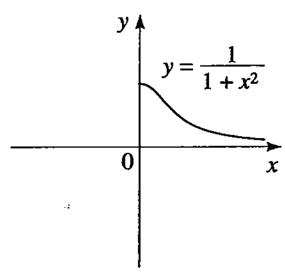
35. $y = x$
36. $y = -x$
37. $y = x - 1$
38. $y = 2x + 5$
39. $3x - y = 5$
40. $x + y = 3$
41. $y = 1 - x^2$
42. $y = x^2 + 2x$
43. $y = x^2 - 9$
44. $y = 9 - x^2$
45. $y = \sqrt{x}$
46. $y = \sqrt{4 - x^2}$
47. $y = |x|$
48. $x = |y|$
49. $y = 4 - |x|$
50. $y = |4 - x|$
51. $x = y^3$
52. $y = x^3 - 4x$

53-58 ■ Investigue si hay simetría en la ecuación dada.

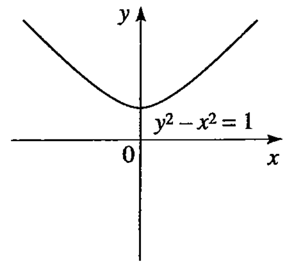
53. $y = x^4 + x^2$
54. $x = y^4 - y^2$
55. $x^2y^2 + xy = 1$
56. $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$
57. $y = x^3 + 10x$
58. $y = x^2 + |x|$

59-62 ■ Complete la gráfica utilizando la propiedad de simetría dada.

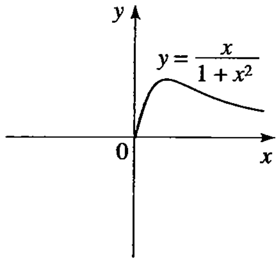
59. Simétrica respecto al eje y.



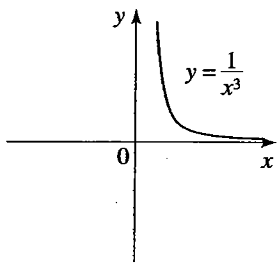
60. Simétrica respecto al eje x



61. Simétrica respecto al origen



62. Simétrica respecto al origen



63-68 ■ Determine la ecuación del círculo que satisfaga las condiciones dadas.

63. Centro $(2, -1)$; radio 3

64. Centro $(-1, -4)$; radio 8

65. Centro en el origen; pasa por $(4, 7)$

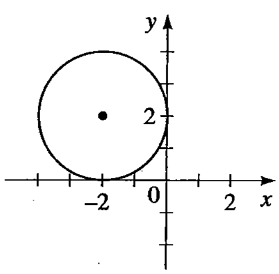
66. Centro $(-1, 5)$; pasa por $(-4, -6)$

67. Extremos de un diámetro son $P(-1, 3)$ y $Q(7, -5)$

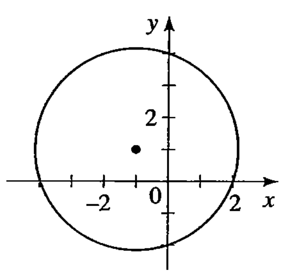
68. Centro $(7, -3)$; tangente al eje x

69-70 ■ Obtenga la ecuación del círculo que se muestra en la figura

69.



70.



71-76 ■ Demuestre que la ecuación representa un círculo, y determine el centro y el radio del mismo.

71. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

72. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

73. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

74. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

75. $2x^2 + 2y^2 + x = 0$

76. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

77-80 ■ Trace la gráfica de la ecuación dada.

77. $x^2 + y^2 + 4x - 10y = 21$

78. $4x^2 + 4y^2 + 2x = 0$

79. $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 45 = 0$

80. $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 200 = 0$

81-82 ■ Grafique la región dada por el conjunto.

81. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

82. $\{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 9\}$

83. Determine el área de la región externa al círculo $x^2 + y^2 = 4$ y que se encuentra dentro del círculo

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

84. Grafique la región que satisface simultáneamente las desigualdades $x^2 + y^2 \leqslant 9$ y $y \geqslant |x|$. ¿Cuál es el área de ésta?

85. ¿Bajo qué condiciones de los coeficientes a, b, y c la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa un círculo? Una vez satisfecha dicha condición, determine el centro y el radio del círculo. [*Sugerencia:* Complete los cuadrados.]

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

86. Completar un segmento de recta Grafique los puntos $M(6, 8)$ y $A(2, 3)$. Si M es el punto medio del segmento AB, determine las coordenadas de B. Escriba una breve descripción de los pasos seguidos para determinar B, y explique su procedimiento.

87. Completar un paralelogramo Grafique los puntos $P(-1, -4)$, $Q(1, 1)$ y $R(4, 2)$. ¿Dónde debe estar localizado S de forma que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo? Escriba una breve descripción de los pasos seguidos y explique su procedimiento.

1.9 CALCULADORAS GRAFICADORAS Y COMPUTADORAS

En esta sección utilizaremos las calculadoras graficadoras o las computadoras para graficar ecuaciones más complejas y resolver problemas con un grado de dificultad mayor. Comenzamos describiendo la forma en que funcionan estos dispositivos y cómo reconocer y evitar algunos de los errores comunes que se cometen al usarlos.

CÓMO USAR LOS DISPOSITIVOS GRAFICADORES

Una calculadora gráfica o una computadora presenta una sección rectangular de la gráfica de una ecuación en una **ventana de despliegue o pantalla**, que llamamos **rectángulo de visualización.** La pantalla predeterminada a menudo presenta una imagen incompleta o engañosa, por lo que es importante escoger el rectángulo de visualización con cuidado. Si elegimos los valores de x en un intervalo que va desde un mínimo (Xmin = a) a un máximo (Xmax = b), y los de y en uno que va desde un mínimo (Ymin = c) a un máximo (Ymax = d), entonces la parte de la gráfica desplegada es la que se encuentra en el rectángulo

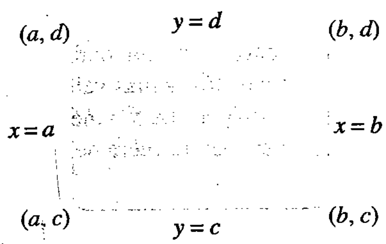


FIGURA 1
El rectángulo de visualización $[a, b]$ por $[c, d]$

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$

que se muestra en la figura 1. Nos referiremos a éste como el *rectángulo de visualización* $[a, b]$ por $[c, d]$.

El dispositivo graficador despliega la gráfica de una ecuación de una manera muy similar a como lo hemos hecho. Grafica los puntos de la forma (x, y) para un cierto número de valores de x igualmente espaciados entre a y b. Si la ecuación no está definida para un valor de x o si la y correspondiente queda fuera del rectángulo de visión, el dispositivo ignora dicho valor y pasa al siguiente. Finalmente, la máquina une cada uno de los puntos para formar una representación de la gráfica de la ecuación.

EJEMPLO 1 ■ Trazado de gráficas en diferentes rectángulos de visualización

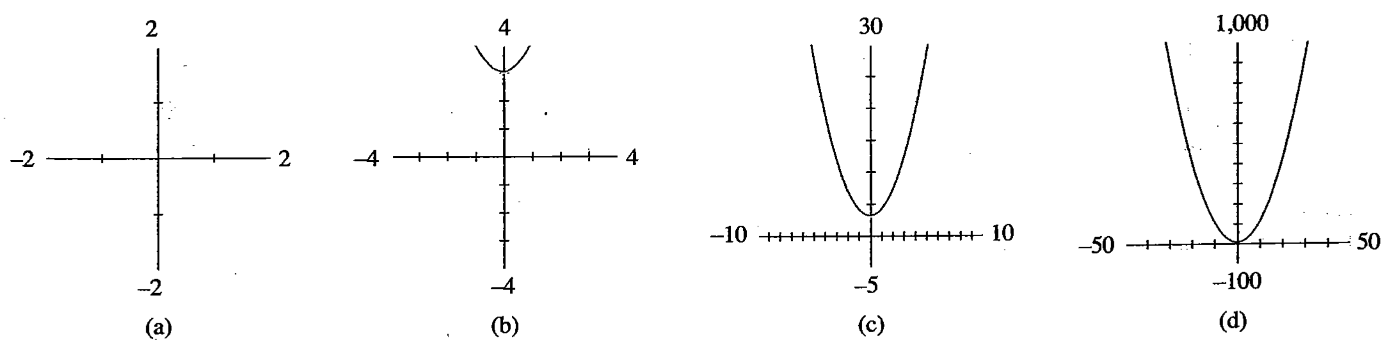
Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 3$ en cada rectángulo de visualización.

(a) $[-2, 2]$ by $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ by $[-4, 4]$

(c) $[-10, 10]$ by $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ by $[-100, 1{,}000]$

SOLUCIÓN Para el inciso (a) seleccione el rango haciendo Xmin = −2, Xmax = 2, Ymin = −2 y Ymax = 2. La gráfica resultante se muestra en la figura 2(a). ¡La pantalla

FIGURA 2
Gráficas de $y = x^2 + 3$



de despliegue aparece vacía! Es fácil explicar esto. Observe que $x^2 \geqslant 0$ todo x, de forma que $y = x^2 + 3 \geqslant 3$. Esto significa que la gráfica de la ecuación se encuentra totalmente fuera del rectángulo de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

Las gráficas para los rectángulos de visualización en las partes (b), (c) y (d) se muestran en la figura 2, partes (b), (c) y (d). Observe que obtenemos imágenes más completas en las partes (c) y (d), aunque la de la parte (d) no muestra con claridad que la intersección en el eje y es 3. ■

EJEMPLO 2 ■ Gráfica de una ecuación cúbica

Grafique la ecuación $y = x^3 - 49x$.

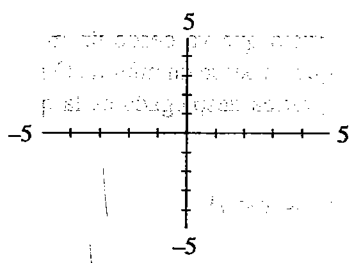


FIGURA 3

SOLUCIÓN Experimentemos con diferentes rectángulos de visualización. Si comenzamos con el de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos la gráfica de la figura 3. En la mayor parte de las calculadoras la pantalla aparecerá vacía; sin embargo, no está totalmente así ya que se ha graficado el punto (0,0). Resulta que para todos los demás valores de x que la calculadora selecciona entre -5 y 5, el valor de y es mayor que 5 o menor que -5, por lo que el punto correspondiente en la gráfica se encuentra fuera del rectángulo de visualización.

Si utilizamos la opción de ampliación de la calculadora para cambiar el rectángulo de visualización a uno de $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$, entonces obtenemos la imagen que se muestra en la figura 4(a). La gráfica parece consistir de líneas verticales, pero sabemos que esto no puede ser correcto. Si observamos atentamente mientras se va formando la gráfica, vemos que ésta se sale de la pantalla y vuelve durante el proceso de graficación. Esto indica que necesitamos ver más de la gráfica en la dirección vertical, por lo que cambiamos el rectángulo de visualización a $[-10, 10]$ por $[-100,100]$. La gráfica resultante se muestra en la figura 4(b), y ésta no pone de manifiesto todas las características importantes de la ecuación, por lo que cambiamos a $[-10, 10]$ por $[-200, 200]$ como se ve en la figura 4(c). Ahora tenemos la confianza de haber llegado a un rectángulo de visualización apropiado. En el capítulo 3, cuando analicemos los polinomios de tercer grado, veremos que la gráfica que se muestra en la figura 4(c) realmente revela todas las características principales de la ecuación.

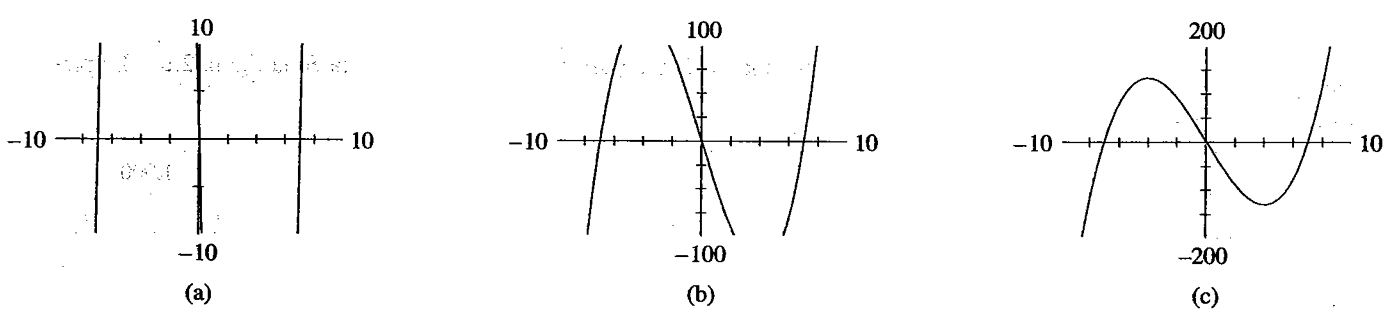


FIGURA 4
Gráficas de $y = x^3 - 49x$

■

Alan Turing (1912–1954) estuvo en el núcleo de dos sucesos importantes del siglo XX —la Segunda Guerra Mundial y la invención de las computadoras—. A los 23 años se hizo famoso en el ámbito de las matemáticas al resolver el tercer problema de Hilbert (véase la página 578). En su investigación inventó una máquina teórica, conocida como máquina de Turing, que sirvió de inspiración para las modernas computadoras digitales. Durante la Segunda Guerra Mundial, Turing dirigió el esfuerzo británico para descifrar los códigos secretos alemanes, y su éxito en esta tarea jugó un papel decisivo en la victoria aliada. Para llevar a cabo los numerosos pasos lógicos para descifrar un mensaje en código, Turing desarrolló procedimientos de decisión similares a los de los modernos programas de cómputo. Después de la guerra colaboró en el desarrollo de las primeras computadoras electrónicas en la Gran Bretaña. También fue pionero en el área de la inteligencia artificial y en la simulación por computadora de los procesos biológicos. A los 42 años falleció por envenenamiento con cianuro en circunstancias misteriosas.

A partir de los ejemplos 1 y 2 vemos que la elección de un rectángulo de visualización puede ser la causa de una importante diferencia en la apariencia de una gráfica. Algunas veces es necesario cambiar a uno más amplio para obtener una imagen más completa —una vista más global— de la gráfica. En el siguiente ejemplo veremos cómo la ecuación misma nos puede dar suficiente información para seleccionar un rectángulo de visualización adecuado.

EJEMPLO 3 ■ Selección de un rectángulo de visualización apropiado

Determine un rectángulo de visualización apropiado para la ecuación $y = \sqrt{8 - 2x^2}$ y grafíquela.

SOLUCIÓN La ecuación está definida sólo cuando la expresión bajo la raíz cuadrada no es negativa, por lo que tenemos

$0 \leq 8 - 2x^2$	La expresión bajo la raíz cuadrada no debe ser negativa
$2x^2 \leq 8$	Sume $2x^2$
$x^2 \leq 4$	Divida por 2
$\lvert x \rvert \leq 2$	Tome la raíz cuadrada
$-2 \leq x \leq 2$	Significado de $\lvert x \rvert \leq 2$ (véase la página 77)

Por lo tanto, los valores de x para los que y está definida se encuentran en el intervalo $[-2,2]$. También

$$0 \leq \sqrt{8 - 2x^2} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

por lo que los valores correspondientes de y pertenecen al intervalo $[0,2.83]$.

Escogemos el rectángulo de visualización de tal manera que los intervalos en x y en y sean algo mayores que los que hemos determinado. Escogiendo $[-3,3]$ por $[-1,4]$ obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 5.

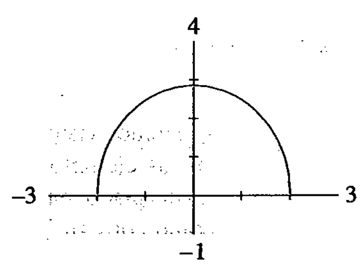


FIGURA 5 $y = \sqrt{8 - 2x^2}$ ■

Las calculadoras graficadoras pueden graficar fácilmente ecuaciones en las cuales se puede dejar sola a la y en un lado del signo igual. El siguiente ejemplo muestra cómo graficar ecuaciones que no tienen esta propiedad.

EJEMPLO 4 ■ Gráfica de un círculo

Grafique el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN En la sección 1.8 vimos cómo graficar este círculo; su centro está en el origen y su radio es 1. Sin embargo, graficar éste con una calculadora no es tan directo ya que no podemos dejar sola a la y de un lado del signo igual. Si intentamos resolver la ecuación para y, tenemos

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Por lo tanto podemos considerar al círculo como descrito por la gráfica de *dos* ecuaciones:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

La primera representa la mitad superior del círculo (puesto que $y \geqslant 0$), y la segunda corresponde a la mitad inferior del mismo ya que $y \leqslant 0$). Si graficamos la primera en el rectángulo de [–2,2] por [–2,2], obtenemos el semicírculo que se muestra en la figura 6(a). Asimismo, la gráfica de la segunda es el semicírculo de la figura 6(b). Al graficar éstos en la misma pantalla obtenemos el círculo completo de la figura 6(c).

La gráfica de la figura 6(c) tiene una apariencia ligeramente aplanada. La mayor parte de las calculadoras permiten ajustar las escalas de los ejes de forma que los círculos realmente lo parezcan. Por ejemplo en la TI–82, del menú Zoom elija "ZSquare" para ajustar correctamente las escalas. (En la TI–85 el comando es "Zsq.")

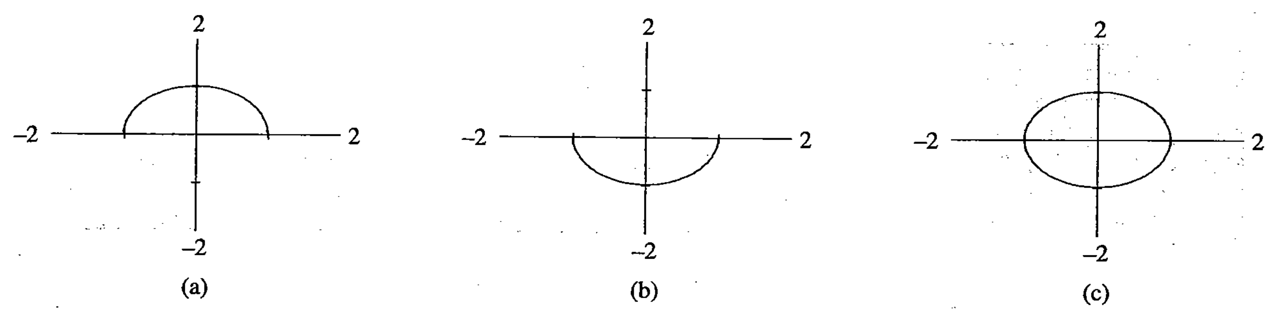


FIGURA 6
Graficación de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$

■

Hemos visto uno de los errores en el uso de calculadoras gráficas y computadoras: en los ejemplos 1 y 2 se mostró que la elección de un rectángulo de visualización inapropiado puede dar una representación engañosa de la gráfica. También vimos cómo corregir la situación —incluimos las partes importantes de la gráfica cambiando a un rectángulo de visualización más amplio. En el siguiente ejemplo se ilustra otra dificultad.

EJEMPLO 5 ■ Cómo evitar líneas extrañas en la gráfica

Obtenga la gráfica de la ecuación $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

Otra forma de evitar líneas extrañas es cambiar de modo de graficación, con el fin de que sólo se presenten los puntos graficados.

SOLUCIÓN En la figura 7(a) se muestra la gráfica producida por una calculadora con un rectángulo de [–9, 9] por [–9, 9]. Al unir los puntos sobre la gráfica, la calculadora generó una línea vertical desde la parte superior a la inferior de la pantalla. Dicho segmento no debe formar parte de la gráfica, ya que el lado derecho de $y = 1/(1 - x)$ no está definido para $x = 1$. Algunas veces podemos eliminar líneas extrañas mediante un cambio de escala. Aquí, por ejemplo cuando cambiamos a un rectángulo [–5, 5] por [–5, 5], obtenemos la gráfica de la figura 7(b).

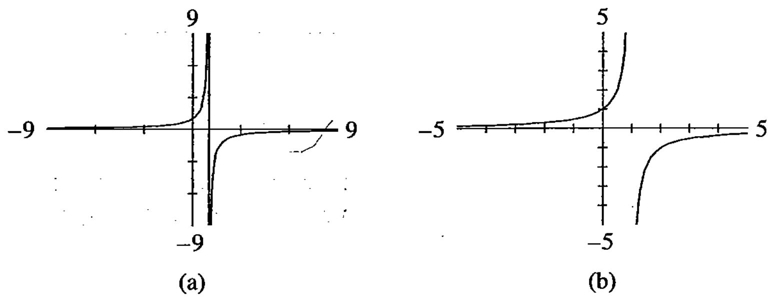


FIGURA 7
Gráficas de $y = \dfrac{1}{1 - x}$

RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

En las secciones 1.5 y 1.7 resolvimos en forma algebraica ecuaciones y desigualdades. La habilidad de trazar rápido y precisamente la gráfica de ecuaciones nos proporciona otro método de determinar soluciones aproximadas de éstas. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Para resolverla primero graficamos

$$y = x^2 - 3x - 10$$

como se muestra en la figura 8(a). Nos interesan aquellos valores de x para los cuales $y = 0$; éstos son las intersecciones en x de la gráfica. Moviendo el cursor cerca de éstas, vemos que parecen estar en $x = -2$ y $x = 5$. Para confirmar lo anterior utilice la opción

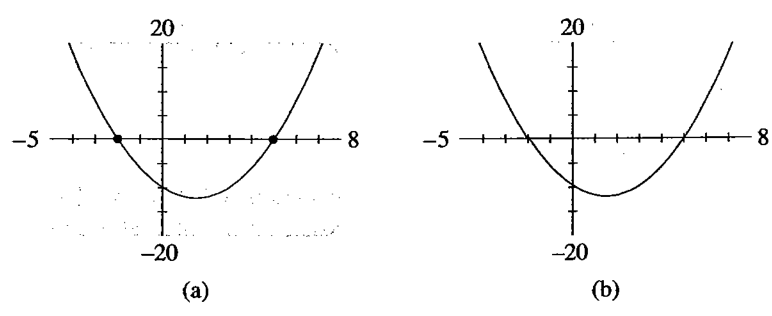


FIGURA 8
Gráficas de $y = x^2 - 3x - 10$

de ampliación de la calculadora. En esta caso particular, podemos verificar que estos valores son las raíces al substituirlas directamente en la ecuación.

Para resolver la desigualdad

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

obtenemos la gráfica de $y = x^2 - 3x - 10$ y buscamos las coordenadas en x de los puntos con coordenadas en y mayores que 0; en éstas la gráfica se encuentra por encima del eje x. Por lo tanto, de la figura 8(b) vemos que la solución de la desigualdad es $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$. De forma análoga, la solución de

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

son las coordenadas en x de aquellos puntos cuya coordenada en y es menor que 0, esto es, los puntos en los que la gráfica se encuentra por debajo del eje x. Por lo tanto, la solución es el intervalo $(-2, 5)$.

En el ejemplo 6 podemos utilizar la fórmula cuadrática para obtener

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}$$

Puede comprobar que con una aproximación a dos lugares decimales, éstas son las soluciones que obtuvimos con el método gráfico.

EJEMPLO 6 ■ Resolución gráfica de una ecuación

Resuelva la ecuación $2x^2 + 3x - 7 = 0$.

SOLUCIÓN Graficamos

$$y = 2x^2 + 3x - 7$$

en el rectángulo de $[-5, 5]$ por $[-15, 15]$ (véase la figura 9), y las soluciones son las intersecciones en x. Moviendo el cursor hacia éstas, encontramos que $x \approx -2.8$ y $x \approx 1.3$. Utilizando la opción de ampliación, obtenemos las aproximaciones

$$x \approx -2.77 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.27$$ ■

EJEMPLO 7 ■ Resolución gráfica de una desigualdad

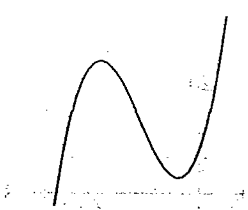
Resuelva $x^3 - 5x^2 \geqslant -8$.

SOLUCIÓN Reescribimos la desigualdad como

$$x^3 - 5x^2 + 8 \geqslant 0$$

y después graficamos la ecuación

$$y = x^3 - 5x^2 + 8$$



en el rectángulo de $[-6, 6]$ por $[-15, 15]$, como se muestra en la figura 10. La solución consiste en los intervalos en los que la gráfica se encuentra por encima del eje x. Moviendo el cursor a las intersecciones en x obtenemos que la solución es $[-1.1, 1.5] \cup [4, 6, \infty)$. ■

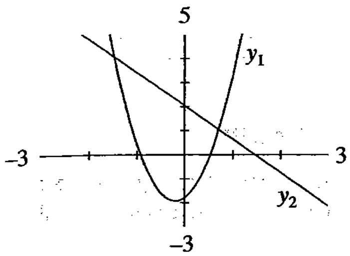


FIGURA 11
$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$
$y_2 = 2.0 - 1.4x$

EJEMPLO 8 ■ Resolución gráfica de una desigualdad

Resuelva la desigualdad $3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \leqslant 2.0 - 1.4x$.

SOLUCIÓN Graficamos las ecuaciones

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$$
$$y_2 = 2.0 - 1.4x$$

en el rectángulo de visualización de la figura 11. Estamos interesados en aquellos valores de x para los cuales $y_1 \leqslant y_2$; éstos son los puntos para los cuales la gráfica de y_2 se encuentra por arriba de la de y_1. Para determinar el intervalo apropiado buscamos las coordenadas en x de los puntos donde se intersecan ambas, y concluimos que la solución es aproximadamente $[-1.45, 0.72]$. ■

1.9 EJERCICIOS

1-6 ■ Use una calculadora graficadora o una computadora para decidir cuál de los rectángulos de visualización (a)–(d) proporciona la gráfica más apropiada de la ecuación.

1. $y = x^4 + 2$
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[0, 4]$ por $[0, 4]$
(c) $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$ (d) $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

2. $y = x^2 + 7x + 6$
(a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ (b) $[0, 10]$ por $[-20, 100]$
(c) $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$ (d) $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

3. $y = 100 - x^2$
(a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$ (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-15, 15]$ por $[-30, 110]$ (d) $[-4, 4]$ por $[-30, 110]$

4. $y = 2x^2 - 1000$
(a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-1000, 1000]$
(d) $[-25, 25]$ por $[-1200, 200]$

5. $y = 10 + 25x - x^3$
(a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
(d) $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

6. $y = \sqrt{8x - x^2}$
(a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$ (b) $[-5, 5]$ por $[0, 100]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$ (d) $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

7-20 ■ Determine el rectángulo de visualización apropiado para la ecuación y utilícelo para dibujar la gráfica.

7. $y = 100x^2$

8. $y = -100x^2$

9. $y = 4 + 6x - x^2$

10. $y = 0.3x^2 + 1.7x - 3$

11. $y = \sqrt[4]{256 - x^2}$

12. $y = \sqrt{12x - 17}$

13. $y = 0.01x^3 - x^2 + 5$

14. $y = x(x + 6)(x - 9)$

15. $y = \dfrac{1}{x^2 + 25}$

16. $y = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

17. $y = x^4 - 4x^3$

18. $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$

19. $y = 1 + |x - 1|$

20. $y = 2x - |x^2 - 5|$

21. Grafique el círculo $x^2 + y^2 = 9$ resolviendo para y y graficando dos ecuaciones como en el ejemplo 4.

22. Grafique el círculo $(y - 1)^2 + x^2 = 1$ resolviendo para y y graficando dos ecuaciones como en el ejemplo 4.

23. Grafique la ecuación $4x^2 + 2y^2 = 1$ resolviendo para y y graficando las ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas negativa y positiva. (La gráfica se conoce como *elipse*.)

24. Grafique la ecuación $y^2 - 9x^2 = 1$ resolviendo para y y graficando las ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas negativa y positiva. (La gráfica se conoce como *hipérbola*.)

25-32 ■ Obtenga las soluciones de la ecuación en el intervalo dado mediante una gráfica en el rectángulo de visión apropiado. Exprese el resultado con dos cifras decimales correctas.

25. $x^2 - 7x + 12 = 0$; $[0, 6]$

26. $x^2 - 0.75x + 0.125 = 0$; $[-2, 2]$

27. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; $[-1, 4]$

28. $16x^3 + 16x^2 = x + 1$; $[-2, 2]$

29. $x - \sqrt{x + 1} = 0$; $[-1, 5]$

30. $1 + \sqrt{x} = \sqrt{1 + x^2}$; $[-1, 5]$

31. $x^{1/3} - x = 0$; $[-3, 3]$

32. $x^{1/2} + x^{1/3} - x = 0$; $[-1, 5]$

33-40 ▪ Determine las soluciones de la desigualdad mediante las gráficas apropiadas. Exprese la respuesta con dos cifras decimales correctas.

33. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

34. $0.5x^2 + 0.875x \leq 0.25$

35. $x^3 + 11x \leq 6x^2 + 6$

36. $16x^3 + 24x^2 > -9x - 1$

37. $x^{1/3} < x$

38. $\sqrt{0.5x^2 + 1} \leq 2|x|$

39. $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

40. $(x + 1)^2 \leq x^3$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

41. **Notación de una ecuación en calculadoras graficadoras** Cuando digitaliza las siguientes ecuaciones en su calculadora, ¿en qué difiere lo que ve en la pantalla de la forma usual de escribirlas? (Revise el manual, si no está seguro).

(a) $y = |x|$

(b) $y = \sqrt[5]{x}$

(c) $y = \dfrac{x}{x - 1}$

1.10 RECTAS

En esta sección obtendremos ecuaciones de rectas que se encuentran en el plano de coordenadas, y para ello primero es necesario alguna forma de medir la "inclinación" de una recta. A partir de la figura 1 podemos ver que la inclinación está determinada por la rapidez con que la recta sube (o baja) conforme nos movemos de izquierda a derecha. Por lo tanto, definimos la pendiente de una recta como la razón entre el cambio en la coordenada y (esto es, la distancia que sube o baja la recta) y el cambio en la coordenada x (esto es, la distancia recorrida hacia la derecha). El cambio en la coordenada y entre dos puntos se conoce como **elevación**, y el de en la coordenada x como **recorrido.** Así, para determinar la pendiente de una recta elegimos dos puntos en ella y calculamos

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}}$$

De forma precisa tenemos la siguiente definición.

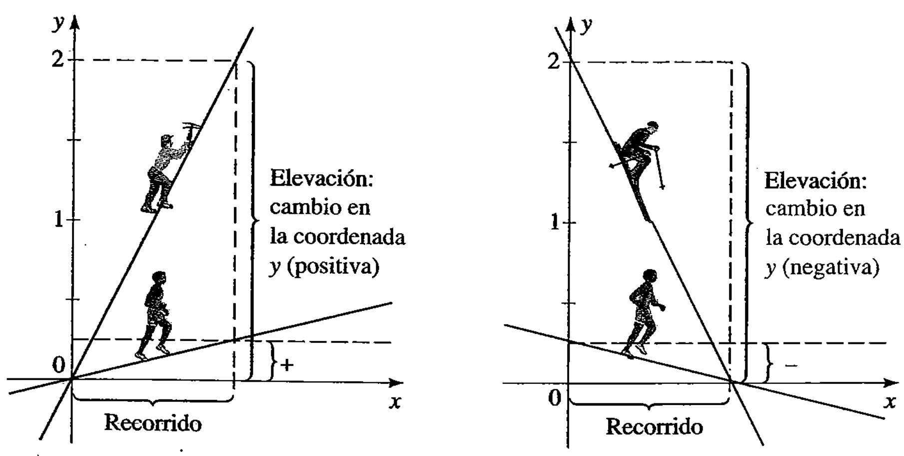


FIGURA 1

PENDIENTE DE UNA RECTA

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de los puntos seleccionados en la recta, y podemos verificar esto a partir de los triángulos semejantes de la figura 2:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

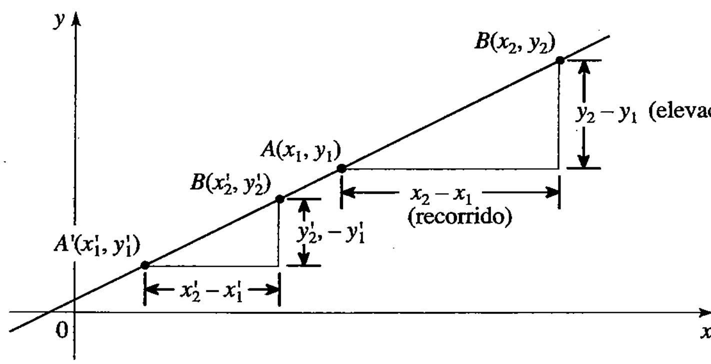


FIGURA 2

La figura 3 muestra varias rectas con su respectiva pendiente. Note que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba, mientras que las que tienen pendiente negativa se inclinan hacia abajo. Las rectas con una inclinación más pronunciada son aquellas para las cuales el valor absoluto de la pendiente es mayor; una recta horizontal tiene pendiente igual a cero.

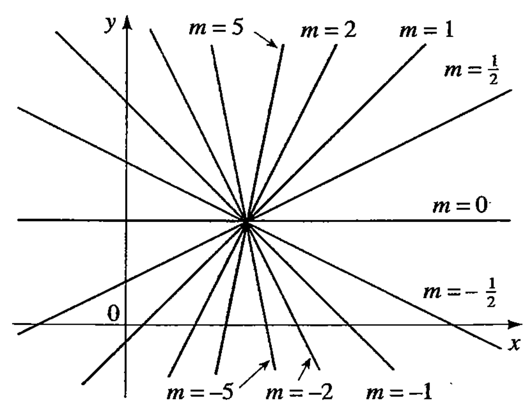


FIGURA 3

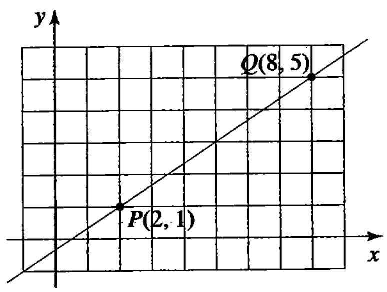


FIGURA 4

EJEMPLO 1 ■ Determinación de la pendiente a partir de dos puntos de la recta

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2,1)$ y $Q(8,5)$.

SOLUCIÓN Puesto que cualesquiera dos puntos diferentes determinan una recta, existe sólo una que pasa por éstos. A partir de la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto quiere decir que por cada 3 unidades que nos movamos hacia la derecha, la recta se eleva 2; ésta se muestra en la figura 4. ■

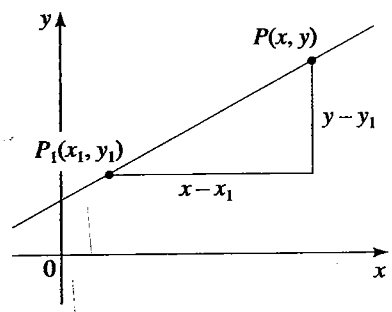


FIGURA 5

Ahora obtendremos una ecuación de la recta que pasa por un punto dado $P(x_1,y_1)$ y tiene una pendiente m. Un punto $P(x,y)$ con $x \neq x_1$ pertenece a esta recta si y sólo si la pendiente de la misma entre P_1 y P es igual a m (véase la figura 5), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$, y observamos que ésta también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. En consecuencia, se trata de una ecuación de la recta dada.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1,y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 ■ Determinación de la ecuación de una recta con un punto y una pendiente dados

(a) Obtener una ecuación de la recta que pasa por $(1,-3)$ y tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$.
(b) Graficar la recta.

SOLUCIÓN

(a) Utilizando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta de la siguiente manera

$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$	De la ecuación punto–pendiente
$2y + 6 = -x + 1$	Multiplique por 2
$x + 2y + 5 = 0$	Reordene

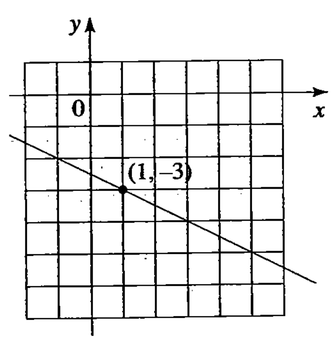


FIGURA 6

(b) El hecho de que la pendiente tiene valor de $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades hacia la derecha, la recta desciende 1 unidad. Esto nos permite trazar la recta de la figura 6. ■

EJEMPLO 3 ■ Determinación de la ecuación de una recta entre 2 puntos dados

Obtenga la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente es

$$m = \frac{-4-2}{3-(-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Utilizando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{De la ecuación punto-pendiente}$$
$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplicar por 2}$$
$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reordene}$$
■

Considere una recta no vertical con pendiente m y que interseca el eje y en b. Al número b se le conoce como la ordenada al origen de la recta (N. del R.T.) (véase la figura 7). Esto significa que la intersección ocurre en $(0, b)$, por lo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = b$, se convierte en

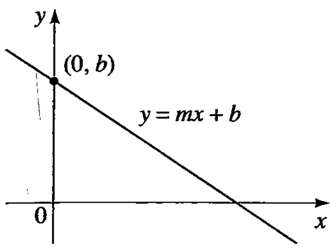


FIGURA 7

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a $y = mx + b$, que se conoce como la **forma pendiente-intersección** de la ecuación de una recta.

FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta con pendiente m e intersección en y igual a b es

$$y = mx + b$$

EJEMPLO 4 ■ Determinación de la pendiente de una recta a partir de su ecuación

Determine la pendiente y la intersección en y de cada recta

(a) $y = 3x - 2$ (b) $3y - 2x = 1$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación $y = 3x - 2$ tiene la forma $y = mx + b$, donde $m = 3$ y $b = -2$. Así, de la forma pendiente-intersección de la ecuación vemos que la pendiente es 3 y la intersección en y es -2.

(b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$
$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$
$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida por 3}$$

De la forma pendiente–intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y que la intersección en y es $b = \frac{1}{3}$. ■

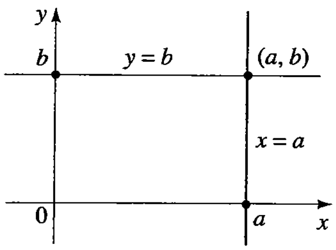


FIGURA 8

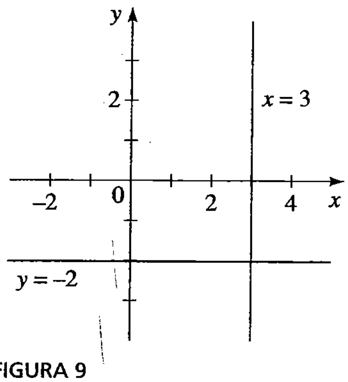


FIGURA 9

Si una recta es horizontal su pendiente es $m = 0$ y su ecuación es $y = b$, donde b es la intersección en y (véase la figura 8). Una recta vertical no tiene pendiente definida, pero podemos escribir su ecuación en la forma $x = a$ siendo a su intersección en x, ya que la coordenada x de todos los puntos de esta recta es a.

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a,b) es $x = a$

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a,b) es $y = b$

EJEMPLO 5 ■ Rectas verticales y horizontales

(a) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección en x igual a 3.
(b) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección en y igual a -2.

Ambas rectas están graficadas en la figura 9 ■

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + by + C = 0$$

donde A, B y C son constantes, y A y B no son simultáneamente igual a 0. La ecuación de una recta es lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$, o $-mx + y - b = 0$, la cual es lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$, o bien $x - a = 0$, misma que es lineal con $A = 1, B = 0$ y $C = -a$.

Inversamente, la gráfica de una ecuación lineal es una recta:

- Si $B \neq 0$, la ecuación se reescribe como

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

  y ésta es la forma pendiente–intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).
- Si $B = 0$ la ecuación es $Ax + C = 0$, es decir $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos probado lo siguiente.

ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ ambas no son cero})$$

es una recta. De manera inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

EJEMPLO 6 ■ Gráfica de una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $3x - 5y = 15$.

SOLUCIÓN Puesto que $3x - 5y = 15$ es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar ésta, basta determinar dos puntos que se encuentren en ella. Los más sencillos son las intersecciones.

Intersección en x: sustituya $y = 0$ para obtener $3x = 15$, por lo que $x = 5$.

Intersección en y: sustituya $x = 0$ para obtener $-5y = 15$, por lo que $y = -3$.

Con estos puntos podemos obtener la gráfica que se muestra en la figura 10.

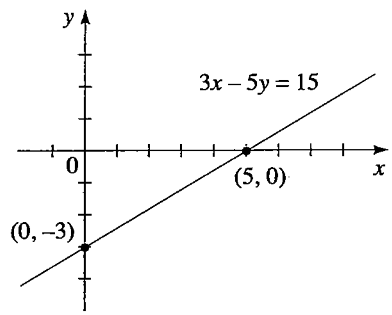


FIGURA 10

Otro método es escribir la ecuación en la forma pendiente–intersección:

$$3x - 5y = 15$$
$$5y = 3x - 15$$
$$y = \tfrac{3}{5}x - 3$$

Esta ecuación tiene la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{3}{5}$ y la intersección en y *es* $b = -3$. Esta información puede ser utilizada para trazar la recta. ■

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Dado que la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas tengan la misma pendiente. De hecho podemos probar esto.

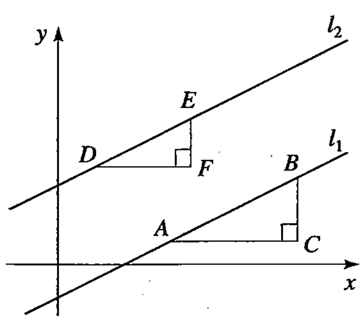


FIGURA 11

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

■ **Demostración** Supongamos que las rectas l_1 y l_2 de la figura 11 tienen pendientes m_1 y m_2. Si son paralelas, entonces los triángulos rectángulos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, E)} = m_2$$

Inversamente, si las pendientes son iguales entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas. □

EJEMPLO 7 ■ Determinación de la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,2) y que es paralela a $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en la forma pendiente–intersección

$$
\begin{aligned}
4x + 6y + 5 &= 0 \\
6y &= -4x - 5 && \text{Reste } 4x + 5 \\
y &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} && \text{Divida por 6}
\end{aligned}
$$

La recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$, y puesto que la recta pedida es paralela a ésta también tiene la misma pendiente. De la forma punto–pendiente, de la ecuación de una recta, obtenemos

$$
\begin{aligned}
y - 2 &= -\tfrac{2}{3}(x - 5) && \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2) \\
3y - 6 &= -2x + 10 && \text{Multiplique por 3} \\
2x + 3y - 16 &= 0 && \text{Reordene}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es $2x + 3y - 16 = 0$. ■

La condición para las rectas perpendiculares no es tan obvia como para las paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, esto es, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una vertical (pendiente no definida).

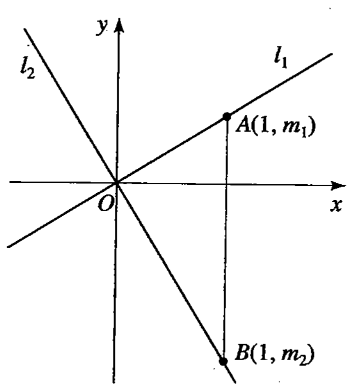


FIGURA 12

■ **Demostración** En la figura 12 se muestran dos rectas que se intersectan en el origen. (Si las rectas se intersectaran en cualquier otro punto, tomaríamos en consideración paralelas a ellas que se intersectaran en el origen; ambos pares de rectas tienen las mismas pendientes.)

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Note que $A(1, m_1)$ pertenece a l_1 y que $B(1, m_2)$ pertenece a l_2. Utilizando el teorema de Pitágoras y su inverso, $OA \perp OB$, si y sólo si,

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

De la fórmula de la distancia esto se escribe como

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$ ■

EJEMPLO 8 ■ Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas a las que pertenecen PR y QR son respectivamente

$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4$$

Puesto que $m_1m_2 = -1$, éstas son perpendiculares y por lo tanto PQR es un triángulo rectángulo. Se muestra en la figura 13.

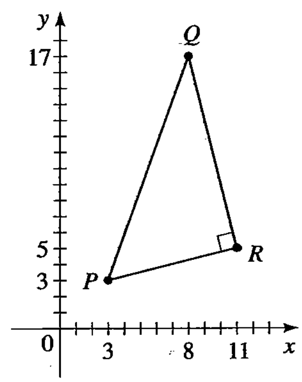


FIGURA 13 ■

EJEMPLO 9 ■ Obtenga la ecuación de una recta perpendicular a una dada

Determine la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 7 obtuvimos que la pendiente de $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$, y la pendiente de una recta perpendicular a ésta es su recíproco negativo, esto es $\frac{3}{2}$. Puesto que la recta pedida pasa por (0,0), la forma punto–pendiente nos da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x$$ ■

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones más simples que establecen una relación entre dos variables son las lineales. Ahora veremos cómo se utilizan éstas para modelar problemas que involucran dos cantidades.

EJEMPLO 10 ■ Relación lineal entre las escalas Fahrenheit y Celsius

La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(a) Trace la gráfica de esta ecuación con los valores de C en el eje horizontal y los de F en el vertical.
(b) ¿Cuál es la pendiente de esta gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección en F y qué representa?.

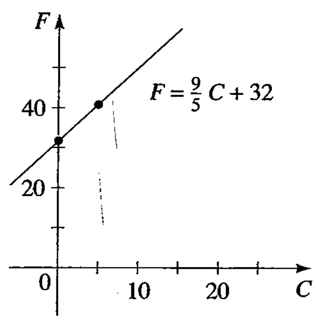


FIGURA 14

SOLUCIÓN

(a) Ésta es una ecuación lineal, por lo que su gráfica es una recta. En lugar de x y y (le llamamos C y F a las coordenadas, lo cual no modifica la forma de la gráfica). Puesto que dos puntos definen una recta, primero determinamos dos que satisfagan la ecuación y luego los graficamos trazando una recta que los una. Cuando $C = 0$, entonces $F = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$, y cuando $C = 5$ tenemos $F = \frac{9}{5}(5) + 32 = 41$. Por lo tanto, los puntos (0,32) y (5,41) pertenecen a la recta. Estos puntos y la recta se muestran en la figura 14.

(b) Puesto que la ecuación está dada en la forma pendiente–intersección, vemos que la pendiente es $\frac{9}{5}$ y que la intersección en F es 32. La pendiente representa el cambio en °F por cada °C; entonces, un incremento de 9°F corresponde a un aumento de 5°C. La intersección en F es el punto sobre la gráfica cuya coordenada en C es 0. Así, 32°F es lo mismo que 0°C (punto de congelación del agua). ■

EJEMPLO 11 ■ Relación lineal entre temperatura y altitud

(a) Conforme el aire seco se eleva, se expande y enfría. Si la temperatura a nivel del suelo es de 20°C y a una altitud de 1 km es de 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en función de la altitud h (en kilómetros). (Suponga que la expresión es lineal.)
(b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?
(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Puesto que estamos suponiendo una relación lineal entre h y T, la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, se tiene que $T = 20$, por lo que

$$20 = m(0) + b$$

$$b = 20$$

Entonces tenemos

$$T = mh + 20$$

para $h = 1$ corresponde $T = 10$, y por lo tanto

$$10 = m(1) + 20$$

$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

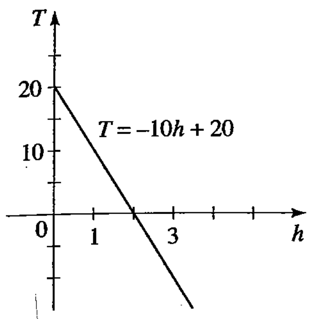


FIGURA 15

(b) La gráfica se muestra en la figura 15. La pendiente es $m = -10$ °C/km, y ésta representa la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia por encima del nivel del suelo.

(c) A una altitud de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5 \text{ °C}$$ ■

Los economistas modelan la oferta y la demanda de un artículo utilizando ecuaciones lineales. Por ejemplo, podríamos tener:

En las ecuaciones de oferta y demanda, la mayoría de los economistas expresan el precio p en términos de y que es la cantidad producida o vendida. Por claridad, hemos elegido expresar y en términos de p.

Ecuación de oferta $\quad y = 8p - 10$

Ecuación de demanda $\quad y = -3p + 15$

donde p es el precio del artículo. En la ecuación de oferta, y (la *cantidad producida*) aumenta conforme se incrementa el precio ya que si éste es elevado más personas producirán el artículo. La ecuación de demanda indica que y (la *cantidad vendida*) se reduce al elevarse el precio. El **punto de equilibrio** es el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones de oferta y demanda; en éste la cantidad producida es igual a la vendida.

EJEMPLO 12 ■ Oferta y demanda para el trigo

Un economista modela el mercado del trigo mediante las ecuaciones siguientes

Ecuación de oferta $\quad y = 8.33p - 14.58$

Ecuación de demanda $\quad y = -1.39p + 23.35$

Aquí p es el precio por bushel (en dólares) y y la cantidad de bushels producidos y vendidos (en millones).

(a) ¿En qué punto el precio es tan bajo que no se produce trigo?
(b) ¿En qué punto el precio es tan elevado que no se vende trigo?
(c) Trace la gráfica de las rectas de oferta y demanda en el mismo rectángulo de visualización y determine el punto de equilibrio. Estime el precio de equilibrio y las cantidades producidas y vendidas en este punto.

SOLUCIÓN

(a) Si no se produce trigo, entonces $y = 0$ en la ecuación de la oferta.

$$0 = 8.33p - 14.58 \qquad \text{Haga } y = 0 \text{ en la ecuación de oferta.}$$

$$p = 1.75 \qquad \text{Resuelva para } p$$

Por lo tanto, al bajo precio de \$1.75 por bushel la producción de trigo se detiene totalmente.

(b) Si no se vende trigo, entonces $y = 0$ en la ecuación de la demanda

$$0 = -1.39p + 23.35 \qquad \text{Haga } y = 0 \text{ en la ecuación de demanda}$$

$$p = 16.80 \qquad \text{Resuelva para } p$$

Por lo tanto, al elevado precio de \$16.80 por bushel no se vende trigo.

(c) En la figura 16 se muestran las gráficas tanto de la oferta como de la demanda en el mismo rectángulo de visualización. Al mover el cursor al punto de intersección, encontramos que éste es, aproximadamente, (3.9, 17.9). Por lo tanto el punto de equilibrio ocurre en \$3.90 por bushel, y se producen y venden 17.9 millones de bushels. ■

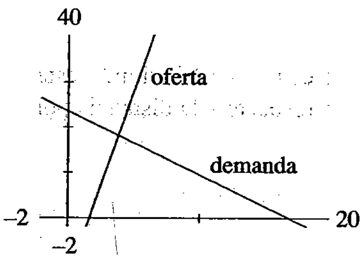


FIGURA 16

1.10 EJERCICIOS

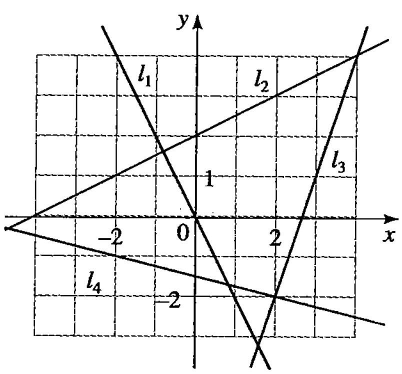
1-6 ■ Determine la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

1. $P(2, 4)$, $Q(4, 12)$ **2.** $P(-2, 5)$, $Q(4, -3)$

3. $P(-1, 3)$, $Q(1, -6)$ **4.** $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

5. $P(2, 2)$, $Q(0, 0)$ **6.** $P(-2, 3)$, $Q(5, 5)$

7. Determine la pendiente de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 que se muestra en la figura

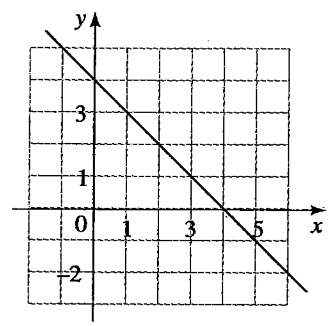


8. (a) Grafique las rectas que pasan por $(0, 0)$ y tienen pendiente $1, 0, \frac{1}{2}, 2$ y -1.

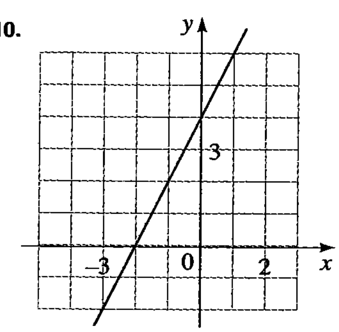
(b) Grafique las rectas que contienen a $(0, 0)$ y tienen pendientes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y 3.

9-12 ■ Obtenga la ecuación de la recta graficada.

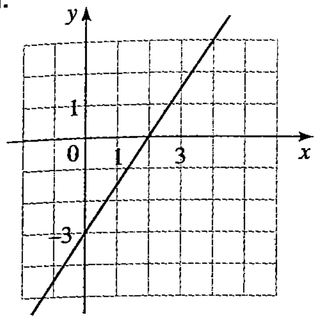
9.



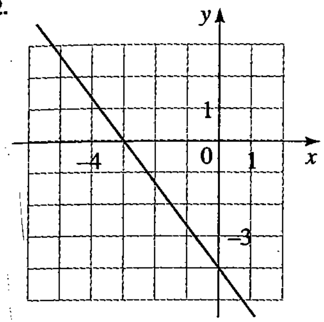
10.



11.



12.



13-32 ■ Obtenga la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

13. Pasa por $(2, 3)$; pendiente 1

14. Pasa por $(-2, 4)$; pendiente -1

14. Pasa por $(1, 7)$; pendiente $\frac{2}{3}$

16. Pasa por $(-3, -5)$; pendiente $-\frac{7}{2}$

17. Pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$

18. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$

19. Pendiente 3; intersección en y -2

20. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección en y 4

21. Intersección en x 1; intersección en y -3

22. Intersección en x -8; intersección en y 6

23. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje x

24. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje y

25. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

26. Intersección en y 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

27. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

28. Pasa por $(2, 6)$; perpendicular a la recta $y = 1$

29. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

30. Por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

31. Por $(1,7)$; paralela a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-2, 1)$

32. Por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5,-1)$

33. (a) Grafique la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por $(-2, 1)$
(b) Obtenga la ecuación de esta recta

34. (a) Grafique la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$
(b) Determine la ecuación de esta recta

35-36 ■ En una calculadora grafique la familia de rectas dadas en una pantalla normal. ¿Qué tienen en común?

35. $y = 2 + m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm 10$

36. $y = 1.3x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 2.8$

37-48 ■ Determine la pendiente y la intersección en y de la recta, y obtenga su gráfica

37. $x + y = 3$	**38.** $3x - 2y = 12$
39. $x + 3y = 0$	**40.** $2x - 5y = 0$
41. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$	**42.** $-3x - 5y + 30 = 0$
43. $y = 4$	**44.** $4y + 8 = 0$
45. $3x - 4y = 12$	**46.** $x = -5$
47. $3x + 4y - 1 = 0$	**48.** $4x + 5y = 10$

49. Demuestre que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son los vértices de un paralelogramo.

50. Demuestre que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

51. Demuestre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son los vértices de un rectángulo.

52. Utilice el concepto de pendiente para determinar si los puntos dados son colineales (pertenecen a una misma recta).
(a) $(1,1)$, $(3,9)$, $(6, 21)$
(b) $(-1, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 15)$

53. Determine la ecuación de la recta perpendicular que biseca el segmento que une a los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

54. Obtenga el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $2y + 3x - 6 = 0$.

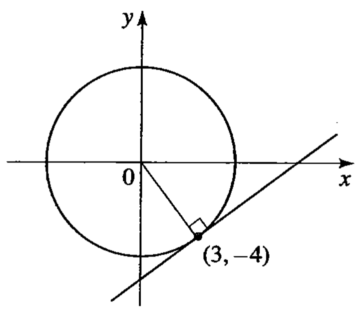
55. (a) Demuestre que, si las intersecciones en x y en y de una recta son a y b (diferentes de cero), entonces su ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ésta se conoce como **la forma dos–intersecciones** de la ecuación de una recta.

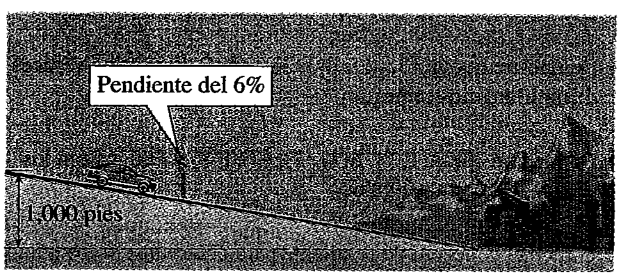
(b) Utilice el inciso (a) para obtener una ecuación de la recta cuya intersección en x es 6 y en y es -8.

56. (a) Obtenga una ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3,-4)$. (Véase la figura.)



(b) ¿En qué otro punto sobre el círculo se encuentra una recta tangente paralela a la del inciso (a)?

57. Al oeste de Albuquerque, Nuevo Mexico, la ruta 40 hacia el este es una recta y desciende en forma pronunciada hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo que significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Al conducir por esta carretera se observa a partir de las señales de elevación que se ha descendido una distancia de 1,000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?



58. Una pequeña empresa adquiere una computadora por \$4,000. Después de 4 años se espera que el valor de la misma sea de \$200. Para fines de contabilización, el negocio utiliza la *depreciación lineal* para obtener el valor de la computadora en un tiempo dado. Esto quiere decir que si V es el valor de la misma en el tiempo t, entonces se utiliza una ecuación lineal para relacionar a V con t.

(a) Obtenga la ecuación lineal que relaciona a V con t.

(b) Determine el valor depreciado de la computadora después de 3 años de la fecha de adquisición.

59. Un fabricante de pequeños aparatos domésticos encuentra que si produce x hornos con tostador en un mes, su costo de producción está dado por la ecuación $y = 6x + 3{,}000$ (y en dólares).

(a) Trace la gráfica de esta ecuación.

(b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección en y de esta gráfica?

60. El gerente de un bazar de fin de semana sabe por experiencia que si cobra x dólares por un espacio rentado en el bazar, entonces el número de espacios y que puede rentar está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

(a) Trace la gráfica de esta ecuación. (Recuerde que el valor de la renta por espacio y el número de espacios rentados, deben ser ambas cantidades no negativas.)

(b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección en y y la intersección en x de esta gráfica?

61. Los biólogos han observado que la frecuencia del canto de los grillos de una cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece lineal. Un grillo produce 120 sonidos por minuto a 70°F y 168 por minuto a 80°F.

(a) Obtenga la ecuación lineal que relaciona la temperatura t y el número de sonidos por minuto n.

(b) Si los grillos están cantando a 150 sonidos por minuto, estime la temperatura.

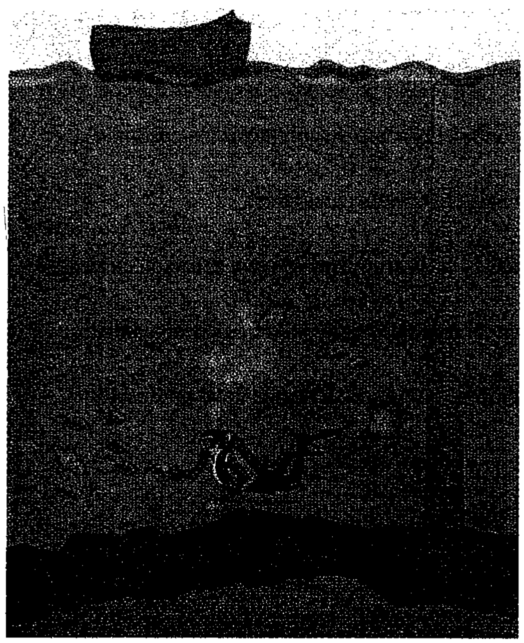
62. La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$ (véase el ejemplo 10).

(a) Complete la tabla para comparar las dos escalas en los valores dados.

C	F
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

(b) Determine la temperatura a la cual las escalas coinciden. [*Sugerencia*: suponga que a es la temperatura a la cual coinciden. Haga $F = a$ y $C = a$. Después resuelva para a.]

63. Al nivel del mar, la presión del agua es la misma que la del aire por encima del agua, 15 lb/pulg^2. Por debajo de la superficie, la presión aumenta en 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de profundidad.
(a) Obtenga una ecuación para la relación entre presión y profundidad por debajo de la superficie del océano.
(b) ¿A qué profundidad es la presión igual a 100 lb/pulg^2?.



64. Jason y Debbie salen de Detroit a las 2:00 PM y conducen a rapidez constante hacia el oeste por la carretera I–90. Pasan por Ann Arbor a 40 millas de Detroit a las 2:50 PM.
(a) Exprese la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido.
(b) Trace la gráfica de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

65. El costo mensual de conducir un automóvil depende del número de millas recorridas. Lynn observó que durante el mes de mayo gastó \$380 por 480 millas y en junio \$460 por 800 millas.
(a) Exprese el costo mensual C en función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal proporciona un modelo adecuado.
(b) Utilice el inciso (a) para predecir el costo de conducir 1,500 millas por mes.
(c) Trace la gráfica de la ecuación. ¿Qué representa la pendiente de la recta?
(d) ¿Qué representa la intersección en y de la gráfica?
(e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo adecuado en esta situación?

66. El gerente de una fábrica de muebles establece que cuesta \$2,200 fabricar 100 sillas en un día y \$4,800 fabricar 300 también en un día.
(a) Suponiendo que la relación entre costo y número de sillas es lineal, obtenga una ecuación que exprese esta relación, y después grafique la ecuación.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta del inciso (a) y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección en y, y qué representa?

67-68 ■ Se proporcionan ecuaciones para la oferta y la demanda.
(a) Trace la gráfica de las dos ecuaciones en un rectángulo de visualización apropiado.
(b) Estime el punto de equilibrio de la gráfica.
(c) Estime el precio y la cantidad de la mercancía producida y vendida en el punto de equilibrio.

67. Oferta: $y = 0.45p + 4$
Demanda: $y = -0.65p + 28$

68. Oferta: $y = 8.5p + 45$
Demanda: $y = -0.6p + 300$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

69. ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura exterior durante un cierto período de tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Si es igual a cero?

70. Puntos colineales Suponga que se le dan las coordenadas de tres puntos en un plano, y desea ver si pertenecen a la misma recta. ¿Cómo puede hacerlo utilizando pendientes? ¿Utilizando la fórmula de la distancia? ¿Puede plantear algún otro método?

1 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Defina cada término utilizando sus propias palabras. (Verifique su respuesta consultando la definición en el texto).
   (a) Un entero
   (b) Un número racional
   (c) Un número irracional
   (d) Un número real

2. Enuncie cada una de las siguientes propiedades de los números reales.
   (a) Conmutativa
   (b) Asociativa
   (c) Distributiva

3. Explique lo que significa la unión y la intersección de conjuntos. ¿Qué notación se utiliza para estas conceptos?.

4. ¿Qué es un intervalo abierto? ¿Qué es un intervalo cerrado? ¿Qué notación se utiliza para éstos?

5. ¿Cuál es el valor absoluto de un número?

6. (a) En la expresión a^x, ¿cuál es la base y cuál el exponente?
   (b) ¿Qué significa a^x si $x = n$ es un entero positivo?
   (c) ¿Qué significa si $x = 0$?
   (d) ¿Qué significa si x es un entero negativo: $x = -n$, donde n es un entero positivo?
   (e) ¿Qué significa si $x = m/n$, un número racional?
   (f) Enuncie la ley de los exponentes.

7. (a) ¿Qué significa $\sqrt[n]{a} = b$?
   (b) ¿Por qué es $\sqrt{a^2} = |a|$?
   (c) ¿Cuántas raíces n–ésimas reales tiene un número real positivo si n es impar? ¿Si n es par?

8. Explique cómo funciona el procedimiento de racionalización del denominador.

9. ¿Cuál es la diferencia entre una variable y una constante en una expresión algebraica?

10. Enuncie las fórmulas de productos especiales para $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

11. Enuncie cada fórmula de factorización.
    (a) Diferencia de cuadrados
    (b) Diferencia de cubos
    (c) Suma de cubos

12. ¿Cuál es la diferencia entre una identidad y una ecuación?

13. ¿Qué es la raíz de una ecuación?

14. Escriba la forma general de cada tipo de ecuación.
    (a) Lineal
    (b) Cuadrática

15. ¿Cuál es la propiedad de producto cero?

16. Describa el proceso de completar los cuadrados.

17. Enuncie la fórmula cuadrática.

18. ¿Cuál es el discriminante de una ecuación cuadrática?

19. Enuncie las reglas para operar con desigualdades.

20. ¿Cómo se resuelve una desigualdad no lineal?

21. Enuncie cada fórmula
    (a) De la distancia
    (b) Del punto medio

22. Dada una ecuación, ¿cuál es su gráfica?

23. ¿Cómo se obtienen las intersecciones en x y en y de una gráfica?

24. Escriba una ecuación del círculo con centro en (h,k) y radio r

25. Explique el significado de cada tipo de simetría. ¿Cómo verifica cada uno?
    (a) Simetría respecto al eje x
    (b) Simetría respecto al eje y
    (c) Simetría respecto al origen

26. Defina la pendiente de una recta.

27. Escriba cada forma de la ecuación de una recta.
    (a) La forma de punto y pendiente
    (b) La forma pendiente intersección

28. Dadas las rectas con pendientes m_1 y m_2, cómo puede saber si son
    (a) Paralelas
    (b) Perpendiculares

EJERCICIOS

1-4 ■ Enuncie la propiedad de los números reales utilizada.

1. $x + 5 = 5 + x$
2. $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$
3. $A(x + y) = Ax + Ay$
4. $(A + 1)(x + y) = (A + 1)x + (A + 1)y$

5-6 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y grafíque

5. $(-1, 3]$
6. $(-\infty, 4]$

7-8 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y grafique.

7. $x > 2$
8. $1 \leqslant x \leqslant 6$

9-16 ■ Evalúe la expresión

9. $|3 - |-9||$
10. $\sqrt[3]{-125}$
11. $216^{-1/3}$
12. $64^{2/3}$
13. $\dfrac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$
14. $\sqrt[4]{4}\,\sqrt[4]{324}$
15. $2^{1/2}8^{1/2}$
16. $\sqrt{2}\,\sqrt{50}$

17-26 ■ Simplifique la expresión

17. $(2x^3y)^2(3x^{-1}y^2)$
18. $(a^2)^{-3}(a^3b)^2(b^3)^4$
19. $\dfrac{x^4(3x)^2}{x^3}$
20. $\left(\dfrac{r^2s^{4/3}}{r^{1/3}s}\right)^6$
21. $\sqrt[3]{(x^3y)^2y^4}$
22. $\sqrt{x^2y^4}$
23. $\dfrac{x}{2 + \sqrt{x}}$
24. $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$
25. $\dfrac{8r^{1/2}s^{-3}}{2r^{-2}s^4}$
26. $\left(\dfrac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

27. Escriba el número 78,250,000,000 en notación científica.
28. Escriba el número 2.08×10^{-8} en notación decimal.
29. Si $a \approx 0.00000293$, $b \approx 1.582 \times 10^{-14}$ y $c \approx 2.8064 \times 10^{12}$, utilice una calculadora para obtener una aproximación ab/c.
30. Si su corazón late 80 veces por minuto y usted vive hasta los 90 años, estime el número de veces que latirá éste. Exprese su respuesta en notación científica.

31-44 ■ Factorice totalmente la expresión

31. $12x^2y^4 - 3xy^5 + 9x^3y^2$
32. $x^2 - 9x + 18$
33. $x^2 + 3x - 10$
34. $6x^2 + x - 12$
35. $4t^2 - 13t - 12$
36. $x^4 - 2x^2 + 1$
37. $25 - 16t^2$
38. $y^3 - 2y^2 - y + 2$
39. $x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2}$
40. $8x^3 + y^6$
41. $a^2y - b^2y$
42. $ax^2 + bx^2 - a - b$
43. $x^3(x - 6)^2 + x^4(x - 6)$
44. $x^2(x - 2) + x(x - 2)^2$

45-60 ■ Realice las operaciones indicadas y simplifique.

45. $(2x + 1)(3x - 2) - 5(4x - 1)$
46. $(2y - 7)(2y + 7)$
47. $(2a^2 - b)^2$
48. $(2x + 1)^3$
49. $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)$
50. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x}$
51. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3}$
52. $\dfrac{x^3/(x - 1)}{x^2/(x^3 - 1)}$
53. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} \div \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 1}$
54. $x - \dfrac{1}{x + 1}$
55. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$
56. $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x^2 - x - 2}$
57. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x - 2}$
58. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}}$

59. $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (Racionalice el numerador)

60. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (Racionalice el denominador)

61-74 ■ Obtenga todas las soluciones reales de la ecuación.

61. $3x + 12 = 24$

62. $5x - 7 = 42$

63. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 2$

64. $2(x+3) - 4(x-5) = 8 - 5x$

65. $\dfrac{x-5}{2} - \dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{5}{6}$

66. $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

67. $x^2 - 9x + 14 = 0$

68. $x^2 + 24x + 144 = 0$

69. $2x^2 + x = 1$

70. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

71. $3x^2 + 4x - 1 = 0$

72. $x^2 - 3x + 9 = 0$

73. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} = 3$

74. $x - 4\sqrt{x} = 32$

75. El dueño de una tienda vende pasas a \$3.20 la libra y nueces a \$2.40 la libra. Decide mezclar éstas y vender 50 libras de la mezcla a \$2.72 la libra. ¿Qué cantidades de pasas y nueces debe utilizar?

76. La distancia aproximada d (en pies) que recorre un conductor después de darse cuenta que debe detenerse súbitamente está dada por la fórmula siguiente, donde x es la rapidez del automóvil (en millas por hora):

$$d = x + \frac{x^2}{20}$$

Si un automóvil recorre 75 pies antes de detenerse, ¿cuál es su rapidez antes de la aplicación de los frenos?

77. Anthony sale de Kingstown a las 2:00 PM y conduce hasta Queensville, a 160 millas de distancia, a 45 millas por hora. A las 2:15 Helen sale de Queensville conduciendo hacia Kingstown a 40 millas por hora. ¿A qué hora se cruzarán sobre la carretera?

78. Una mujer va en bicicleta a 8 millas por hora más rápido que si corriera. Todas las mañanas va en bicicleta 4 millas y corre $2\frac{1}{2}$ millas, para un total de ejercicio de una hora. ¿A qué rapidez corre?

79. Abbie pinta dos veces más rápido que Beth y tres veces más rápido que Cathie. Si necesitan 60 minutos para pintar una estancia trabajando las tres juntas, ¿cuánto tardaría Abbie si trabajara sola?

80. Una alberca rectangular tiene una profundidad uniforme de 8 pies y una longitud de dos veces su ancho. Si la alberca contiene 8,464 pies cúbicos de agua, ¿cuáles son sus dimensiones?

81-89 ■ Resuelva la desigualdad. Exprese la solución utilizando notación de intervalos y grafique el conjunto solución en la recta numérica.

81. $3x - 2 > -11$

82. $12 - x \geqslant 7x$

83. $3 - x \leqslant 2x - 7$

84. $x^2 + 4x - 12 > 0$

85. $\dfrac{2x+5}{x+1} \leqslant 1$

86. $2x^2 \geqslant x + 3$

87. $\dfrac{x-4}{x^2-4} \leqslant 0$

88. $|x - 4| < 0.02$

89. $|2x + 1| \geqslant 1$

90. El volumen de una esfera está dada por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Encuentre el intervalo de valores del radio de forma que el volumen ocurra entre 8 y 12 pies cúbicos inclusive.

91-92 ■ Se dan dos puntos P y Q.

(a) Grafique P y Q en el plano de coordenadas

(b) Determine la distancia de P a Q

(c) Obtenga el punto medio del segmento PQ

(d) Trace la recta definida por P y Q y obtenga su ecuación en la forma pendiente–intersección

(e) Grafique el círculo que pasa por Q y tiene como centro a P, y determine la ecuación de éste.

91. $P(2, 0)$, $Q(-5, 12)$

92. $P(7, -1)$, $Q(2, -11)$

93-94 ■ Grafique la región dada por el conjunto

93. $\{(x, y) \mid |x| < 4 \text{ y } |y| < 2\}$

94. $\{(x, y) \mid |x| \geqslant 4 \text{ o } |y| \geqslant 2\}$

95. ¿Cuál de los puntos $A(4, 4)$ o $B(5, 3)$ está más cerca de $C(-1, -3)$?

96. Obtenga la ecuación del círculo con centro $(2, -5)$ y radio $\sqrt{2}$.

97. Escriba la ecuación del círculo con centro $(-5, -1)$ y que pase por el origen.

98. Obtenga la ecuación del círculo que contiene los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-1, 8)$ y que tiene como centro el punto medio del segmento PQ.

99-102 ■ Determine si la ecuación representa un círculo, un punto o no tiene gráfica. Si la ecuación es la de un círculo, determine su centro y su radio

99. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$

100. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = \frac{1}{2}$

101. $x^2 + y^2 + 72 = 12x$

102. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

103. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1,-6)$ y $(2,-4)$

104. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(6, -3)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

105. Encuentre una ecuación de la recta que intersecta al eje x en 4 y al y en 12.

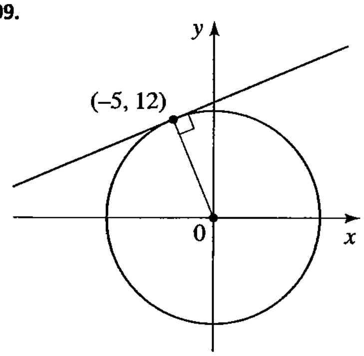
106. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,7)$ y es perpendicular a la recta $x - 3y + 16 = 0$

107. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a $3x + 15y = 22$

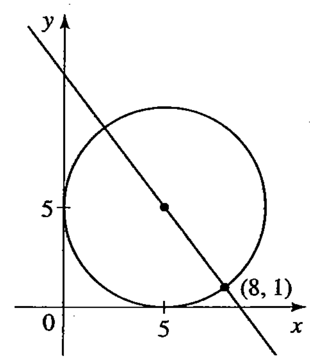
108. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es paralela a la que pasa por $(-1, -3)$ y $(3, 2)$

109-110 ■ Encuentre ecuaciones para el círculo y la recta que se muestran en la figura.

109.



110.



111-120 ■ Explore la simetría de la ecuación y trace su gráfica

111. $y = 2 - 3x$

112. $2x - y + 1 = 0$

113. $x + 3y = 21$

114. $x = 2y + 12$

115. $\frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 1$

116. $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 0$

117. $y = 16 - x^2$

118. $8x + y^2 = 0$

119. $x = \sqrt{y}$

120. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

121-124 ■ Utilice una graficadora para resolver la ecuación o la desigualdad a dos decimales correctos.

121. $x^3 - 3x - 1 = 0$

122. $x^2 = \sqrt{x + 4}$

123. $0.1x + 1 \geqslant x^3$

124. $4 - x^2 \leqslant 3 - \sqrt{x + 3}$

1 EXAMEN

1. (a) Grafique los intervalos $[-3, 2]$ y $(4, \infty)$ en la recta numérica.
   (b) Exprese las desigualdades $x < 5$ y $-2 \leq x \leq 1$ en notación de intervalos.
   (c) Determine la distancia entre -22 y 31 en la recta numérica.

2. Evalúe cada expresión.

   (a) $(-3)^4$ (b) $\dfrac{5^{18}}{5^{12}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ (d) $16^{-3/4}$

3. Simplifique cada expresión.

   (a) $\sqrt{200} - \sqrt{8}$ (b) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ (c) $\left(\dfrac{2x^{1/4}}{y^{1/3}x^{1/6}}\right)^3$

   (d) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (e) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$

4. Escriba cada número en notación científica.

   (a) 325,000,000,000 (b) 0.000008931

5. Realice las operaciones indicadas y simplifique.

   (a) $(x - 5)(2x + 3)$ (b) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ (c) $(3t + 4)^2$

6. Factorice totalmente cada expresión.

   (a) $9x^2 - 25$ (b) $6x^2 + 7x - 5$ (c) $x^3 - 4x^2 - 3x + 12$
   (d) $x^4 + 27x$ (e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$

7. Racionalice el denominador $\dfrac{x}{\sqrt{x} - 2}$.

8. Resuelva la ecuación para w.

$$V = 4wh^2 + 2wh$$

9. Obtenga todas las soluciones reales de cada ecuación.

   (a) $2x + 7 = 12 + \frac{5}{2}x$

   (b) $\dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x}$

   (c) $x^2 - x - 12 = 0$

   (d) $2x^2 + 4x + 3 = 0$

   (e) $x^{1/2} - 3x^{3/2} + 2x^{5/2} = 0$

   (f) $x^4 + 27x = 0$

10. Bill condujo de Ajax a Bixby a una rapidez promedio de 50 millas por hora, y de regreso a 60 millas por hora. Todo el viaje duró $4\frac{2}{5}$ horas. Obtenga la distancia entre estas dos ciudades.

11. Un predio rectangular tiene una longitud 70 pies mayor que su ancho. Cada diagonal entre esquinas opuestas tiene 130 pies. ¿Cuáles son las dimensiones del predio?

12. Resuelva cada una de las desigualdades. Dibuje la solución en la recta numérica y escriba la misma utilizando notación de intervalos.

(a) $-1 \leqslant 5 - 2x$

(b) $x(x-1)(x-2) > 0$

(c) $|x-3| < 2$

(d) $\dfrac{2x+5}{x+1} \leqslant 1$

13. Una botella de medicina debe almacenarse a una temperatura entre 5 y 10°C. ¿A qué intervalo corresponde esta temperatura en la escala Fahrenheit? [*Nota*: las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) satisfacen la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.]

14. Supongamos que $A(-7,4)$ y $B(5,-12)$ son puntos en un plano.

(a) Determine la longitud del segmento AB.

(b) Obtenga el punto medio del segmento AB.

(c) Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

(d) Encuentre una ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto medio de AB.

(e) Encuentre una ecuación del círculo para el cual AB es un diámetro.

15. Trace la gráfica de cada ecuación.

(a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$

(b) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 10y + 17 = 0$

16. Encuentre una ecuación de la recta con la propiedad dada.

(a) Que pasa por $(-2,3)$ y es paralela a $2x + 6y = 17$

(b) Que tenga una intersección en $x = -3$ y una en $y = 12$

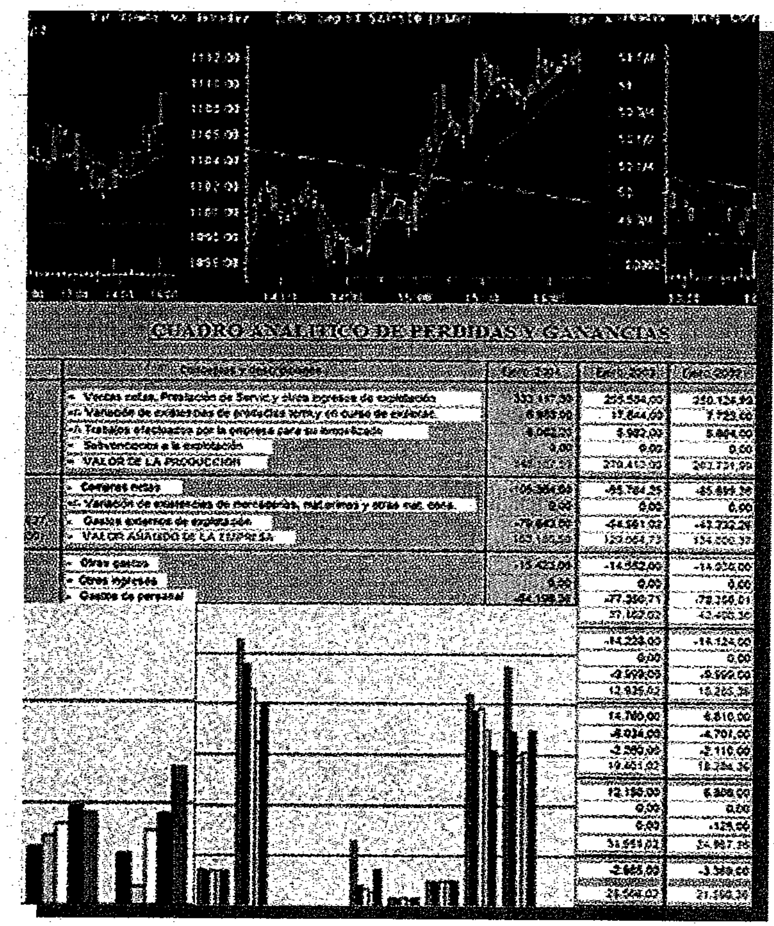
17. Trace la gráfica de cada ecuación.

(a) $-3x + 4y = 24$

(b) $x = y^2 - 1$

2

MODELOS MATEMÁTICOS



En muchas ocasiones resulta útil poder describir matemáticamente hechos o fenómenos del mundo real, es decir, modelizar el mundo real. El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento futuro.

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo.
GALILEO GALILEI

Durante mucho tiempo la matemática, en la formación profesional y técnica de los individuos, ha tenido una misión bien determinada, la de desarrollar el pensamiento lógico, el pensamiento algorítmico y el pensamiento heurístico de los profesionales. Con el desarrollo científico y tecnológico actual de la humanidad esta misión histórica se mantiene, pero tiene un reto adicional, el de desarrollar en el individuo lo que podría llamarse el *pensamiento de modelación*, el cual está caracterizado por la posibilidad de elaborar modelos matemáticos de los objetos estudiados por las diferentes ramas de la ciencia y la técnica. Esto significa que la matemática debe desarrollar un pensamiento que permita describir utilizando su lenguaje (números, conjuntos, relaciones, funciones, ecuaciones, etc.) las propiedades de los objetos reales, aplicar sus diversas técnicas —no sólo para describirlos— sino para poder resolver los problemas relacionados con ellos, obtener conclusiones sobre su comportamiento futuro y tomar decisiones adecuadas.
No pretendemos en este capítulo dar una teoría general de modelación, tan sólo queremos establecer un lenguaje común y comenzar a introducirnos en el mundo de los modelos matemáticos.

2.1 ¿QUÉ ES UN MODELO?

Con seguridad, en repetidas ocasiones, usted ha escuchado y utilizado la palabra *modelo*: "Qué modelo más linda", "debes ser una persona modelo" (con seguridad algún día le dijeron sus padres), "tengo un modelo a escala del Apolo 8 que es una maravilla", "en el año 1953 James Watson y Francis Cric presentaron el primer modelo del ADN"; muchos de ustedes leyeron posiblemente la siguiente noticia: Científicos norteamericanos han comprobado por vez primera cómo se relacionan las neuronas cuando reconstruyen las imágenes proporcionadas por la información visual. Descubrieron que las neuronas se solapan unas con otras para que la combinación de características percibidas por cada una de ellas permita la construcción de una imagen completa del objeto percibido. Este comportamiento de las neuronas ya había sido descrito en un modelo matemático por Teuvo Kohonen en 1982. La neurología ha tardado 23 años en comprobar que los números de la matriz matemática se correspondían realmente con algunas propiedades de las sinapsis, lo que constituye un nuevo impulso a la inteligencia artificial.

Si profundizamos sobre cada una de estas afirmaciones que involucran la palabra *modelo*, tratando de descubrir lo que tienen en común, nos daremos cuenta de que lo que realmente se quiere expresar es que el modelo es una *representación* de alguna otra cosa, la cual rescata algunos de los aspectos o características que se consideran relevantes, ya sea de un objeto, una situación o una realidad. Una modelo es la persona que mejor luce una prenda de vestir; lo más probable es que sus padres querían decirle que debería ser una persona que por su comportamiento fuera digna de ser imitada, que representara los más nobles valores; el modelo a escala del Apolo 8 debe ser una representación casi exacta de la nave real; Watson y Cric pudieron abstraer los elementos principales de la estructura del ADN, y Kohonen utilizó la matemática para representar la forma como se relacionan las neuronas para reconstruir las imágenes.

Tratando de dar una respuesta amplia a la pregunta ¿Qué es un modelo? podríamos decir que un *modelo* es una representación de la realidad, una expresión simplificada y generalizada de las características de un objeto, una situación, un fenómeno, o un sistema del mundo real. Es una abstracción de la realidad que sólo incluye algunas de sus características e interacciones y representa en forma apropiada las relaciones entre ellas, las cuales se expresan mediante palabras, números, símbolos, ecuaciones, diagramas, íconos, gráficas o analogía en cuanto apariencia o comportamiento entre el modelo y la entidad modelada. Se emplea para obtener una imagen conceptual que reduzca la variedad y la complejidad del mundo real a un nivel que se pueda entender y especificar.

El uso amplio de la palabra *modelo* se debe a que cada acepción de esta palabra corresponde precisamente a un tipo diferente de modelo.

Existen muchas formas de clasificar los modelos, nosotros presentaremos sólo dos; el entender estas clasificaciones nos permitirá dar una definición y una ubicación precisa a los modelos matemáticos, que son los de nuestro interés.

Una primera clasificación nos será útil para evaluar los resultados del modelo y es la siguiente:

- **Modelos normativos o prescriptivos:** Son aquellos que se usan como guía e indican cómo se puede actuar ya que proporcionan un criterio del mejor curso de acción. La religión personal es un modelo normativo del comportamiento moral, el método científico es un modelo normativo para la resolución de problemas, los modelos de regulación del tráfico nos indican una forma segura de viajar, el método de inducción es un modelo normativo para demostrar propiedades sobre los números naturales.

- **Modelos descriptivos:** Son aquellos que, como su nombre lo indica, ayudan a describir la realidad pero no incluyen ninguna connotación de bueno o malo, mejor o peor, adecuado o no. Se utilizan para el conocimiento de la forma en que se comporta un sistema determinado, para poder realizar mejoras. Los modelos descriptivos son herramientas de trabajo más que guías ideales. Los modelos de crecimiento poblacional, los modelos económicos y los modelos de producción en una industria son ejemplos de este tipo de modelo.

Clasificación según resultados

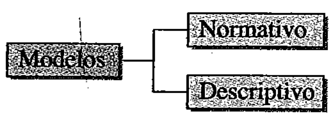


FIGURA 1

Una segunda clasificación hace referencia a cómo el modelo se aproxima a la realidad y es la siguiente:

- **Modelos concretos:** Los modelos concretos son modelos físicos que tienen características comunes o idénticas con la realidad que se quiere modelar. En este tipo de modelos se incluyen las representaciones a escala de un objeto real o un prototipo de él: la maqueta de un edificio, los dispositivos o procesos reales que se comportan de igual forma al fenómeno del cual se tomó el modelo y del que se espera aprender algo.

De manera típica, es mucho más fácil y conveniente trabajar con un modelo físico que con lo que él representa por ser generalmente de menor tamaño, menos costoso en términos de materiales y más corto en duración. Experimentos en los cuales las variables están controladas estrechamente pueden hacerse en un modelo físico con la esperanza de que la respuesta de éste sea igual a la del fenómeno en escala real. Por ejemplo, un modelo a escala de un aeroplano se puede utilizar en un túnel de viento con objeto de investigar los efectos de las diferentes formas de las alas. Se pueden imitar procesos biológicos humanos mediante el uso de animales de laboratorio o cultivos en un tubo de ensayo para probar los tratamientos médicos para su posible utilización en el hombre. Es también cierto que no siempre los modelos a escala van a ser más pequeños y más económicos; un ejemplo son los dados por los fenómenos microscópicos, tales como las configuraciones moleculares que pueden requerir modelos mucho más grandes que se puedan medir y manipular. Sería un grave error esperar que la conducta de un modelo físico represente la del fenómeno en escala real con total precisión, ni siquiera en el conjunto limitado de características que se estén estudiando. Si un modelo a escala de un buque es colocado en un estanque para su estudio, la manera en que fluye el agua por ella será significativamente diferente de la del buque en el mar; las dosis altas de un fármaco pueden desencadenar diversos tipos de efectos al ser aplicadas en animales, ya que éstos pueden ser más sensibles a sus componentes que el ser humano o viceversa.

Entre las características más generales de los modelos físicos se pueden citar las siguientes: son tangibles, su duplicación y la posibilidad de compartirlos es difícil, son de fácil comprensión, tienen un alcance de utilización muy bajo y rara vez son normativos.

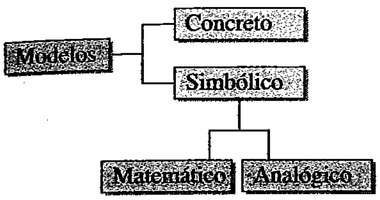


FIGURA 2

- **Modelos abstractos o simbólicos:** Los modelos abstractos son el extremo opuesto de los concretos, no tienen características físicas comunes con el original, estos pueden ser analógicos o matemáticos.

  - MODELOS ANALÓGICOS: Son aquellos que representan un conjunto de relaciones a través de un medio diferente pero análogo al original. Se incluyen aquí los modelos gráficos o pictóricos. Como ejemplos de este tipo de modelos se tienen: los mapas de carreteras, el velocímetro de un automóvil, los cuadros y gráficos, los diagramas de representación, entre muchos otros.

    Algunas de las características de estos modelos son, principalmente: su intangibilidad y su duplicación. La posibilidad de compartirlos es más fácil que en los modelos concretos, su comprensión es más difícil que los modelos concretos, son de modificación y manipulación más fácil que los concretos, tienen un alcance más amplio que los modelos concretos y rara vez son normativos.

  - MODELOS MATEMÁTICOS (O TAMBIÉN LLAMADOS CUANTITATIVOS): Son aquellos que utilizan la matemática para la representación de las relaciones entre los datos de interés. En este tipo de modelos los conceptos están representados por variables cuantitativas, es decir, los conceptos se representan en forma numérica y todas las relaciones tienen una representación matemática en lugar de física o analógica. Como ejemplos se pueden mencionar: los modelos físicos del movimiento, los modelos económicos, los modelos de gestión en las empresas, los modelos de producción industrial, los modelos financieros, los modelos de programación lineal y los modelos de redes.

    Sus principales características: su intangibilidad, de comprensión más difícil que los modelos anteriores, de duplicación y de posibilidad de compartirlos más fácil, de modificación y manipulación más fácil, son los de más amplio alcance, pueden ser normativos y descriptivos.

EL PROCESO DE MODELACIÓN

El objetivo último de cualquier proceso de modelación es la toma de decisiones, es decir, buscar la mejor forma de hacer algo o de predecir lo que puede suceder bajo cierta determinación y así poder adelantarse a los hechos para poder tomar decisiones adecuadas (note que no se dice buenas o malas decisiones, sólo adecuadas).

Todo proceso de modelación comienza en el mundo real con una situación problemática, ya sea en un país, en una empresa, en su casa o incluso en su próximo viaje de vacaciones. Usted, por ejemplo, puede estar interesado en responder a alguna de las siguientes preguntas: ¿cómo evoluciona la economía del país?, ¿a quién se le deben asignar los recursos para llevar a cabo una tarea?, ¿dónde se debe invertir un capital?, ¿cómo se propaga una epidemia?, ¿cómo crece una población de conejos?, ¿qué estrategia se debe diseñar para la comercialización de un producto?, ¿cómo se comporta el tráfico automotriz en un sector de la ciudad?, ¿cómo programar un viaje de negocios?, ¿cómo diseñar la terraza o el jardín de una casa?, e incluso ¿qué ciudades conocer en su próximo viaje de vacaciones, con el presupuesto que tiene asignado para este fin?

Si usted es una persona que tiene alguna experiencia en la situación que está considerando, estará tentado a no alejarse de la realidad y utilizar sólo su intuición para tomar una decisión; pero ¡cuidado!, los profesionales que toman decisiones basados únicamente en la intuición y la experiencia no aprenden, salvo por la retroalimentación que proporcionan los resultados obtenidos: una forma bastante costosa e implacable, que puede llevar a resultados incontrolables.

El mundo simbólico recomienda un curso de acción para comprender, no sustituir, el uso de la intuición en la toma de decisiones. Esta ruta implica abstraer los aspectos problemáticos de la situación real en un modelo que represente lo más esencial de la situación. Cuando el modelo se ha construido, se somete a un análisis para generar resultados o conclusiones. A continuación, se realiza una interpretación de estos resultados para relacionarlos con la situación del mundo real, tomando en cuenta los factores que se habían suprimido durante la fase previa de abstracción. Cuando a esto se le agrega la intuición y la experiencia, el proceso de construcción del modelo conduce a mejores decisiones y aporta conocimiento que influye en el proceso de aprendizaje.

Esquemáticamente el proceso de modelación puede representarse de la manera siguiente:

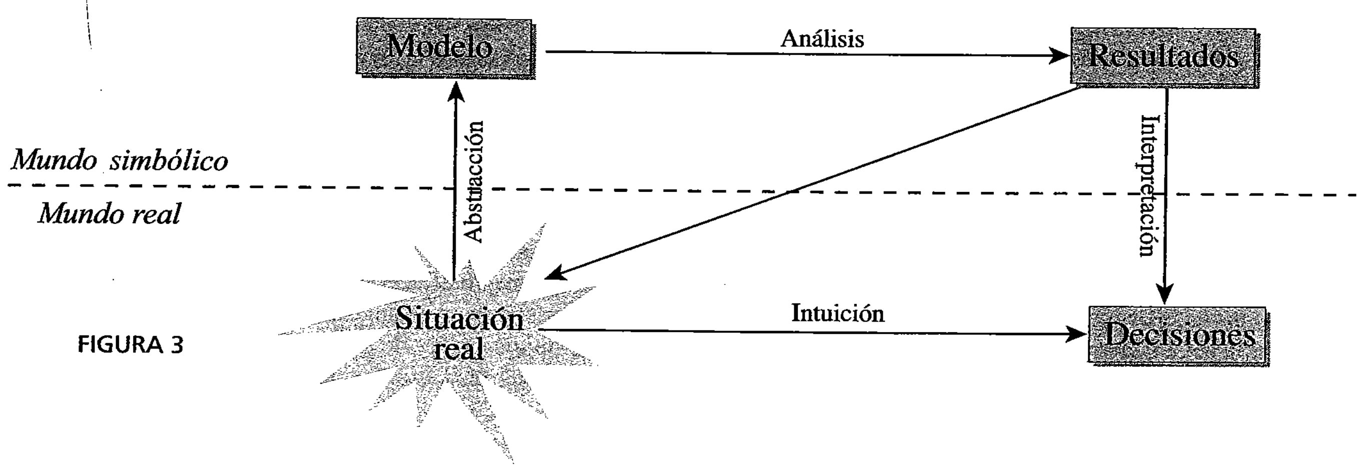


FIGURA 3

Si, por ejemplo, usted es un gerente administrativo, deberá comprender claramente el tipo de situaciones administrativas que se prestan para ser modeladas, las posibilidades que tiene para reunir o recuperar datos y analizar el modelo con el propósito de obtener recomendaciones o resultados. Y lo más importante, usted deberá extraer el mejor valor del modelo en cuanto a su interpretación y la implementación del mismo.

En general, los modelos ofrecen un marco de referencia para el análisis lógico y coherente. Le serán útiles por diversos motivos:

- Los modelos obligan a definir explícitamente los objetivos de la situación problemática.
- Los modelos obligan a identificar y registrar los tipos de decisiones que influyen en dichos objetivos.
- Los modelos obligan a identificar y registrar las interacciones entre todas esas decisiones y sus respectivas ventajas y desventajas.
- Los modelos obligan a pensar cuidadosamente en las variables que va a incluir y a definirlas en términos que sean cuantificables.

- Los modelos obligan a considerar qué datos son pertinentes para la cuantificación de dichas variables y a determinar las interrelaciones entre ellas.
- Los modelos obligan a reconocer las restricciones (limitaciones) pertinentes en los valores que las variables cuantificables pueden adoptar.
- Los modelos permiten la comunicación de las ideas y los conocimientos a otras personas, facilitando el trabajo en equipo.
- Los modelos sirven como una herramienta consistente para la evaluación y comunicación a otras personas de las diferentes decisiones o políticas que se tomen. Toda política, conjunto de decisiones, será evaluada con el mismo objetivo, aplicando las mismas fórmulas para describir interacciones y restricciones que el modelo conlleva.

2.1 EJERCICIOS

1. ¿Cuáles son las ventajas o desventajas de analizar y experimentar con un modelo en oposición a un objeto o situación real?

2. ¿Cuándo cree usted que es mejor no construir un modelo y dejarse guiar por la intuición para la toma de decisiones?

3-4 ■ Dé un ejemplo de un modelo:

3. Que es más grande que la realidad que modela.

4. Que es aproximadamente del mismo tamaño que la realidad que modela.

5-13 ■ En los siguientes ejemplos, indique qué tipo de modelo se tiene.

5. Juego en que se simula la compra y venta de bienes raíces, llamado monopolio.

6. Fotografía aérea de las pirámides de Egipto.

7. Diagrama de operaciones de una empresa.

8. Álgebra de conjuntos.

9. Un termómetro.

10. Una película de dibujos animados.

11. Un mapa de la ciudad de Santiago.

12. La ecuación $C = a + b\ x$.

13. La fórmula química H_2O.

14-25 ■ Indique si la afirmación dada es verdadera o falsa.

14. Por lo general, cuando más elaborado es un modelo es mayor su utilidad.

15. Los modelos suelen omitir gran parte de la realidad del mundo.

16. Por lo general, un gerente no necesita saber modelar situaciones en la empresa, sólo debe tomar decisiones.

17. Los modelos requieren que los valores de sus variables sean numéricos.

18. El proceso de modelación termina cuando se obtienen resultados.

19. Un modelo capta a menudo las interacciones entre las variables de interés.

20. Generalmente existe una sola forma correcta de construir un modelo de una situación dada.

21. Una de las ventajas de realizar modelos es que elimina la necesidad de conocer muy a fondo el ambiente que es objeto de estudio.

22. Construir un modelo matemático garantiza que las decisiones tomadas son las mejores.

23. En la práctica, los modelos son construidos por equipos multidisciplinarios especializados.

24. Un modelo aporta un medio consistente para el análisis e interpretación de datos.

25. Un modelo es mejor que otro si tiene ecuaciones matemáticas más elegantes.

26-32 ■ En los ejercicios siguientes marque la(s) alternativa(s) que considere apropiada.

26. Un modelo:

(a) Una representación de la realidad.
(b) Una abstracción.
(c) Una aproximación.
(d) Un prototipo.
(e) Todo lo anterior.

27. Un modelo:

(a) Es útil si es una descripción detallada de la realidad.
(b) Es de gran ayuda para las personas que deben tomar decisiones.
(c) Es una herramienta de trabajo que sirve sólo si las predicciones que se realizan con él se cumplen tal cual.
(d) No es necesario someterlo a revisión después de que se ha construido.
(e) Debe ser refinado hasta que involucre todos los factores que se han pasado por alto con el fin de ser un reflejo de la realidad.

28. Un modelo:

(a) Ayuda a definir con precisión los objetivos de una situación problemática.
(b) Debe identificar y registrar todos los tipos de decisiones que influyen en los objetivos de una situación.
(c) Es la forma más racional de afrontar un problema.
(d) Obliga a pensar en las variables que va a incluir y a definirlas en términos que sean cuantificables.
(e) Permiten la comunicación de las ideas y los conocimientos a otras personas.

29. Si un gerente desea aumentar la ganancia y disminuir el costo:

(a) Necesita especificar dos objetivos en su modelo.
(b) Su objetivo es muy ambiciosos debe elegir uno.
(c) Si aumenta la diferencia entre ganancia y costo lo puede lograr.
(d) Debe usar un modelo normativo.

30. Cuando un doctor indica un medicamento a un paciente, utiliza un modelo

(a) Descriptivo.
(b) Concreto.
(c) Normativo.

31. Cuando un biólogo estudia el comportamiento de los chimpancés troglodite, debe utilizar modelos:

(a) Concretos.
(b) Normativos.
(c) Analógicos.
(d) Simbólicos cuantitativos.
(e) Todos los anteriores.

32. La diferencia entre un modelo simbólico analógico y uno matemático es:

(a) El analógico es tangible y el matemático es intangible.
(b) El analógico nunca es normativo y el matemático puede serlo.
(c) El analógico no es tan buena representación de la realidad.
(d) El analógico puede ser compartido con mayor facilidad.

33. Dé tres ejemplos de un modelo:

(a) Concreto.
(b) Analógico.
(c) Cuantitativo.

34. Dé tres ejemplos de modelos que usted conozca.

(a) Indique algunos aspectos pertinentes de cada modelo
(b) Describa un aspecto que el modelo no posee y que usted considera que sería adecuado que posea.

35. Explique la relación que tiene la radio, la televisión, el cine y el teatro con los modelos: ¿Cuáles son algunas de las diferencias que existen en cuanto a cómo modelan estos medios de comunicación?

2.2 MODELOS MATEMÁTICOS

Como se indicó anteriormente, un modelo matemático es aquel que utiliza la matemática para la representación de las relaciones entre los datos de interés y por tanto requiere que sus datos puedan ser representados en forma numérica.

Suponga por un momento la siguiente situación: usted se encuentra en la ciudad de Concepción, desea viajar en su automóvil a la ciudad de Santiago y quiere llegar a la hora del almuerzo. Para tomar una decisión acerca de la hora de salida, usted puede consultar el mapa de rutas de Chile (por ejemplo: el de la Copec) para determinar la distancia entre estas dos ciudades. A continuación, estimará su velocidad promedio (a la cual se siente seguro conduciendo) y así podrá estimar el tiempo que le tomaría llegar a Santiago. Si D representa la distancia entre las dos ciudades, V su velocidad promedio y T el tiempo que ocupará, entonces

$$T = \frac{D}{V}.$$

¡Usted ya tiene su primer modelo cuantitativo de la situación que le interesa!

La distancia entre Concepción y Santiago es de 519 kilómetros, aproximadamente; esto es: $D = 519$, si usted se siente seguro conduciendo a 100 *km/h* elegirá $V = 100$ y su modelo le dará un resultado $T = 5{,}19\ h$ (5 horas, 11 minutos y 24 segundos) con el cual usted podrá tomar una decisión.

Observe que su modelo es útil ya que le permite decidir a qué hora deberá salir para cumplir con su objetivo: almorzar en Santiago. Pero, tenga cuidado, su modelo es una simplificación de la realidad, en la cual se han pasado por alto muchos factores que pueden influir en su viaje. Por ejemplo: retrasos por reparaciones en la carretera o por lluvia, no ha considerado que tiene que abastecerse de bencina, que pueden haber demoras por congestión en el pago de peajes e incluso puede ser necesario parar para ir al sanitario. Sin embargo, si planea salir a las 6 a.m. su modelo puede ser bueno, en el sentido de que le es suficiente y cumple el objetivo: le permite estimar el tiempo de salida para llegar a almorzar a Santiago.

Ahora, suponga que usted está recién egresado de la universidad, aún no ha conseguido empleo y tiene un almuerzo con el gerente de una prestigiosa empresa en la cual usted desea ingresar a trabajar: ¡Usted no puede arriesgarse a perder esta oportunidad!

Note que las condiciones de la situación han cambiado: Es importante llegar a tiempo; no puede arriesgarse a llegar retrasado sin que esto tenga serias consecuencias para usted. El modelo anterior le da desconfianza por su simplicidad y considera refinarlo un poco, para estar más seguro, involucrando algunos de los factores que había omitido. Estima el número máximo de escalas que realizará durante el viaje (N), el tiempo promedio (T_e) que le tomará cada escala, el número de peajes (P) y el tiempo que le demorará pagar cada uno (T_p). El tiempo T estimado para el viaje ahora estará dado por:

$$T = \frac{D}{V} + NT_e + PT_p$$

■

EJEMPLO 1 ■ Cálculo del tiempo con nuevos parámetros

Si usted estima que sólo realizará 4 paradas: $N = 4$, durará un promedio de 15 minutos en cada parada: T_e=1/4 de hora, que hay aproximadamente 5 peajes: $P = 5$, y le tomará aproximadamente 3 minutos pagar cada peaje: T_p=1/20 de hora. Con estos datos tendrá una aproximación del tiempo total del viaje: $T = 6{,}44$ horas. De esta forma, usted estima que le tomará aproximadamente 6 horas, 26 minutos y 24 segundos llegar a Santiago. Si su almuerzo está fijado para las 13:30 y decide salir a las 6:50, tendrá un tiempo muy ajustado para llegar y al no considerar los otros factores (por ejemplo, el tráfico desde la llegada a Santiago hasta el punto de encuentro) puede ser que no llegue a tiempo. Pero, si usted decide salir a las 6:30, podrá estar un poco más tranquilo. ■

Si aún su modelo le causa inseguridad, puede seguir refinándolo hasta que quede satisfecho. Pero, recuerde que el tiempo que tiene para tomar una decisión no es infinito y quizás no valga la pena seguir consumiéndolo en esta situación. Por supuesto, usted siempre deberá, en algún momento, terminar la construcción del modelo y tomar una decisión. El cuándo es parte del arte; dependerá únicamente de las condiciones de la situación considerada, y del tiempo que tenga (o desee emplear) para ello.

Observe que un modelo es una simplificación de la realidad, en el cual se deben involucrar suficientes detalles como para que el resultado satisfaga sus necesidades, sea consistente con los datos que tiene a su alcance y pueda ser analizado en el tiempo del que dispone para ello.

Los modelos matemáticos en los que algunas de las variables representan decisiones que podrían tomarse suelen llamarse *modelos de decisión*. La situación anterior es un ejemplo de este tipo de modelo. Note que usted no puede cambiar la distancia entre dos ciudades, pero sí puede elegir su velocidad promedio, decidir el número de veces que se detendrá y el tiempo que permanecerá en cada parada; estas variables son denominadas variables de decisión. Por otra parte, fíjese que existen límites o restricciones para esas *variables de decisión:* usted no puede conducir a 500 km/h; el tanque de bencina del auto tiene una capacidad límite, lo que le exigirá realizar al menos una parada para abastecerse; no puede parar cada vez que ve algo entretenido en el camino, ya que no va en un viaje de vacaciones. Éstas son algunas de las restricciones de las variables de la situación anterior.

Las decisiones deben tomarse para alcanzar un objetivo particular; por esto, los modelos de decisión incluyen *variables de decisión* y al menos una *medida explícita del desempeño*, que permite calibrar el grado en que se ha alcanzado el objetivo. Estos términos serán explicados con mayor detenimiento en la próxima sección.

Los modelos matemáticos o cuantitativos pueden ser de dos tipos:

- **Modelos determinísticos:** Son aquellos donde se supone que todos los datos se conocen con certeza; es decir: se supone que cuando el modelo sea analizado se tiene disponible toda la información necesaria para la toma de decisiones. Un ejemplo de modelo determinístico es la asignación de las salas de clase en un plantel universitario, en el cual se conocen el número de salas, el número de cursos y el tiempo de ocupación de cada sala.
- **Modelos probabilísticos o estocásticos:** Son aquellos en los cuales algún elemento no se conoce con anticipación, algunas variables importantes denominadas *variables estocásticas o aleatorias* no tendrán valores conocidos antes que se tome la decisión y este desconocimiento debe ser incorporado al modelo. Estos modelos incorporan la incertidumbre a través de probabilidades en las variables aleatorias. Ejemplos de estos modelos son los referentes a filas de espera, administración de proyectos y pronóstico. Para su construcción se requiere conocimientos de probabilidad y estadística.

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

Son grandes los avances tecnológicos que se han realizado en los últimos años en inteligencia artificial, pero hasta el momento no se ha creado la primera máquina que realice un modelo, así sea en un nivel incipiente. ¿Por qué? La respuesta puede resultar obvia, las máquinas no pueden pensar y resolver problemas por sí solas, sólo el hombre es capaz de pensar y solucionar problemas importantes (que van más allá de la simple sobrevivencia o de convivencia en una manada) por medio de la construcción de modelos. El ser humano construye imágenes, se reconoce a sí mismo y tiene la capacidad de proyectarse en situaciones, tanto en el pasado como en el futuro, sin necesidad de experimentarlas realmente. El hombre tiene imaginación, tiene la capacidad de formar imágenes mentales de los objetos sin necesidad de tocarlos o verlos en su totalidad; es innatamente un modelador.

Cada individuo, sin importar el lugar donde viva, tiene un modelo mental del mundo, el cual está en continuo desarrollo desde su nacimiento, cuando comienza a interactuar con su entorno, y se va enriqueciendo gracias a las experiencias vividas. Si un individuo nació y siempre ha vivido en la selva amazónica, sin contacto con la civilización, su modelo mental del mundo será, con toda seguridad, diferente del nuestro. Sus experiencias y las relaciones que ha establecido con su entorno le han permitido construir un modelo mental bien determinado, el cual le permite actuar de una manera particular. Si, por ejemplo, ve una huella en el suelo, podrá no sólo saber qué animal pasó por allí, sino también estimar su tamaño y cuán lejos se encuentra. Su modelo se lo permitirá.

Otra cualidad que distingue al hombre es su capacidad de hablar acerca de su mundo y de las imágenes que tiene de él. Gracias al don de la palabra el hombre ha podido resolver los problemas o al menos plantear soluciones.

Ahora resulta evidente por qué se afirma que los modelos sólo pueden ser construidos por personas. Su construcción requerirá una buena dosis de creatividad e imaginación y del conocimiento adquirido, es decir, de los modelos mentales que se han formado en la mente. Aún más, si se acepta que un modelo no es otra cosa que una forma particular de proceder, cuando se trata de comprender las realidades del mundo, la construcción de un modelo resulta ser un proceso natural y cotidiano, que hace referencia a un modo de pensar acerca del mundo real en que vivimos, y concretamente, en las situaciones problemáticas que suscitan el interés.

Por supuesto, no existe una sola forma correcta de formular un modelo. Una situación podrá ser modelada de diversas maneras, tampoco podemos pretender encontrar un modelo que responda a todas las preguntas. Su construcción es una mezcla de arte y conocimiento que sólo podrá enseñarse como se enseñan las artes, se debe hacer uso de la imaginación y de la creatividad, permitir actuar a la mente sin obstáculos. Usted estará pensando que todo esto es algo etéreo; estamos de acuerdo con usted, lo es; pero para tranquilidad de todos, existen algunas pautas generales para su construcción.

La construcción de un modelo se suele dividir en tres pasos, los cuales no garantizarán el éxito en la modelación pero si orientarán el trabajo. Utilizando una terminología más o menos general, estos pasos se detallan a continuación:

Paso 1: Estudio del ambiente de la situación real.
El primer paso para la construcción de un modelo es realizar una investigación detallada y un análisis de la situación real que permita comprenderla adecuadamente.

El problema planteado debe ser una abstracción apropiada de la situación real y los datos deben ser conocidos. Por esto el estudio de la situación y la experiencia son relevantes en este paso.

Es conveniente señalar que este primer paso debe ir mucho más allá de la simple observación de la situación real. Se debe observar detenidamente la situación, pero también, se debe investigar lo referente al estado del arte de la misma para poder aprovechar la experiencia acumulada y no repetir esfuerzos.

Paso 2: Formulación de una representación selectiva de la situación.
Podría decirse que en este paso comienza el proceso de abstracción de la situación por modelar y contempla dos fases:

(a) **Identificación de las entradas y salidas del modelo:** Es la fase en la cual se determina en forma general, pero precisa, los elementos sobre los cuales trabajará el modelo (variables de entrada) y los resultados que deben ser producidos (variables de salida).

(b) **Refinamiento de las entradas y salidas:** Ya seleccionadas las variables del modelo, se procede a realizar una clasificación de las mismas. Para esto es necesario aclarar algunos términos.

Las entradas del modelo se suelen denominar *variables exógenas* y suelen ser de dos tipos:

Variables de decisión: son aquellas que usted controla para efectos del modelo. Por ejemplo: la velocidad promedio a la cual se siente seguro al conducir, el precio de venta de un producto que su empresa distribuye o fabrica, el número de trabajadores de su empresa, el sueldo por pagar por un trabajo. Recuerde que cada variable tiene algunas restricciones que usted debe considerar; lo importante es que dentro del rango de la variable, es usted el que decide qué valor asignarle.

Parámetros: son variables que están bajo el control de otras personas, de la naturaleza o del azar. Por ejemplo: el estado del tiempo, el precio de materias primas o el salario mínimo.

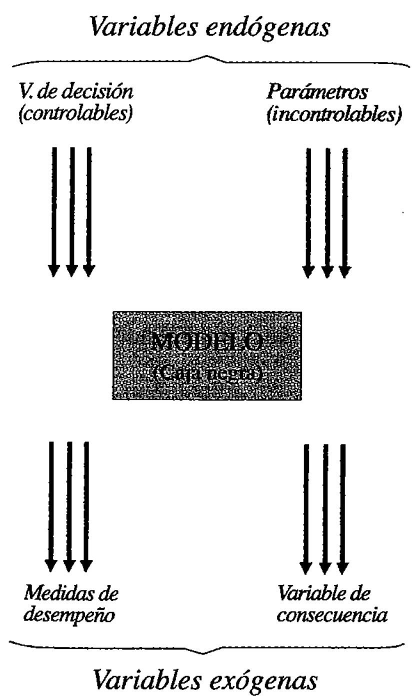


FIGURA 1

En la construcción de modelos, los parámetros se trabajan como si sus valores numéricos fueran conocidos. Estos valores se pueden especificar después de analizar los datos que se tengan al alcance para calcularlos, o simplemente se les asignarán valores estimados en el momento del análisis del modelo.

Las salidas del modelo se denomian *variables endógenas* y son de dos tipos:

Medidas de desempeño: Son variables que permiten medir el grado en el cual se ha alcanzado la meta. Son de gran importancia, puesto que representan los criterios empleados para determinar hasta qué punto se han alcanzado los objetivos finales del modelo. Por esta razón en algunos modelos se las suele llamar *función objetivo*. Por ejemplo, si el objetivo de una situación es analizar la rentabilidad de una empresa, el ingreso por concepto de ventas de un producto puede ser elegido como medida de desempeño; si el objetivo fuese cercar un terreno determinado, una medida de desempeño será la cantidad de cerca utilizada para este fin; si se desea diseñar un envase para contener 12 onzas de un líquido, una medida de desempeño puede ser la cantidad de material por utilizar.

Variables de consecuencia: Son aquellas que muestran otras consecuencias que ayudan a entender e interpretar los resultados del modelo. No forman parte del objetivo del modelo, no son indispensables pero resultan del análisis del mismo. Por ejemplo, la subdivisión del ingreso, el número de artículos que se deben producir, la jerarquización de los salarios. En un modelo no siempre se tiene este tipo de variables.

Observe que el modelo en esta fase de la construcción se identifica con una caja negra, la cual tendrá que ser descifrada en una fase posterior. La segunda fase de la construcción de un modelo se refiere únicamente a la clarificación de las entradas y salidas del modelo.

En general, no resulta trivial el determinar los tipos de entradas de un modelo, son muchas las dudas que pueden aparecer. Por ejemplo, ¿el fabricante controla realmente el precio de venta de un producto? o ¿el precio está controlado por las fuerzas competitivas?; esto es ¿el precio de venta es una variable de decisión o un parámetro?, algo que se deberá analizar según sea la situación del mercado.

Paso 3: Construcción simbólica y análisis del modelo.
Es ésta la instancia de determinar lo que la caja negra debe contener. La construcción simbólica se inicia generalmente con una representación gráfica de la situación. Cuando usted comienza a establecer hipótesis sobre cualquier relación entre las variables se da inicio a la formulación de las ecuaciones del modelo. Los datos, por sí solos, no representan un modelo; sólo cuando se describen algunas relaciones entre estos números empieza a existir el modelo, al menos en su forma primitiva.

Después de la construcción de un modelo, se debe realizar una *fase de validación* del mismo. Es usual validar un modelo mediante un método que consiste en usarlo para predecir la historia. Para esto se utilizan como entradas del modelo datos históricos sobre las variables de decisión y los parámetros. Los resultados determinados por medio del modelo se comparan con los resultados obtenidos en situaciones similares en una época ya conocida. El modelo queda validado si existe similitud entre los dos tipos de resultados. Tanto la validación de un modelo como su utilidad son juicios de valor.

A MODO DE ILUSTRACIÓN

En esta sección queremos ilustrar el proceso de construcción de un modelo mediante algunas situaciones problemáticas sencillas, en las cuales el número de variables es pequeño y no es necesario más que los conocimientos de matemática básica para obtener las relaciones y resultados del modelo. A medida que avancemos en los temas del texto se irán construyendo modelos para situaciones que involucren un mayor número de variables y necesiten de un mayor conocimiento. Tenga presente que los modelos construidos en esta sección no son la única forma de modelar la situación presentada y lo invitamos a encontrar su propio modelo.

EJEMPLO 2 ■ Modelo para un plan de construcción

La constructora Rayen es una empresa relativamente joven que opera en la ciudad de Santiago de Chile desde enero de 2002. Actualmente, está analizando su plan de construcción para los próximos años y desea encontrar un modelo que la ayude para este fin. La información de las actividades de la empresa fue proporcionada por el gerente general: en el año 2002 la constructora Rayen logró construir 4 casas a un costo total de 110 millones de pesos; en 2003 construyó 6 casas a un costo total de 189.75 millones de pesos; en 2004 fueron construidas 8 casas a un costo total de 286 millones de pesos y durante el año 2005, un total de 10 casas a un costo total de 398.75 millones de pesos.

SOLUCIÓN El objetivo del modelo es claro: estimar el costo total de construcción para el año 2006 en adelante, lo cual permitirá realizar una planeación a futuro. La variable que la constructora puede controlar es el número de casas por construir y será la variable de decisión (N) para el modelo. Como medida de desempeño se tomará el costo total anual de construcción (C) de las N casas.

Para iniciar la construcción del modelo, la información se colocará en una tabla y se graficarán los datos en un plano cartesiano para facilitar su análisis.

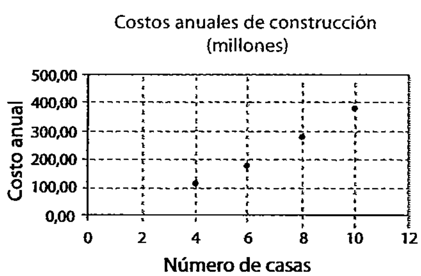


FIGURA 2

N	C
4	110
6	189.75
8	286
10	398.75

■

Observando estos datos, tal cual están, es posible que se dificulte establecer una relación satisfactoria entre ellos. Inicialmente, se puede suponer que los datos se relacionan linealmente; pero al tener tan pocos datos, la recta que se estima no es del todo satisfactoria. Después de dar algunas vueltas al problema se puede optar por considerar el costo unitario anual de construcción, $c_u = \frac{C}{N}$, con la esperanza de encontrar una relación más aceptable, en el sentido de que nos dé mayor seguridad.

Adicionando una nueva columna a la tabla anterior se tiene:

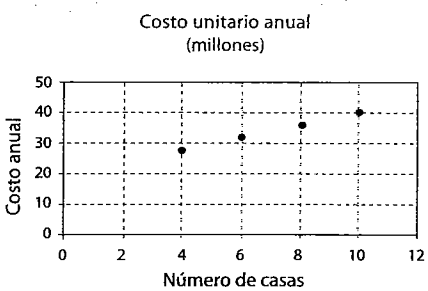


FIGURA 3

N	C	$C_{\bar{\bar{U}}}$
4	110	27.5
6	189.75	31.625
8	286	35.75
10	398.75	39.875

Note que el panorama empieza a despejarse: el costo unitario anual $C_{\bar{\bar{U}}}$ cambia año tras año en forma constante. Esto se observa al realizar las diferencias entre los costos unitarios. Que este cambio sea constante significa que existe una relación lineal entre N y $C_{\bar{\bar{U}}}$. Esta recta se puede determinar utilizando alguno de los procedimientos vistos en el capítulo anterior.

La pendiente de la recta es $m = 2.0625$ y por tanto $C_u = \frac{C}{N}$ $2.0625N + 19.25$
Con esta relación se obtiene la ecuación:

$$C = 2.0625N^2 + 19.25N.$$

Como N representa el número de casas por construir, la única restricción para está variable es que debe ser un número natural, esto es: $N \in \mathbb{N}$. Por otra parte, el costo total de construcción es siempre una cantidad positiva.

El modelo para esta situación queda resumido por:

Medida de desempeño: Costo total C.

Variable de decisión: Número de casas por construir N.

Restricciones: $N \in \mathbb{N}$ y $C > 0$.

Ecuación del modelo: $C = 2.0625N^2 + 19.25N.$

Para validar el modelo, se reemplazan en la ecuación los valores $N = 4,6,8,10$, con el propósito de analizar cuán próximos se encuentran los resultados obtenidos con los datos reales.

En esta situación los resultados obtenidos por medio del modelo coinciden con los

N	C(real)	$C = 2.0625N^2 + 19.25N.$
4	110	110
6	189.75	189.75
8	286	286
10	398.75	398.75

datos reales. ¿Qué características de la situación dada hicieron posible encontrar un modelo tan exacto?, ¿qué supuestos estarán detrás de este hecho? Rara vez en su trabajo profesional se le presentará una situación tan extraordinaria. En general, es muy raro encontrar situaciones en la cual todos los resultados obtenidos por medio de un modelo correspondan exactamente a los datos históricos, como mucho, siempre se espera sólo que estén muy cerca.

Gracias al modelo, la constructora puede diseñar un plan de construcción para los próximos años. Si el gerente estima, por ejemplo, que puede invertir 500 millones en el año 2006 y supone que las condiciones del mercado no cambian, puede utilizar el modelo para estimar el número de casas que construiría con ese capital. Para esto, sólo deberá resolver la ecuación

$$2.0625N^2 + 19.25N = 500$$

La solución matemática de esta ecuación es:

$$N = 11.5876 \text{ o } N = -20.92095$$

Pero, considerando las restricciones para la variable, se tiene $N = 11$ como única solución factible. Con el presupuesto que se tiene, se podrán construir 11 casas en 2006 a un costo anual total de $461.3125 millones de pesos (valor que se obtiene reemplazando N por 11 en el modelo), quedando en caja $38.6875 millones de pesos. Con esto, el gerente no queda satisfecho, porque durante los años de operación de la empresa se ha logrado un aumento en la cantidad de casas construidas de 2 y desea al menos mantenerlo. Observa que si $N = 12$ se tiene $C = 528$ millones. Decide entonces solicitar un préstamo por $28 millones para construir las 12 casas. ■

EJEMPLO 3 ■ Modelo para el análisis de una votación

En la asamblea general de una sociedad anónima en la que participaron 950 accionistas, se discutió la iniciativa de incrementar el capital social. Después de la votación, el secretario general entregó la siguiente información: 470 accionistas poseían acciones preferentes; 104 accionistas con acciones preferentes votaron por la proposición; 350 accionistas del grupo mayoritario con acciones comunes votaron en favor de la proposición y 113 accionistas del grupo mayoritario votaron contra la proposición. Entre los accionistas que tomaron parte de la votación, los del grupo mayoritario superaban en 50 a los grupos minoritarios. 278 accionistas del grupo minoritario con acciones preferentes votaron en contra de la proposición. La iniciativa fue aprobada por 54 votos de margen.

Se desea generar un modelo de la situación con el propósito de realizar un análisis detallado de los resultados de la votación a fin de lograr un mejor conocimiento de las características de ese grupo decisor.[1]

SOLUCIÓN

En primer lugar, observe que en esta situación existen tres clases de información:

1. La que hace referencia al grupo al cual pertenecen los accionistas.
2. La referente al tipo de acciones que poseen.
3. La referente a la forma en que emitieron su voto.

Esto nos permite escoger las siguientes categorías:

1. M el conjunto que representa al grupo minoritario.
2. F el conjunto de accionistas que votaron a favor.
3. C el conjunto de accionistas que poseen acciones comunes.

Debido a que el complemento del conjunto C (notado por C^c) representa al conjunto de accionistas que poseen acciones preferentes, no son necesarios más que estos tres conjuntos para describir la situación. En este caso, el conjunto referencial será el conjunto total de accionistas que denotaremos por A.

Los resultados de la votación corresponden al número de elementos de estos conjuntos o de conjuntos obtenidos mediante operaciones entre ellos. ■

[1] Este ejemplo fue tomado del texto *Conjuntos. Aplicaciones matemáticas a la administración*, de Ariel Kleiman y Elena de Kleiman.

La representación gráfica de la situación puede realizarse utilizando un diagrama de Venn,

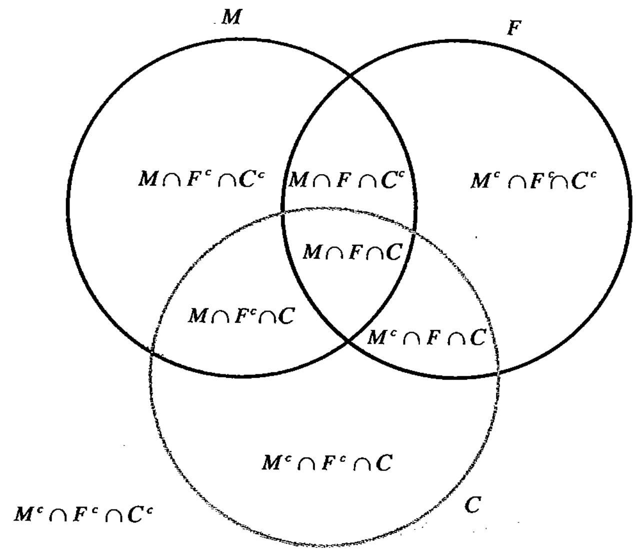


FIGURA 4

La información de la votación queda resumida por:

$$n(A)=950 \qquad n(M\cap F^c)=113$$
$$n(C^c)=470 \qquad n(M)-n(M^c)=50$$
$$n(F\cap C^c)=104 \qquad n(M^c\cap F^c\cap C^c)=278$$
$$n(M\cap F\cap C)=350 \qquad n(F)-n(F^c)=54$$

El modelo anterior nos permite analizar en forma detallada los resultados de la votación mediante cálculos algebraicos muy simples. Durante los cálculos, será de gran ayuda el diagrama de Venn realizado, tanto para la deducción de las fórmulas por utilizar, como para determinar el conjunto al cual se le debe calcular el número de elementos.

Es el momento de iniciar el análisis de la información:

a) La cantidad de accionistas que pertenecen al grupo minoritario $n(M^c)$ se determina de la siguiente forma:
como $A=M\cup M^c$ y $M\cap M^c=\emptyset$ se tiene $n(M)+n(M^c)=950$.
De la información dada $n(M)-n(M^c)=50$ se concluye $2n(M^c)=900$ y $n(M^c)=450$.

b) El número de accionistas del grupo mayortario $n(M)$ se calcula despejándolo de la ecuación $n(M)+n(M^c)=950$ y reemplazando el valor de $n(M^c)$.
$n(M)=950-n(M^C)=950-450=500$.

c) El número de accionistas que votaron en contra se obtiene como sigue:

$$n(F)+n(F^C)=950$$
$$n(F)-n(F^C)=54$$
$$2n(F^C)=896.$$

Por tanto $n(F^c) = 448$

d) El número de accionistas que votaron a favor $n(F)$ se calcula despejándolo de la ecuación $n(F)+n(F^c) = 950$

$$n(F) = 502.$$

e) El número de accionistas que poseen acciones comunes n(C) se calcula de la siguiente forma: como $n(C^c) = 470$ y $n(C)+n(C^c) = 950$ se obtiene $n(C) = 480$.

f) El número de accionistas del grupo mayoritario que votaron a favor $n(M \cap F)$ se calcula utilizando la fórmula $n(M) = n(M \cap F) + n(M \cap F^c)$ y despejando $n(M \cap F)$;

$$\begin{aligned} n(M \cap F) &= n(M) - n(M \cap F^c) \\ &= 500 - 113 \\ &= 387. \end{aligned}$$

g) El número de accionistas del grupo minoritario que votaron a favor: $n(M^c \cap F)$ se obtiene de

$$n(F) = n(M^c \cap F) + n(M \cap F)$$

despejando $n(M^c \cap F)$,

$$\begin{aligned} n(M^c \cap F) &= n(F) - n(M \cap F) \\ &= 502 - 387 \\ &= 115. \end{aligned}$$

h) El número de accionistas del grupo minoritario que votaron en contra $n(M^c \cap F^c)$ se calcula así:

$$\begin{aligned} n(M^c \cap F^c) &= n(A) - n(M \cup F) \\ &= n(A) - [n(M \cap F^c) + n(M \cap F) + n(M^c \cap F)] \\ &= 950 - [113 + 387 + 115] \\ &= 335. \end{aligned}$$

i) El número de accionistas que poseen acciones comunes y votaron a favor: $n(F \cap C)$ se obtiene de la fórmula $n(C) = n(F \cap C) + n(F^c \cap C)$, así

$$\begin{aligned} n(F \cap C) &= n(F) - n(F \cap C^c) \\ &= 502 - 104 \\ &= 398. \end{aligned}$$

j) El número de accionistas que votaron en contra y poseen acciones comunes: $n(F^c \cap C)$ se obtiene de la fórmula

$$n(C) = n(F \cap C) + n(F^c \cap C)$$

utilizando el dato $n(F \cap C) = 398$,

$$\begin{aligned} n(F^c \cap C) &= n(C) - n(F \cap C) \\ &= 480 - 398 \\ &= 82. \end{aligned}$$

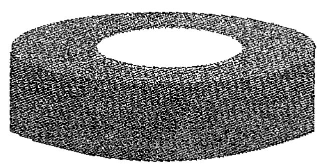
Lo invitamos a seguir trabajando hasta agotar todas las posibilidades de obtención de información para esta situación; como pista le contamos que son sólo 27.

A continuación es posible indicar algunas de las características de este grupo decisor:

1. El 52.3% de los accionistas son mayoritarios.
2. El 50.5% de los accionistas tienen acciones comunes.
3. El 77% de los accionistas minoritarios poseen acciones preferentes, mientras que sólo el 25% de los accionistas mayoritarios poseen acciones de este tipo.
4. El 52.8% de los accionistas votaron a favor de la proposición.
5. El 83% de los accionistas que tienen acciones comunes votaron a favor de la proposición.
6. El 77.4% de los accionistas del grupo mayoritario votaron a favor de la proposición, mientras que del grupo minoritario sólo el 25.5%.
7. El 29.6% del grupo mayoritario con acciones preferentes votaron a favor de la proposición.

EJEMPLO 4 ■ Modelo para encontrar el volumen

Una compañía de dulces fabrica un diminuto caramelo en forma de arandela, tal como se muestra en la figura:



A causa del incremento en el costo, la compañía debe reducir el volumen del caramelo. Actualmente, el grosor del dulce es de 2 milímetros, el radio interior es de 2 milímetros y el exterior 7 milímetros. Para hacer esta reducción, debe elegir entre dos alternativas que considera plausibles: conservar el grosor del caramelo pero realizar una variación en el radio interior o conservar los radios y realizar una variación en el grosor del caramelo. ¿Qué modelo describe esta situación?

SOLUCIÓN El objetivo es decidir cuál de las dos alternativas es más conveniente. Para esto se debe encontrar una expresión para el volumen del caramelo según cada alternativa y realizar un análisis comparativo de la forma como disminuye el volumen del caramelo en cada caso.

La forma del caramelo no es otra cosa que la diferencia entre dos cilindros: Un cilindro de radio 7 milímetros y altura 2 milímetros, al cual se le ha extraído una porción cilíndrica de radio 2 milímetros y altura 2 milímetros.

En la primera alternativa lo único que se desea variar es el radio interior. La variable de decisión será precisamente este radio, el cual se denotará por r_i. La medida de desempeño será el volumen del caramelo en términos de r_i, el cual se denotará por V_1.

Observe que las restricciones teóricas para la variable de decisión son claras: como se desea disminuir el volumen del caramelo sin desintegrarlo, r_i debe ser mayor de 2 milímetros y menor que 7 milímetros. Esto se expresa mediante la desigualdad $2 < r_i < 7$. ■

En general, el volumen de un cilindro está dado por: $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio del cilindro y h su altura. Para el caso considerado, el volumen del caramelo V_1 será:

$$V_1 = 2\pi (49 - r_i^2)$$

con $2 < r_i < 7$. Nótese que dado cualquier aumento del radio interior del caramelo la expresión encontrada para V_1 permitirá, por una parte, determinar el volumen del nuevo caramelo, y por otra, determinar el radio del caramelo si se desea realizar una determinada reducción del volumen.

En la segunda alternativa, lo único que se desea variar es el grosor; la variable de decisión será la altura de los cilindros, la cual se denotará por h. La medida de desempeño será el volumen del caramelo en términos de h, el cual se denotará por V_2. Para esta alternativa el volumen V_2 está dado por:

$V_2 = 45\pi h$ con $0 < h < 2$. Al igual que en la alternativa anterior observe que dada cualquier disminución en el grosor del caramelo, la expresión encontrada para V_2 permitirá, por una parte, determinar el volumen del nuevo caramelo, y por otra, determinar el grosor del nuevo caramelo si se desea realizar una determinada reducción del volumen.

El modelo para esta situación será:

Medidas de desempeño: V_1 y V_2

Variables de decisión: r_i y h

Restricciones teóricas: $2 < r_i < 7$ y $0 < h < 2$

Relaciones del modelo: $V_1 = 2\pi (49 - r_i^2)$ y $V_2 = 45\pi h$

Cuando el modelo ya está construido, se inicia la etapa de análisis y toma de decisiones. El modelo permite determinar el radio interior o la altura del caramelo para realizar cualquier reducción (razonable) en su volumen, dependiendo de la alternativa elegida. El volumen inicial del caramelo es $V = 90\pi$, si se desea realizar una reducción del 10% en el volumen (obtener un caramelo cuyo volumen sea $0.9V = 09\ (90\pi) = 81\pi$), se pueden determinar con exactitud las dimensiones del caramelo reducido, según sea la alternativa elegida para este fin, de la siguiente forma:

Si se elige la primera alternativa, se usará la relación $V_1 = 2\pi (49 - r_i^2)$, para determinar el radio interior del caramelo reducido,

$$\begin{aligned} 81\pi &= 2\pi(49 - r_i^2) \\ 81 &= 2(49 - r_i^2) \\ r_i &= \sqrt{49 - \frac{81}{2}} = 2.915. \end{aligned}$$

Si se elige la segunda alternativa, se deberá utilizar la relación $V_2 = 45\pi h$, para determinar la altura del nuevo caramelo,

$$\begin{aligned} 81\pi &= 45\pi h \\ 81 &= 45h \\ h &= \frac{81}{45} = 1.8 \end{aligned}$$

Como el interés radica en ver cuál de las dos alternativas es más conveniente, es necesario determinar el aumento del radio interior, y la disminución de la altura, para disminuir el volumen del caramelo en un mismo porcentaje. Estos resultados se resumen en la siguiente tabla (en la cual, sólo se han incluido los porcentajes de disminución del volumen considerados factibles):

Disminución en el volumen (%)	r_i	h	Aumento r_i	Disminución h
5	2.5	1.9	0.5	0.1
10	2.9154	1.8	0.92	0.2
15	3.278	1.7	1.28	0.3
20	3.605	1.6	1.61	0.4
25	3.905	1.5	1.91	0.5
30	4.183	1.4	2.18	0.6
35	4.44	1.3	2.44	0.7
40	4.69	1.2	2.69	0.8

Observe que para cada uno de los porcentajes de disminución del volumen se tiene que r_i; esto significa que para hacer la misma reducción en el volumen, el radio interior que se debe aumentar es de mayor tamaño que la altura por disminuir. En otras palabras, es más notorio aumentar el tamaño del hueco del caramelo que disminuir su grosor. Por tanto, para esta situación resulta más conveniente la segunda alternativa: reducir el grosor del caramelo.

Otra posible modelación para esta situación se obtiene al elegir como medidas de desempeño la disminución del volumen para cada alternativa: d_1 y d_2 (según alternativa), y como variables de decisión: r_i (para la alternativa 1) y h (para la alternativa 2). Las restricciones de las variables de decisión coinciden con las del primer modelo.

Este segundo modelo es:

Medidas de desempeño: d_1 y d_2

Variables de decisión: r_i y h

Restricciones teóricas: $2 < r_i < 7$ y $0 < h < 2$

Relaciones del modelo: $d_1 = 2\pi\,(r_i^2 - 4)$ y $d_2 = 45\pi\,(2 - h)$

¿En qué radica la diferencia entre estos dos modelos? Estaremos de acuerdo en que ambos describen la misma realidad. ¿Alguno la describirá mejor? Quizás, lo único que por el momento se puede afirmar con certeza es que al utilizar el segundo modelo para realizar el análisis comparativo de las alternativas, los resultados se obtendrán en forma más directa; el segundo modelo nos da la posibilidad de tomar una decisión en menor tiempo. Lo anterior no hace que un modelo sea bueno y el otro malo, sólo quiere decir que uno requiere menos cálculos que el otro, y por tanto, uno de ellos permite tomar una decisión en menor tiempo.

2.2 EJERCICIOS

1. Dé tres ejemplos de situaciones de la vida diaria que sean susceptibles de ser modeladas fácilmente.
2. Tome una de las tres situaciones del ejercicio anterior, la que sea de mayor interés para usted, y
   (a) Plantee con precisión el objetivo de la situación.
   (b) Identifique en forma general las entradas y salidas del modelo.
   (c) Determine la medida de desempeño (o función objetivo).
   (d) Determine las variables de decisión del modelo y los parámetros, así como sus restricciones.

(e) Encuentre las ecuaciones que relacionan las variables de salida con las de entrada.

(f) Obtenga resultados utilizando el modelo construido.

(g) Si es posible obtener datos históricos, valide el modelo construido.

3. Suponga que va a ir de viaje el fin de semana a una ciudad que está a d kilómetros de distancia. Elabore un modelo que determine sus costos de bencina del viaje redondo (ida y vuelta). ¿Qué suposiciones o aproximaciones son necesarias para tratar este modelo como un modelo determinista? Estas suposiciones o aproximaciones ¿son aceptables para usted?

4. Usted se encuentra de viaje de vacaciones en Puerto Rico. Desafortunadamente, se ha enfermado y tiene un cuadro febril muy serio. Al ir al centro de asistencia el doctor le pide que se tome cada hora la temperatura y le facilita un termómetro. El problema es que usted está familiarizado con el uso de termómetros en grados Celsius, y el termómetro proporcionado por el doctor mide la temperatura en grados Fahrenheit. Construya un modelo para esta situación.

5. Con referencia al ejemplo 2, determine las 27 posibilidades mencionadas y verifique que las características de este grupo son las que se indican.

6. Un investigador de mercado ha sido contratado por una empresa que vende bebidas alcohólicas para determinar qué proporción de personas en Santiago prefieren tequila, cuántas brandy y cuántas whisky. Es natural que algunas de las personas entrevistadas declaren que les gustan todos los licores mencionados, que algunas gusten tequila y whisky pero no brandy, que algunas gusten whisky únicamente, etc. Además, siempre es posible encontrar alguna persona que no guste de ningún licor.
El investigador decidió que estas últimas personas no se incluirían en la muestra y entrevistó a 1000 personas que gustaban de al menos una de las tres bebidas. Días después, presentó su reporte informando que en la población investigada: 729 personas gustan del tequila; a 814 les gusta el brandy; a 628 les gusta el whisky; a 592 les gusta el tequila y el brandy; a 465 les gusta el tequila y el whisky; a 411 les gusta el brandy y el whisky y a 300 les gustan los tres licores.
La empresa es precavida y sospecha que las entrevistas no se realizaron con honestidad, es decir que algunas de las cifras presentadas provienen de la imaginación del investigador. Construya un modelo que le permita decidir si esta hipótesis es cierta.

7. La manufacturera Flambard tiene su planta matriz en Bruselas y varias sucursales en España; piensa iniciar un plan de expansión estableciendo sucursales en varios países latinoamericanos, de los cuales Chile será el primero. Con este propósito necesita seleccionar entre sus empleados actuales un grupo de 20 técnicos, cuya misión será (durante los próximos dos años) la de asesorar sobre la construcción de la planta y ponerla en operación. Una vez que la fábrica trabaje normalmente y con personal chileno, el equipo de técnicos se dirigirá a otro país y repetirá el proceso. Cualquier candidato será elegible si reúne los siguientes requisitos: habla correctamente español; es soltero y tiene la posibilidad de proporcionar a la casa matriz otro técnico que pueda reemplazarlo en su puesto actual (durante los próximos dos años) mientras él se encuentre en Chile. ¿Qué modelo describiría mejor esta situación?

8. ¿Por qué el modelo lineal (suponer que los datos se relacionan linealmente) no es satisfactorio en el ejemplo 1?

9. Una barcaza que contenía cerca de 250,000 galones de combustible se hundió el lunes pasado en alta mar, a unos 30 km de la isla Dama y a 6,120 pies de profundidad. Se estima que ese día liberó unos 3,000 galones de combustible, creando una gran mancha negra de aceite en la superficie del mar. Si se supone que la barcaza continúa cada día liberando 50 galones más que el día anterior, construya un modelo que le permita estimar cuándo se habrá liberado todo el combustible.

10. A las esquinas de una lámina cuadrada de aluminio de 12 cm por lado se les recortarán cuadrados iguales; luego sus lados serán doblados hacia arriba para formar una caja sin tapa. ¿Qué clase de modelo matemático representaría esta situación? y ¿qué pregunta le gustaría ver respondida por este modelo?

11. Una compañía de dulces fabrica una popular barra de chocolate de forma rectangular con 10 cm de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de grosor. A causa del incremento en los costos ha decidido reducir el volumen de la barra. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en la misma cantidad. ¿Qué modelo matemático representaría esta situación?

12. A un agente de ventas de una compañía le han propuesto el siguiente plan de incentivos: por cada máquina que logre vender obtendrá una comisión de $22,000, la comisión por cada máquina vendida se incrementará en $5,500 siempre y cuando logre vender más de 60 máquinas. Construya un modelo que permita estimar el ingreso que recibirá el agente y lo ayude a decidir si la propuesta de la compañía le conviene.

13. En un periodo determinado de tiempo, un fabricante de zapatillas determinó que el 3.1% de las zapatillas fueron rechazadas por imperfecciones. Construya un modelo que permita proyectar la producción a futuro.

14. Los modelos de sistemas de inventario frecuentemente consideran la relación entre un inventario inicial, una cantidad de producción, las ventas y un inventario final. Si s_{j-1} representa el inventario final del periodo anterior (inventario inicial para el periodo j); x_j la cantidad de producción en el periodo j, las ventas en el periodo j y s_j el inventario final para el periodo j.

(a) ¿Cuál debe ser el objetivo de un modelo de sistemas de inventario?

(b) Considere el inventario final como medida de desempeño y determine la forma en que puede ser obtenida a partir de: el inventario inicial, la producción y las ventas.

(c) ¿Qué restricciones debería agregarse si la capacidad de producción para el periodo j está dada por C_j?

2.3 MODELOS EN NEGOCIOS

Antes de abordar situaciones referentes al mundo empresarial, precisaremos algunos términos de negocios que nos serán útiles y presentaremos algunos de los modelos que son utilizados en las empresas.

MODELOS DE COSTO LINEAL

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos: *costos fijos* y *costos variables*.

Los *costos fijos* (o gastos generales) son la suma de todos los costos que no dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de artículos producidos, tales como rentas, seguros, intereses por préstamos y salarios administrativos. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no el artículo.

Los *costos variables* son la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como pueden ser los costos de materia prima, de mano de obra y de procesamiento.

El costo total es la suma de los costos fijos y de los costos variables:

$$\text{Costo total} = \text{Costo fijo} + \text{Costo variable}.$$

Supongamos que durante un tiempo determinado no se tiene alza en cuanto a los gastos de materias primas y de los procesos de producción necesarios para fabricar una unidad de un determinado artículo; esto significa que el costo variable por unidad o costo unitario del artículo es constante en ese período de tiempo. Observe que para este caso los costos variables totales serán proporcionales a la cantidad de artículos producidos. Si c_u denota el costo variable por unidad (el cual es constante), entonces los costos variables totales de producir x artículos estarán dados por: $c_u x$ pesos. Si los costos fijos son de b pesos, el costo total C_t (en pesos) de producir x unidades de artículos está dada por:

$$C_t = c_u x + b.$$

El modelo construido para este caso especial se conoce como *modelo de costo lineal*; su supuesto básico es que "el costo por unidad de producto es constante". El nombre de lineal se deriva del hecho de que la gráfica de la relación del modelo $C_t = c_u x + b$ es una línea recta. Note que la pendiente de esta recta representa el costo variable por unidad y su punto de intersección con el eje y representa los costos fijos.

El determinar que está trabajando con un modelo de costo lineal le será de gran utilidad ya que, por una parte, le permitirá saber que tiene tres opciones para disminuir el costo total, disminuir los costos unitarios del bien que está produciendo, disminuir los costos fijos o disminuir ambos (asegúrese de entender esto realmente, le será de ayuda). Por otra parte le da la posibilidad de responder preguntas concretas para diversas situaciones en las cuales se satisfaga el supuesto del modelo; es decir, tiene un modelo general que puede aplicar a muchas situaciones similares.

Por supuesto, existen relaciones no lineales para el costo total. Recuerde el caso de la constructora Rayen en el cual el costo unitario no era constante y esto conducía a una relación cuadrática entre el costo total de construcción y la cantidad de casas construidas (veáse el ejemplo 2, sección 2.2).

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de costos

La compañía R & S Ltda. fabrica un único producto para el cual el costo variable por unidad es de \$3,300 y el costo fijo es de \$4,400,000 mensuales.

1. Encuentre la ecuación para el costo mensual total y dibuje su gráfica.
2. Determine el costo total de procesar 5,500 artículos en un mes.
3. Si el presupuesto asignado a la producción de este artículo fuera de $ 15,550,000 mensuales, ¿cuántos artículos podrían producirse mensualmente con dicho presupuesto?
4. Indique dos alternativas para disminuir el costo total mensual de la compañía.

SOLUCIÓN

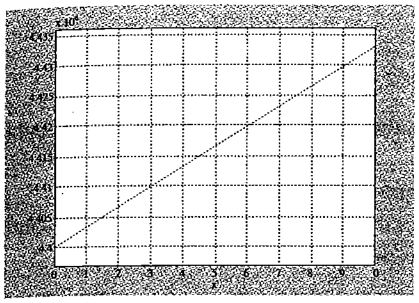


FIGURA 1

1. Al ser constante el costo unitario, se tiene un modelo de costo lineal donde $C_t = 3300x + 4400000$ será la ecuación para el costo mensual total, cuya gráfica se observa:
2. Sustituyendo $x = 5{,}500$ en la ecuación para el costo total, se obtiene $C_t = 3300\,(5500) + 4400000 = 22550000$, por tanto, el costo total de procesar 5,500 artículos al mes será de $22,550,000.
3. En este caso se debe determinar la cantidad de artículos que se pueden producir con un costo total de $15,500,000; para esto debemos encontrar la solución de la ecuación

$$3{,}300x + 4{,}400{,}000 = 15{,}500{,}000$$
$$3{,}300x = 11{,}100{,}000$$
$$x = \frac{11{,}100{,}000}{3{,}300} = 3{,}363.6363$$

Puesto que no es posible producir una fracción de artículo, x debe ser un número entero, y por tanto solamente se podrán producir con este presupuesto 3,363 artículos a un costo total de $15,497,900 quedando sin utilizar $2,100. ■

4. Una alternativa posible es reducir el costo unitario en una cierta cantidad y no preocuparse por disminuir los costos fijos, por ejemplo, en un 10%; en tal caso la ecuación que representa los costos totales sería $C_t = 2970x + 4{,}400{,}000$.
   Otra posibilidad sería disminuir los costos fijos, por ejemplo, en un 10%, en donde el costo total sería: $C_t = 3{,}300x + 3{,}960{,}000$.
   ¿En qué situación está la alternativa más beneficiosa?

EJEMPLO 2 ■ Relación entre costo total y número de artículos

El costo total de producir 10 tortas de chocolate en un día es de $2,600, mientras que cuesta un total de $2,850 producir diariamente 12 tortas del mismo tipo. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación para el costo total de producir x tortas de chocolate al día.

SOLUCIÓN

Se han dado los puntos (10,2600) y (12,2850) de la gráfica de un modelo de costo lineal. La pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos es:

$$m = \frac{2{,}850 - 2{,}600}{12 - 10} = \frac{250}{2} = 125.$$

Con lo que se ha determinado el costo unitario (por día) de cada torta de chocolate: $125.

Como el supuesto de un modelo de costo lineal es que el costo unitario es constante, calculando de nuevo la pendiente de la recta considerando un punto genérico (x, C_t) y uno de los dos puntos dados, por ejemplo (10,2600), se determina la relación deseada:

$$125 = \frac{C_t - 2{,}600}{x - 10}$$

de donde $C_t = 125x + 1{,}350.$ ■

ANÁLISIS DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

El *ingreso total* es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producto y está dado por la ecuación

Ingreso total = (Precio por unidad) (Número de unidades vendidas)

Si p es el precio de venta por unidad de un producto y x representa el número total de unidades vendidas, el ingreso total I está dado por la relación:

$$I = p\,x$$

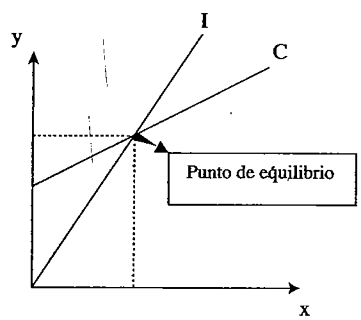


FIGURA 2

Si el precio de venta p de un artículo no depende de la cantidad vendida (es constante), el ingreso total será proporcional al número de unidades vendidas, obteniéndose nuevamente una relación lineal.

Si el costo total C_t de producción excede el ingreso total I obtenido por las ventas, entonces el negocio sufre una *pérdida*. Si por el contrario, el ingreso total sobrepasa el costo total, existe una *utilidad o ganancia*. Si el costo total de producción es igual al ingreso total no hay pérdida ni ganancia, el negocio está en el punto de equilibrio. El número de unidades producidas y vendidas en este caso se denomina *punto de equilibrio*.

Observe que en el caso de un modelo de costo lineal, en el que se tiene además que el precio de venta de un artículo es constante, el punto de equilibrio es el punto de intersección de las dos rectas, la que representa al costo total y la que representa al ingreso total.

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de producción

La compañía Halmos fabrica muñecas con un costo variable por unidad de \$2,250 y un costo fijo mensual de \$2,020,550. Si vende cada muñeca a un precio de \$5,525, ¿cuántas muñecas deberá producir y vender mensualmente con el objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?

SOLUCIÓN Sea x el número de muñecas producidas y vendidas cada mes. El costo total de producir las x muñecas es:

$$C_t = 2{,}250x + 2{,}020{,}550.$$

Puesto que cada muñeca se vende a \$5,525, el ingreso obtenido por vender x muñecas es:

$$I = 5{,}525x.$$

El punto de equilibrio se obtiene cuando el ingreso total es igual al costo total; esto es:

$$
\begin{aligned}
I &= C_t \\
5{,}525x &= 2{,}250x + 2{,}020{,}550 \\
3{,}275x &= 2{,}020{,}550 \\
x &= \frac{2{,}020{,}550}{3{,}275} = 619.96
\end{aligned}
$$

Observe que, teóricamente, el punto de equilibrio se obtiene cuando se producen y venden 619.96 muñecas, lo cual es imposible en la realidad (no se pueden fabricar y vender una cantidad no entera de muñecas). ¿Qué se puede decir en este caso? El punto de equilibrio no se ajusta a la realidad. Sin embargo, conocer el punto de equilibrio dado por el modelo es de utilidad ya que sirve para saber que si no se desea que el negocio esté en pérdida, se deben producir y vender al menos 620 muñecas mensualmente. ■

EJEMPLO 2 ■ Punto de equilibrio

El costo total diario (en pesos) de producir x lámparas está dado por:

$$C_t = 1{,}250x + 150{,}000$$

1. Si cada lámpara se vende a \$2,000, ¿cuál es el punto de equilibrio?
2. Si el precio de venta se incrementa a \$2,500 por lámpara, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?
3. Si se sabe que al menos se pueden vender 150 lámparas al día, ¿qué precio deberá fijarse con el objeto de garantizar que no haya pérdida?

SOLUCIÓN

1. Si cada lámpara se vende a \$2,000, el ingreso obtenido por la venta de x lámparas es:

$$I = 2{,}000x.$$

En el punto de equilibrio se tiene $I = C_t$, esto es:

$$
\begin{aligned}
2{,}000x &= 1{,}250x + 150{,}000 \\
750x &= 150{,}000 \\
x &= 200.
\end{aligned}
$$

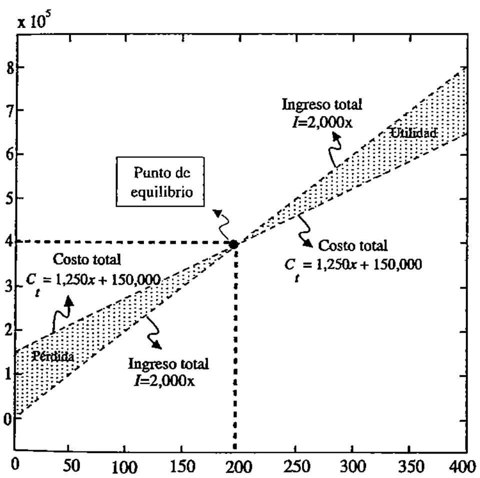


FIGURA 3

El punto de equilibrio está en 200 lámparas. De modo que deberán producirse y venderse 200 lámparas cada día para garantizar que no haya ni utilidad ni pérdida.

La figura anterior da una interpretación gráfica del punto de equilibrio. Cuando $x < 200$, el costo total C_t excede al ingreso total I y hay pérdida. Cuando $x > 200$, el ingreso total I excede al costo total C_t, de modo que se obtiene una utilidad.

2. Si el precio de venta aumenta a \$2,500, el ingreso en este caso es

$$I = 2{,}500x.$$

El punto de equilibrio es

$$
\begin{aligned}
2{,}500x &= 1{,}250x + 150{,}000 \\
1250x &= 150{,}000 \\
x &= 120.
\end{aligned}
$$

Con el nuevo precio de venta el punto de equilibrio es de 120 lámparas.

3. Sea p pesos el precio fijado para cada lámpara, entonces los ingresos obtenidos por la venta de 150 lámparas son $I = 150p$ y el costo total de producir 150 lámparas es $C_t = 1{,}250(150) + 150{,}000 = 337{,}500$. Con el propósito de garantizar una situación de equilibrio se debe tener $I = C_t$, esto es

$$
\begin{aligned}
150p &= 337{,}500 \\
p &= 2{,}250.
\end{aligned}
$$

Luego, si se supone que diariamente se venden 150 lámparas el precio que se debe fijar por lámpara debe ser de $2,250, para garantizar que no haya ni pérdidas ni ganancias. ■

Es conveniente aclarar que cuando en situaciones reales se utilizan relaciones lineales para describir la dependencia entre las variables, no se puede afirmar que la verdadera relación sea efectivamente lineal sino, más bien, que la relación lineal es una buena aproximación de los datos observados sobre el rango de interés. Cuando los datos observados se encuentran sobre o cerca de una recta, es posible utilizar una relación lineal como una representación aproximada de los datos. Existen ejemplos donde los datos presentados pueden estar cerca de una línea recta, pero no es razonable emplear una ecuación lineal para describir la dependencia de las variables; la relación entre los costos totales de construcción y el número de casas construidas era cuadrática. En principio, un análisis del punto de equilibrio puede quedar sin alteración en los casos no lineales. La diferencia sólo radicará en que el álgebra requerida para encontrar el punto de equilibrio es mayor.

EJEMPLO 3 ■ Equilibrio en la constructora

Si la constructora Rayen estima que los costos totales anuales de construcción de x casas está dado por $C_t = 2.0625x^2 + 19.25x$ millones de pesos y decide vender cada casa en 54.3125 millones de pesos, determine la cantidad de casas que debe construir anualmente para poder garantizar que se mantendrá en equilibrio.

SOLUCIÓN Los ingresos totales por vender x casas a 54.3125 millones cada una están dados por:

$$I = 54.3125x.$$

Con el propósito de quedar en el punto de equilibrio, los ingresos totales deben ser iguales a los costos totales; de modo que:

$$
\begin{aligned}
2.0625x^2 + 19.25x &= 54.3125x \\
2.0625x^2 - 35.0625x &= 0 \\
x(2.0625x - 35.0625) &= 0
\end{aligned}
$$

Así $x = 0$ ó

$$
\begin{aligned}
2.0625x - 35.0625 &= 0 \\
x &= \frac{35.0625}{2.0625} = 17
\end{aligned}
$$

Por tanto, existen dos puntos de equilibrio en este problema. Observe que a pesar de que $x = 0$ es un punto de equilibrio, no tiene sentido económico; luego, la constructora deberá construir 17 casas anualmente para mantenerse en equilibrio. ■

MODELO DE DEPRECIACIÓN LINEAL

Las maquinarias, las instalaciones, los edificios y otras clases de activos necesarios para las operaciones de las empresas sufren, por su uso, una disminución de sus valores que no puede evitarse con los gastos corrientes de reparaciones. Puesto que el capital invertido debe permanecer constante, es necesario estudiar la forma de establecer un fondo de reserva que compense esta pérdida de valor.

La *depreciación* es la pérdida de valor no recuperada con el mantenimiento que sufren los activos y se debe a diferentes factores que causan finalmente su inutilidad, obligando por tanto al reemplazo del activo. Al terminar la vida de un activo, debe reemplazarse, invirtiendo para ello un valor que recibe el nombre de *costo de reemplazo*.

Durante la vida útil del activo debe guardarse periódicamente cierta suma para crear con ella un fondo que recibe el nombre de *reserva para depreciación* y que debe ser igual al costo de reemplazo al terminar la vida útil del activo.

La *vida útil* o duración probable de un activo se determina con la experiencia, y tanto los expertos en estas materias como los fabricantes de equipos y maquinarias señalan la vida útil de los distintos activos estableciendo así el cálculo de la depreciación.

Cuando el activo deja de ser útil, siempre conserva algún valor, así sea como chatarra o material de desecho; este valor recibe el nombre de *valor de salvamento o desecho*.

El *agotamiento* es la pérdida progresiva de un activo por reducción de la cantidad aprovechable del mismo. Tal es el caso de los minerales cuya cantidad disminuye por la operación de extracción hasta agotarse. Estos activos reciben el nombre de *activos agotables* y no pueden recuperarse.

La caída en desuso ocurre cuando, por razón de nuevos inventos o perfeccionamiento técnico no resulta económica la utilización de cierto activo; es el caso de las computadoras, impresoras, etc.

Existen varios modelos para determinar el cargo que periódicamente debe hacerse por concepto de depreciación. En esta sección sólo presentaremos el modelo de depreciación lineal. Es el más simple de todos y el más utilizado en las empresas. El supuesto del modelo de depreciación lineal es que la depreciación anual es la misma para toda la vida útil del activo y, de acuerdo con esto, cada año se reservan partes iguales, de tal modo que al terminar la vida útil del activo, se tenga un fondo de reserva que, sumado al valor de salvamento o desecho, dé el valor de reemplazo.

Al designar por C el costo inicial (que se supone que será igual al de reemplazo), por S el valor de salvamento y por n los años de vida útil, la depreciación anual D se plantea mediante la siguiente ecuación:

$$D = \frac{C - S}{n}$$

Veamos cómo se utiliza este modelo.

EJEMPLO 1 ■ Uso del modelo de depreciación lineal

Cierto equipo de una compañía tiene un costo de US$5,000 y una vida útil estimada de 4 años. Si el valor de salvamento corresponde al 10% del costo inicial, hallar la depreciación anual.

SOLUCIÓN En este caso, se tiene

$$C = 5{,}000$$
$$S = 5{,}000(0.1) = 500$$
$$D = \frac{5{,}000 - 500}{4} = 1{,}125$$

El valor de depreciación anual para este equipo es de $1,125 (dólares). El fondo de reserva crece cada año en una cantidad fija y el valor en libros (valor registrado en los libros o planillas de contabilidad) del activo disminuye en la misma cantidad; si estos valores sucesivos se representan gráficamente se observa que son puntos de una recta. ■

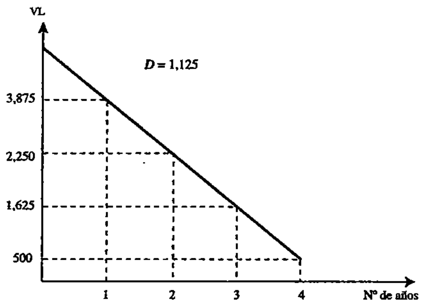


FIGURA 4

A pesar de ser éste el modelo más usado, hay dos objeciones importantes en contra de su aplicación:

- No tiene en cuenta los intereses sobre el fondo de reserva.
- Las maquinarias y los equipos se deprecian más rápidamente en sus primeros años de uso.

Además, debe tenerse en cuenta que durante los primeros años de uso el gasto por reparaciones es pequeño y aumenta con el transcurso del tiempo, llegando a ser considerable en los últimos años.

OFERTA Y DEMANDA

Las leyes de oferta y demanda son dos relaciones fundamentales en cualquier análisis económico.

La cantidad d de cualquier artículo que será adquirido por los consumidores depende del precio del artículo en el mercado. Cualquier relación que especifique la cantidad de un determinado artículo que los consumidores están dispuestos a comprar a varios niveles de producción se denomina *ley de la demanda*.

La ley más simple es una relación lineal $p = m\,d + b$ en donde p es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se suele llamar *curva de demanda*.

Es un hecho conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, ya que menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye la demanda aumentará. Si la ley de la demanda es lineal $p = m\,d + b$, lo anterior se traduce diciendo que la pendiente m de la recta es negativa. Por otra parte, como tanto el precio p como la cantidad de artículos d no son cantidades negativas, la gráfica de la ley de demanda sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

La cantidad s de un determinado artículo que los proveedores (vendedores) están dispuestos a ofrecer depende del precio p al cual puedan venderlo. Cualquier relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina *ley de la oferta*. La gráfica de una ley de oferta se llama *curva de la oferta*.

En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos si pueden ponerlos a un precio alto, mientras que colocarán una menor cantidad de artículos si el precio obtenido es más bajo. La oferta aumenta al subir el precio. La ley más simple es la lineal $p = m\,s + b$.

Modelo lineal

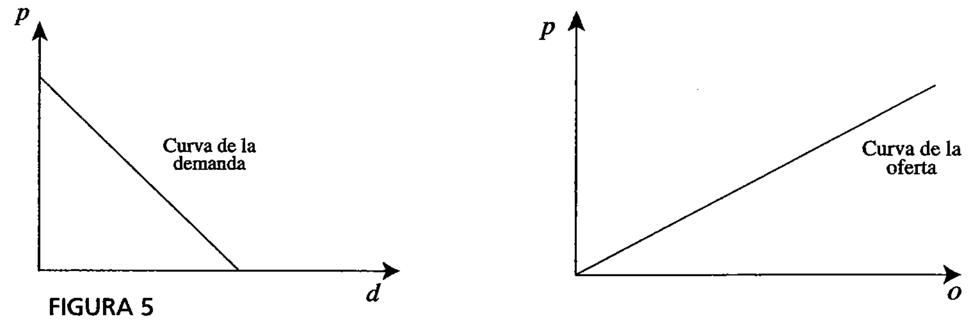


FIGURA 5

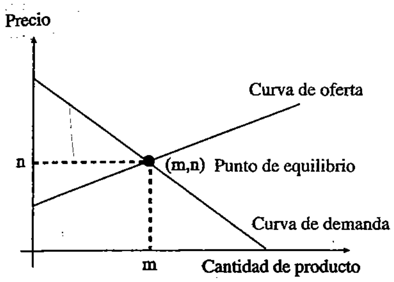


FIGURA 6

Si el precio de un producto es muy alto, los consumidores no lo adquirirán (puede ser, por ejemplo, sustituido por otro), mientras que si el precio es muy bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y de la oferta, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo; de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los proveedores están dispuestos a ofrecer.

Se dice que el *punto de equilibrio del mercado* ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida y corresponde geométricamente al punto de intersección de las curvas de oferta y demanda, como se ilustra, para el caso lineal, con la figura 6:

EJEMPLO 1 ■ Determinación de la ley de demanda

Un comerciante puede vender 30 equipos de sonido al día al precio de $55,550 cada uno, pero puede vender 40 si les fija un precio de $52,500 a cada equipo. Determine la ley de demanda suponiendo que es lineal.

SOLUCIÓN Si d representa la cantidad demandada y p el precio por equipo, lo que se tienen son las coordenadas de la curva de demanda: $d = 30, p = 55{,}550$ y $d = 40, p = 52{,}500$.

Dado que la ley de demanda es lineal se tiene:

$$m = \frac{55{,}550 - 52{,}500}{30 - 40} = -305$$
$$p = -305d + 64{,}700$$

que es la ecuación pedida.

EJEMPLO 2 ■ Punto de equilibrio del mercado

Si las ecuaciones de la demanda y la oferta son, respectivamente

$$D: p = -\frac{1}{180}x + 12$$
$$O: p = \frac{1}{300}x + 8$$

determine el punto de equilibrio del mercado.

SOLUCIÓN:

Igualando las dos ecuaciones se tiene

$$-\frac{1}{180}x+12=\frac{1}{300}x+8$$

De donde el equilibrio del mercado se obtiene cuando el precio es $p = 9.50$ y la cantidad demandada $x = 450$. ■

EJEMPLO 3 ■ Determinación de precios

La compañía Oscar Sour Ltda. produce y vende pisco sour congelado en bolsas plásticas de 700 cc. Para esto combina dos ingredientes: jarabe de limón y pisco de 35 grados; mezcla los dos ingredientes, empaca el pisco sour, lo congela y lo distribuye a diversos restaurantes y bares en la ciudad de Santiago. Oscar, el fundador de la compañía, se ha propuesto obtener ganancias inmediatas y sabe que su decisión más crítica consiste en determinar el precio de la bolsa de pisco sour al por mayor. El plan de mercadotecnia de Oscar le impide modificar el tamaño de la bolsa (centímetros cúbicos de contenido de producto) y la calidad del producto (variaciones en su receta). Construya un modelo para esta situación.

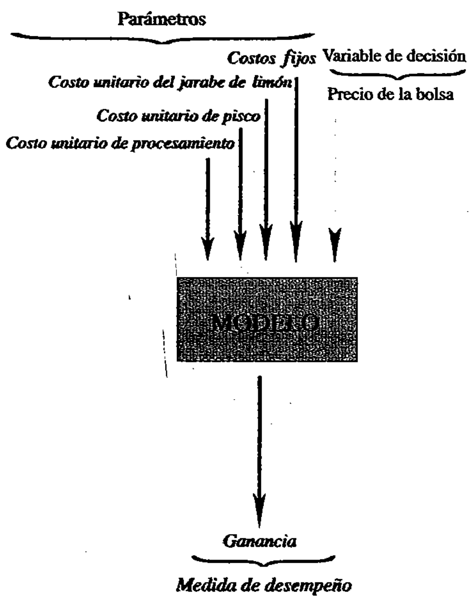


FIGURA 7

SOLUCIÓN Debido a que Oscar desea obtener ganancias inmediatas, nuestro objetivo es claro, y consiste en encontrar un modelo con el cual se pueda analizar la ganancia obtenida por la empresa. La medida de desempeño que elegiremos será la ganancia semanal. Puesto que la decisión más crítica es determinar el precio de la bolsa de pisco sour al por mayor, ésta será nuestra variable de decisión.

Los costos fijos de Oscar Sour Ltda. son los siguientes: arriendo del local donde procesa el pisco sour, pago de un préstamo que fue solicitado en el pasado, salarios, servicios de agua y luz (los cuales se estimarán semanalmente). Por otra parte, es posible estimar el costo del jarabe de limón (por bolsa), el costo del pisco de 35 grados (por bolsa) y el costo unitario de procesamiento; en este último se han incluido la preparación de la mezcla, el empaque, el etiquetado y la entrega. ■

Las variables de entrada y salida del modelo así como su clasificación se detallan en la figura 7.

Para determinar con mayor facilidad las relaciones entre las variables de salida y las de entrada existe un recurso muy útil que ayuda a estructurar el pensamiento: los *diagramas de influencias*. En general, un diagrama de influencias muestra las conexiones entre las variables de entrada y las medidas de desempeño. Para la creación de un diagrama de influencias se inicia con una medida de desempeño (si existen varias, se elige una) y se descompone en dos o más variables intermedias, que se combinarán matemáticamente en el modelo y permitirán definir esa medida de desempeño; a continuación cada una de las variables intermedias se vuelven a descomponer en otras variables intermedias conexas. Este proceso de descomposición continúa hasta que se llegue a las variables de entrada.

Ilustraremos esta creación con nuestro ejemplo. A partir de la medida de desempeño, ganancia semanal, se definen sus dos componentes —ingreso total y costo total—; a continuación se siguen descomponiendo estas dos variables intermedias en sus componentes constitutivos; después se subdivide cada una de éstas en otras y así sucesivamente (véase la figura 8). El proceso termina cuando todas las variables de entrada han sido definidas.

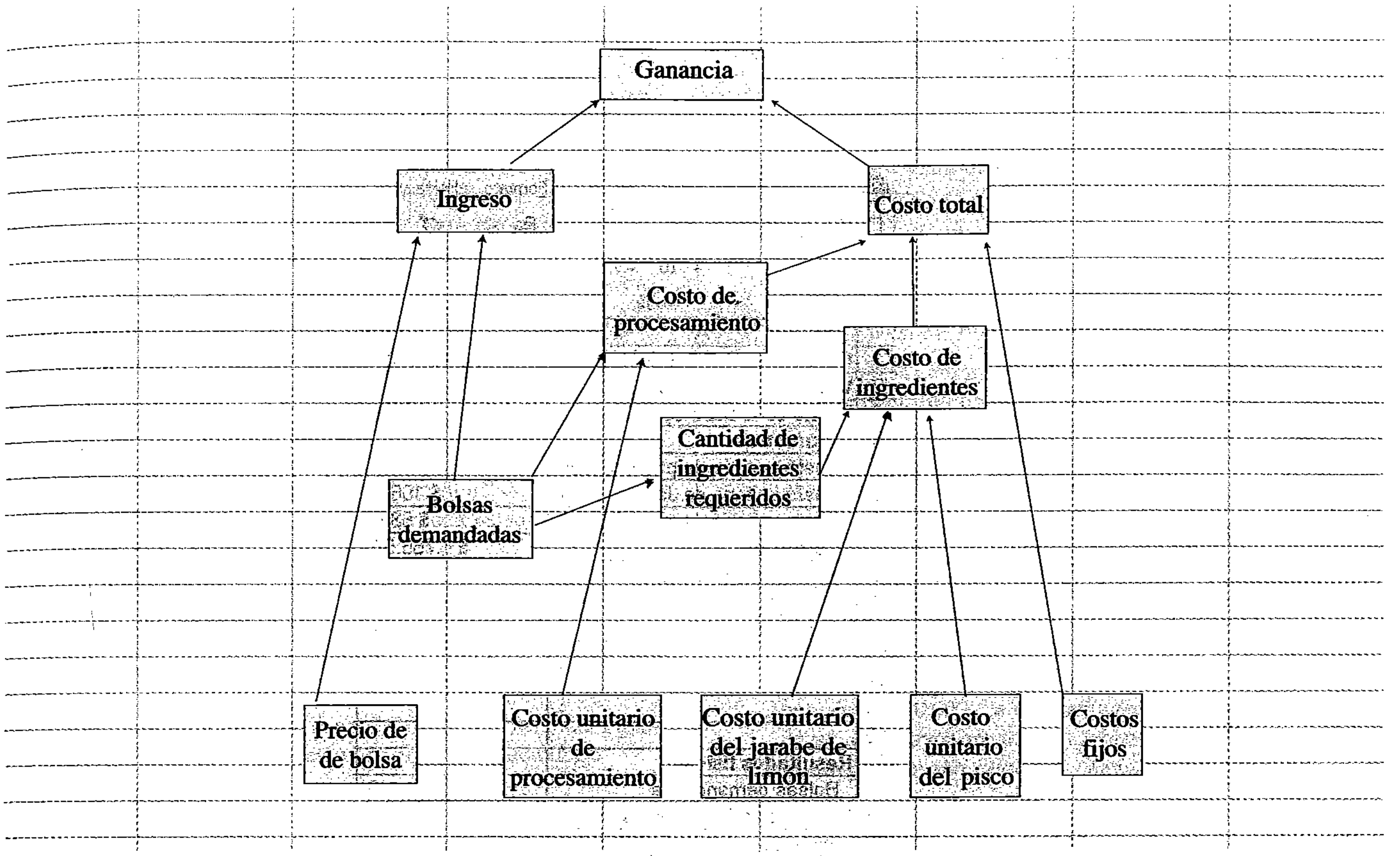


FIGURA 8

Con el diagrama de influencias se determinan las ecuaciones del modelo:
Ganancia = Ingreso total – Costo total
Ingreso total = (precio de la bolsa por mayor) (bolsas demandadas)
Costo total = Costo de procesamiento + Costo de ingredientes + Costos fijos
Costo de ingredientes = (cantidad de jarabe de limón) (costo unitario del jarabe de limón) + (cantidad de pisco) (costo unitario del pisco)
Costo de procesamiento = (bolsas demandadas) (costo unitario de procesamiento)

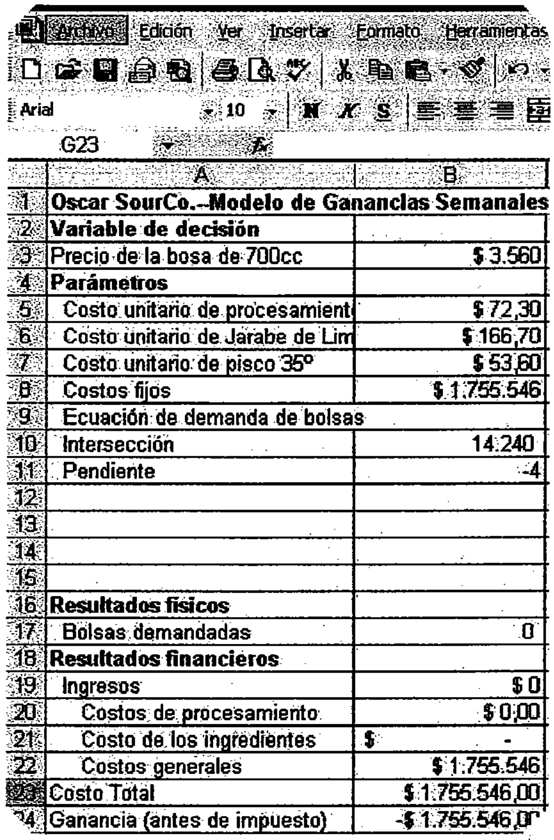
Observe que el asignar nombres a las variables en este caso, en lugar de aclarar el panorama, lo vuelve un tanto borroso. Por este motivo, es usual en casos como éste (modelación en un negocio) utilizar una hoja de cálculo electrónico para presentar el modelo. El uso de hojas de cálculo (por ejemplo, el programa Excel) tiene la ventaja adicional de ser de gran utilidad al querer analizar el modelo permitiendo rápidamente considerar diversos casos, asignar valores a las variables de decisión y los parámetros.

Antes de pasar nuestro modelo a Excel, note que aún no hemos terminado; para concluir la construcción del modelo es necesario estimar la demanda de bolsas de pisco sour. Por lo general, esta estimación no es sencilla y requiere investigaciones previas —un estudio de mercado—. Para el ejemplo, supongamos que este estudio ya se realizó y se ha podido determinar lo siguiente: si el precio de la bolsa al por mayor es de \$3,560 no se podrá vender el producto, pero por cada disminución de \$100 se podrán vender 400 bolsas adicionales.

Con esta información y suponiendo linealidad, nos será posible estimar la ley de demanda para la bolsa de pisco sour. Si d denota la demanda de bolsas de pisco sour y p el precio de la bolsa al por mayor, se tiene:

$$m = -4$$
$$d = 14{,}240 - 4p$$

El modelo utilizando Excel para Oscar Sour Ltda. sería:



	A	B
1	**Oscar SourCo.-Modelo de Ganancias Semanales**	
2	**Variable de decisión**	
3	Precio de la bosa de 700cc	$ 3.560
4	**Parámetros**	
5	Costo unitario de procesamient	$ 72,30
6	Costo unitario de Jarabe de Lim	$ 166,70
7	Costo unitario de pisco 35º	$ 53,60
8	Costos fijos	$ 1.755.546
9	Ecuación de demanda de bolsas	
10	Intersección	14.240
11	Pendiente	-4
12		
13		
14		
15		
16	**Resultados físicos**	
17	Bolsas demandadas	0
18	**Resultados financieros**	
19	Ingresos	$ 0
20	Costos de procesamiento	$ 0,00
21	Costo de los ingredientes	$ -
22	Costos generales	$ 1.755.546
23	Costo Total	$ 1.755.546,00
24	Ganancia (antes de impuesto)	-$ 1.755.546,0

Observe que se han separado claramente la variable de decisión de los parámetros, se ha colocado la ecuación de la demanda y se han separado los resultados físicos de los resultados financieros. Cada celda se programa de acuerdo con las relaciones obtenidas anteriormente. Por ejemplo, en la celda B24 se ha colocado B19-B23, lo que corresponde a la ganancia. El análisis del modelo y la toma de decisiones se deja como ejercicio para el lector.

2.3 EJERCICIOS

1. El costo variable de fabricar una silla de estilo es de \$3,850 y los costos fijos son de \$82,000. Determine el costo total de fabricar x sillas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 sillas al día?

2. Una fábrica de pelotas de tenis tiene costos fijos mensuales de \$2,350,00 y le cuesta \$750 fabricar cada pelota. Si la empresa vende una pelota en \$950.
   (a) Determine el costo total de fabricar x pelotas al mes.
   (b) Determine el ingreso total por la venta de x pelotas al mes.
   (c) ¿Cuál es el costo y el ingreso total si la empresa produce y vende 5,000 pelotas?

3. Una fábrica de gorras tiene costos fijos semanales de \$485,000 y la fabricación de cada gorra le cuesta \$565. Si la empresa vende una gorra en \$1,250.
   (a) Determine el costo total de fabricar x gorras a la semana.
   (b) Determine el ingreso total por la venta de x gorras a la semana.
   (c) ¿Cuál es el costo y el ingreso total si la empresa produce y vende 1,850 gorras semanalmente?

4. Los costos fijos de una fábrica de vestidos infantiles son de \$11.175 millones de pesos al mes y le cuesta \$6,500 confeccionar un vestido. Si cada vestido es vendido en \$12,350. Determine la cantidad de vestidos que debe confeccionar para mantenerse en equilibrio.

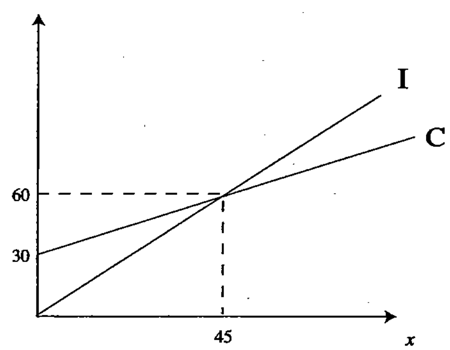
5. Los costos fijos por fabricar cierto artículo son de \$150,000 a la semana y los costos totales por fabricar 20 unidades a la semana son de \$225,500. Determine la relación entre el costo total y el número de unidades producidas, suponiendo que es lineal. ¿Cuál será el costo de fabricar 33 unidades a la semana?

6. Un hotel alquila una habitación sencilla a una tarifa de US\$ 30 por la primera noche y de US\$ 27 por cada noche siguiente. Exprese el costo total para una persona que se hospeda x noches en el hotel.

7. El Stade Françaíse arrienda salas para cumpleaños a un costo de \$2,500 por persona más un cargo adicional de \$15,000. Encuentre el costo que fijará el Stade por x personas.

8. Una empresa de buses intermunicipales fija el costo de un boleto considerando que depende directamente de la distancia viajada. Un recorrido de 40 kilómetros cuesta \$7,550, mientras que un recorrido de 60 kilómetros cuesta \$11,850. Determine el costo de un boleto por un recorrido de x kilómetros.

9. A continuación se muestra la gráfica del costo total y del ingreso total de una empresa. Determine el punto de equilibrio.



10. El costo de producir x artículos está dado por $C_t = 28x + 6000$ y cada artículo se vende a \$40.

   (a) Encuentre el punto de equilibrio.
   (b) Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?

11. Un fabricante produce artículos a un costo variable de \$0.85 cada uno y los costos fijos diarios son de \$280 al día.

   (a) Si cada artículo puede venderse a \$11, determine el punto de equilibrio.
   (b) Si el fabricante adquiere una nueva máquina que le permite reducir el costo de producción a \$0.7 por artículo pero le incrementa los costos diarios a \$350, por el cargo por intereses, ¿es esto ventajoso?

12. El costo de producir x artículos al día está dado en dólares por $C_t = 0.1x^2 + 4x + 80$. Si cada artículo puede venderlo a 10 dólares, determine el punto de equilibrio.

13. Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de \$38,000 por tonelada. Si los costos fijos son de 55 millones de pesos por mes y el alimento se vende a \$63,000 por tonelada:

   (a) ¿Cuántas toneladas deberán venderse para que la compañía tenga una ganancia mensual de 270 millones al mes?
   (b) ¿Cuántas toneladas, como mínimo, deberán venderse al mes para que la compañía no tenga pérdida?

14. Una empresa determina que si produce y vende x unidades de un artículo, el ingreso total por las ventas será $100\sqrt{x}$. Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo es de \$1,200 por día, determine la cantidad de artículos x que debe producir y vender para mantenerse en equilibrio?

15. El margen de utilidad de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta compañía aumentó 0.02 con respecto al año anterior. El año anterior vendió su producto en \$1,500 y tuvo un ingreso neto de \$2,250,000. Este año incremento el precio de su producto en \$250 por unidad, vendió 2,000 más y tuvo un ingreso neto de \$3,570,000. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántos de sus productos vendió la compañía el año pasado y cuántos vendió este año?

16. En una ciudad de Estados Unidos se están realizando planes preliminares para la construcción de un estadio nuevo para un equipo de béisbol de ligas mayores. Los funcionarios de la ciudad cuestionan la cantidad y rentabilidad de los palcos de lujo planeados para el piso superior del estadio. Las corporaciones y los particulares pueden comprar los palcos por US\$ 100,000 cada uno. El costo de construcción fijo para el área del piso superior se estima en US\$ 1,500,000, con un costo variable de US\$ 50,000 para cada palco construido.

   (a) ¿Cuántos palcos de lujo se necesitan vender para llegar al punto de equilibrio?
   (b) Los planos preliminares del estadio muestran que hay espacio disponible para la construcción de hasta 50 palcos de lujo. Los promotores indican que hay compradores disponibles y que los 50 palcos podrían venderse si se construyeran. ¿Cuál es su recomendación respecto a la construcción de palcos de lujo? ¿Qué ganancia se anticipa?

17. Eastman Publishing Company está considerando publicar un libro de texto en rústica sobre aplicaciones de hojas de cálculo para negocios. El costo fijo de la preparación del manuscrito, diseño del libro de texto y preparación de la producción se estima en US\$ 80,000. Los costos variables de producción y material se estiman en US\$ 3 por libro. Se estima que se podrán vender 4,000 ejemplares. El editor planea vender el texto en las librerías de las universidades por US\$ 20 cada uno.

   (a) ¿Cuántos libros se necesita vender para alcanzar el equilibrio?

(b) ¿Qué perdida o ganancia puede anticiparse con una venta de 4,000 ejemplares?

(c) Con una venta de 4,000 ejemplares, ¿cuál es el precio mínimo por ejemplar que debe cobrar el editor para llegar al punto de equilibrio?

(d) Si el editor supone que el precio por ejemplar podría incrementarse a US$25.95 sin afectar la estimación anticipada de venta de 4,000 ejemplares, ¿qué ganancia o pérdida puede anticiparse?

18. Una máquina tiene un costo inicial de 120,000 dólares, una vida útil de 6 años y un valor de desecho de 30,000 dólares. Elaborar un cuadro de depreciación utilizando el modelo de depreciación lineal.

19. Usted compró un automóvil en $7,550,000. ¿Cuál es el valor del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia cada año un 8% de su costo original. ¿Cuál es el valor del automóvil después de 4 años?

20. Sea P el precio de adquisición de un activo, S su valor de desecho y n su vida útil. Determine un modelo que le permita determinar el valor V del activo después de t años.

21. Una máquina tiene un valor de 60,000 dólares y debe depreciarse hasta 5,000 dólares en 5 años. Determine el porcentaje fijo de depreciación.

22. Suponga que se depositan las depreciaciones de un bien en un fondo que devengue intereses, de tal modo que el incremento anual sea la suma del cargo anual por depreciación y del interés ganado en el fondo, en el mismo año. Modifique el modelo de depreciación lineal de tal manera que se consideren dichos intereses.

23. Un equipo tiene un costo inicial de 80.000 dólares, un valor de desecho de 2,000 dólares y una vida útil de 15 años. Si las depreciaciones se depositan en un fondo de amortización a una tasa de 7%, determine el valor en el fondo al final de 8 años, el valor en libros al final de 8 años, la depreciación que debe cargarse al final del décimo año?

24. Analice el modelo de la compañía Oscar Sour Ltda. y tome una decisión sobre el precio al por mayor de la bolsa de pisco sour.

2 REPASO

1-12 ■ Discuta la validez de cada una de las afirmaciones.

1. La utilidad práctica de un modelo depende de su complejidad.

2. Un modelo, generalmente, describe con exactitud un fenómeno de la vida real.

3. Todo modelo presupone ciertas condiciones que permiten su posibilidad de aplicación, es decir, involucra diferentes supuestos.

4. No existe una sola forma correcta de construir un modelo de una situación problemática.

5. Una ventaja del proceso de modelación es que frecuentemente elimina la necesidad de conocer con profundidad el ambiente que es objeto de estudio puesto que es una simplificación de la realidad.

6. Generalmente, un modelo permite tomar la mejor decisión para la situación del mundo real.

7. Un modelo evita utilizar el juicio y la experiencia minimizando la posibilidad de una equivocación.

8. Para toda situación problemática existe un modelo cuantitativo que permite analizarla.

9. El proceso de construcción de un modelo cuantitativo termina al encontrar las ecuaciones o relaciones entre las diferentes variables utilizadas.

10. Un modelo matemático no requiere ser validado ya que la matemática es una ciencia exacta.

11. Cuando se hace una hipótesis sobre cualquier relación entre los datos, ya se está empezando a formular la/s ecuación/es de un modelo.

12. Un modelo es adecuado si nos es útil en la toma de decisiones y satisface nuestras necesidades.

13. Explique cuál es la diferencia entre datos y modelos.

14. ¿Cuál es el significado de una ecuación matemática en la cual los datos, valores de los parámetros, no se conocen con precisión? ¿Qué tipo de suposiciones tenderían a justificar el uso de modelos en situaciones de este tipo?

15. Se ha dicho que un dato nunca ha sido la causa para rechazar un modelo, no importa que dicho dato no confirme las hipótesis. Lo único que puede hacer que un modelo sea rechazado es otro modelo. ¿Está usted de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué sí o por qué no? Suponiendo que está afirmación sea verdadera, ¿qué papel juegan entonces los datos en la validación de un modelo?

16. La maximización de las utilidades es considerada generalmente la medida de desempeño para las empresas. ¿Debe ser siempre así? Mencione otros objetivos que pudieran ser adecuados.

17. Cuantos más conocimientos se tengan de las diferentes teorías matemáticas, los modelos que se pueden construir describirán en forma más apropiada la realidad-objeto de estudio. ¿Está usted de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Para qué cree usted que sirva el estudio de las teorías matemáticas, en particular el cálculo?

18. El comercio entre dos países se produce cuando dos o más países están diferentemente dotados de los diversos factores de producción (mano de obra, tierra y capital) y cuando necesitan los diferentes bienes que resultan de las diferentes combinaciones de estos factores. Por ejemplo, una región con

grandes extensiones de tierra pero con poco trabajo y capital que cultiva café puede necesitar importar maquinaria de un país que tiene más capital y mano de obra. Si se supone que:
(a) Un país exportará los bienes cuya producción requiere los factores que en él abundan.
(b) Un país importará los bienes que necesita, pero que requieren factores de producción de que carece.
(c) Las importaciones deben pagarse con las exportaciones.
Utilice conjuntos para modelar el problema y escriba las condiciones necesarias para que se produzca el comercio.

19. Un hospedaje le alquila un cuarto a una persona a una tarifa de $23,500 por la primera noche y de $22,325 por cada noche siguiente. Construya un modelo que le permita a esta persona calcular sus gastos de hospedaje.

20. Si se sabe que en cada salón disponible para presentar un examen pueden acomodarse 55 estudiantes.
(a) Construya un modelo que le permita estimar el número de salones por utilizar, si se conoce el número total de inscriptos.
(b) Construya un modelo que permita estimar la cantidad de inscripciones que se pueden aceptar de acuerdo con la capacidad del establecimiento.

21. Un constructor civil se ha dado cuenta de que para poder realizar en un tiempo determinado un trabajo es importante estimar la cantidad de personal que debe contratar. Durante los últimos meses ha registrado los siguientes datos:

Intento N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo para atravesar el laberinto (minutos)	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{31}{10}$

Para construir un modelo para esta situación, determine:
(a) Medidas de desempeño.
(b) Variables de decisión.
(c) Restricciones teóricas y físicas.
(d) Relaciones del modelo.

22. Un cuadrado mágico es una disposición cuadrada de números con la propiedad de que la suma a lo largo de cada fila, columna y diagonal es la misma. Determine un modelo que permita construir cuadrados mágicos que tengan tres filas y tres columnas.

23. Una compañía desea alquilar tiempo de publicidad tanto en radio como en televisión, de modo que alcance el mismo número de clientes potenciales en ambos medios de difusión. Cada minuto de publicidad en radio cuesta $262,500 y cubre 12,000 clientes potenciales, mientras que cada minuto de publicidad en televisión cuesta $564,375 y alcanza 16,000 clientes potenciales. Si la compañía tiene un presupuesto asignado de *P* pesos, construya un modelo que le permita estimar cuántos minutos se deberán contratar en cada medio de difusión para cumplir el objetivo fijado y utilícelo para responder a la pregunta: ¿cuántos minutos deberá contratar la compañía en cada medio de difusión si el presupuesto asignado es de $78,750,000?

24. Una empresa que organiza fiestas infantiles cobra por cada niño invitado $3,500, más un cargo de $38,500. Construya un modelo que le permita estimar los costos de realización de una fiesta infantil si contrata a esta empresa.

25. Se sabe que un insecto vive tres años. Para estudiar el crecimiento de la población de estos insectos se ha considerado que sólo es necesario tomar en cuenta el crecimiento de la población de insectos hembras. La población de hembras ha sido dividida en tres clases: menores (0 a 1 año), jóvenes (1 a 2 años) y adultos (2 a 3 años). Se sabe que las menores no depositan huevos; cada joven produce un promedio de cuatro insectos hembras y cada adulta un promedio de tres hembras. La tasa de supervivencia de las menores es de 50% (es decir, la probabilidad de que sobreviva una hembra menor y se convierta en joven es de 0.5), mientras que la tasa de supervivencia de una joven es de 25%. Si al inicio del estudio se tiene una población de 100 hembras de las cuales 40 son menores, 30 jóvenes y 30 adultas, se desea predecir la población de insectos de cada clase a través del tiempo.
(a) ¿Cuál es el supuesto realizado para el estudio de esta situación? ¿Lo considera apropiado?
(b) Construya un modelo que permita predecir la población de insectos de cada clase a través del tiempo.

26. Una receta de galletas de harina de trigo requiere de 1 2/3 de tazas de harina para hacer cuatro docenas de galletas. Construya un modelo que le permita estimar la cantidad de harina necesaria para elaborar una cantidad determinada de galletas.

27. Un bacteriólogo ha colocado tres cepas de bacterias: B_1, B_2 y B_3 en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres diferentes fuentes alimenticias denotadas por A_1, A_2 y A_3. Si se sabe que cada bacteria de la cepa B_1 consume 2 unidades de A_1, 1 unidad de A_2 y 1 unidad de A_3; cada bacteria de la cepa B_2 consume 2 unidades de A_1, 2 unidades de A_2 y 3 unidades de A_3 y cada bacteria de la cepa B_3 consume sólo 4 unidades de A_1 y 1 unidad de A_3.

Si cada día el bacteriólogo coloca en el tubo 1500 unidades de A_1, 600 unidades de A_2 y 2200 unidades de A_3. Construya un modelo que permita responder a la pregunta: ¿cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir diariamente todo el alimento?

28. Una escalera de *L* metros de longitud se apoya sobre una pared. Construya un modelo que le permita calcular la altura que alcanza el extremo superior de la escalera sobre la pared, si:
a) Se conoce la distancia entre el extremo inferior de la escalera y la pared.
b) Se conoce el ángulo que forma la escalera con el suelo.

29. Construya un modelo que le permita calcular la altura de un edificio, si se conoce la longitud de la sombra y el ángulo del sol sobre la horizontal.

30. Si se pide un préstamo de *P* pesos a un interés simple durante *t* años a una tasa de interés anual del *r* por ciento, construya un modelo que le permita saber cuál es la cantidad efectivamente pagada por este préstamo al cabo de los *t* años. Encuentre datos reales para validar su modelo.

31. Suponga que se tiene un capital de P pesos y se depositan a una tasa de interés anual del r por ciento durante n años. Construya un modelo que le permita saber cuál es la cantidad de dinero que se tendrá al final de los n años, si:
(a) Los intereses se van acumulando al capital trimestralmente.
(b) Los intereses se van acumulando al capital mensualmente.
(c) Los intereses se acumulan al capital m veces al año.

32. Los bancos, las uniones de crédito y otras instituciones de ahorro con frecuencia ofrecen dos cantidades cuando anuncian las tasas que pagarán. La primera, la tasa de interés anualizada real, es la *tasa nominal*. La segunda cantidad es la tasa equivalente que produciría la misma cantidad final, o valor futuro, al final de un año si el interés que se paga fuese simple en lugar de compuesto, es *la tasa efectiva o rendimiento anual efectivo*. Como el interés normalmente se compone varias veces por año, la *tasa efectiva* regularmente es un poco mayor que la tasa nominal.
(a) Encuentre el rendimiento anual efectivo de una cuenta que paga una tasa nominal de 6.50%, compuesto trimestralmente.
(b) Construya un modelo que le permita encontrar el rendimiento anual efectivo de una cuenta que paga una tasa nominal de r por ciento compuesto trimestralmente.
(c) Construya un modelo que le permita encontrar el rendimiento anual efectivo de una cuenta que paga una tasa nominal de r por ciento compuesto m veces al año.

33. Para estudiar la tasa a la cual aprenden los animales, un estudiante de psicología realizó un experimento en el que se enviaba una rata blanca en repetidas ocasiones por un laberinto de laboratorio. El estudiante obtuvo con este experimento los siguientes resultados:

Intento Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tiempo para atravesar el laberinto (minutos)	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{31}{10}$

(a) Construya un modelo que permita analizar la situación y responder
(i) ¿Cuánto tiempo tardará la rata en atravesar el laberinto en el intento 23?
(ii) ¿Cuántos intentos deberán hacerse para que la rata atraviese el laberinto en 3.05 minutos?
(iii) ¿Podrá la rata atravesar el laberinto en menos de 3 minutos?
(b) Dé respuesta a las siguientes preguntas, justificándolas de acuerdo con el modelo construido:
(i) ¿Cuánto tiempo tardará la rata en atravesar el laberinto en el intento 23?
(ii) ¿Cuántos intentos deberán hacerse para que la rata atraviese el laberinto en 3.05 minutos?
(iii) ¿Podrá la rata atravesar el laberinto en menos de 3 minutos?

34. A una empresa le cuesta \$39,375 producir 10 unidades de cierto artículo al día y \$63,000 producir 25 unidades del mismo artículo al día.
(a) Determine el modelo de costo suponiendo que es lineal.
(b) ¿Cuál es el costo de producir 32 unidades de este artículo al día?
(c) ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?
(d) Si el precio del artículo en el mercado es de \$3,255, ¿cuántas unidades de este producto deben venderse (por lo menos) diariamente para que la empresa no tenga pérdidas?

35. Un consumidor puede comprar un producto cualquiera elegido entre dos. Su ingreso total le permite comprar 5 unidades de uno de los productos o 10 del otro. Suponiendo que la relación entre los ingresos fijos y las cantidades de los dos productos que puede comprar es lineal. Encuentre la ecuación que modela esta situación.

36. Una empresa que produce un solo producto puede lanzar al mercado tantas unidades como desee y sea capaz de producir a un precio de \$787.5. Con la maquinaria que posee puede fabricar hasta 600 unidades por día. El costo fijo total es de \$105,000 por día y el costo unitario es de \$262.5. Si se supone linealidad, encuentre un modelo para esta empresa que le permita calcular la cantidad de unidades que debe producir diariamente para, al menos, cubrir todos los gastos.

37. Una fábrica ha recibido una oferta para ensamblar un cierto número de chips para PC a US\$28.50 cada uno. Para cumplir con esta orden la firma tiene dos alternativas: (1) subcontratar parte de las operaciones de montaje a otra compañía, con lo cual el costo variable se reduciría a US\$16 por unidad, debiendo cancelar un monto total fijo de US\$44 mil por ese contrato o (2) pagar US\$152,000 por el alquiler de una máquina programada para la inserción de partes. Si se alquila esta máquina, se reduciría a US\$9 el costo variable por unidad.
(a) Modele la situación suponiendo linealidad. (No considere otros costos fijos probables, salvo los indicados).
(b) ¿Cuál es el nivel de producción sobre el cual el negocio es rentable?
(c) Determine claramente los intervalos en donde cada alternativa es más rentable respecto de la otra. Suponga que el máximo número de chips por ensamblar es 18,000.

38. Una compañía que produce un solo producto, opera dos plantas. En una de las plantas (planta A) el costo unitario diario es de \$1,050, los costos fijos diarios son de \$52,500 y puede producir diariamente 100 unidades de producto. En la otra planta (planta B) el costo unitario diario es de \$375, los costos fijos diarios son de \$105,000 y puede producir diariamente 150 unidades de producto. La compañía ha fijado un precio de \$2,625 por unidad de producto. Si se supone linealidad, construya un modelo para la compañía que le permita responder las siguientes preguntas:
(a) ¿Cuál de las dos plantas es la más automatizada? ¿Por qué?
(b) Calcule el punto de equilibrio para cada planta.
(c) Si cada planta opera al mismo nivel absoluto de producción que la otra, ¿con qué producción la operación de la planta B resulta más provechosa que la de la planta A?
(d) Si la compañía divide la producción en partes iguales entre las dos plantas, ¿cuál es la demanda mínima que la compañía debe conseguir para que ambas plantas alcancen el punto de equilibrio?
(e) Si puede venderse diariamente la producción total de ambas plantas, ¿cuál es el beneficio total de la firma?

39. Se sabe que la producción de motores para camiones requiere dos veces más tiempo que la producción de motores para automóviles. Cuando una fábrica sólo produce motores de automóvil fabrica 80 motores y cuando sólo se dedica a producir motores de camión fabrica 40 motores.
   (a) ¿Cuál es la ecuación que describe la relación de capacidad entre los dos tipos de motores?
   (b) Indique las restricciones de las variables.
   (c) Si no se utiliza la capacidad total, muéstrese en una gráfica la región que representa las posibles combinaciones de motores de automóvil y camión.

40. Una empresa va a cerrar, pero antes de hacerlo debe cumplir dos contratos. Uno de los contratos estipula que al cliente A debe suministrársele diariamente al menos 6 unidades de los productos X e Y combinados. El segundo contrato especifica que al cliente B se le debe suministrar diariamente al menos 8 unidades de los productos X e Y combinados.
   (a) Construya un modelo que describa las posibles combinaciones de producción que satisfacen los requerimientos de los contratos.
   (b) Si cada unidad del producto X requiere 1 hora-hombre y cada unidad de producto Y 2 horas-hombre y hay solamente 20 horas-hombre disponibles al día, muéstrese qué combinaciones de producción satisfacen estos requerimientos.
   (c) Si una norma del sindicato prohíbe el empleo de menos de 8 horas-hombre al día, muéstrese las combinaciones de producción factible.

41. Una empresa está planeando la producción de dos de sus productos para la semana siguiente. El producto A requiere 6 horas de fundición, 3 horas de manufactura y 4 horas de acabado; mientras que el producto B requiere 6 horas de fundición, 6 horas de manufactura y 2 horas de acabado. Se sabe que en la siguiente semana se dispone en total de 110 horas en fundición, 150 horas en manufactura y 60 horas en acabado. Construya un modelo para esta situación.

42. Una fotocopiadora tiene un valor de $550,000, una vida útil de 5 años y un valor de desecho de $80,000. Realice un cuadro de depreciación utilizando el modelo de depreciación lineal.

43. Si se compra una máquina en $15,755,000, ¿cuál es el valor de la máquina después de 10 años, suponiendo que se deprecia, cada año, un 5% de su costo original?

44. Una empresa compra por $125,575,800 un piso en un edificio para instalar sus oficinas. Si se deprecia cada año en el 10% de su valor en libros, calcule el valor en libros al final del quinto año.

45. Un equipo cuyo costo inicial es de $26,250,000 tiene una vida útil de 12 años al final de los cuales no tiene ningún valor y debe eliminarse para ser reemplazado por otro de igual valor. Halle el valor del equipo al cabo de 6 años.

46. Una flota de taxis tiene 25 automóviles. Cada uno recorre aproximadamente 300 kilómetros diarios y gasta en promedio 9 litros por kilómetro. Si el precio de la bencina es de $450 por litro. Construya un modelo que le permita a la empresa de taxis estimar los costos por concepto de bencina.

47. Un aumento en el costo de la materia prima obligó a una fábrica de producción de módulos para estanterías a incrementar el precio de su módulo base de $13,520 a $16,900. Como resultado de este incremento las ventas cayeron de 3,000 a 2,600 diariamente. Construya un modelo que le permita estudiar la sensibilidad del precio del módulo base sobre la demanda y utilícelo para responder a la pregunta: ¿Qué pasaría con las ventas si la compañía baja el precio del módulo base a $10,550?

48. El administrador de un minimarket encuentra que las ventas de paquetes de papas fritas son de 10,000 paquetes a la semana cuando el precio por cada paquete es de $656, pero que las ventas se incrementan a 12,000 cuando el precio se reduce a $570 por paquete. Determine la relación de la demanda suponiendo que es lineal.

49. A un precio de $1,350 por unidad, una empresa ofrece 8,000 arreglos florales para mesas de restaurante al mes; a $2,100 por unidad, la misma empresa producirá 14,000 arreglos florales al mes. Determine la relación de la oferta suponiendo que es lineal.

50. Un fabricante de destornilladores puede vender 3,000 al mes a $1,050 cada uno, mientras que sólo puede vender 2,000 destornilladores a $1,445 cada uno. Determine la ley de demanda suponiendo que es lineal.

51. Si para un cierto producto el precio unitario se fija en $2,100 los consumidores comprarán 10,000 unidades por mes, mientras que si el precio por unidad es fijado en $2,625 los consumidores comprarán 900 unidades por mes. Con base en ello:
   (a) Suponiendo linealidad, determine la ley de demanda para este producto.
   (b) Si la ley de la oferta para este artículo es

$$p = \begin{cases} 1680 + \left(\dfrac{21q}{80}\right) & \text{si } 0 \leq q \leq 6000 \\[2ex] 2625 + \left(\dfrac{21q}{200}\right) & \text{si } q \leq 6000 \end{cases}$$

Determine el punto de equilibrio y la cantidad total gastada por los consumidores en este producto con el precio de equilibrio.

52. Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a $15,725 por unidad y 250 unidades a $14,175. La ley de oferta para este artículo está estimada mediante la ecuación $6p = x + 48$
   (a) Determine la ley de demanda para este artículo, suponiendo linealidad.
   (b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.
   (c) Determine el precio y la cantidad de equilibrio si se ha fijado un impuesto de $1,785 sobre el artículo. ¿Cuál es el aumento en el precio y la disminución en la cantidad demandada?
   (d) ¿Qué subsidio por unidad incrementaría la demanda en 24 unidades?
   (e) ¿Con qué impuesto adicional por unidad debe gravarse el artículo de modo que el precio de equilibrio por unidad se incremente $567?

2 EXAMEN

1. Defina con sus palabras:
   (a) Qué es un modelo.
   (b) Modelo concreto.
   (c) Modelo simbólico.
   (d) Modelo analógico.
   (e) Modelo matemático.
   (f) Modelo determinístico.
   (g) Modelo probabilístico.
   (h) Variables de decisión.
   (i) Parámetro.
   (j) Medida de desempeño.
   (k) Variables de consecuencia.

2. Un propietario de un exclusivo centro de belleza está tratando de decidir cuánto debiera cobrar por el derecho a un masaje antiestrés. Para esto decide intentar un experimento: variar el precio y anotar la cantidad de clientes atendidos. Un día cobró $12,000 por masaje y atendió a 30 clientes, cuando cobró $11,375 atendió a 45 personas, cuando cobró $10,500 atendió a 60 personas y cuando cobró $9,375 atendió a 75 personas.
   (a) Construya un modelo para esta situación.
   (b) Utilice el modelo construido para estimar la cantidad de clientes diarios que deberá atender si fija un precio de $8,000 por masaje.
   (c) Utilice el modelo construido para estimar el precio que debe fijar por masaje si desea atender a 125 clientes diariamente.

3. Suponga que se tiene una moneda no cargada, es decir, resulta igualmente probable obtener una cara o un sello cuando la moneda es lanzada. Un tahúr le propone el juego siguiente: si usted lanza la moneda cuatro veces obteniendo dos caras y dos sellos, en cualquier orden, él le pagará a usted $5,500 pero si no lo logra usted le pagará a él sólo $5,000. ¿Qué modelo matemático representaría está situación? ¿Qué pregunta le gustaría ver respondida por este modelo?

4. Una hormiga se mueve en una hoja de papel, usted observa que el desplazamiento horizontal de la hormiga es inversamente proporcional a su desplazamiento vertical al cuadrado. Construya un modelo de esta situación que le permita saber si la hormiga pasará dos veces por un mismo punto fijo en la hoja si aquélla continúa desplazándose de igual forma.

5. Un centro de modelación está preparando un seminario de dos días, el cual va dirigido al personal de empresas y tiene por objeto enseñar un software que es utilizado en el análisis de diferentes modelos y simulación de los mismos. Cada participante trabajará con un computador en las prácticas de análisis dadas por el instructor. La cuota proyectada para el seminario es de $157,500; el costo por la sala de conferencias, honorarios (instructor y ayudantes de laboratorio) y la promoción del seminario es de $2,520,000. El centro alquilará computadores para el seminario con un costo diario de $15,750 por computador.
   (a) Elabore un modelo que le permita estimar la utilidad total del seminario.
   (b) El personal de promoción ha pronosticado una inscripción de 30 estudiantes para el seminario. ¿Qué utilidad se obtendrá si el pronóstico es preciso?
   (c) Calcule el punto de equilibrio.

6. Suponga que una firma acepta la siguiente relación precio-demanda como realista: $525d = 420{,}000 - 10p$, donde p está entre $10,500 y $36,750, d representa la demanda anual para un producto en unidades y p el precio por unidad.
   (a) ¿Cuántas unidades puede vender la firma a un precio de $10,500 por unidad? ¿Y a un precio de $36,750 por unidad?
   (b) Construya el modelo para el ingreso total.
   (c) Con base en otras consideraciones, la administración de la empresa sólo considera alternativas de precio de $15,750, $21,000 y $26,250. Use el modelo para determinar la alternativa de precio que maximizará el ingreso total.

(d) ¿Cuáles son la demanda anual y el ingreso total esperados de acuerdo con el precio recomendado (el que maximiza el ingreso total)?

7. Se tienen \$131,250,000 y se desean tener \$472,500,000 después de 3 años. Construya un modelo que le permita responder las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué tasa de interés compuesto capitalizable anualmente (los intereses se abonan al capital al final de cada año) debe pagar el banco?

(b) ¿Qué tasa de interés compuesto capitalizable mensualmente (los intereses se abonan al capital al final de cada mes) debe pagar el banco?

8. Se desea construir un tanque con base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales, sin tapa, con una capacidad determinada. Si se construye con un material que tiene un costo de \$5,250, construya un modelo del costo total del material.

9. Se sabe que un ser humano de cierta edad pierde diariamente 0.0003 kg de calcio. Una persona que tiene 18 kg de calcio empieza a perderlo.

(a) Construya un modelo que le permita estimar la cantidad de calcio que tiene esta persona d días después que comenzó a perderlo.

(b) Utilice el modelo para estimar después de cuántos días esta persona tendrá 16 kg de calcio.

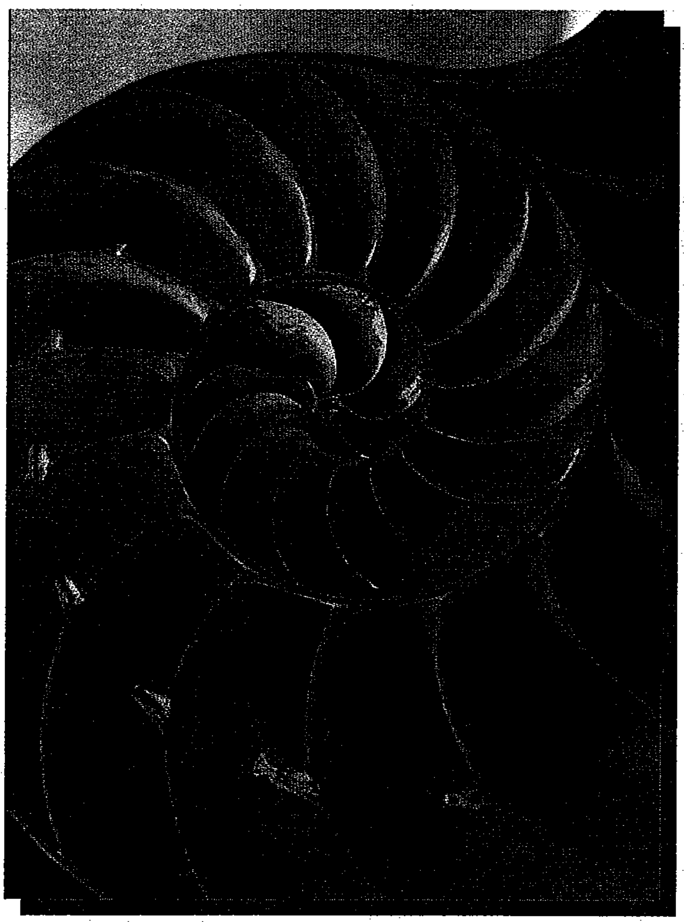
10. Un profesor, por razones de comparación, quiere cambiar la escala de las calificaciones de cierta prueba escrita, de modo que la calificación máxima siga siendo 7, pero el promedio sea 5.6 en lugar de 3.92.

(a) Determine un modelo lineal que le permita hacer predicciones al respecto.

(b) Si en la nueva escala 4.2 es la calificación más baja para acreditar, ¿cuál fue la calificación más baja para acreditar en la escala original?

11. Una persona desea pedir un préstamo a 3 años y puede realizar pagos de \$26,250 al final de cada mes. Si el interés es del 8% compuesto mensualmente. Construya un modelo que le permita estimar cuánto dinero puede pedir prestado esa persona.

3 NÚMEROS REALES



En la naturaleza abundan las sucesiones y series; por ejemplo, la suceción de Fibonacci está escondida en la intrincada estructura del caracol de un nautilus.

El matemático, como el pintor o el poeta, es hacedor de modelos.

G.H. HARDY

En el capítulo anterior modelamos algunas situaciones utilizando herramientas matemáticas para ello. En este sentido, podemos pensar que el conjunto de los números reales es un modelo razonable del tiempo. Por ejemplo, el tiempo es continuo y no podemos decir cuándo pasamos de un instante a otro, pero sabemos y sentimos que sucede, transcurre sin detenerse ni exhibir espacios de *no tiempo*, tal cual ocurre con los números reales. Por otro lado, los números reales nos ayudarán a tener una visión más profunda para la modelación de la realidad física que nos rodea dando las primeras nociones del cálculo moderno y sentando las bases para su entendimiento de manera global, teniendo en cuenta la construcción de los números reales utilizando *sucesiones*. Sin embargo, no podemos continuar sin revisar uno de los principios más difundidos en el pensamiento matemático: la *inducción matemática*.

3.1 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Existen dos aspectos importantes en las matemáticas: el descubrimiento y la demostración, que tienen igual importancia. Es necesario descubrir algo para tratar de demostrarlo y sólo se puede estar seguro de su validez cuando se haya demostrado. Por ejemplo, si consideramos el polinomio $p(n)=n^2-n+41$ y evaluamos algunos valores: $p(1)=1, p(2)=43,\ p(3)=47,\ p(4)=53,\ p(5)=61,\ p(6)=71,\ p(7)=83$, podemos observar que todos estos resultados son números primos. En efecto, se puede ver que $p(n)$ es primo para todos los naturales hasta $n=40$. En este punto parece razonable conjeturar que $p(n)$ es primo para todo natural n. Pero esta conjetura es muy prematura ya que $p(41)=41^2$ no es primo; es decir, no podemos estar seguros de la validez de una afirmación independientemente de cuántos casos hayamos revisado, necesitamos un argumento convincente, una demostración.

Como hemos visto a lo largo de años anteriores el conjunto más sencillo de números es el conjunto de los Naturales ($\mathbb{N}$) 1,2,3,... No sólo conocemos dicho conjunto numérico sino que también conocemos sus propiedades algebraicas, pero la más importante es el principio de *inducción matemática*. Comenzaremos con el siguiente ejemplo que nos dará sentido a este principio:

Supongamos una fila infinita de personas, donde cada una de ellas ha recibido instrucciones de traspasar cualquier información a la persona que le sigue. Se cuenta un secreto a la primera persona de la fila; es claro que cualquier persona se enterará del secreto en algún momento. Éste es el sentido y espíritu del principio de inducción.

Tratemos de analizar la consecuencia de lo que acabamos de enunciar. Primero, para que todas las personas escuchen el secreto, se debe traspasar, es decir, debe ocurrir que si la persona número n escucha, ésta debe traspasar el secreto a la persona n + 1. Sin embargo, para que alguna persona tenga la posibilidad de escuchar el secreto, una primera persona debe conocerlo; si ésta persona es la primera, entonces todos conocerán el secreto en algún momento. Ahora, enunciemos de modo formal estas dos condiciones.

Es necesario descubrir algo para tratar de demostrarlo. Sólo se puede estar seguro de su validez cuando se lo haya podido demostrar.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Cierta propiedad P(n) es verdadera para todo n natural siempre que:

(1) P(1) es verdadera.

(2) Si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también lo es.

Esto indica que cualquier afirmación sobre $\mathbb{N}$ tal que es verdadera para 1 es verdadera para todos los naturales si podemos probar que la afirmación es cierta para el natural $k + 1$ suponiendo que es verdadera para k. La suposición de que $P(k)$ es verdadera se conoce como *hipótesis de inducción* (H.I.). A modo de ejemplo: suponga que hemos podido conjeturar que 5^n-1 es divisible por 4 para todo $n \in \mathbb{N}$, a partir de la observación de varios casos. Entonces estamos interesados en demostrarla para todo $\mathbb{N}$. En este caso, la propiedad o afirmación $P(n)$ que debemos demostrar es:

$P(n) = 5^n-1$ es un múltiplo de 4 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora usemos el principio de inducción matemática para probar esto.

Primero debemos probar que la afirmación es cierta para n = 1, lo cual es verdad ya que $5^1-1 = 4$ y 4 es divisible por 4.

Ahora supongamos que la afirmación es cierta para k, es decir, 5^k-1 es divisible por 4 (H.I.); esto es equivalente a decir que 5^k-1 es múltiplo de 4 y debemos probar que la afirmación es verdad para $k + 1$ utilizando la hipótesis de inducción, esto es, debemos demostrar que $5^{k+1}-1$ es múltiplo de 4.

En efecto, $5^{k+1}-1 = 5\times 5^k-1 = (4+1)5^k-1 = 4\times 5^k+5^k-1 = 4\times 5^k+(5^k-1)$, lo cual es la suma de dos múltiplos de 4 y por consiguiente $5^{k+1}-1$ es también múltiplo de 4. Luego, por el principio de inducción, esta afirmación es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

EJEMPLO 1 ■

para todo $n \in \mathbb{N}$ y a $\neq$ 1.

SOLUCIÓN Aplicaremos el principio de inducción.

(1) para $n=1$ se tiene que $1+a^1 = \dfrac{a^{1+1}-1}{a-1} = \dfrac{a^2-1}{a-1} = \dfrac{(a-1)(a+1)}{a-1}$, por tanto, la igualdad es verdadera para $n=1$.

(2) Suponiendo que $1+a+\cdots+a^k = \dfrac{a^{k+1}-1}{a-1}$, hay que demostrar que $1+a+\cdots+a^{k+1} = \dfrac{a^{k+2}-1}{a-1}$.

$$1+a+\cdots+a^k+a^{k+1} = (1+a+\cdots+a^k)+a^{k+1},$$

pero por hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}1+a+\cdots+a^k+a^{k+1} &= \frac{a^{k+1}-1}{a-1}+a^{k+1} = \frac{a^{k+1}-1+(a-1)a^{k+1}}{a-1},\\ &= \frac{a^{k+1}-1+a^{k+2}-a^{k+1}}{a-1} = \frac{a^{k+2}-1}{a-1}.\end{aligned}$$

Hemos probado la afirmación para $k+1$ suponiendo la afirmación cierta para k, además de verificar la afirmación para 1. Entonces, por el principio de inducción, la afirmación es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

En general, el principio de inducción matemática funciona de igual manera, para afirmaciones sobre los naturales $n \geq m$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. En el ejemplo de la fila infinita de personas, si la persona 1000 conoce un secreto, a partir de ella todos conocerán el secreto si se cumple la condición de traspasar la información a la siguiente persona de la fila. Ilustremos esto con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2)\pi$.

SOLUCIÓN Recuerde que $n \geq 3$ y que π equivale a 180 grados; entonces nuestro análisis es sobre los naturales mayores o iguales a 3.

Para $n = 3$ tenemos un triángulo del cual sabemos que la suma de sus ángulos interiores es $\pi = (3-2)\pi$. Ahora supongamos la afirmación cierta para k y demostrémosla para $k+1$. O sea, debemos demostrar que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de $k+1$ lados es $(k+1-2)\pi$.

Trace un segmento que una dos vértices con un vértice entre ambos, como lo muestra la figura 1.

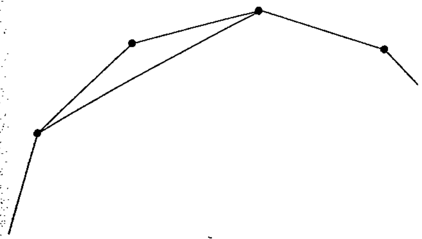


FIGURA 1

Podemos ver que el polígono ha sido dividido en dos polígonos, un triángulo y un polígono de k lados; entonces por hipótesis de inducción se tiene que la suma de los ángulos interiores de polígono original es igual a la suma de los ángulos interiores del polígono de k lados y el triángulo, lo cual suma $\pi + (k-2)\pi = (k+1-2)\pi$, quedando demostrado por inducción la afirmación. ■

3.1 EJERCICIOS

1-7 ■ Usando el principio de inducción matemática demuestre que:

1. El producto de tres naturales consecutivos es siempre múltiplo de 3.

2. n^3-4n es divisible por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. 8^n-3^n es divisible por 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. $3^{2n}-1$ es divisible por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. $n^2 > 2n+1$ para todo $n > 3$.

6. $8^{2n-1}+6^{2n-1}$ es divisible por 7 para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces 24 divide a $n(n^2-1)$.

8. Use inducción para demostrar que $n^2n + 41$ es primo. Indique dónde falla el principio de inducción.

9-12 ■ Demuestre que:

9. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

10. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

11. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

12. $1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+n\times 2^n=2(1+(n-1)2^n)$.

13. Demuestre que la suma de los n primeros números impares es n^2, para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Demuestre que todas las diagonales de un polígono convexo de n lados son $n(n-3)/2$.

15. Demuestre que la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo de n lados es 2π.

16. Sea $h > 0$, entonces demuestre que $(1+h)^n \geq 1+nh$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

17. Demuestre que $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+1+n}\leq\dfrac{5}{6}$.

18. Demuestre que

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{(-4)^n}\right).$$

19. Demuestre que $100 \geq n^2$ para todo $n \geq 100$.

20. Deduzca y demuestre una desigualdad que relacione a $100n$ con n^3.

21. Demuestre que $1+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

22. Demuestre que $8^{2^n} - 5^{2^n}$ nunca es un cuadrado perfecto.

23. El número armónico H_k se define como $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k}$.
Pruebe que $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

24. Escriba la hipótesis de inducción en cada caso:
a) La suma de todos los primos menores que n es $4n + 1$.
b) La medida del ángulo interior de un polígono regular de n lados es $\pi\frac{n-1}{n}$.
c) La suma de tres números consecutivos es múltiplo de 6.
d) $2^{5n+1} - 2$ es divisible por 7.

25. ¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son ciertas y cuáles falsas?

26. Demuestre que el último dígito de $2^{2n} - 1$ es 7.

27. Muestre que la suma de los primeros n términos al cuadrado es igual a la suma de los primeros n términos, cada uno de ellos al cubo.

28. ¿Para qué valores de n natural se cumple que $2^n\ n^2 + 2n + 2$?

29. Demuestre que $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} \in \mathrm{N}$, para todo n natural.

30. ¿Es verdad que $\frac{n+1}{n} + \frac{n}{n+1} \geq 1$, para todo n natural?

31. Demuestre que $a - b$ divide a $a^n - b^n$.

32. ¿Es verdad que $n^4 + 1 \geq 2n^2$ para todo n natural?

33. Conjeture para qué valores de n natural se cumple que $n(n + 1)(n + 2)$ es múltiplo de 4. Pruebe su conjetura.

34. Demuestre que $1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

3.2 SUCESIONES

Algunas modelaciones de capitalizaciones continuas, ciclos estelares, etcétera, pueden realizarse utilizando el concepto de sucesiones. Sin embargo, el concepto de *sucesión* en sí es el centro de estudio de esta sección.

Como hemos mencionado anteriormente, el número $\sqrt{2}$ es un número irracional al igual que π; esto es, no se pueden escribir como el cociente entre dos enteros. Consideremos el número $\pi = 3.141592654...$ y los siguientes números:

3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, 3.1415926, *etcétera.*

Cada uno de estos números es un racional y la secuencia de ellos se va acercando a π. Si se denotan estos números por $a_1 = 3$, $a_2 = 3.1$, $a_3 = 3.14$, $a_4 = 3.141...$ y así sucesivamente, estamos en presencia de una sucesión a_n con $n \in \mathbb{N}$ de números racionales que tiende a π. Este hecho será fundamental en el resto del capítulo.

■ **Definición 1** Una sucesión es un conjunto infinito de números escritos en un orden específico: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Lo fundamental aquí es que cada miembro del conjunto ha sido etiquetado con un subíndice natural, siendo el número a_1 el primer término, a_2 el segundo, y en general el término n-ésimo a_n. Definimos a la sucesión $\{a_n\}$, o simplemente a_n.

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1 ■ Sucesión de números pares

Consideremos el conjunto de los números pares: 2, 4, 6, 8, ...

Este conjunto puede considerarse como los elementos de una sucesión. Si a_1 representa el primer número par, a_2 el segundo, a_3 el tercero y a_n el n-ésimo par, esta sucesión será escrita por:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, \ldots, a_n = 2n, \ldots$$ ■

Observe que para conocer todos los miembros de una sucesión basta con establecer cuál es su término general o n-ésimo a_n. Si por ejemplo se desea determinar en la sucesión de los pares el término siguiente a $a_n = 2n$, basta con reemplazar n por $n+1$ para obtenerlo, $a_{n+1}=2(n+1)=2n+2$.
En general, el determinar el término general de una sucesión no es un proceso tan sencillo e incluso no siempre se puede describir una sucesión con un término general, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Sucesión de números primos

Si consideramos la sucesión de los números primos: $b_1=2$, $b_2=3$, $b_3=5$, $b_4=7$,... ¿será posible describir, para cualquier n, el término n-ésimo b_n de esta sucesión? A pesar de diversos intentos realizados a lo largo de la historia, esto no ha sido posible, ya que no existe una regla general para encontrar todos los números primos, a pesar de saber que son infinitos. ■

Ya desde tiempos remotos la cultura maya conocía el concepto de sucesión para predecir con exactitud los eclipses que se vendrían o las fases de Venus. Más adelante Leonardo Fibonacci planteó, en el siglo XII, el siguiente problema que trataremos de modelar: *"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil; a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles, engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?"*.

Partamos con una pareja recién nacida, por lo que el primer mes hay 1 pareja; como esta pareja alcanza la edad fértil al cabo de un mes, para el segundo periodo sigue habiendo 1 pareja de conejo, pero en edad fértil, de lo que se sigue que al tercer mes esta pareja ya tiene una pareja de crías; por consiguiente, en este mes hay 2 parejas, una de ellas en edad fértil y la otra no. Al cuarto mes la pareja fértil tiene otra pareja de crías, habiendo 3 parejas de conejos en este mes, y dos de ellas son fértiles y una no, por lo que en el quinto período ambas parejas fértiles tienen crías, teniendo en total 5 parejas, tres fértiles y dos no. Podemos observar que al sexto mes estas tres parejas tienen crías y por lo tanto hay 8 parejas, y así sucesivamente. En resumen:

Mes	1	2	3	4	5	6	...
Parejas	1	1	2	3	5	8	...

Llamemos f_n al número de parejas de conejos que hay en el n-ésimo mes, es decir, $f_1=1, f_2=1, f_3=2, f_4=3$, etcétera. Nuestro modelo matemático para resolver este problema se reduce a encontrar (si se puede) el término general f_n de esta sucesión. Observemos que hasta ahora podemos decir cuantas parejas hay al sexto mes y a partir de esto cuántas habrá al séptimo, octavo mes, etc. Pero en general lo que está ocurriendo en cada mes es que el número de parejas es igual al número de parejas del mes anterior más las nuevas crías que, por su parte, es exactamente la misma cantidad de parejas fértiles de dicho mes que corresponden a todas las parejas del mes anterior a él. Es decir, la cantidad de parejas de cada mes, a partir del tercer mes, es igual a la suma de los dos periodos anteriores; esto es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, f_1 = 1, f_2 = 1.$$

Esta sucesión es recursiva de dos pasos ya que para calcular cualquier término se recurre a los dos anteriores; es la famosa sucesión de Fibonacci, la cual aparece en muchas otras aplicaciones en la naturaleza, tales como *el crecimiento de la concha de ciertos moluscos* y *los cuernos de los rumiantes*, etcétera.

EJEMPLO 3 ■ Sucesión del ahorro de dinero

Consideremos que juntamos dinero en una alcancía de la siguiente manera: el primer día ponemos \$1 peso, al día siguiente \$2 pesos, al siguiente \$3 pesos, al siguiente \$4 pesos y así sucesivamente. ¿Cuánto dinero tendremos al día 10? Dé una fórmula general del dinero ahorrado en el día n.

SOLUCIÓN Sea s_n el ahorro en el día n-ésimo, entonces $s_1=1$, $s_2=1+2=3$, $s_3=1+2+3=6$, $s_4=1+2+3+4=10$, $s_5=1+2+3+4+5=15$, calculando obtenemos que el ahorro en el décimo día es $s_{10}=55$. Ahora veamos el caso general,

$$s_n=1+2+3+\cdots+n-1+n,$$

pero también s_n se puede escribir como $s_n=n+n-1+\cdots+3+2+1$, y sumando término a término se tiene que $s_n+s_n=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)$ $=n(n+1)$, de donde $s_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. ■

EJEMPLO 4 ■ Búsqueda de un término en una sucesión

Encuentre los primeros 5 términos y el 100-ésimo término de cada sucesión.

$(a)\ a_n=\dfrac{2^n}{n+1}$, $(b)\ b_n=\dfrac{2n}{n+21}$, $(c)\ c_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

SOLUCIÓN:

(a) $a_1=2/2=1$, $a_2=4/3$, $a_3=8/4=2$, $a_4=16/5$, $a_5=32/6=16/3$ y $a_{100}=2^{100}/101\approx 0.1255\times 10^{29}$

(b) $b_1=2/22\approx 0.09$, $b_2=4/23\approx 0.17$, $b_3=6/24=0.25$, $b_4=8/25=0.32$, $b_5=10/26\approx 0.38$ y $b_{100}=200/121\approx 1.65$.

(c) $c_1=2$, $c_2=(3/2)^2=2.25$, $c_3=(4/3)^3\approx 2.37$, $c_4=(5/4)^4\approx 2.44$,

$c_5=(6/5)^5\approx 2.49$ y $c_{100}=(101/100)^{100}\approx 2.7048$. ■

SUMATORIA

En el ejemplo anterior definimos la sucesión s_n como la suma de los primeros n naturales, es decir, $s_n=1+2+3+\cdots+n$; esta expresión se puede reescribir, utilizando la notación sumatoria, de la siguiente manera utilizando:

$$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n.$$

Símbolo de sumatoria: $\sum_{k=1}^{n} k$ y se lee la suma de los números naturales desde k = 1 hasta n.

En general, dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

podemos representar la suma de los primeros n términos como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

Vimos en el ejemplo anterior que la suma de los primeros n naturales es $n(n+1)/2$, lo cual en notación de sumatoria queda expresado por:

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, por ejemplo, la suma de los primeros 1000 naturales es:

$$\sum_{k=1}^{1000} k = 1+2+3+\cdots+1000 = \frac{1000(1000+1)}{2} = 500500.$$

EJEMPLO 5 ■ Cálculo de las siguientes sumas:

$$(a)\sum_{k=1}^{5} k^2 (b)\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} (c)\sum_{k=3}^{8} 4 (d)\sum_{k=4}^{50} k$$

SOLUCIÓN

(a) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55.$

(b) $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101}.$

(c) $\sum_{k=3}^{8} 4 = 4+4+4+4+4+4 = 24.$

(d) $\sum_{k=4}^{50} k = 4+5+6+\cdots+50 = (1+2+3)+4+5+6+\cdots+50-(1+2+3)$

$= \frac{50\times 51}{2} - 6 = 1269.$

PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

Sean las sucesiones a_n y b_n. Entonces para todo natural n y todo número real λ, se tiene que:

1. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k.$
2. $\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k.$
3. $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k.$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Consideremos un modelo simple sobre el costo de una industria en fabricar cierto artículo. El costo fijo por activar la industria es de $\$a$ y el costo por articulo es de $\$d$. Entonces el modelo de costo lineal de producir n artículos es de

$$a+nd.$$

Esta sucesión recibe el nombre de *progresión aritmética*.

■ **Definición 1** Una sucesión o progresión aritmética, P.A., es de la forma

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+nd, \ldots$$

El número a *es el primer término y* d *es la diferencia común entre dos términos consecutivos. El término n-ésimo viene dado por* $a_n = a + (n-1)\,d$.

Podemos observar que la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es:

$$\begin{aligned} a+(a+d)+\cdots+(a+(n-1)d) &= a+\cdots+a+(d+2d+\cdots+(n-1)d) \\ &= na+\sum_{k=0}^{n-1}kd = na+d\sum_{k=0}^{n-1}k \\ &= na+d\frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, la suma de los primeros n términos de esta progresión aritmética es

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = na+d\frac{(n-1)n}{2}.$$

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de la suma de n términos en P.A.

Calcule los primeros 6 términos y la suma de los primeros 300 términos de la progresión aritmética, donde sus dos primeros términos son: 13 y 7.

SOLUCIÓN Sabemos que $a_1=13$ y $a_2=7$, entonces $a_1=a=13$ y $a_2=a+d=13+d=7 \Rightarrow d=-6$.

Entonces el término n-ésimo viene dado por $a_n=a+(n-1)d=13+(n-1)(-6)=19-6n$. Luego $a_3=1$, $a_4=-5$, $a_5=-11$ y $a_6=-17$. Usando la suma de los primeros n términos tenemos que la suma de los primeros 300 términos es

$$\sum_{k=1}^{300}a_k=\sum_{k=1}^{300}19-6k=\sum_{k=1}^{300}19-\sum_{k=1}^{300}6k,$$

así utilizando las propiedades de las sumatorias tenemos que

$$\sum_{k=1}^{300}a_k=19\cdot 300-6\sum_{k=1}^{300}k=5700-6\cdot 45150=-265200.$$

■

EJEMPLO 2 ■ Demostración usando P.A.

Demuestre que un triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión aritmética es semejante a un triángulo de lados 3, 4 y 5.

SOLUCIÓN Sean los catetos a y $a+d$ y la hipotenusa $a+2d$, luego, como es rectángulo, entonces por el teorema de Pitágoras

$$a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2 \Rightarrow a=3d.$$

Es decir, los lados del triángulo son $3d$, $4d$ y $5d$. Es decir es un múltiplo d del triángulo de lados 3, 4 y 5. ■

Ahora consideremos el siguiente problema: Suponga que usted desea depositar \$100 en una cuenta de ahorro que le ofrece 5% de interés anual. De cursos anteriores sabemos que la fórmula del interés compuesto dice que el capital al cabo de 10 años será

$$100(1+0.05)^{10} \approx 162.9.$$

Cada año el capital fue variando de la siguiente forma: denotando a_n al capital al final del año n, entonces $a_n=100(1.05)^n$.

Este modelo de crecimiento se denomina *progresión geométrica* y está presente en muchos fenómenos de crecimiento poblacional.

■ **Definición 2** Una sucesión o progresión geométrica, P.G. es de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^n, \ldots$$

siendo a el primer elemento y $r \neq 1$ la razón de la progresión. El término n-ésimo viene dado por

$$a_n = ar^{n-1}$$

A diferencia de una progresión aritmética, donde la diferencia entre dos términos consecutivos es d, en una progresión geométrica el cociente entre a_{n+1} y a_n es r para todo n. Por otro lado la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica de primer elemento a y razón r es

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\sum_{k=0}^{n} r^{k-1} \\ &= a\frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de la suma de N términos en P.G.

Un inversionista deposita \$400 cada 15 de diciembre y 15 de junio, durante 10 años en una cuenta que produce 8% anual compuesto semestralmente.
¿Cuánto dinero habrá en la cuenta inmediatamente después del último pago?

SOLUCIÓN Se debe determinar el monto de una *anualidad;* esto es, la suma de los pagos individuales desde el primero hasta el último, junto con los intereses, la representamos como A_f. Esta anualidad consta de 20 pagos de \$400 cada uno. Como la tasa de interés de 8% anual compuesto semestralmente, la tasa por período es de 4%. El primer pago permanece en la cuenta 19 periodos, el segundo 18 períodos, y así sucesivamente. El último pago no recibe interés. Si contamos de atrás para adelante, tenemos que el primer pago al cabo de los 10 años se ha transformado en $400(1.04)^{19}$, el segundo en $400(1.04)^{18}$, y así sucesivamente. Entonces la anualidad A_f, que es la suma de los 20 pagos, es

$$A_f = 400 + 400(1.04) + 400(1.04)^2 + \cdots + 400(1.04)^{19} = 400\frac{1-1.04^{20}}{1-1.04} = 11911.23.$$

■

EJEMPLO 2 ■ Cálculo de términos en P.G.

Calcule el octavo término y la suma de los primeros 50 términos de la progresión geométrica, donde sus primeros tres términos son: 5, 15 y 45.

SOLUCIÓN: Sabemos que los primeros tres términos son a, ar y ar^2, entonces $a = 5$, $ar = 15$ y $ar^2 = 45$, de lo cual se desprende que $r=3$. Luego el octavo término es $ar^7 = 5.3^7 = 10935$. Por otro lado, la suma de los primeros 50 términos es

$$\sum_{k=1}^{50} 5 \cdot 3^{k-1} = 5 \cdot \frac{1-3^{50}}{1-3}.$$

■

TEOREMA DEL BINOMIO

De años anteriores hemos aprendido que el cuadrado de un binomio satisface

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

sin embargo, no recordamos o simplemente no sabemos, hasta ahora, cómo se desarrolla la potencia 7 de un binomio. Para hacer esto, empezaremos con algunas definiciones que serán familiares.

■ **Definición 2** Se define el *factorial* de un número n, el cual se denota n!, como el producto de todos los naturales menores o iguales a n, es decir

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times (n-1) \times n\ .$$

Además, se define $0! = 1$.

■ **Definición 3** Sea n y k enteros no negativos con $k \leq n$, se define el *coeficiente binomial* como:

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Más adelante daremos una explicación acerca de la interpretación de estos símbolos. Directamente de la definición, es fácil mostrar que:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}.$$

Con un poco más de cálculo, se puede también demostrar que

$$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \frac{n!}{(n-(k-1))!k!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!k + n!(n+1-k)}{(n+1-k)!k!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

TEOREMA 1 (DEL BINOMIO)

Sea a y b números reales y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}.$$

■ **Demostración:** La demostración la haremos por inducción sobre n. Primero para n=1 se tiene que

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b.$$

Ahora supongamos que es verdadera para m y probemos que es cierta para m+1.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)^m (a+b) = a(a+b)^m + b(a+b)^m \\
&= a\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} + b\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] a^k b^{m+1-k} + a^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a_k\, b^{m+1-k}
\end{aligned}$$

Por ejemplo, la suma de todos los coeficientes binomiales es

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Asimismo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0.$$

3.2 EJERCICIOS

1-8 ■ Calcule los primeros 4 términos y el 100-ésimo término de cada sucesión

1. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$.

2. $a_n = (-1)^{n-2} \dfrac{n}{n+1}$.

3. $a_n = 5$.

4. $a_n = n^n$.

5. $a_n = n^2$.

6. $b_{2n} = 1, b_{2n-1} = 2$.

7. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

8. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

9. Considere la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Calcule

a_1, a_{10}, a_{50}, a_{100} y a_{200} ·y . Explique lo que observa.

10. Repita el ejercicio anterior con la sucesión $a_n = f_{n+1} / f_n$, donde f_n es la sucesión de Fibonacci.

11. Calcule la suma $\sum_{k=1}^{n} x^k$.

12. Calcule $\sum_{k=1}^{100} (3k^2 - k)$.

13. Calcule la suma de los primeros n naturales al cubo.

14. Calcule la suma $\sum_{k=50}^{200} (2 + 5k - k^3)$.

15. Calcule la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{5^k}$.

16. Calcule la suma $\sum_{k=10}^{40} (\frac{2}{3^k} - 7k)$.

17. Dada la sucesión a_n cuyos primeros tres términos son 12, –18 y 27, decida si es una progresión aritmética o geométrica y calcule la suma de los primeros 100 términos.

18. En la progresión aritmética x –y, x, x + y,... determinar el décimo quinto término.

19. En una P.A. el primer término es 2 y el k-ésimo es 29; hallar la diferencia d en esta P.A. sabiendo que la suma de los primeros k-ésimos términos es 155.

20. Demostrar que si a, b y c están en P.A. entonces

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

están en P.A.

21. Demuestre que los números

$$\frac{1}{(a+b)^2}, \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}, (a^2 + ab + b^2)^2 \text{ están en P.G.}$$

22. Desarrolle las siguientes potencias: $(x-3)^5, (3x+2y)^4, (1-x/2)^7$.

23. Determine el cuarto término en el desarrollo de $(a/3 + 9b)^{10}$.

24. Encuentre el término central de $(a/x + x/a)^{10}$.

25. Encuentre el coeficiente de x^{32}, x^{-17} y x^6 en $(x^4 - 1/x^3)^{15}$.

26. Encuentre el coeficiente de x^{n+1} en $(x+2)^n \cdot x^3$.

27. Encuentre el término independiente de x en el desarrollo de $(1/x - \sqrt[4]{x})^{15}$

28. Demuestre que el coeficiente de $x^n \cdot y^n \cdot z^n$ en el desarrollo de $(x+y+z)^{3n}$ es $(3n)!/(n!)^3$.

29-33 ■ Encuentre la progresión aritmética $\{a_k\}$ y la suma tal que $\sum_{k=1}^{n} a_k$

29. $a_1 = 1$ y $d = 5$

30. $a_3 = 15$ y $a_4 + a_8 = 40$

31. $a_3 - a_1 = 4$ y $a_4 + 2 = 5$

32. $a_4 = 5$ y $d = 10$

33. $a_2 = 3$ y $\sum_{k=1}^{10} a_k = 135$

34. Una sucesión aritmética tiene primer término 5 y diferencia $d = 4$. ¿Cuántos términos hay que sumar para que la suma sea 230?

35. A un empleado le ofrecen un trabajo cuyo salario es de 2,000 dólares mensuales con aumentos anuales de 100 dólares mensuales. Calcule sus ingresos totales a los 10 años de trabajar en ese empleo.

36. Los puntos medios de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado. Calcule la suma de las áreas de todos los cuadrados. Calcule la suma de los perímetros de todos los cuadrados.

37. El primer término de una sucesión geométrica es 4 y el tercero es 36. Calcule el quinto término.

38. De la sucesión geométrica descrita en el ejercicio anterior calcule la suma de los primeros 10 términos y la de los primeros n términos.

39. La razón de una sucesión geométrica es $\frac{3}{4}$. ¿Cuál debe ser el primer término si la suma de los primeros tres términos es $\frac{111}{64}$?

40. El segundo término de una sucesión geométrica es 4. ¿Cuál es el producto de los primeros 3 términos?

41. ¿Cuál es la media geométrica entre a^a y a?

42-46 ■ Encuentre el termino k-ésimo de la sucesión geométrica y la suma de los primeros 10 términos.

42. $a_1 = 3$ y $a_4 = 24$

43. $a_3 = 13$ y $r = 3$

44. $a_2 = \frac{1}{x}$ y $a_5 = \frac{1}{x^4}$

45. $a_1 = -3$ y $a_4 = -0{,}003$

46. $a_4 = a_4$ y $\sum_{k=3}^{6} a_k = 625$

47. Una persona decide ahorrar dinero en una cuenta. Inicialmente deposita \$1,000 a un 2% de interés anual. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado al finalizar el décimo año?

48. Una ciudad tiene 340.000 habitantes y su población se incrementa a razón del 1,25% anual. Calcule la cantidad de años que deben pasar para que la población sea de 384.972 habitantes.

49. Calcule $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

50. Calcule $\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3k$

51. Calcule $\sum_{k=0}^{21} \frac{21!}{k!\,(21-k)!}$

52. Determine los primeros tres términos de $(a-2b)^{16}$.

53. Determinar el termino libre de x en el desarrollo de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{22}$.

54. ¿Qué es mayor $(100!)^{101}$, o $(101!)^{100}$?

55. Muestre que $\mathbf{1{,}01^{100} > 2}$.

3.3 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Anteriormente mencionamos que la sucesión definida como a_1=3, $a_1 = 3$, $a_2 = 3{,}1$, $a_3 = 3{,}14$, $a_4 = 3{,}141$ y así sucesivamente, se va acercando al número π. Este tipo de afirmaciones es el elemento más importante de esta sección: ¿Cuándo una sucesión a_n tiende o no a algún número real cuando n es suficientemente grande? Por ejemplo, la sucesión formada por todos los números primos ordenada de menor a mayor no tiende a ningún número, ya que sabemos que hay números primos tan grandes como queramos, mientras que la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, etcétera, claramente está cada vez mas cerca de 0 a medida que n crece. El concepto de límite y su formalización es uno de los más trascendentes del cálculo moderno.

■ **Definición 1** Una sucesión a_n se dice que tiene límite l finito si para todo número real $\in > 0$, existe un natural n (el cual depende de $\in$) tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N.$$

En este caso, diremos que la sucesión a_n es convergente *a l* y notaremos esto por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad o \quad a_n \to l \ \ cuando \ \ n \to \infty,$$

la cual se lee a_n tiende *a l* cuando n tiende a ∞. Una sucesión que no converge la llamaremos divergente.

Esta definición (hecha por A-L Cauchy en 1821) significa en palabras sencillas que: "Dado cualquier número $\varepsilon > 0$, siempre existe un natural n tal que a partir de él todos los términos, a_N; a_{N+1}; ... van estar a lo sumo a una distancia ε de l."
Por ejemplo, consideremos la sucesión a_n=$1/n$; mientras n crece a_n se acerca a 0, incluso cuando ningún término de la sucesión es cero. Además, para cualquier intervalo que escojamos centrado en 0, hay un índice tal que a partir de él todos los términos siguientes están dentro de dicho intervalo. En efecto, si tomamos $\varepsilon = 10^{-10}$ existe $N = 10^{10} + 1$ tal

que $a_N = \dfrac{1}{10^{10}+1}$ y todos los siguientes términos están en el intervalo $(-10^{-10}, 10^{-10})$. Es decir, la sucesión $a_n=1/n$ es convergente a cero, o sea $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

En este ejemplo cada término está más cerca de cero que el anterior a medida que n crece, pero esto no ocurre en todas las sucesiones convergentes; a saber, si consideramos la sucesión a_n tal que $a_n=1/n$ si n es par y $a_n=1/2^n$ si n es impar; es decir,

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{32},\frac{1}{6},\ldots$$

claramente a_n tiende a 0 cuando n tiende a ∞ pero a_{n+1} no es necesariamente menor que a_n

EJEMPLO 1 ■ Análisis de la convergencia o divergencia de la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN Por simple inspección, la sucesión es

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\ldots$$

Podemos observar que se acerca al valor 1 a medida que n crece, es decir, afirmamos de manera intuitiva que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Demostremos dicha afirmación usando la definición. Dado $\varepsilon>0$ debemos encontrar un natural n (que depende de ε) tal que a partir de él todos los términos a_n con $n\geq N$ satisfacen $|a_n-1|<\varepsilon$. Para que $|a_n-1|<\varepsilon$ debe ocurrir que

$$|a_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

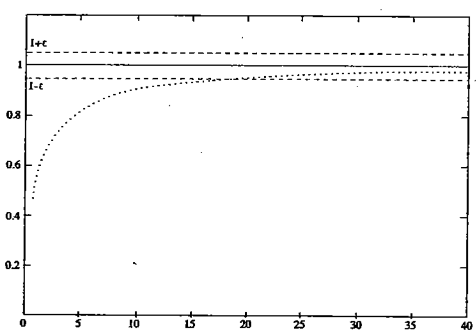


FIGURA 1

entonces $n+1>1/\varepsilon$, de donde $n>1/\varepsilon-1$. Es decir, si escogemos como n al primer natural mayor que $\frac{1}{\varepsilon}-1$ habremos encontrado un natural n tal que a partir de él todos los términos a_n con $n\geq \mathbb{N}$ satisfacen que $|\frac{n}{n+1}-1|<\varepsilon$. Por lo tanto, hemos probado que el límite es 1. Veámoslo gráficamente en la figura 1.
Para este ε escogido a partir de a_{21} todos los términos a_n están dentro de la franja de ancho ε. ■

EJEMPLO 2 ■ Estudio de la convergencia de la sucesión $a_n = (-1)^n$

SOLUCIÓN Podemos observar que la sucesión es de la forma

$$-1,1,-1,1-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,\ldots$$

y por tanto no existe un punto donde los términos de la sucesión se *acumulen*, es decir, el límite de a_n cuando n tiende a ∞ no existe, o sea a_n es divergente.
Sin embargo, si consideramos la sucesión a_{2n}, ésta si es convergente con límite 1 y de igual modo si consideramos la sucesión de los términos impares a_{2n-1} es también convergente con límite -1. ■

■ **Definición 2** Sea a_n una sucesión, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty,$$

si para todo $M>0$ existe $n \in N$ tal que

$$|a_n| \geq M \qquad \forall n \geq \mathbb{N}$$

En este caso, diremos que la sucesión es divergente o divergente a $\pm\infty$, según sea el caso.

Esta definición es análoga al caso finito, es decir, una sucesión que siempre crece más allá de cualquier número positivo se dice que es divergente a $+\infty$; de igual modo, si decrece más allá de cualquier número negativo, se dice que es divergente a $-\infty$.

EJEMPLO 3 ■ Análisis de la convergencia

Sea $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ y analice la convergencia.

SOLUCIÓN a_1=2, a_2=2, a_3=8/3, a_4=4, a_{10}=1024/10, a_{20}=1048576/20, etc. En rigor, dado cualquier número, por muy grande que éste sea, siempre va a existir un natural n suficientemente grande tal que $2^N > M$ y por consiguiente $2^N/N > M$. Luego a_n diverge a $+\infty$. ■

Un hecho en el que no hemos reparado es la unicidad del límite; esto es, si a_n es una sucesión convergente, ¿puede ésta tener dos límites? La respuesta es no. El límite es único; en efecto, supongamos que hay dos límites l y l', entonces hay cierta distancia entre ellos y de la definición sabemos que para cualquier intervalo alrededor de l están todos los términos a_n salvo una cantidad finita de ellos; luego tomando un intervalo alrededor de l' que no se traslape con el intervalo anterior habría a lo sumo una cantidad finita de términos de la sucesión en dicho intervalo y esto contradice el hecho de que l' es límite de a_n, por lo tanto $l = l'$.

Sea A un conjunto formado por números, se dice que c es una cota superior (inferior) si para todo elemento a en A ocurre que $a \leqslant c$ $(a \geq c)$. Si c es una cota superior de A, entonces cualquier $c'>c$ es también cota superior de A, asimismo si $c'<c$, con c cota inferior, entonces c' es cota inferior de A. Decimos que un conjunto es acotado si tiene cotas superiores e inferiores. Ahora consideremos M la menor de las cotas superiores de un conjunto acotado A y supongamos que M $\in$ A, entonces decimos que M es el elemento máximo de A, esto es

$$\max\{x: x \in A\} = M.$$ ■

■ **Definición 3** El supremo s de un conjunto A es la menor de las cotas superiores de A. Lo denotamos

$$sup\ A = s$$

EJEMPLO 4 ■ Búsqueda de supremos

Sea A el conjunto de todos los reales x con $0 \leq x < 1$.
Cualquier número $c \geqslant 1$ es una cota superior; además, la menor de las cotas inferiores es 1; por consiguiente

$$sup\, A = 1,$$

pero no tiene un elemento maximal. De igual manera, cualquier número $m<0$ es cota inferior.

■ **Definición 4** El ínfimo m de un conjunto A es la mayor de las cotas inferiores de A. Lo denotamos

$$\inf A = m\ .$$

Análogamente, se define el mínimo $m \in A$, si m es la mayor de las cotas inferiores.

EJEMPLO 5 ■ Búsqueda de maximales y mínimos

Sea $A=\mathbb{N}$, entonces encuentre los valores maximales y mínimos, si los hay, de $\mathbb{N}$.

SOLUCIÓN El conjunto de los números naturales no tiene cotas superiores; por consiguiente, no tiene máximo ni supremo. Por otro lado, cualquier $c<0$ es menor que todo elemento de $\mathbb{N}$, es decir, c es una cota inferior de $\mathbb{N}$. Incluso cualquier real $c \leq 1$ es también una cota inferior de N y por tanto $\inf A = 1$, que también es el $\min A$, o sea

$$\inf \mathrm{A} = \min \mathrm{A} = 1\ .$$

El lector puede observar que si un conjunto A es acotado superiormente por c, todo real $d > c$ es también cota superior de A y por consiguiente siempre es posible la menor cota superior de A. Esto aparece en la literatura como el *axioma del supremo*, que dice:
Todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene un supremo; esto es, existe un real c *tal que* $sup\, A = c$.
De igual forma, todo conjunto acotado inferiormente tiene un ínfimo. Por ejemplo, el conjunto de todos los números primos no es acotado superiormente y no tiene supremo, pero sí tiene ínfimo, el cual es 2.

■ **Definición 5** Una sucesión a_n se dice monótona creciente si para todo $n \in N$

$$a_n \leq a_{n+1},$$

y es monótona decreciente si para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci, definida recursivamente como $f_1=1, f_2=1$, y $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, es monótona creciente ya que para cada $n\, f_n>0$ y $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\geq f_n$. Por otro lado, la sucesión $a_n=1/n$ es decreciente, en efecto, a medida que n crece su recíproco decrece.

Teorema 1 *Toda sucesión monótona creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) es convergente. Más aún, su límite es el supremo (ínfimo).*

Demostración: Sea a_n sucesión monótona creciente y acotada superiormente, entonces por axioma del supremo existe $s=\sup\{a_n\}$. Sea $\varepsilon>0$, afirmamos que existe n_0 tal que $s - a_{n_0} < \varepsilon$, si no $s-a_n \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $a_n \leq s - \varepsilon$ por lo que $s - \varepsilon$ sería cota superior de a_n menor que s, lo cual contradice el hecho de que $s = \sup\{a_n\}$.

Pero a_n es creciente, por lo que $s-a_n < s-a_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Es decir, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$|s-a_n| < \varepsilon,$$

o sea

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Un buen ejercicio para el lector es demostrar que si a_n es decreciente y acotada inferiormente, entonces a_n es convergente.

Teorema 2 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración: Sea l el límite de a_n cuando $n\to\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon>0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n>n_0$

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$

es decir

$$\begin{array}{ccccc} -\varepsilon & \leq & a_n - l & \leq & \varepsilon \\ l-\varepsilon & \leq & a_n & \leq & l+\varepsilon. \end{array}$$

Luego

$$\min\{a_1,\ldots,a_{n_0}, l-\varepsilon\} = m \leq a_n \leq M = \max\{a_1,\ldots,a_{n_0}, l+\varepsilon\}.$$

Dada una sucesión a_n hay infinitas formas de que $n\to\infty$, es decir, podemos considerar n par, n impar, n de la forma $5m+2$, etc. Para cada una de estas formas se define la sucesión correspondiente, siendo un subconjunto de a_n. A estas nuevas sucesiones las llamaremos subsucesiones de a_n y las denotaremos a_{n_k}. Por ejemplo, si consideramos $a_n = (-1)^n/n$, entonces $a_{2m} = 1/2m$ y $a_{2m-1} = -1/2m-1$. Para esta sucesión en particular observe que la subsucesión a_{2m} converge a 0 cuando $m\to\infty$ y la subsucesión a_{2m-1} también. Sin embargo si consideramos la sucesión $b_n = (-1)^n$, la subsucesión $b_{2m} = 1$ lo que converge a 1, mientras que $b_{2m-1} = -1$ teniendo por límite a -1. Para entender mejor este hecho, establecemos el siguiente teorema:

Teorema 3 Una sucesión a_n es convergente a l si y sólo si toda subsucesión a_{n_k} converge a l.

Demostración: Si toda subsucesión de a_n converge a l, como a_n es ella misma una subsucesión, entonces también converge a l. Recíprocamente, supongamos que a_n converge a l y sea a_{n_k} una subsucesión de a_n. Dado $\varepsilon>0$ existe a_0 tal que para todo $n \leq n_0$ se tiene que $|a_n - l|, < \varepsilon$ ya que $a_n \to l$ cuando $n\to\infty$. Luego, existe $n_{k0} \geq n_0$ tal que para todo $n_k \geq n_{k0}$ se tiene que

$$|a_{n_k} - l| < \varepsilon$$

Hasta ahora, hemos dado una base teórica sobre límites de sucesiones, pero no podemos manejarnos con ellos; es decir, aún no sabemos qué sucede con la suma o la multiplicación de dos sucesiones convergentes; sin embargo, nos parece lógico pensar que si $a_n \lambda_n = f_{n+1}/f_n$ a y $b_n \to b$ cuando $n\to\infty$ entonces $a_n+b_n \to a+b$ o $a_n b_n \to ab$. En términos sencillos, si a_n y b_n para n suficientemente grande se acerca a a y b respectivamente, entonces tanto el producto como la suma debe acercarse a ab y $a+b$, respectivamente. El siguiente teorema establece esta intuición.

Teorema 4 Sea a_n y b_n sucesiones tales que $a_n \to a$ y $b_n \to b$ cuando $n \to \infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$,

(iv)Si $b \neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

La demostración se deja como ejercicio al lector.

Algunos alcances de este teorema son los siguientes:

1. Si a_n es convergente y b_n es divergente, entonces $a_n \pm b_n$ es divergente, ya que si fuera convergente entonces $b_n = (a_n+b_n) - a_n$ sería la diferencia de dos sucesiones convergentes, lo cual es convergente, pero b_n no lo es.
2. Si a_n y b_n son divergentes entonces no podemos afirmar nada acerca de la suma o diferencia, multiplicación y división de a_n y b_n. Es decir, estas operaciones algebraicas pueden conducir a sucesiones convergentes o divergentes. Por ejemplo, $a_n = n + 1/n$ y $b_n = n$ entonces la diferencia $a_n - b_n = 1/n$, la cual es convergente; sin embargo, si consideramos la suma $a_n + b_n = 2n + 1/n$ es divergente.
3. Si a_n es convergente y b_n no lo es, entonces ni el producto ni el cociente (si existe) son convergentes, y la explicación es la misma que en el punto 1.

EJEMPLO 6 ■ Análisis de la convergencia

Analice la convergencia de las siguientes sucesiones: $a_n = \dfrac{n^2+2}{\sqrt{n}+1}$, $b_n = \dfrac{3n^3+n^2}{2n^3+1001}$ y c_n definida como 1 si n es par y 0 si n es impar.

SOLUCIÓN

$$a_n = \frac{n^2+2}{\sqrt{n}+1} = \frac{n^2(1+2/n^2)}{\sqrt{n}(1+1/\sqrt{n})} = n^{3/2}\frac{1+2/n^2}{1+1/\sqrt{n}}.$$

Donde la sucesión $1+2/n^2 \to 1$ y $1+1/\sqrt{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n^2}{1+1/\sqrt{n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

pero $n^{3/2} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, por lo que el producto de ambos tiende a ∞. Es decir a_n es divergente.

$$b_n = \frac{3n^3+n^2}{2n^3+1001} = \frac{n^3(3+1/n)}{n^3(2+1001/n^3)} = \frac{3+1/n}{2+1001/n^3},$$

pero $3+1/n \to 3$y $2+101/n^3 \to 2$ cuando $n \to \infty$, por lo que el cociente tiende a 2/3. O sea, $b_n \to 2/3$ cuando $n \to \infty$. ■

Finalmente la sucesión c_n es divergente ya que la subsucesión formada por n par es siempre 1 y por consiguiente su límite es 1, mientras que la subsucesión de los n impares es constante igual a 0 y por lo tanto su límite es 0. Es decir, hay dos subsucesiones que tienen distintos límites; luego, por el teorema 4, la sucesión c_n diverge.

Teorema 5 (del sándwich) Sean $a_n \le b_n \le c_n$ sucesiones convergentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n \le \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Demostración: Basta con probar una desigualdad. Consideremos $a_n \le b_n$ con límites a y b respectivamente. Debemos demostrar que $a \le b$ y lo haremos por contradicción. Supongamos que $a > b$ y sea $\varepsilon = (a-b)/2$. Como $a_n \to$ a y $b_n \to$ b cuando $n \to \infty$, por definición de límite tenemos que existe n_0 tal que para todo $n \ge n_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad y \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$

Entonces a partir de n_0 todos los términos de a_n y b_n satisfacen que

$$a_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b + \varepsilon > b_n,$$

pero esto contradice el hecho de que $a_n \le b_n$, es decir, $a \le b$. Aunque una de las hipótesis del teorema sea que las sucesiones sean convergentes, el lector puede pensar si este teorema es cierto si a,b o c fuera $\pm\infty$. Se puede demostrar que si $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces $b_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Se deja como ejercicio para el lector. Por otro lado, una de las aplicaciones más usadas del teorema del Sandwich es que si $a_n \to$a y $c_n \to$a cuando $n \to \infty$, entonces $b_n \to$a cuando $n \to \infty$.

Corolario 1 *Si* q *es un número* $0<q<1$, *entonces* $\lim q^n = 0$.

Demostración: Sea p un número tal que $q = \dfrac{1}{1+p}$, el cual siempre existe ya que tomando $p = 1/q - 1$ se satisface la igualdad. Entonces

$$\begin{aligned} 0 < q^n = \left(\frac{1}{1+p}\right)^n &= \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{1+np+\cdots+p^n}. \\ &< \frac{1}{1+np} < \frac{1}{np} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{p} \end{aligned}$$

Como $=$ tiende a cero, por el teorema del sándwich q^n también tiende a cero.

EJEMPLO 7 ■ Cálculo de lim cuando $n \to \infty$

Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} = 0.$

SOLUCIÓN Cada sumando es menor o igual a $1/n^2$, pero a la vez mayor o igual que $1/(2n)^2$, entonces

$$n\cdot\frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2} \leq n\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Pero tanto $1/4n$ como $1/n$ tienden a cero cuando $n\to\infty$, luego por teorema del sándwich, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}=0.$$

■

3.3 EJERCICIOS

1-5 ■ Encuentre, si existe, para cada conjunto dado, el conjunto de cotas superiores y el conjunto de cotas inferiores, el elemento máximo y el mínimo, el ínfimo y el supremo.

1. $A=\left\{\frac{1}{x^2+1}:x\in\mathbb{R}\right\}.$

2. $A=\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n+2}}:n\in\mathbb{N}\right\}.$

3. $A=(1,4].$

4. $A=\{x^2-1:x\in\mathbb{R}\}.$

5. $A=\{x^2-x>0:x\in\mathbb{R}\}\cap\mathbb{N}$

6-13 ■ Analice la convergencia de las siguientes sucesiones; si es convergente, calcule su límite.

6. $a_n=\sqrt{n}$

7. $a_n=\frac{3^n}{2+5^n}$

8. $a_n=(-1)^n\frac{n}{5n+3}.$

9. $a_n=\frac{n^2}{n+1}.$

10. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$

11. $a_n=1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}.$

12. $a_n=\frac{n+1}{n+6}.$

13. $a_n=\frac{1}{n^2-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}k.$

14. Sea a_n definida recursivamente como: $a_n=1$ y $a_{n+1}=4-a_n$. Determine si la sucesión converge o diverge.

15. Halle el límite (si lo tiene) de la sucesión

$\sqrt{2},\sqrt{\sqrt{2}},\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}},\ldots$

16. Una sucesión está definida de manera recursiva mediante $a_1=1$ y $a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$ ¿Converge esta sucesión y cuál es su límite?

17. Sea f_n la sucesión de Fibonacci y sea $\lambda_n=f_{n+1}/f_n$. Demostrar que la sucesión λ_n es convergente y encuentre su límite.

18. Demuestre el teorema 2.3.4

19. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ si $|q|<1.$

20. Sea y(n) el número de factores primos de n. Probar que $\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma(n)}{n}=0.$

21 Una sucesión a_n está definida por $a_1=1$ y $a_{n+1}=3-1/a_n$ Demuestre de a_n es creciente y acotada. Encuentre $\lim_{n\to\infty}a_n.$

22. Demuestre que si $\lim a_n$, entonces $\lim a_nb_n=0.$

23. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}=0$

24. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=1$

25. Pruebe que la sucesión definida recursivamente por $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ es creciente.

26. Calcule $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

27. Pruebe que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$ existe.

28. Calcule $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{1+3^n}$

29. Analice el siguiente argumento: "Para ir desde la puerta de entrada de mi casa hasta la ventana que está en la pared opuesta a la puerta avanzaré hasta la mitad de la distancia, para luego avanzar hasta la mitad de lo que queda y así sucesivamente, pero nunca llego a la ventana".

30. Encuentre el valor de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$

31. Si la sucesión $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ es convergente, entonces pruebe que $\lim_{k\to\infty}a_k=0$

32. Pruebe que si $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L<1$ con $a_k\neq 0$ entonces $\lim_{k\to\infty}a_k=0$

33. Usando la anterior muestre que $\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{4^n}=0$

34-39 ■ Demuestre el límite indicado usando la definición.

34. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}$

35. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+44}=3$

36. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-11}{2n-3n^2}=-\frac{1}{3}$

37. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=\infty$

38. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3+3n}=0$

39. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ *no existe.*

40. Si $|r|<1$, demuestre que $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$

41. Muestre que la sucesión $\frac{n!}{n^n}$ es decreciente.

42. Demuestre que la sucesión anterior tiene límite.

43. ¿Existe el límite de la sucesión $a_n=\frac{[nx]}{n}$? , donde [ ] es la parte entera.

44. Si la sucesión (a_n) converge, entonces, ¿podemos afirmar que a_n 2 converge?

45. ¿Es verdadera la afirmación recíproca de la anterior?

46. ¿Es convergente la sucesión $\cos(n\pi)$?

3.4 CONSTRUCCIÓN DE ℝ

En el inicio de este capítulo, los números naturales sentaron las bases para el estudio de las sucesiones y no entraremos en el análisis de estos entes abstractos; sin embargo sabemos que este conjunto numérico con la suma y la multiplicación usual satisfacen las leyes asociativas, conmutativas, distributivas y la ley de cancelación. Pero las operaciones inversas, sustracción y división, no son siempre posibles en este sistema numérico; por ejemplo, 3÷2 no es un natural. Para hacer estas operaciones sin restricciones debemos extender el sistema inventando el número 0 y los naturales negativos, o sea, los números enteros y las fracciones. La unión de estos dos nuevos conjuntos se denomina la clase o conjunto de números racionales, ya que se obtienen por operaciones racionales de aritmética, a saber: sustracción, adición, multiplicación y división. Además, hemos dicho que este conjunto más amplio de números se extiende a los naturales, no sólo por el hecho de contenerlos sino que valen las leyes descritas anteriormente sin restricciones, salvo la división por cero.

Los números racionales son usualmente representados gráficamente por puntos en una línea recta *L*(recta real). Tomando un punto 0 como el origen y una unidad de medida que llamaremos 1. De la geometría elemental sabemos que con regla y compás es posible subdividir la unidad de longitud en un número cualquiera de partes iguales, es decir, cualquier longitud racional desde el origen puede ser construida usando solamente regla y compás. Los puntos correspondientes a los números enteros subdividen este eje numérico en intervalos de longitud 1. Luego, cualquier punto de este eje o es un entero o está entre dos enteros. Si subdividimos cada intervalo en q partes iguales, entonces hemos construido una subdivisión de la recta en intervalos de longitud $1/q$ donde los extremos de estos intervalos son de la forma p/q. Luego, cualquier punto de este eje o es un racional de esta forma o está entre dos de ellos; ahora tomando q suficientemente grande y $P \in L$ podemos asegurar que hay racionales arbitrariamente cerca de P, pero no podemos asegurar que P es racional; de hecho, sabemos que en la recta numérica hay puntos que no son números racionales.

El hecho es que cualquier punto del eje está tan cerca como uno quiera de un racional; esto se expresa diciendo que los racionales son densos en el eje numérico, lo que implica que entre dos racionales siempre existen infinitos puntos del eje numérico. Aunque los racionales tienen esta característica, ya desde épocas remotas como la de los siglos V o VI a.C. los matemáticos y filósofos griegos descubrieron que hay cantidades que no son el cociente entre dos enteros, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado de lado 1, de la cual en la actualidad sabemos que es $\sqrt{2}$ o el número π.

A la luz de los hechos, los números racionales no bastan como base para la geometría, es necesario incorporar estos números que denominamos irracionales y desde tiempos antiguos se supuso que cualquier punto en la ahora llamada recta real le corresponde un número racional o irracional y que la unión de estos números reales satisfacen las mismas leyes aritméticas que los racionales. Sin embargo en el siglo XIX se justificaron todas estas intuiciones en un fantástico artículo de Dedekind.

¿Cómo podemos describir cualquier número real irracional? Para algunos de ellos podríamos dar una respuesta geométrica; es el caso de $\sqrt{n}$ la diagonal de un cuadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ o, por ejemplo, el número π como el cociente entre la longitud de un círculo y su diámetro. Sin embargo, esto no es suficiente para poder describirlos todos. Una forma de describir cualquier número irracional x es considerar una sucesión de racionales que converja a x. Esto se justifica gracias a la densidad de los racionales en la recta numérica.

Consideremos x en el intervalo $I_1=[a_1,b_1]$, con a_1 y b_1, ambos racionales, es decir $a_1 \leq x \leq b_1$; entonces existe un intervalo $I_2=[a_2,b_2] \subset I_1$ tal que $x \in I_2$ y a_2, b_2 racionales. En efecto, si dividimos el intervalo I_1 en dos partes iguales, x está en alguna de las dos, entonces podemos considerar $a_2 = a_1$ y $b_2 = (a_1 + b_1)/2$, es decir, $a_1 \leq a_2 \leq x \leq b_2 \leq b_1$.

De igual modo, podemos construir un intervalo $I_3 = [a_3, b_3]$ con a_3, b_3 racionales, $I_3 \subset I_2 \subset I_1$ y $x \in I_3$, y así sucesivamente. Este proceso genera una sucesión de intervalos encajados I_n con extremos racionales tales que todos contienen a x y $I_{n+1} \subset I_n$ para todo n. Hemos generado así una sucesión de intervalos encajados donde la intersección de todos ellos es únicamente el punto x. Visto de otra forma, hemos generado sucesiones a_n y b_n de números racionales que convergen a x cuando $n \to \infty$. Esto nos permite construir de esta forma todos los números reales como límites de sucesiones racionales.

EL NÚMERO e

Muchos de nosotros hemos ahorrado dinero en algún banco o hemos pensado en hacerlo. Supongamos que tenemos un capital inicial C_0 que se deposita en un banco a una tasa de interés r, la cual se acumula en un cierto periodo. Si llamamos C al capital total de la cuenta, tenemos que $C = C_0(1+r)^n$, y n el número de periodos. Por ejemplo, si tomamos un capital inicial C_0 = \$1,000 a una tasa de interés anual del 10% y la acumulación se hace anualmente, entonces el capital final al cabo de 10 años será

$$C = 1000(1+0.10)^{10} = 2593.74.$$

Ahora supongamos que tenemos la misma tasa de interés anual pero que se acumula trimestralmente; entonces se tiene que la tasa de interés por periodo es de r = 0.10/4, por lo que el capital final al cabo de 10 años, o sea, 40 periodos, será de

$$C = 1000\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{40} = 2685.06.$$

¿Qué sucederá con el capital al final del primer año, si la capitalización es de n periodos al año?

$C = 1000\left(1+\dfrac{0.10}{n}\right)^{n}$, es decir, para distintos periodos se tiene que:

Observando la tabla 1 podemos ver que al parecer esta sucesión de términos tiende a

n	Capital
1	\$1,100
10	\$1104,622125
50	\$1105,060554
100	\$1105,115698
1000	\$1105,165393
10000	\$1105,170366

TABLA 1

algún valor cercano a 1105,1 a medida que n crece, o sea, intuitivamente la sucesión $c_n = 1000(1+0.1/n)^n$ converge. En realidad, al parecer la situación no cambia para la sucesión $(1 + 1/n)^n$, utilizando un argumento similar. Esta última sucesión es el estudio del siguiente teorema de gran importancia.

Teorema 1 La sucesión a_n definida por $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ es convergente. Además, se define su límite como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Demostración: Usando el teorema del binomio se tiene que

$$a_n \;=\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}n(n-1)\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}n(n-1)\cdots(n-(n-1))\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1+(1/2)^n}{1-1/2}\leq 3.$$

Es decir, la sucesión a_n está acotada superiormente por 3. Basta demostrar que a_n es monótona creciente y habremos probado que es convergente. Tomando $n+1$ en lugar de n se tiene que

$$a_{n+1} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\geq a_n,$$

por consiguiente a_n es una sucesión creciente. Tomando valores con n suficientemente grandes podemos ver que e $\approx 2.7182818....$

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de límite de la sucesión $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$

Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$, con p, número natural.

SOLUCIÓN La sucesión $a_n=(1+p/n)^n$, al igual que antes, satisface que es acotada superiormente y monótona creciente, por lo que es convergente; además, se tiene que

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n/p}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n/p}\right)^{n/p}\right]^p.$$

Consideremos la subsucesión a_{nk} formada con $n=kp$ con $k\in N$, entonces

$$a_{n_k}=\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^p;$$

luego, por el teorema anterior, el límite de esta subsucesión viene dado por

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=e^p.$$

Pero como la sucesión es convergente, toda subsucesión converge al mismo límite; luego

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n=e^p.$$

EJEMPLO 2 ■ Cálculo del límite de una sucesión $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

SOLUCIÓN

Sea $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, entonces a_{n+1} es

$$a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)},$$

entonces $$a_{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

luego cuando $n\to\infty$ obtenemos que $a_{n+1}\to\frac{1}{e}$.

Por lo tanto $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

Más aún, usted puede demostrar que si p es racional, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n=e^p.$$

Por consiguiente, el capital c_n del ejemplo inicial tenderá a

$$c_n\to 1000\cdot e^{\frac{1}{10}}\approx 1105.170918.$$

3.4 EJERCICIOS

1-8 ■ Diga si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si a es racional y x irracional, entonces $a+x$ es irracional.

2. Si x e y son irracionales, entonces $x+y$ también lo es.

3. Si x e y son irracionales, entonces $x+y$ también lo es.

4. $(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n$ es racional.

5. $\sqrt[3]{2}$ es racional.

6. Entre dos racionales hay un irracional.

7. Entre dos irracionales no necesariamente hay un racional.

8. Todos los racionales son números que son límites de sucesiones formadas por números racionales.

9. Construya una sucesión diferente de la expuesta en los contenidos que sea convergente a π.

10. ¿Qué número es mayor $(1.000.000)^{1.000.000}$ o $(1.000.001)^{999.999}$?

11. Calcule $\lim_{n\to\infty}(1+2/n)^n$.

12. Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+4}\right)^{n+1}$.

13. Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{4n+1}\right)^n$.

14. Encuentre el valor de las constantes a y b (si existen) tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn+1}.$$

15. Sea a_n tal que $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Haga una conjetura sobre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a\,n}\right)^{an}.$$

Si existe, ¿puede saber cuál es el límite?

3 REPASO

1-9 ■ Pruebe usando inducción las afirmaciones para todo n natural:

1. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}$.

2. 9^n-1 es múltiplo de 4.

3. 2 es factor de n^2+n.

4 Si $x>1$, entonces $x^n>1$.

5. a+b es factor de $a^{2n-1}+b^{2n-1}$.

6. 5 divide a n^4-5n^2+4n.

7. Calcule $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

8. $1+3n\leq 4^n$.

9. Calcule $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots\cdot(2n+1)}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

10. Demuestre que si un conjunto tiene n elementos entonces el conjunto formado por todos los subconjuntos de él, incluidos el vacío y él mismo, tiene 2^n elementos.

11. Averigüe si los números 2, 5, 17/7 y 19 son o no términos de la sucesión $\left\{a_n=\frac{3n-1}{n+5}\right\}$, indicando, en caso afirmativo, el lugar que ocupan en la misma.

12-15 ■ Encuentre el supremo, ínfimo, máximo, mínimo, si existen, para el conjunto $\{a_n=n\in\mathbb{N}\}$. Estudie la monotonía de cada una de las sucesiones. ¿Cuáles de ellas son acotadas?

12. $a_n=4-6\text{n}$.

13. $a_n=\frac{2n+3}{3}$

14. $a_n=\frac{2n}{2n+5}$

15. $a_n=\frac{2n-n^2}{n+1}$

16. Calcule el primer término de la sucesión $a_n=\frac{1}{3}n^3-32n$ que sea mayor que 2200.

17. Demuestre con un ejemplo que el producto de dos sucesiones crecientes no siempre es una sucesión creciente.

18. Demuestre que la sucesión cuyo término general es $(5/4)^n$ es creciente y no acotada superiormente. Demuestre, después, que la sucesión cuyo término general es $(4/5)^n$ es decreciente y acotada.

19. Estudie la monotonía y la acotación de las sucesiones de términos generales $(-5/3)^n$ y $(-3/5)^n$.

20. Estudie la monotonía y la acotación de la siguiente sucesión (indicando sus extremos en caso de que esté acotada): $\left\{\frac{5n+3}{2-3n}\right\}$

21. Razone si la suma de dos sucesiones no acotadas debe ser también no acotada.

22. Invente dos sucesiones de términos positivos, no acotadas superiormente, cuyo producto esté acotado superiormente.

23. Averigüe qué tipo de sucesión es la que se obtiene sumando una sucesión acotada y una sucesión no acotada inferiormente. Razone la respuesta.

24. Utilizando el método de inducción demuestre las siguientes igualdades:

(a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(b) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\ldots+n(2n+1)=\frac{4n^3+9n^2+5n}{6}$

(c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

25-29 ■ Calcule la suma pedida.

25. $\sum_{k=3}^{12} k+1$.

26. $\sum_{k=3}^{n} k^2-2k$.

27. $\sum_{k=1}^{25}\frac{4^{k+1}}{3^{k-1}}$.

28. $\sum_{k=1}^{101}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$.

29. $\sum_{k=2}^{122}\frac{1}{k^2-1}$.

30-39 ■ Calcule los siguientes límites

30. $\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$.

31. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{-3n^2+6n-7}$.

32. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}n^2+\sqrt{2}n+n}{-\sqrt{2}n^2+5n+2}$.

33. $\lim_{n\to\infty}\frac{-8n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3+n^2-2}}$.

34. $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-3n+2}\right)$.

35. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2-1}$.

36. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+9}{2n-7}\right)^n$.

37. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-5}$.

38. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-2}{4n-3}\right)^{4n+3}$.

39. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+2}$.

40. La suma de los tres primeros términos de una progresión aritmética es 12 y la razón 16. Calcule el primer término.

41. Los dos primeros términos de una progresión aritmética son $(a-b)^2$ y $(a+b)^2$. Halle la diferencia y la suma de los primeros siete términos.

42. Halle la suma de todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 1 y 1000 (incluido).

43. ¿Cuántos números impares consecutivos, después del 7, suman 153?

44. Halle la suma de los primeros quince múltiplos de 7.

45. Los coeficientes de una ecuación de segundo grado y el término independiente forman una progresión aritmética. La suma de las raíces representa la tercera parte de la suma de los términos de la progresión y el producto de las raíces excede en 7 unidades el coeficiente del segundo término. ¿Cuál es la ecuación?

46. A las nueve de la noche terminó una reunión del directorio, y en el tiempo que duró la sesión el reloj dio 48 campanadas. ¿A qué hora empezó la sesión si el reloj da las horas y las medias horas (éstas con una sola campanada)?

47. Calcule las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor de ellos mide 9 cm.

48. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en progresión armónica si $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ están en progresión aritmética. Encuentre el octavo término de una progresión armónica si el tercero y el sexto son $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente.

49. Calcule la suma de todos los múltiplos de 13 comprendidos entre 500 y 7800.

50. Calcule cuántos días estuvo trabajando un camarero en un establecimiento sabiendo que el primer día recibió una gratificación de 10€y que cada día que pasaba recibía 3€más de gratificación, llegando a cobrar el último día 55€.

51. Compruebe que $\{x^2-2x+1, x^2+2x+1, \ldots\}$ es una progresión aritmética y calcule el quinto término.

52. Los ángulos de un hexágono están en progresión aritmética y el menor mide 40°. Halle los demás.

53. En una progresión geométrica de cinco términos, el último es el doble del tercero y el producto de todos ellos es igual a $4\sqrt{2}$. Halle todos los términos de la progresión.

54. En una progresión geométrica la suma de los primeros dos términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Halle la suma de los primeros cinco términos.

55. Los primeros dos términos de una progresión geométrica son 9/16 y 9/4. Halle dos términos consecutivos de dicha progresión cuyas raíces cuadradas se diferencien en 48.

56. La población de una provincia ha aumentado durante 5 años en progresión geométrica, pasando de 200,000 a 322,102 habitantes. ¿Cuál ha sido la razón de la progresión? Exprésela en términos porcentuales.

57. Averigüe para qué valores de K las expresiones siguientes están en progresión geométrica: K+3, 6K+3, 20K+5.

58. Tres números, x, y, z, suman 19. Colocados en ese orden forman una progresión geométrica pero si se disminuye el primero en una unidad están en progresión aritmética. Calcule esos números.

59. Halle el noveno término del desarrollo de $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{19}$.

60. Halle el décimo término del desarrollo de $\left(\frac{1}{b}-\sqrt{3}\right)^{11}$.

61. ¿Existe el término xy en el desarrollo de $\left(\sqrt{x}+y\right)^8$?

62. Halle el término central del desarrollo de $(x-y)^8$.

3 EXAMEN

1. Dada la sucesión geométrica tal que a_2=3 y a_5=-81, encuentre la razón de esta P.G. y el término a_9. ¿Qué sucede si los términos están en P.A.?

2. ¿Cómo es una sucesión que está en progresión aritmética y también geométrica, o no existe tal cosa? Justifique su respuesta.

3. Demuestre que 9 divide a $10^{n+1}+3.10^n+5$ para todo n natural.

4. Encuentre las siguientes sumas y $p(n)=n^2-n+41$

5. En un cine al aire libre hay lugares para estacionar 20 autos en la primera fila, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente. Si hay 21 filas en ese cine, calcule la cantidad de autos que pueden estacionarse en la décima fila y el total de estacionamientos.

6. Si $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots a_n$ y $b_1,b_2,b_3,\ldots\ldots b_n$ son progresiones geométricas, demuestre que $a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,\ldots\ldots a_nb_n$ también es una progresión geométrica.

7. En el desarrollo del siguiente binomio $5^{k+1}-1=5$; , determine el término independiente de x.

8. Demuestre que $(1.01)^{100}>2$. Sugerencia: tenga en cuenta que $(1.01)^{100}=(1+0.1)^{100}$ y aplique el teorema del binomio.

9. Calcule $1+a+\cdots+a^n=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

10. Una sucesión se define de la siguiente manera:

$$1+a^1=\frac{a^{1+1}-1}{a-1}=\frac{a^2-1}{a-1}=\frac{(}{}$$

(a) Calcule a_2, a_3, a_4, a_5.
(b) Infiera una fórmula explícita para a_n.
(c) Demuestre por inducción la fórmula encontrada en b).

11. Dado el conjunto $1+a+\cdots+a^k=\dfrac{a^{k+1}-1}{a-1}$

(a) Resuelva la inecuación.
(b) ¿Es A un conjunto acotado?
(c) ¿Tiene el conjunto A máximo y mínimo?
(d) ¿Tiene el conjunto A supremo e ínfimo?

12. Calcule los siguientes límites, si es que existen:

(a) $+a+\cdots+a^k$

(b) $1+a+\cdots+a^{k-}$

(c) $1+a+\cdots+a^k$

13. Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$1+a+\cdots+a^k+a^{k+1}=(1+a$$

(a) Demuestre que $\{a_n\}$ es convergente.
(b) Halle su límite. ¿Para qué valores de a el límite es menor o igual a 2?

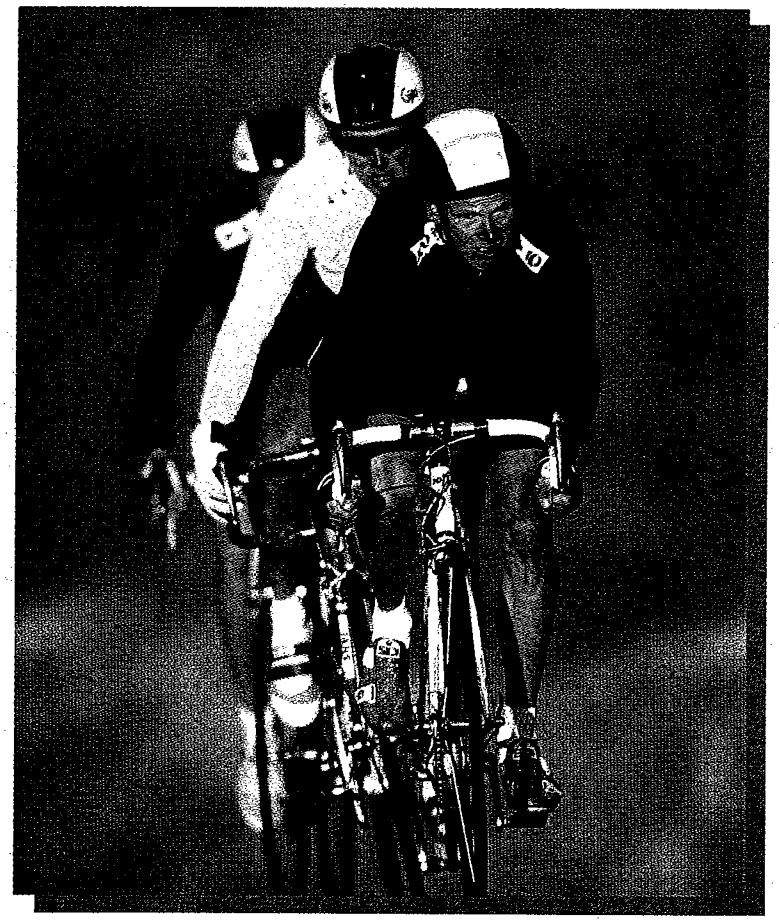
14. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas matemáticamente.

(a) Si b_n es acotada y a_n tiende a cero, entonces $b_n a_n$ tiende a cero.

(b) Si a_n es una sucesión distinta de cero que tiende a L, tal que $1+a$ tiende a K menor que 1, entonces L=0.

4

FUNCIONES



Una función es una regla que describe la forma en que una cantidad depende de otra; por ejemplo, al estudiar el movimiento, la distancia recorrida es una función del tiempo.

Esa flor del pensamiento matemático moderno: el concepto de función.

THOMAS J. McCORMACK

Cuando se trabaja en una situación problemática y se quiere construir un modelo cuantitativo que la describa, es necesario determinar la manera como se relacionan las variables de entrada con las de salida. Gráficos, cartogramas, curvas, tablas, fórmulas y otras son útiles para describir las relaciones existentes entre las variables del modelo en forma cuantitativa. El poder establecer estas relaciones es de vital importancia, ya que permite hacer predicciones y tomar decisiones. Son muchas las relaciones que se pueden establecer entre las variables de entrada y salida de un modelo, pero en la mayoría de los casos es deseable que para una elección de valores de las variables de entrada (datos de entrada) se obtenga un solo resultado para cada una de las variables de salida; esto es, se quiere que dichas relaciones sean funcionales.

El concepto de función es considerado fundamental en la matemática, no sólo por su importancia dentro de las diferentes disciplinas de esta ciencia, sino por ser una de las formas más naturales de describir la realidad; podría decirse que las funciones nos rodean y las encontramos en acción a nuestro alrededor. Si se observa con atención, se encontrarán múltiples ejemplos de funciones; por ejemplo, los recibos de luz son una función de la cantidad de electricidad empleada; a cada persona se le suele asignar su edad, su estatura y su número de identificación; a cada artículo de un supermercado le corresponde su precio y un código de barras; a cada libro se le asigna su ISBN; a cada vehículo le corresponde su patente; el costo de un viaje en auto está relacionado con la distancia recorrida, el precio por litro de la bencina y la velocidad promedio a la cual se conduce; el crecimiento de una planta está relacionado con la cantidad de nutrientes del suelo y la cantidad de agua que reciba, la cantidad de dinero acumulado en una cuenta de ahorros depende de la cantidad inicialmente depositada, de la tasa de interés anual, el número de veces al año que los intereses son capitalizados y el tiempo. Con toda seguridad usted podrá encontrar muchos otros ejemplos.

El tener una base adecuada en la teoría de funciones le será útil, con toda seguridad, en la construcción de modelos y en su análisis. El poder determinar con precisión el dominio y rango de una función, por ejemplo, clarificará las restricciones de las variables del problema y los resultados que puede obtener; el saber que la función crece o decrece en cierto intervalo le permitirá analizar con precisión el comportamiento del problema con ciertas condiciones, y con toda la información que obtenga del estudio de la o las funciones que describan dicha situación, usted podrá realizar mejores predicciones y tomar decisiones que le den mayor seguridad.

4.1 DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

■ **Definición 1** Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, una función f de A en B es cualquier relación (o regla) que asigne a cada elemento x de A un solo elemento y de B.

El conjunto A se suele llamar conjunto de partida de f y el conjunto B conjunto de llegada de f. Si el elemento único y asociado a x existe, se denomina imagen de x por la función f o valor de la función en x.

En otras palabras, cuando establecemos una relación entre las variables de entrada y las de salida de un modelo, diremos que esta relación es una función si cada vez que asignemos valores a las variables de entrada, existe un solo valor para las variables de salida. Ilustremos esto considerando el ejemplo del capítulo 2 en el cual se deseaba estimar el tiempo necesario para viajar en auto entre dos ciudades, en el cual se determinó la relación $T=\frac{D}{V}+NT_e+PT_p$. donde D era la distancia entre las dos ciudades, N el número de paradas realizadas durante el viaje, T_e el tiempo estimado en cada parada, P el número de peajes entre las dos ciudades y T_p el tiempo estimado en cada peaje. Observe que esta relación es una función, puesto que a cada asignación de valores dada a las variables D, N, T_e, P y T_p, se determina un único tiempo T para el viaje; así, por ejemplo: si se estima que sólo realizará 4 paradas: $N = 4$, durará un promedio de 15 minutos en cada parada: $T_e = 1/4$ de hora, que hay aproximadamente 5 peajes: $P = 5$, y le tomará pagar aproximadamente 3 minutos cada peaje: $T_p = 1/20$ de hora, se obtendrá un solo valor para T: $T = 6{,}44$ horas.

NOTACIÓN

Si se designa por f una función de A en B esto se escribe simbólicamente por:

$f A \longmapsto B$ ó $A \xrightarrow{f} B$. La imagen (única) y, del conjunto de llegada B asociada por f al elemento x del conjunto de partida A, es notada por: $f(x)$ (se lee "f de x"). También es usual utilizar la notación: $x \longmapsto f(x)$ ó $x \longmapsto y = f(x)$.

Observe que la variable x puede tomar libremente valores en el conjunto A y que los valores de la variable y dependen del valor asignado a x; es éste el motivo por el cual se suele decir que x es la variable independiente e y es la variable dependiente.

Es recomendable evitar el abuso del lenguaje que consiste en decir "la función $f(x)$", puesto que $f(x)$ no es una función, es el elemento único asociado a x por f: $f(x)$ es sólo un valor de la función. Es bueno observar que f es el nombre de la función y $f(x)$ es el valor que se obtiene cuando en la función se introduce el valor x. Si, por ejemplo, f es la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número le asigna su cuadrado, $f(2) = 2^2 = 4$ significa que en la función entra el valor 2 y éste es transformado por ella en su cuadrado, que es 4.

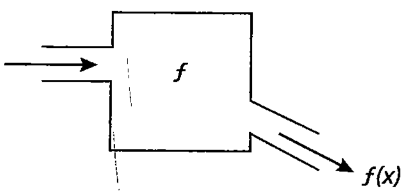


FIGURA 1

En muchas ocasiones es adecuado pensar en una función como en una máquina que al introducir valores (materia prima) los procesa y transforma en los valores $f(x)$ (resultado del proceso, producto terminado), tal como lo muestra la figura 1.

Observe que este enfoque describe la naturaleza activa del concepto de función: una función siempre hace algo, aunque ello sea no hacer nada: dejar las cosas tal como están inicialmente. Note que cualquier objeto de entrada x es transformado en un objeto de salida $f(x)$.

Para que una función esté bien definida es necesario precisar el conjunto A (de partida), el conjunto B (de llegada) y la manera como se relacionan los elementos de A con los de B; esta relación puede estar representada por medio de una fórmula, por medio de un procedimiento, de una tabla o de un gráfico.

EJEMPLO 1 ■ Determinación de la función tiempo

La función f que determina el tiempo para viajar en auto entre dos ciudades quedaría definida por:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\longmapsto T = f(x) \end{aligned}$$

donde A es el conjunto en el cual se tomarán los valores para x de tal forma que al ser reemplazados en la fórmula $T = f(x)$ sea posible determinar el tiempo de viaje T. Para calcular el tiempo de viaje, se tienen las variables de decisión D, V, N, T_e, P y T_p las cuales forman la variable independiente x de la función f; llamaremos a este tipo de variables; *variables vectoriales*; de acuerdo con esto se tiene que en este caso x es una variable vectorial de seis componentes: $x = (D, V, N, T_e, P, T_p)$.

Si se considera que cada componente de x es positiva, se tiene que $A=\mathbb{R}_+^6$ y puesto que el valor $T = f(x) = f(D, V, N, T_e, P, T_p)$ debe ser un número real positivo se tiene finalmente que $B = \mathbb{R}_+$. ■

EJEMPLO 2 ■ Determinación de la función temperatura

La función g que a cada punto de una placa metálica que está siendo calentada, le asigna su temperatura, queda definida por:

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ &(x,y) \mapsto z = g(x,y) \end{aligned}.$$

En este caso la función g puede estar dada por una tabla de datos:

x	y	z
1	0	50
1	0.5	40
1	1	25
1.1	0	45.25
1.1	0.5	36.9
1.1	1	23.75
1.2	0	40.98
1.2	0.5	34.01
1.2	1	22.52
1.3	0	37.17
1.3	0.5	31.35
1.3	1	21.32
1.4	0	33.78
1.4	0.5	28.9
1.4	1	20.16
1.5	0	30.77
1.5	0.5	26.67
1.5	1	19.05

Esto es suficiente para definir la función g; sin embargo, para hacer predicciones es preferible encontrar una fórmula del tipo $z = g(x,y)$ que permita calcular con exactitud la temperatura en cada punto de coordenadas (x,y) de la placa. Después de analizar con detenimiento los datos, de dedicar algunas horas de su tiempo a descifrarla y utilizar conocimientos relativos a la teoría del calor, probablemente logre determinarla y plantear la ecuación $g(x, y) = 100 / (1+x^2+2y^2)$. ■

En la realidad, no es trivial ni mucho menos evidente el encontrar una función que aproxime de forma adecuada un conjunto de datos, será necesario conocer algunas técnicas de álgebra lineal y estadística para esto.

EJEMPLO 3 ■ Cálculo del capital final

La función h que a cada capital P invertido a una tasa de interés anual de i por ciento, compuesto n veces al año, calcula la cantidad de dinero acumulado (o capital final) después de t años de estar invertido, queda definida por:

$$\begin{aligned} C_f : \mathbb{R}_+^4 &\to \mathbb{R}_+ \\ (P,r,n,t) &\mapsto C_f(P,r,n,t) = P(1+r/n)^{nt} \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 ■ Determinación de funciones con intervalos de clase

Para este ejemplo suponga que se tiene la siguiente situación: a cincuenta estudiantes, elegidos de manera aleatoria en la universidad, se les aplicó una prueba psicológica de manchas de tintas; cada puntuación es el número de objetos que el estudiante declaró ver luego de observar 10 manchas de tinta durante un periodo de 10 minutos. Éste es el registro de sus puntuaciones:

25	33	35	37	55	27	40	33	39	28
34	29	44	36	22	51	29	21	28	29
33	42	15	36	41	20	25	38	47	32
15	27	27	33	46	10	16	34	18	14
46	21	19	26	19	17	24	21	27	16

Para un primer análisis de estos resultados se suele hacer una partición de los datos en intervalos de clase (conjuntos de clases o categorías) y a cada uno de estos conjuntos asociarle la cantidad de datos que pertenecen al intervalo (el número total de casos dentro del intervalo); esto es, su frecuencia, definiéndose una función d de la siguiente manera:

Sean $A_1 = [10,14) = \{n \in IN \mid 10 \le n < 14\}$, $A_2 = [15,19) = \{n \in IN \mid 15 \le n < 19\}$

$A_3 = [20,24) = \{n \in IN \mid 20 \le n < 24\}$, $A_4 = [25,29) = \{n \in IN \mid 25 \le n < 29\}$

$A_5 = [30,34) = \{n \in IN \mid 30 \le n < 34\}$, $A_6 = [35,39) = \{n \in IN \mid 35 \le n < 39\}$

$A_7 = [40,44) = \{n \in IN \mid 40 \le n < 44\}$, $A_8 = [45,49) = \{n \in IN \mid 45 \le n < 49\}$

$A_9 = [50,54) = \{n \in IN \mid 50 \le n < 54\}$, $A_{10} = [55,59) = \{n \in IN \mid 55 \le n < 59\}$

El conjunto de partida de la función d es entonces el conjunto $\mathsf{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$, conjunto donde cada elemento es uno de los intervalos de clase seleccionados para agrupar las puntuaciones y el conjunto de llegada es el conjunto finito $B = \{1,3,4,6,7,12,6,8,2\}$. Puesto que cada uno de los conjuntos A son finitos, los valores de la función d quedarán definidos por: $d(A_1)=2$, $d(A_2)=8$, $d(A_3)=6$, $d(A_4)=12$, $d(A_5)=7$, $d(A_6)=6$, $d(A_7)=4$, $d(A_8)=3$, $d(A_9)=1$ y $d(A_{10})=1$.

EJEMPLO 5 ■ Función: valor de verdad de una proposición

Dada una proposición p es usual asignarle su valor de verdad. Si P denota la colección de proposiciones y $V = \{0,1\}$, la función h que a cada proposición le asigna su valor de verdad queda definida por:

$$\begin{aligned} h: P &\to \{0,1\} \\ p &\mapsto h(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ es verdadera} \\ 0 \text{ si } p \text{ es falsa} \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es de gran utilidad cuando se utiliza aritmética módulo 2 en V, puesto que permite calcular algebraicamente los valores de verdad de una proposición compuesta: $h(p \wedge q)=h(p)h(q)$ y $h(p \vee q)=h(p)+h(q)$.

EJEMPLO 6 ■ Definición del producto cartesiano

Dados A y B conjuntos cualesquiera y $A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$ el producto cartesiano de A con B, se define la función "primera proyección", notada Pr_1 por:

$$\begin{aligned} Pr_1 : A \times B &\to A \\ (a,b) &\mapsto Pr_1(a,b) = a \end{aligned}$$

y la función segunda proyeccción, notada Pr_2 por:

$$\begin{aligned} Pr_2: A\times B &\rightarrow B \\ (a,b) &\mapsto Pr_2(a,b)=b \end{aligned}$$

En el caso particular que A y B sean subconjuntos de $\mathbb{R}$, estas funciones nos dan las proyecciones de los puntos en los ejes coordenados. ■

EJEMPLO 7 ■ Definición de la función área de un círculo

Si C denota el conjunto de círculos, la función a que a cada círculo le asigna su área queda definida por:

$$\begin{aligned} a: C &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ c_r &\mapsto a(C_r)=\pi r^2 \end{aligned}$$

Observe que como cada círculo queda determinado por su radio r, otra forma de construir una función que a cada círculo le asigne su área es:

$$\begin{aligned} a: R_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ r &\mapsto A(r)=\pi r^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, note la diferencia conceptual de estas dos funciones: los conjuntos de partida son de naturaleza distinta. ■

EJEMPLO 8 ■ Sucesión de números reales

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales no es más que una función f, en la cual el conjunto de partida es el $\mathbb{N}$ y el conjunto de llegada $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n)=a_n \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 9 ■ Función: operación binaria

Toda operación binaria de R ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{C}$) tal como la suma o la multiplicación son funciones en las cuales el conjunto de partida es el producto cartesiano $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ y conjunto de llegada $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto +(x,y)=x+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \cdot(x,y)=x\cdot y \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 10 ■ Función: Permutación de una colección

Por último, considere una colección finita de n objetos A. Toda permutación de los objetos de A puede ser vista como una función. Para esto, a cada objeto de A se le asigna un número de 1 a n, es decir, se considera que los objetos están en cierto orden; una permutación quedará determinada por una función f de $\{1,2,\ldots,n\}$ en $\{1,2,\ldots,n\}$ que satisfaga las siguientes propiedades: cada elemento del conjunto de llegada $\{1,2,\ldots,n\}$ es imagen de un solo elemento del conjunto de partida y todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de algún elemento del conjunto de partida. Si se tienen 4 objetos, una posible permutación de estos objetos queda determinada por la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \{1,2,3,4\} & \to & \{1,2,3,4\} \\ & 1 & \mapsto & 2 \\ & 2 & \mapsto & 3 \\ & 3 & \mapsto & 4 \\ & 4 & \mapsto & 1 \end{array}$$

■

4.1 EJERCICIOS

1-4 ■ Exprese la regla dada en forma de función y determine los conjuntos de definición. Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado y luego restar 5" se expresa como $\begin{array}{rcl} f: I\!R & \to & I\!R \\ x & & f(x)=x^2-5 \end{array}$

1. Multiplicar por 3 y después sumar 1.
2. Restar 5 y luego dividir por 7.
3. Sumar 2 y a continuación elevar al cuadrado.
4. Elevar al cuadrado, sumar 1 y finalmente extraer la raíz cuadrada.

5-8 ■ Exprese la función (o regla) con palabras.

5. $\begin{array}{rcl} f: I\!N & \to & I\!R \\ x & \mapsto & f(x)=\frac{x}{3}-5 \end{array}$

6. $\begin{array}{rcl} g: I\!R & \to & I\!R \\ x & \mapsto & g(x)=\frac{x-5}{3} \end{array}$

7. $\begin{array}{rcl} h: I\!R^{+} & \to & I\!R \\ x & \mapsto & h(x)=2x^2-3 \end{array}$

8. $\begin{array}{rcl} k: [0,100] & \to & I\!R \\ x & \mapsto & k(x)=\sqrt{2x+1} \end{array}$

9. Si se tienen tres objetos a, b y c. Construya todas las funciones que definen permutaciones de estos tres objetos.

10. Construya una función que exprese el perímetro de un cuadrado en términos de su área. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?

11. Construya una función que exprese el área de la superficie de un envase cilíndrico. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?

12. Para un capital C y una tasa de interés fija i, el valor de la cuenta en el banco se dice que es una función del tiempo. Determine esta función.

13-15 ■ Dados los puntos P_1 y P_2, determine una función que permita calcular la distancia entre P_1 y P_2.

13. Si P_1 y P_2 son puntos de una recta.

14. Si P_1 y P_2 son puntos del plano cartesiano.

15. Si P_1 y P_2 son puntos del espacio.

16-17 ■ Dibuje un diagrama de máquina y uno de flechas para las funciones dadas.

16. $f(x)=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 4.$

17. $f(x)=\dfrac{2}{x},\quad 1\le x\le 4.$

18. Suponga que una fábrica que produce cierto artículo pierde \$100 si está inactiva, mientras que si está operando a su capacidad, que es de 100 unidades por hora, obtiene un beneficio de \$1000. Si la relación entre beneficio y unidades producidas es lineal, determine la función de beneficio.

19. Durante una tormenta se ve el rayo antes de oírse el trueno porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido. La distancia entre usted y el centro de la tormenta varía directamente con la longitud del intervalo de tiempo entre el rayo y el trueno.
    (a) Suponga que el trueno de una tormenta cuyo centro está a 5,400 pies de distancia tarda 5 segundos en alcanzarlo a usted. Determine la constante de proporcionalidad y escriba una función de la variación.
    (b) Trace la gráfica de esta ecuación. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?
    (c) Si la longitud del intervalo entre el rayo y el trueno es de 8 segundos, ¿Cuán lejos está el centro de la tormenta?

20. La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.
    (a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 25° C a 0.106 m^3 es 50 Kpa. Obtenga la constante de proporcionalidad y escriba la función que expresa la proporcionalidad inversa.

(b) Si la muestra se expande a un volumen de 0.3 m determine la nueva presión.

21. Para alentar la venta en grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si un grupo es menor de 10, cada boleto cuesta 4,500 pesos; si un grupo es de 10 o más, cada boleto cuesta 4,250 pesos. Escriba una función para representar el costo de comprar x boletos.

22. La ley de gravitación de Newton dice que dos objetos con masa m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza F que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre los objetos. Exprese la ley de gravitación de Newton como una función. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?

23. Suponga que un fabricante elabora dos productos X e Y, el costo total depende de los niveles de producción tanto de X como de Y. La tabla muestra el costo total para diferentes niveles de producción:

Unidades producidas de X	*Unidades producidas de Y*	*Costo total de producción*
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

A partir de la tabla construya la función f de costo total de producción.

24. Los datos siguientes representan las puntuaciones en un inventario de nerviosismo realizado en una muestra de 65 empleados públicos de Santiago de Chile.

59	48	53	47	57	64	62	62	57	57	81	83	65
48	65	76	53	61	60	37	51	63	81	60	77	51
71	57	82	66	54	47	61	76	57	58	52	57	50
40	53	66	71	61	61	55	73	70	59	50	59	50
69	67	66	47	56	60	43	54	81	76	69	67	47

Determine una función que nos dé una distribución de la frecuencia de estas puntuaciones.

25. La unión de empleados de una compañía está solicitando que se provea de un jardín infantil para los hijos de los empleados como parte de sus beneficios marginales. Para determinar el número de niños menores de 6 años que cada empleado tiene, la gerencia aplica un cuestionario a sus cincuenta empleados. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

2	1	0	0	3	0	0	1	2	1
0	2	1	0	3	2	3	1	1	0
0	4	2	1	0	1	1	2	1	3
0	2	4	2	1	3	2	1	2	1
1	5	1	0	3	1	2	1	1	0

Determine una función que dé una distribución de frecuencias relativa (en porcentaje) del número de hijos de los empleados de esta empresa.

26. Un estudio del centro comercial Plaza intenta determinar los hábitos de los consumidores en los sectores aledaños. Una muestra aleatoria de cincuenta consumidores que visitaban su centro fueron encuestados para determinar el número de tarjetas de crédito que portaban. Los resultados fueron los siguientes:

2	5	0	4	2	1	0	6	3	5
4	3	4	0	5	2	5	2	0	2
5	0	2	5	2	5	4	3	5	6
1	0	6	3	5	3	4	0	5	2
2	5	2	0	2	0	4	2	1	0

Determine una función que dé una distribución de frecuencias relativa (en porcentaje) del número de tarjetas de crédito que portaban los clientes del centro comercial.

27. Una prueba de hemoglobina que se aplica a las personas con diabetes durante sus exámenes rutinarios de control indica el nivel de azúcar en la sangre durante los dos o tres meses anteriores a la prueba. Los siguientes datos se obtuvieron de 40 personas diabéticas en la clínica indisa:

6.5	5.0	5.6	7.6	4.8	8.0	7.5	7.9	8.0	9.2
6.4	6.0	5.6	6.0	5.7	9.2	8.1	8.0	6.5	6.6
5.0	8.0	6.5	6.1	6.4	6.6	7.2	5.9	4.0	5.7
7.9	6.0	5.6	6.0	6.2	7.7	6.7	7.7	8.2	9.0

Determine una función que dé la distribución de frecuencias utilizando seis intervalos de clase.

28. Determine una función que permita calcular el volumen de una caja de base rectangular. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?

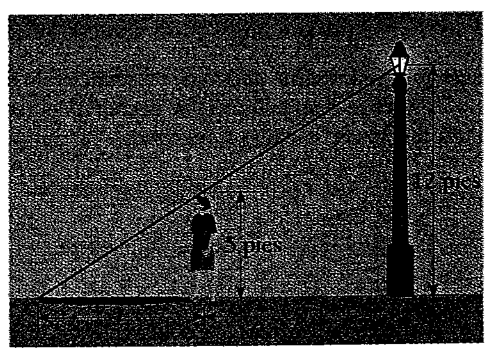
29. Determine una función que permita calcular el perímetro de un rectángulo. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?

30. Exprese el área A de un triángulo equilátero como una función de la longitud de su lado.

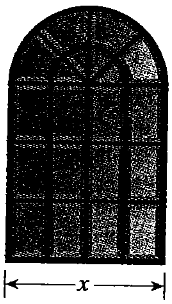
31. Exprese el área de la superficie de un cubo como una función de su volumen.

32. Determine una función que permita calcular el radio de un círculo si se conoce su área.

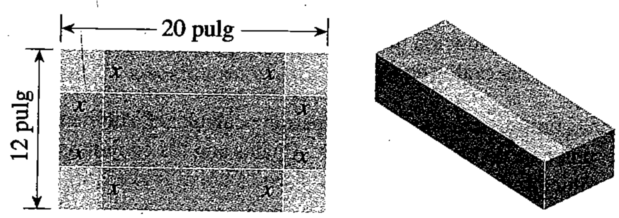
33. Una mujer de 5 pies de altura está de pie cerca de un farol de 12 pies de altura, como se muestra en la figura. Determine una función que permita calcular la longitud L de su sombra dependiendo de la distancia d de la mujer a la base del farol.



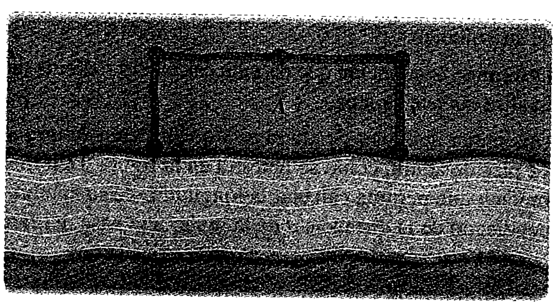
34. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto como se muestra en la figura.
(a) Determine una función que permita calcular el área A de la ventana.
(b) Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de la ventana como una función del ancho x de la misma.



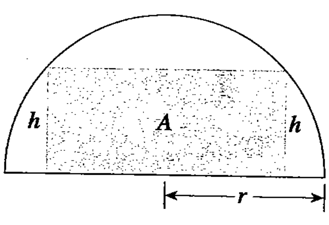
35. Una caja sin tapa debe construirse a partir de una pieza rectangular de cartón cortando cuadrados idénticos en cada esquina y después doblando los lados como se muestra en la figura. Determine una función que permita calcular el volumen de la caja.



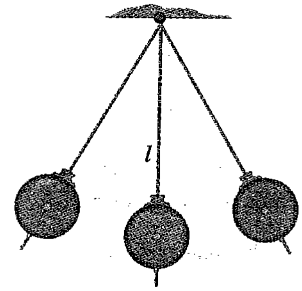
36. Un granjero desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto, como se muestra en la figura. No necesita cercar a lo largo del río. Determine una función que permita calcular el área A del campo.



37. Un rectángulo está inscrito dentro de un semicírculo de radio r, como se ve en la figura. Determine el área A del rectángulo como una función de la altura h del mismo.



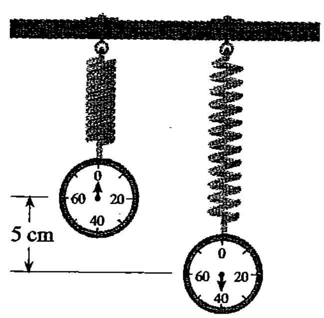
38. El periodo de un péndulo (tiempo transcurrido en una oscilación completa del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del mismo.
(a) Escriba esta relación como una función. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?
(b) ¿Cuánto tendríamos que modificar la longitud del péndulo para duplicar su periodo?



39. El costo de imprimir un número de una revista es conjuntamente proporcional a su número de páginas y a la cantidad que se impriman.
(a) Determine una función para el costo de impresión. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?
(b) Determine una función que describa la variación conjunta si el costo de impresión es de $60,000 para 4,000 copias de revistas de 120 páginas.

40. La presión P de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional a su volumen V.
(a) Determine una función que permita calcular la presión de la muestra.
(b) Determine una función que permita calcular la presión si 100 l de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala de Kelvin).
(c) Si la temperatura se incrementa a 500 K y se reduce el volumen a 80 l, ¿cuál es la presión del gas?

41. La ley de Hooke dice que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su longitud natural es directamente proporcional a x. Aquí la constante de proporcionalidad se conoce como la constante del resorte.
(a) Escriba la ley de Hooke como una función. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?
(b) Si el resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se requiere una fuerza de 40 N para mantener el resorte estirado a una longitud de 15 cm, determine cuál es la constante del resorte.
(c) ¿Qué fuerza se necesita para mantener estirado el resorte una distancia de 14 cm?



42. La resistencia R de un alambre varía directamente con su longitud L e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.
(a) Determine una función que permita calcular la resistencia de un alambre. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?
(b) Un alambre de 1.2 m de largo y 0.005 m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms. Determine una función que permita calcular la resistencia de este alambre y determine la constante de proporcionalidad.
(c) Determine la resistencia de un alambre fabricado del mismo material que tenga 3 m de largo y un diámetro de 0.008 m.

43. La tercera ley de Kepler sobre el movimiento planetario dice que el cuadrado del periodo T de un planeta (tiempo que toma el planeta para efectuar una revolución completa alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio d al Sol.
(a) Escriba la ley de Kepler como una función. ¿Cuáles son los conjuntos de definición de esta función?
(b) Determine la constante de proporcionalidad utilizando el hecho de que para nuestro planeta el periodo es de aproximadamente 365 días y la distancia promedio es de 93 millones de millas.
(c) Neptuno está aproximadamente a 2,79 . 10^9 millas del Sol. Determine su periodo.

44. En ciertas condiciones, si dos padres de ojos cafés tienen k hijos, la probabilidad P de que haya exactamente entre ellos r de ojos azules está dada por:

$$\frac{k!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{k-r}}{r!(k-r)!}$$

para $r=0,1,2,\ldots,k$. Exprese esta probabilidad en forma de función, determine sus conjuntos de definición y calcule la probabilidad de que en un total de 4 hijos, 3 tengan ojos azules.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

45. Ejemplos de funciones Al principio de la sección se presentaron algunos ejemplos de funciones sencillas y cotidianas: la estatura es una función de la edad, la temperatura lo es de la fecha y el costo del correo depende del peso. Plantee otros tres ejemplos de este tipo de funciones.

46. Cuatro formas de representar una función En la tabla siguiente se representan cuatro funciones diferentes definidas de manera verbal, algebraica, visual y numérica. Piense en una función que pueda ser representada en las cuatro formas y escríbalas.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es "la población del mundo en el momento t"

Relación de la población P y del tiempo t

Algebraica

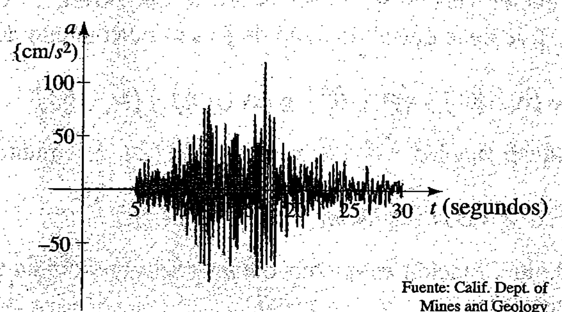
Con una fórmula:

$A(r) = \pi r^2$

Área de un círculo

Visual

Con una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Con una tabla de valores:

w(onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.32
$1 < w \leq 2$	0.55
$2 < w \leq 3$	0.78
$3 < w \leq 4$	1.01
$4 < w \leq 5$	1.24
⋮	⋮

Costo de enviar por correo de primera clase una carta

4.2 DOMINIO, RANGO Y GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Cada función tiene asociados tres conjuntos, los cuales son de gran importancia para el análisis de la naturaleza de la función en estudio: El dominio, el rango (imagen, recorrido o codominio) y la gráfica, los cuales se precisarán a continuación.

■ **Definición 1** Para cualquier función $f:A \to B$ el conjunto de todos los valores de $x \in A$ para los cuales existe un $y \in B$ tal que $y = f(x)$ se denomina el **dominio** de f y se denotará por: Dom(f). Simbólicamente se tiene: $Dom(f) = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(y = f(x))\}$, el cual es un subconjunto del conjunto de partida A,

$$Dom(f) \subseteq A$$

■ **Definición 2** Para cualquier función $f:A \to B$ el conjunto de todos los valores que se obtienen por medio de la función se denomina **rango, imagen** o **recorrido** de f y se denota por: Rang(f).

Simbólicamente se tiene: $Rang(f) = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(y = f(x))\}$, el cual es un subconjunto del conjunto de llegada B,

$$Rang(f) \subseteq B$$

En otras palabras, el dominio de una función está formado por todos los elementos del conjunto A para los cuales tiene sentido calcular la función, mientras que el rango está formado por todos los valores que se obtienen por medio de la función. Si se utiliza la analogía de la función como una máquina, el dominio será la materia prima que puede ser introducida en ella para obtener un resultado y el rango será todo lo que sale de la máquina o productos terminados.

Si las relaciones en un modelo se describen utilizando una función, el dominio lo formarán las restricciones de las variables de entrada y el rango todos los resultados que se obtienen del modelo y corresponden a los valores de las variables de salida, en particular de la(s) medida(s) de desempeño.

Consideremos la función f que determina el tiempo para viajar en auto entre dos ciudades.

$$\begin{array}{ccc} f:A & \to & B \\ (D,V,N,T_e,P,T_p) & \mapsto & f(D,V,N,T_e,P,T_p) = \dfrac{D}{V} + NT_e + PT_p \end{array}$$

Las posibles restricciones dadas a cada una de las variables permite determinar el dominio de la función. Puesto que en general se puede considerar que $[D \in \mathbb{R}_+$, $V \in \mathbb{R}_+$, y $N \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{N}$, $T_e \in \mathbb{R}_+$ y $T_p \in \mathbb{R}_+]$, se tiene que el dominio de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^6$,

$$Dom(f) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}).$$

■ **Definición 3** Para cualquier función $f:A \to B$ la gráfica de f es el conjunto

$$G_f = \{(x,y) \in A \times B / (x \in Dom(f)) \wedge (y = f(x))\}.$$

Observe que la gráfica de una función es un subconjunto del producto cartesiano AxB: $G_f \subseteq A \times B$. Además note que:

- Si se define una función por medio de su gráfica G_f, el dominio de f estará formado por las primeras componentes de los puntos de G_f, mientras que el rango de

f estará conformado por las segundas componentes de los puntos de G_f. Como $G_f \subseteq A \times B$, las funciones primera y segunda proyección, Pr_1 y Pr_2 son de gran utilidad para calcular el dominio y rango de f:

$$Dom(f) = \{Pr_1(x,y) / (x,y) \in G_f\}$$
$$Rang(f) = \{Pr_2(x,y) / (x,y) \in G_f\}$$

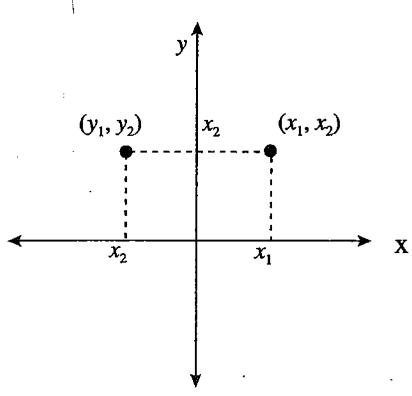
- La gráfica de una función $f{:}A \rightarrow B$ siempre existe, a pesar de que no se pueda dibujar. Piense, por ejemplo, la función siguiente:

$$\begin{aligned} r:\ \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) &\rightarrow r(x_1,x_2) = (-x_1,x_2) \end{aligned}$$

$Dom(r) = \mathbb{R}^2$, $Rang(r) = \mathbb{R}^2$ y su gráfica es el conjunto:

$$G_r = \{(x_1,x_2,y_1,y_2) \in A \times B / (x_1,x_2) \in Dom(r) \wedge (y_1,y_2) = r(x_1,x_2)\} \subseteq \mathbb{R}^4,$$

el cual existe; sin embargo, no es posible representarlo gráficamente pues sería necesario tener una representación gráfica de $\mathbb{R}^4$ y como usted sabe, no se tiene. Pero a pesar de que la representación gráfica de esta función no se puede realizar, sí es factible describir el efecto de la función r en cada punto del plano $\mathbb{R}^2$.



$(y_1, y_2) = r\,(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$

FIGURA 1

Como se observa el reflejo en la figura 1, la imagen de cada punto (x_1, x_2) del plano es el punto $(-x_1, x_2)$, el cual es del punto inicial respecto al eje coordenado Y. Se enfatiza que la figura anterior no es la representación gráfica de r, sólo es una forma de representar su efecto.

- Las gráficas de las funciones son representadas por diversos esquemas, los cuales corresponden a las diferentes formas en que se representa el producto cartesiano de dos conjuntos. Las más usuales son: tablas, diagramas cartesianos y diagramas sagitales.

  La tabla siguiente representa la gráfica de la función d de distribución de frecuencias de las puntuaciones de la prueba de manchas de tintas considerada anteriormente. Note que los elementos de la gráfica de d son de la forma $(A_i, d\,(A_i)$ para $i = 1,2,\ldots,10$.

	Puntuaciones	Frecuencia
A_1	10-14	2
A_2	15-19	8
A_3	20-24	6
A_4	25-29	12
A_5	30-34	7
A_6	35-39	6
A_7	40-44	4
A_8	45-49	3
A_9	50-54	1
A_{10}	55-59	1

$Dom(d) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$ y $Rang(d)$=$\{2,8,6,12,7,4,3,1\}$.

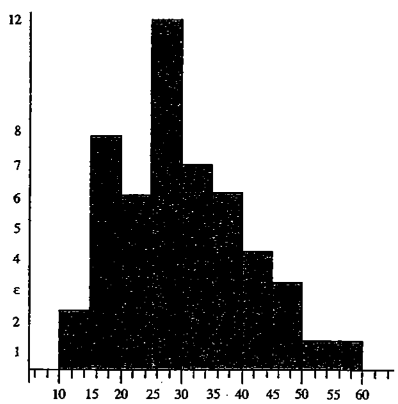
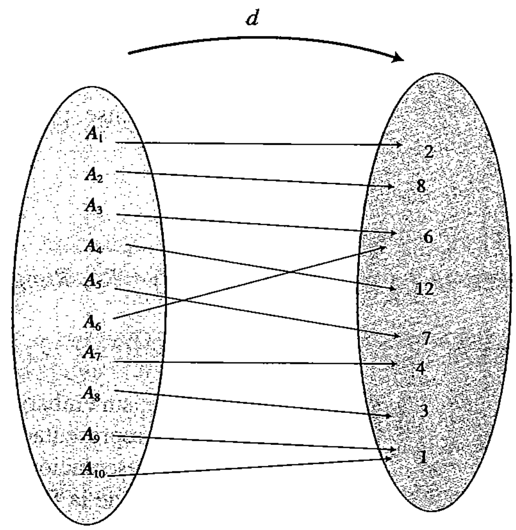


FIGURA 2

La misma función puede representarse mediante un diagrama cartesiano como el de la figura 2:

En este gráfico se representa el conjunto de partida sobre una recta horizontal (no necesariamente graduada) y el de llegada en una recta vertical. Observe que al determinar las proyecciones sobre cada una de estas rectas se determina el dominio y rango de la función.

Un diagrama sagital para la función d es:



Considere la sucesión $a_n = \frac{1}{n^2-4}$ vista ahora como una función f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. La gráfica de f es el subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$G_f = \{(n, \frac{1}{n^2-4}) / n \in \mathbb{N}\},$$

la cual puede ser representada gráficamente como se muestra en la figura 3.

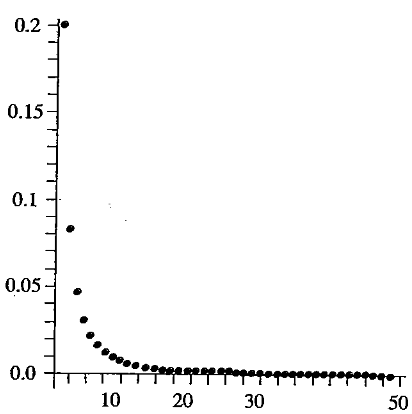


FIGURA 3

El dominio de f está formado por todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $\frac{1}{n^2-4}$ existe; esto es, para todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $n^2 - 4 \neq 0$; por tanto $Dom(f) = \mathbb{N} - \{2\}$.

Lo único que se puede afirmar sobre el rango de f es que es un subconjunto de $\mathbb{R}_+ \cup \{-\frac{1}{3}\}$, puesto que existen números en $\mathbb{R}_+$ que no son valores de f. Tal como se aprecia en la representación gráfica f; por ejemplo, f no toma los valores comprendidos entre $f(4) = \frac{1}{12}$ y $f(3) = \frac{1}{5}$.

4.2 EJERCICIOS

1. Sea $x \in \mathbb{N}$ y f la función definida por $f(x) = \{d \in \mathbb{N} \mid d$ divide a $x\}$

(a) Determine dominio y rango de f.

(b) Calcule $f(17)$, $f(30)$ y $f(124)$

(c) Determine la gráfica de f.

2-10 ■ ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son la gráfica de una función? Dibuje en cada caso el conjunto de puntos. Si el conjunto es la gráfica de una función, halle su dominio y rango.

2. $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \quad 2x = y\}$

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \quad x + 3y = x^2\}$

4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad |x| = 7\}$

5. $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid \ 2x > y\}$

6. $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid \ x = \sqrt{y}\}$

7. $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid \ y = \sqrt{x}\}$

8. $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid \ xy = 0\}$

9. $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid \ |x-2| < 5\}$

10. $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid \ |x|+|y| = 1\}$

11-16 ■ Utilizando la siguiente tabla responda cada una de las actividades siguientes.

La tabla dada representa los valores de la función de consumo de carne C (en kilos por familia por semana) dependiendo del ingreso familiar I (en millones de pesos por año) y del precio de la carne p (en pesos por kilo), $C = f(I,p)$.

		Precio de la carne, p ($/k)			
		1,650	*1,925*	*2,200*	*2,475*
Ingreso familiar por año, I ($1,000,000)	*5*	*2.65*	*2.59*	*2.51*	*2.43*
	10	*4.14*	*4.05*	*3.94*	*3.88*
	15	*5.11*	*5.00*	*4.97*	*4.84*
	20	*5.35*	*5.29*	*5.19*	*5.07*
	25	*5.79*	*5.77*	*5.60*	*5.53*

11. Determine $f(5,1925)$, $f(10,2200)$, $f(20,1650)$ y $f(25,1925)$. ¿Qué significado tienen estos valores?

12. Determine la gráfica de f y represéntela en un sistema cartesiano de coordenadas.

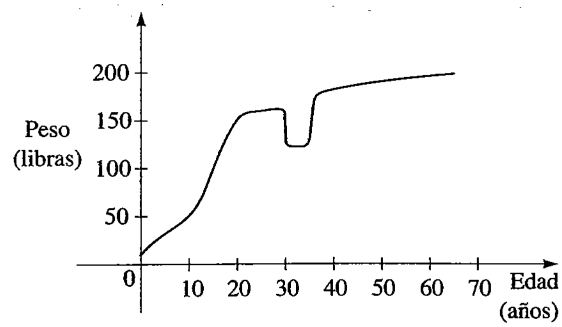
13. Defina la función $h(x)=f(x,\ 1650)$. Determine mediante una tabla los valores de la función h y trace su gráfica. Explique el significado de esta función.

14. Defina la función $g(y)=f(15,y)$. Determine mediante una tabla los valores de la función g y trace su gráfica. Explique el significado de esta función.

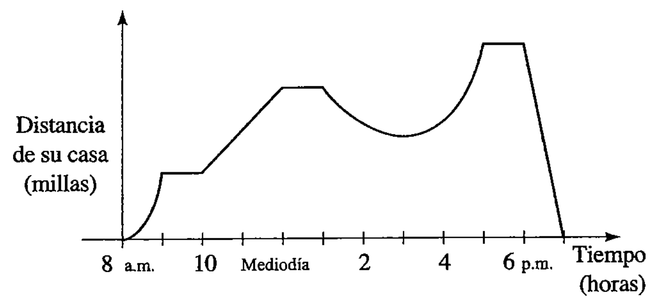
15. Compare las representaciones gráficas de las funciones f, h y g; explique sus diferencias y relaciones.

16. Elabore una tabla de la proporción, P, del ingreso familiar gastado en carne por semana, en función del precio de la carne y del ingreso (observe que P es una fracción del ingreso gastado en carne). ¿Qué significado tiene esta función?

17. La gráfica da el peso de una persona como función de su edad. Describa con palabras la forma en que el peso de ésta ha variado a lo largo del tiempo. ¿Qué piensa que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años?



18. La gráfica proporciona la distancia a la que se encuentra un vendedor de su hogar como una función del tiempo en un día determinado. Describa en palabras lo que indica la gráfica respecto a sus recorridos en ese día.



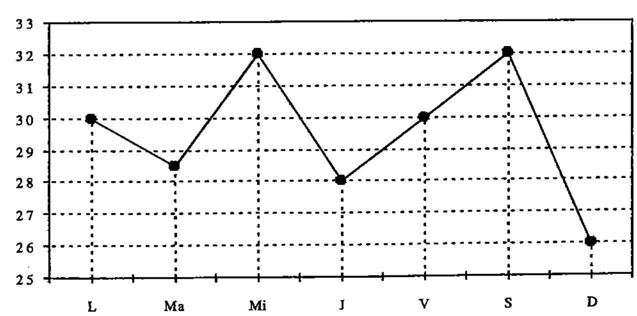
19. Coloque cubos de hielo en un vaso, llénelo con agua fría y déjelo sobre una mesa. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

20. El dueño de una casa poda el césped todos los miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como una función del tiempo a lo largo de un periodo de 4 semanas empezando el domingo.

21. Trace una gráfica aproximada de la temperatura exterior como una función del tiempo durante un día de primavera.

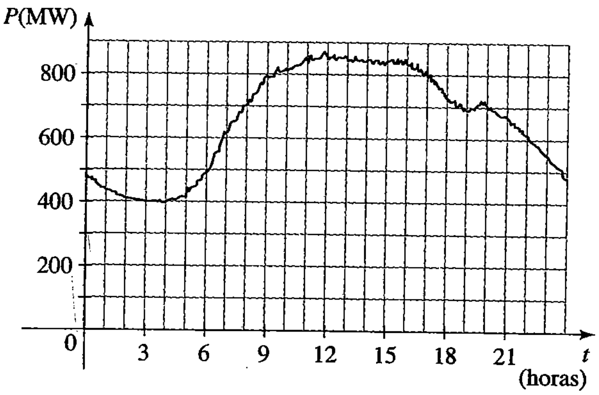
22. Usted coloca una tarta de frutas en un horno y la hornea durante una hora. Después la saca y la deja enfriar antes de comérsela. Trace una gráfica aproximada de la temperatura de la tarta como función del tiempo.

23. Durante una semana de diciembre en la ciudad de Santiago, las temperaturas máximas diarias fueron registradas según el gráfico siguiente:



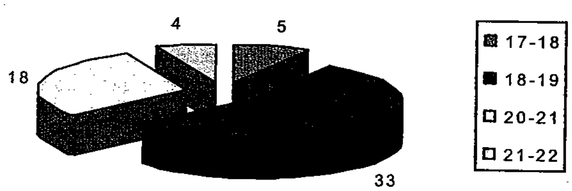
(a) ¿Cuál es el dominio y rango de esta función?
(b) ¿Entre qué par o pares de días consecutivos se presentó una mayor variación de temperatura?
(c) ¿Entre qué par o pares de días consecutivos se presentó una menor variación de temperatura?

24. La figura muestra el consumo de energía en San Francisco el 29 de septiembre de 1996 (P está medido en megawatts; t se mide en horas a partir de la media noche).
(a) ¿Cuál es el consumo de energía a las 6:00 a.m.? ¿A las 6:00 p.m.?
(b) ¿A qué hora fue más bajo el consumo de energía?
(c) ¿A qué hora fue más elevado el consumo de energía?



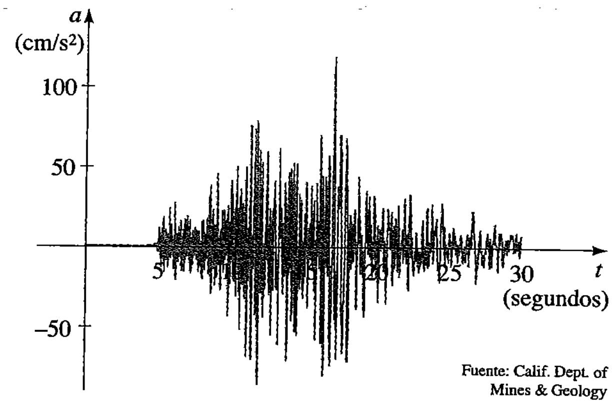
Fuente: Pacific Gas & Electric

25. El gráfico siguiente muestra la distribución de edades de los alumnos de un curso universitario de primer año.



(a) Interprete este gráfico como la representación gráfica de una función. Determine dominio y rango de la función.
(b) ¿Qué porcentaje de los alumnos tiene una edad entre 18 y 19 años?
(c) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una edad superior a 19 años?
(d) Realice dos representaciones gráficas distintas de la función de la distribución porcentual de las edades del curso.

26. La gráfica muestra la aceleración vertical del suelo causada por el terremoto de Northridge de 1994 en los Ángeles, medido por un sismógrafo. (Aquí t representa el tiempo en segundos).
(a) ¿En qué momento t empezó el terremoto a crear por primera vez movimientos notables del suelo?
(b) ¿En qué momento t pareció terminar el terremoto?
(c) ¿En que momento t se alcanzó la intensidad máxima del terremoto?



Fuente: Calif. Dept. of Mines & Geology

27. El 18 de marzo de 1996 se registraron cada 2 horas lecturas de la temperatura T (en °F) en Atlanta, Georgia. El tiempo t se mide en horas a partir de medianoche.

t	T
0	58
2	57
4	53
6	50
8	51
10	57
12	61

Utilice las lecturas para trazar una gráfica aproximada de T en función de t.

28. En la tabla se muestra la población P (en miles) de San José, California, de 1984 a 1994 (se dan estimaciones a mediados de año).

t	P
1984	695
1986	716
1988	733
1990	782
1992	800
1994	817

Trace una gráfica de P como función del tiempo t.

29-34 ■ Si $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ son elementos de i^2, la suma de a con b es el elemento de i^2 notado $a + b$ y definido por $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ donde la suma de las coordenadas corresponde a la suma de números reales:

29. Interprete esta suma como una función. ¿Cuál es el dominio y rango de esta función?

30. Si se nota la función anterior por s, calcule $s((1,2),(-1,5))$, $s((3,2.5),(1.5,4))$, $s((0,0),(\frac{1}{4},3))$ y $s((1,2),(-1,-2))$.

31. Demuestre que para cada par de elementos a y b de i^2 se tiene que $s(a,b)=s(b,a)$. ¿Qué propiedad de la suma describe la igualdad anterior?

32. Demuestre que para cada tripla de elementos a, b y c de i^2 se tiene que $s(s(a,b),c)=s(a,s(b,c))$. ¿Qué propiedad de la suma en i^2 describe la igualdad anterior?

33. Demuestre que para todo a de i^2 existe un elemento e de i^2 que tiene la propiedad $s(a,e)=a$. ¿Qué propiedad de la suma describe la igualdad anterior?

34. Demuestre que para cada a de i^2 existe un elemento a^* de i^2 tal que $s(a,a^*) = e$. ¿Qué propiedad de la suma describe la igualdad anterior?

■ Descubrimiento y análisis

35-48 ■ Descripción de curvas en el plano

35. La función $\alpha: i \to i^2$ definida por asigna a cada valor dado a t un punto P del plano de coordenadas $P=(x,y)$ donde $x=t$ y $y=t^2$.

(a) Complete la siguiente tabla de valores de la función α

t	x	y	$\alpha(t)=P$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			

(b) Represente los diferentes puntos obtenidos por medio de la función α en el plano y observe que los puntos generan una curva plana C ¿Por qué esta curva no se puede considerar como una representación de la gráfica de la función α? En general, los valores de este tipo de funciones (que corresponden a puntos del plano) describen una curva plana C; es por esto que se dice que la función α describe una curva C o que es una parametrización de la curva.

36-39 ■ Trace las curvas descritas por las siguientes funciones, indique con una flecha la dirección de la curva al aumentar los valores de t en su dominio.

36. $\alpha(t)=(2t+4,t-1)\quad \mathrm{Dom}(\alpha)=\mathbb{R}^+$

37. $\alpha(t)=(3-t,2t-3)\quad \mathrm{Dom}(\alpha)=[-1,4]$

38. $r(t)=(1-2t,t^2)\quad \mathrm{Dom}(r)=[0,3)$

39. $f(t)=(t^2,6-3t)\quad \mathrm{Dom}(\alpha)=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

40-47 ■ Describa el movimiento de una partícula cuya posición es (x,y) cuando t varía en el conjunto dado.

40. $x=\cos t\quad y=\sin t\quad t\in\mathbb{R}$

41. $x=\cos t\quad y=\sin t\quad 0\le t<2\pi$

42. $x=\cos t\quad y=\sin t\quad 0\le t\le\pi$

43. $x=\cos 2t\quad y=\sin 2t\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$

44. $x=2\cos t\quad y=3\sin t\quad 0\le t\le 2\pi$

45. $x=\cos\pi t\quad y=\sin\pi t\quad 1\le t\le 2$

46. $x=2+\cos t\quad y=3+\sin t\quad 0\le t\le 2\pi$

47. $x=2+2\cos t\quad y=3+3\sin t\quad 0\le t\le 2\pi$

48. Dada la función $l(t)=(x_1+(x_2-x_1)t,\ y_1+(y_2-y_1)t)$ donde $0\le t\le 1$:

(a) Muestre que la función l describe el segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$.

(b) Utilice este resultado para encontrar una parametrización del segmento de recta que une el punto (1,2) con el (–1,0).

(c) Utilice este resultado para encontrar una parametrización del segmento de recta que une el punto (–1,0) con el punto (1,2).

(d) ¿Qué diferencia existe entre las dos parametrizaciones encontradas en (b) y (c)?

49-50 ■ Unidades monetarias de valor constante (*UMVC*)

Con el fin de evitar que la desvalorización monetaria erosione los ahorros, los gobiernos autorizan normas para la corrección monetaria de tal modo que los dineros en juego mantengan su poder adquisitivo. Estas correcciones monetarias se calculan con base en el índice de precios al consumidor (*IPC*) y las tasas de interés efectivas de capitalización en depósitos de 90 días; igualmente, permiten tomar los dineros de préstamos, inversiones y ahorros para convertirlos en unidades monetarias de valor constante (*UMVC*). En Chile, por ejemplo, los dineros en juego se convierten en *UF* (unidad de fomento), creados por Decreto Supremo de enero de 1967. El valor de la *UF* lo calcula el Banco Central con base en el *IPC*, mediante la ecuación:

$$T=\left(1+\frac{VN}{100}\right)^{\frac{1}{n}}$$

En la cual *VN* es el porcentaje de variación del *IPC* registrado en el mes inmediatamente anterior, n es el número de días del periodo para el cual se calcula la *UF* (este periodo es mensual), y el Banco Central publica cada mes un listado con los valores de la *UF* día a día.

49. Exprese el valor de la *UF* como una función. Determine su dominio y rango teóricos.

50. Busque en el diario o en Internet la variación del *IPC* durante el último mes y calcule los valores de la *UF* para varios valores de n. ¿Coinciden sus resultados con los publicados por el Banco Central?

4.3 FUNCIONES NUMÉRICAS O REALES

Se denomina función numérica de una variable real a toda función para la cual el conjunto de partida y el de llegada son subconjuntos del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Por ejemplo, la función f que a cada número real x le asocia el número real positivo que es igual a su cuadrado es una función numérica. Se tiene entonces:

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+} \cup \{0\}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Cuando se estudian funciones numéricas, se suele simplificar la notación e indicarlas por medio de sus valores. Así, por ejemplo, la función que a cada número real le suma 1 quedará notada por: $g(x)=x+1$. Se permitirá este abuso sólo cuando el contexto indique con claridad que se trata de una función numérica.

Por otra parte, es también usual referirse a las funciones numéricas como funciones reales. Este nombre se debe a sus conjuntos de definición y no como puede sugerir la palabra real a que sean las funciones que más se presentan en la vida real; note que la gran mayoría de las situaciones reales no pueden ser simplificadas al punto de que sólo una variable sirva para describirla en forma adecuada, sin pasar por alto factores relevantes para su estudio. Si usted piensa, por ejemplo, en los modelos lineales que se han dado en capítulos anteriores podrá notar que muchos factores que influyen en la situación han sido ignorados; eso no indica que estos modelos no sean válidos, sólo que son una forma muy simplificada de ver la situación, en la cual se hacen varios supuestos que es difícil que en algunas situaciones prácticas se satisfagan. A pesar de esto, el estudio detallado de las funciones reales es de vital importancia en el desarrollo de modelos de varias variables, motivo por el cual se estudiarán en detalle en las siguientes secciones.

CÁLCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN REAL

La determinación del dominio y rango de una función real f definida por $y = f(x)$ depende de la estructura algebraica de $\mathbb{R}$, es decir, de las definiciones de las operaciones en el cuerpo de los números reales y sus propiedades: el cero no tiene inverso multiplicativo; por tanto, una expresión que se encuentre en el denominador de una fracción no puede ser cero; no es posible calcular la raíz n-ésima par de un número real negativo, puesto que $x^n \geq 0$ para todo real x y cada n entero positivo par, etc. Tenga presente que para determinar el dominio se deben analizar los valores que puede tomar la variable independiente x y para el rango los valores que toma la variable dependiente y.

EJEMPLO 1 ■ Determinación del dominio de cada función

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{x}{x^3 - 9x}; \quad \text{(b)}\ g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{x^2 - 16}}$$

SOLUCIÓN

(a) La función f no está definida cuando el denominador es 0. Dado que
x^3-$9x=x(x^2$-$9)=x(x$-$3)(x+3)$

se tiene que:

$$Dom(f)=R\text{-}\{-3,0,3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty).$$

(b) Como la raíz de un número negativo no es un número real, la función g estará definida sólo para los valores de x para los cuales

$$\frac{x^2-5}{x^2-16}\geq 0,$$

resolviendo está desigualdad se tiene que:

$$Dom(g)=(-\infty,-4)\cup[-\sqrt{5},\sqrt{5}]\cup(4,+\infty)\cdot$$ ■

EJEMPLO 2 ■ Determinación del rango de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(x)=x-x^2;\ \text{(b) } g(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-16}}$$

SOLUCIÓN

(a) Ahora lo que se quiere es analizar los valores que puede tomar la variable y, esto es ver cuáles son los números reales y que se pueden escribir como $y=x-x^2$, lo que equivale a analizar para qué valores de y la ecuación x^2-$x+y=0$ tiene soluciones reales. La ecuación tendrá soluciones reales cuando su discriminante sea positivo o cero, en el caso de la ecuación considerada se tiene que: $1-4y\geq 0$ si y sólo si $y\leq\frac{1}{4}$. Por tanto $Rang(f)=(-\infty,\frac{1}{4}]$.

(b) Observe que los valores de la función

$$g(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-16}}$$

son positivos o cero, ya que está definida por la raíz positiva; para obtener $y = 0$ sería necesario poder introducir en la función el valor 0, pero esto no es posible ya que 0 no es un valor del dominio de g, por tanto

$$Rang(g)\subseteq R_+.$$

Para determinar con precisión el rango de g, utilicemos el método del ejemplo anterior. En este caso se deben determinar todos los valores de $y > 0$ tales que la ecuación $y=\sqrt{\frac{x}{x^2-16}}$ tiene soluciones reales, está ecuación es equivalente a:

$$x^2y^2\text{-}x\text{-}y^216=0$$

la cual tiene soluciones reales si su discriminante

$$1+4y^4 \geq 0$$

como esta desigualdad se satisface para todo real y, se concluye que:

$$Rang(g) = (0, +\infty).$$

GRÁFICA DE FUNCIONES REALES

Observe que si f es una función real, su gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y su representación gráfica será posible en el plano cartesiano, salvo para algunas funciones, como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

Es usual en los casos en que existe una representación gráfica referirse a la gráfica de la función y a su representación gráfica como una misma cosa; nos permitiremos esto mientras no cause ambigüedad.

La gráfica de una función real f proporciona una imagen útil del comportamiento de la función, ya que por un lado, la coordenada y de cualquier punto (x,y) es $y = f(x)$ que corresponde a la altura de los punto con respecto al eje coordenado X del plano cartesiano; y por otro, al tener los puntos de la gráfica en el plano cartesiano, es posible, utilizando las proyecciones a los ejes determinar el dominio y rango de la función, como se muestra en la figura siguiente:

Es útil conocer las gráficas de algunas funciones reales, como:

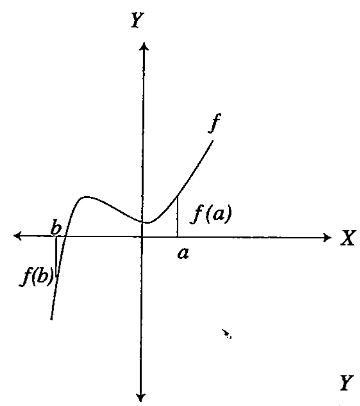


FIGURA 1

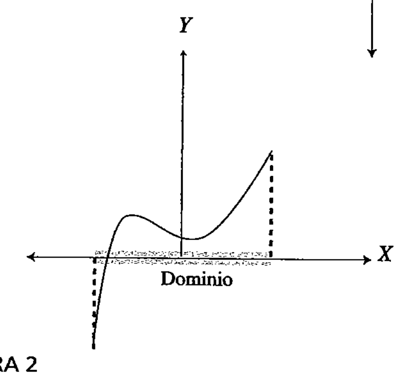


FIGURA 2

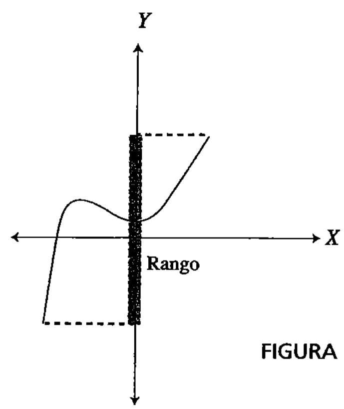


FIGURA 3

EJEMPLO 3 ■ Gráfica de una función lineal

Una función f definida para todo real x por $f(x) = ax+b$ se llama función lineal porque su gráfica es una línea recta. El número b es la segunda coordenada del punto $(0,b)$ en el que la recta corta al eje Y. El número a es la pendiente de la recta.

Trace la gráfica de la función $f(x) = 3x+1$

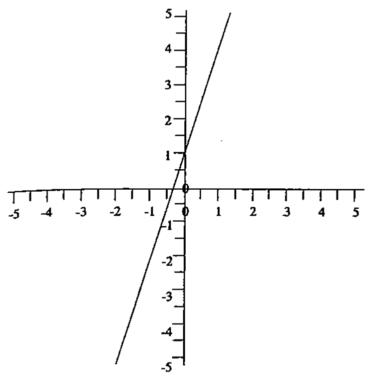


FIGURA 4

SOLUCIÓN

De acuerdo con lo anterior, la gráfica de $f(x) = 3x+1$ es una recta de pendiente 3 que intersecta el eje Y en $(0,1)$ como muestra la Figura 4.

Por otra parte, recuerde que para determinar una recta basta conocer dos de sus puntos; por tanto pueden elegirse dos valores de x distintos y determinar sus imágenes por medio de la función para trazar la gráfica de f. ■

EJEMPLO 4 ■ Gráfica de una función cuadrática

Trace la gráfica de la función $f(x)=x^2$

SOLUCIÓN

Para determinar los puntos en la gráfica de $f(x) = x^2$ se puede elaborar una tabla de valores. A continuación se dibujan los puntos en el plano cartesiano y se unen por una curva como en la figura 5:

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

■

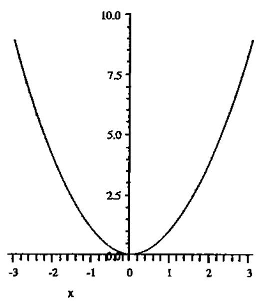


FIGURA 5

EJEMPLO 5 ■ Gráfica de una función cúbica

Trace la gráfica de la función $f(x) = x^3$

SOLUCIÓN

Para determinar los puntos en la gráfica de $f(x)=x^3$se elabora una tabla de valores y a continuación se dibujan los puntos en el plano cartesiano y se unen por una curva.

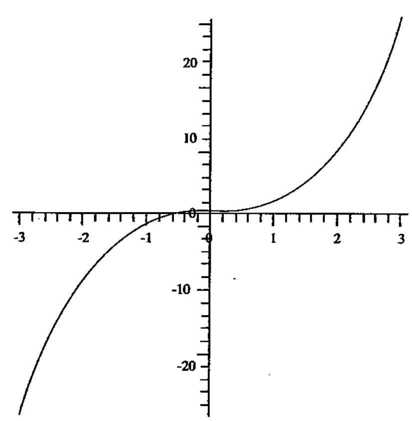


FIGURA 6

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

■

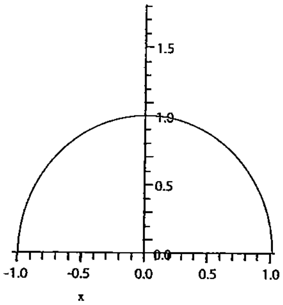


FIGURA 7

EJEMPLO 6 ■

Trace la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y determine el dominio y rango de la función.

SOLUCIÓN

Como $y=\sqrt{1-x^2}$, elevando al cuadrado ambos lados se tiene la ecuación $x^2+y^2=1$ que representa geométricamente un círculo de radio 1 y centro en el origen. Como $y\geq 0$, la gráfica de f corresponde al semicírculo.
A partir de la gráfica se obtiene: $Dom(f)=[-1,1]$ $Rang(f)=[0,1]$. ■

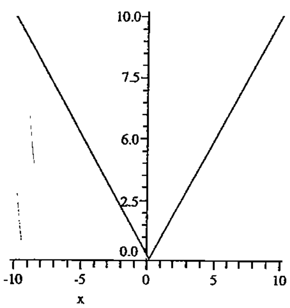


FIGURA 8

EJEMPLO 7 ■ **Función valor absoluto**

Trace la gráfica de la función valor absoluto, $f(x)=|x|$, y determine el dominio y rango de la función.

SOLUCIÓN

Aplicando la definición del valor absoluto se tiene:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Es claro que

$$Dom(f)=\mathbb{R}$$
$$Rang(f)=\mathbb{R}_{+}\cup\{0\}$$

y su gráfica está formada por dos rectas; una de pendiente positiva y otra de pendiente negativa que se intersectan en el origen. ■

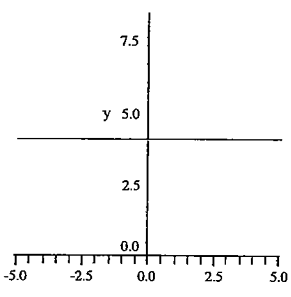


FIGURA 9

EJEMPLO 8 ■ **Funciones constantes**

Una función cuyo rango consta de un solo número se denomina función constante. En la figura 9 se muestra un ejemplo en el que $f(x)=4$ para todo $x\in\mathbb{R}$. La gráfica es una recta horizontal que corta el eje y en el punto (0,4) y $Dom(f)=\mathbb{R}$ y $Rang(f)=\{4\}$. ■

EJEMPLO 9 ■ **Función parte entera**

Se llama parte entera de un número real x al mayor entero menor o igual a x. Es decir, la parte entera de x es el número entero n si y sólo si $n\leq x<n+1$. La parte entera de x se denota por $[x]$.

La función parte entera es aquella que a cada número real le asigna, como imagen, su parte entera, $f(x)=[x]$, así, por ejemplo: $f(1.5)=[1.5]=1$ y $f(-1.5)=[-1.5]=-2$.

Para trazar la gráfica de está función observe que esta función es constante en cada intervalo cuyos extremos son números enteros consecutivos. La tabla de valores y su gráfica se muestran en la figura siguiente:

x	$f(x)=[x]$
$-2\leq x<-1$	-2
$-1\leq x<0$	-1
$0\leq x<1$	0
$1\leq x<2$	1
$2\leq x<3$	2

■

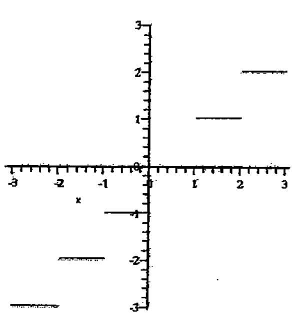


FIGURA 10

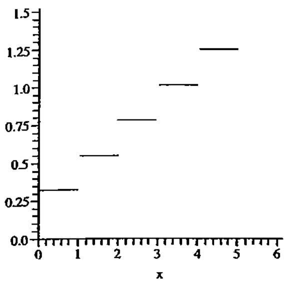


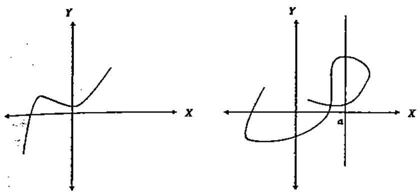
FIGURA 11

EJEMPLO 10 ■ Funciones escalonadas

Una función f se dice escalonada si es constante por intervalos. Un ejemplo conocido de función escalonada es la función de franqueo postal c que calcula el costo de enviar una carta por correo dependiendo de su peso; la tabla de valores y su gráfica se muestran a continuación.

x (onzas)	$c(x)$(dólares)
$0<x\leq 1$	0.32
$1<x\leq 2$	0.55
$2<x\leq 3$	0.78
$3<x\leq 4$	1.01
$4<x\leq 5$	1.24

■



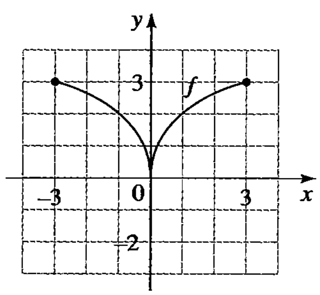
Representa la gráfica de una función
No representa la gráfica de una función

FIGURA 12

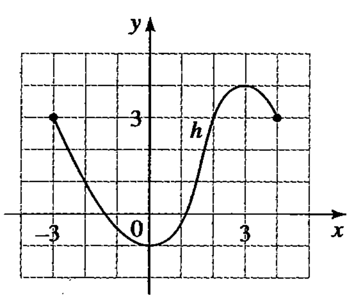
Ahora bien, tenga en cuenta la siguiente observación. La gráfica de una función real es generalmente una curva en el plano XY; es válido preguntarse: ¿Qué curvas del plano son la representación gráfica de una función y cuáles no? Esto se responde fácilmente por medio de la definición de función: "Para cada valor de x debe existir un solo valor de y"; por tanto una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical toca la curva más de una vez. Observe los ejemplos que aparecen en la columna.

4.3 EJERCICIOS

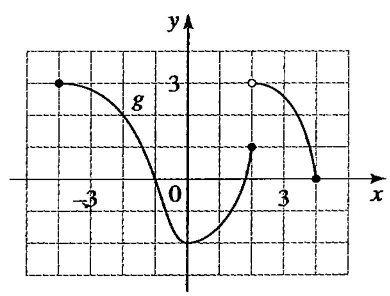
1. Se da la gráfica de la función real f.
   (a) Obtenga los valores de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(3)$.
   (b) Determine el dominio y rango de f.



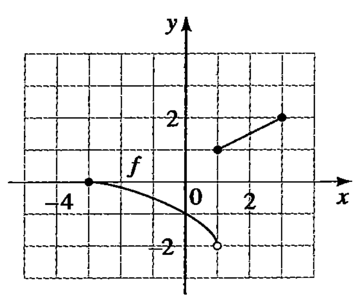
2. Se da la gráfica de una función real h.
   (a) Obtenga los valores de $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.
   (b) Determine el dominio y rango de h.



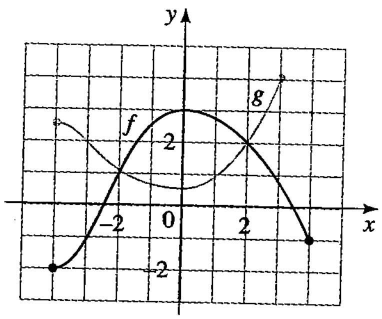
3. Se da la gráfica de una función real g.
   (a) Obtenga los valores de $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.
   (b) Determine el dominio y rango de g.



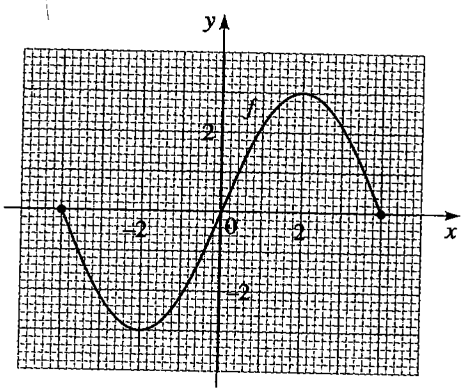
4. Se da la gráfica de una función real f.
   (a) Obtenga los valores de $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$.
   (b) Determine el dominio y rango de f.



5. Se dan las gráficas de las funciones reales f y g.
   (a) ¿Cuál es mayor, $f(0)$ o $g(0)$?
   (b) ¿Cuál es mayor, $f(-3)$ o $g(-3)$?
   (c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

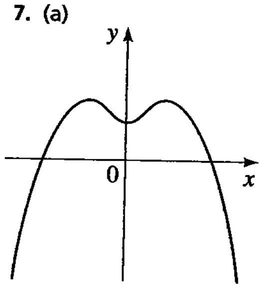


6. Se da la gráfica de una función real f.
   (a) Calcule $f(0.5)$ al decimal más cercano.
   (b) Obtenga $f(3)$ al decimal más cercano.
   (c) Determine todos los números x en el dominio de f tales que $f(x) = 1$

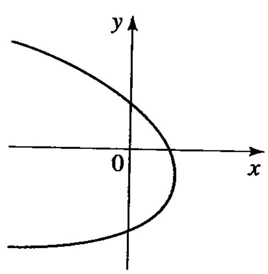


7-8 ■ Determine si cada una de las curvas es la gráfica de una función de x.

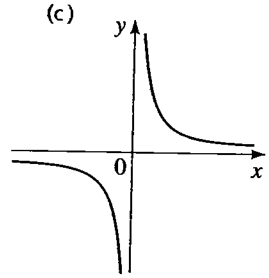
7. (a)



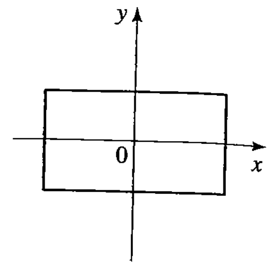
(b)



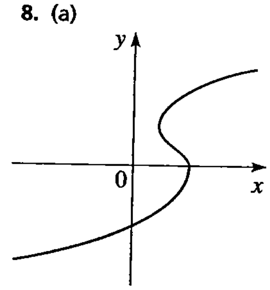
(c)



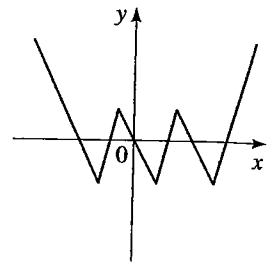
(d)



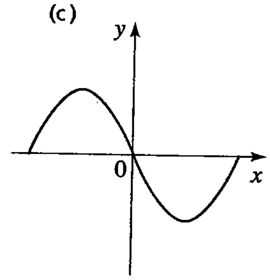
8. (a)



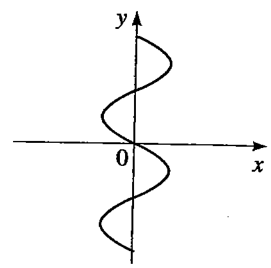
(b)



(c)

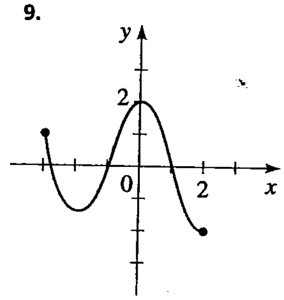


(d)

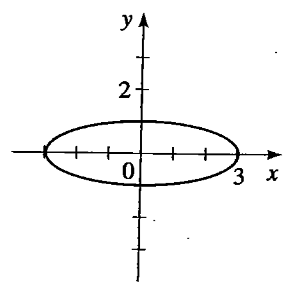


9-12 ■ Determine si la curva es la gráfica de una función de x. En caso de serlo, obtenga el dominio y el rango de la misma.

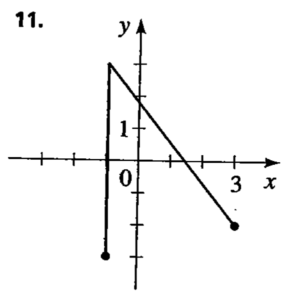
9.



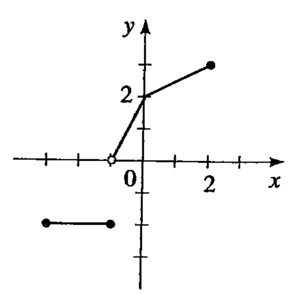
10.



11.



12.



13-20 ■ Se da una función f.
(a) Trace la gráfica.
(b) Determine el dominio.

13. $f(x) = 1 - x$

14. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$

15. $f(x) = x^2 - 4x$

16. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = \sqrt{9 - x}$

18. $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

19. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

20. $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

21-27 ■ Calcule el dominio y rango de cada una de las funciones reales dadas.

21. $f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x}}$.

22. $g(x)=\sqrt{2x-5}$.

23. $h(x)=\sqrt{x^2-9}$.

24. $s(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.

25. $t(x)=\frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$.

26. $w(x)=\sqrt{x+2-\sqrt{1-x}}$.

27. $z(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$.

28-32 ■ Determine el dominio y rango de las siguientes funciones reales:

28. $f(x) = max(x, x^2)$

29. $g(x) = \frac{x}{|x|}$

30. $r(x)=\lim_{x \to \infty} x^n$

31. $h(x) = \sum_{k=1}^{x} k$

32. $m(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k$

33. Sea f la función real definida por: $f(x)=2x+1$. Calcule $f(2)$, $f(-2)$, $f(a+b)$, $f(a)+f(b)$.

34. Sea g la función real definida por: $g(x)=|x-3|+|x-1|$. Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$. Determine todos los valores de t para los cuales $g(t+2)=g(t)$.

35-40 ■ Sea f la función real definida por: $f(x)=x^2$. En cada caso determine todos los valores de x, y, t, etc., para los que la fórmula dada es válida.

35. $f(-x)=f(x)$.

36. $f(y)-f(x)=(y-x)(y+x)$.

37. $f(x+h)-f(x)=2xh+h^2$.

38. $f(2y)=4f(y)$.

39. $f(t^2)=f(t)^2$.

40. $\sqrt{f(a)}=|a|$.

41-46 ■ Sea g la función real definida por: $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ *si* $|x|\leq 2$. Indique los valores de las variables para las cuales son válidas las siguientes igualdades:

41. $g(x)=g(-x)$.

42. $g(a-2)=\sqrt{4a-a^2}$.

43. $g(2y)=2\sqrt{1-y^2}$.

44. $g(\frac{1}{t})=\frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$.

45. $g(\frac{s}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$.

46. $\frac{1}{2+g(x)}=\frac{2-g(x)}{x^2}$.

47. Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
(a) Trace la gráfica de f.
(b) Sea $g(x)=f(2x)$. Describa el dominio de g y represéntelo gráficamente.
(c) Sea $h(x)=f(x-2)$. Describa el dominio de h y represéntelo gráficamente.
(d) Sea $k(x)=f(2x)+f(x-2)$. Describa el dominio de k y represéntelo gráficamente.

48. La gráfica de los polinomios $g(x)=x$ y $h(x)=x^3$ se cortan en tres puntos. Dibuje una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.

49. Sea $f(x)=[x]$ y $g(x)=[2x]$ (donde [ ] simboliza la función parte entera). En cada caso, dibuje la gráfica de la función h definida por:
(a) $h(x)=f(x)+g(x)$
(b) $h(x)=f(x)g(x)$
(c) $h(x) = f(x)+g\left(\frac{1}{2}\right)$
(d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g\left(\frac{x}{2}\right)$

50-55 ■ En cada caso suponga que el dominio de la función f dada es el intervalo [-2,2]. Dibuje la gráfica correspondiente a cada una.

50. $f(x)=x+[x]$.

51. $f(x)=x-[x]$.

52. $f(x)=[-x]$.

53. $f(x)=2[x]$.

54. $f(x)=[x+\frac{1}{2}]$.

55. $f(x)=[x]+[x+\frac{1}{2}]$.

56-59 ▪ En cada caso, dibuje la gráfica de la función dada en su dominio.

56. $f(x)=[\sqrt{x}]$ *para* $0\leq x\leq 10$

57. $f(x)=[x^2]$ *para* $0\leq x\leq 3$

58. $f(x)=\sqrt{[x]}$ *para* $0\leq x\leq 10$

59. $f(x)=[x]^2$ *para* $0\leq x\leq 3$

60-63 ▪ Demuestre en cada caso la propiedad indicada de la función parte entera:

60. $[x+n]=[x]+n$ *para cada entero n.*

61. $[-x]=\{-[x]$ *x es un entero* $-[x]-1$ *en otro caso.*

62. $[x+y]=[x]+[y]$ *o* $[x+y]=[x]+[y]+1$

63. $[3x]=[x]+[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]$

64-76 ▪ Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes y determine su dominio y rango.

64. $r(x)=|x+1|-|x-1|$

65. $s(t)=|x^2-5x+4|-|x^2-4|$

66. $f(x)=\begin{cases}-1x \text{ si } <3\\ x+3 \text{ si } x>3\end{cases}$

67. $g(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} \text{ si } x<1\\ x^2 \text{ si } 1\leq x<4\end{cases}$

68. $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} \text{ si } x<2\\ \sqrt{25-x^2} \text{ si } x\geq 2\end{cases}$

69. $s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3-1} \text{ si } x<0\\ -x-3 \text{ si } x>0\end{cases}$

70. $t(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} \text{ si } x<0\\ \sqrt{2x-x^2} \text{ si } 0\leq x\leq 2\\ \sqrt{x-2} \text{ si } x>2\end{cases}$

71. $r(x)=\begin{cases}2x-x^2 \text{ si } x>1\\ (x-1)^3 \text{ si } x\leq 1\end{cases}$

72. $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ si } x<3\\ \sqrt{x+3} \text{ si } x>3\end{cases}$

73. $m(x)=\begin{cases}-1-x \text{ si } x<2\\ \dfrac{x+3}{x-5} \text{ si } x>2\end{cases}$

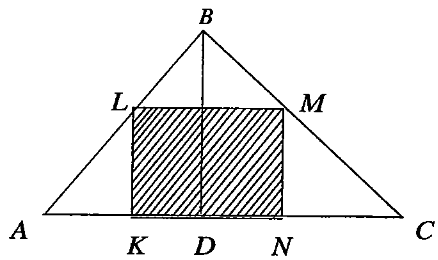
74. $j(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} \text{ si } x<2\\ x^2+3 \text{ si } x\ 2\end{cases}$

75. $p(x)=\begin{cases}0 & \text{si } |x|\leq 2\\ 3 & \text{si } |x|>2\end{cases}$.

76. $t(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3} & \text{si } |x|\leq 1\\ 1 & \text{si } |x|>1\end{cases}$.

77. Una empresa de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o fracción) y 20 centavos por cada décima de milla subsiguiente (o fracción). Exprese el costo C (en dólares) de un recorrido como una función de la distancia x (en millas) para $0<x<2$ y trace su gráfica.

78. En el triángulo ABC, cuya base es $AC=b$ y su altura $BD=h$, está inscripto un rectángulo $KLMN$, cuya altura es $NM=x$.
   (a) Exprese el perímetro P del rectángulo $KLMN$ y su área S en función de x.
   (b) Construya los gráficos de $P=P(x)$ y $S=S(x)$.



79. En el triángulo ABC, el lado $AC=6$ cm, el lado $AC=8$ cm y el ángulo $BAC=x$. Exprese $BC=a$ y el área de $ABC=S$ en función de la variable x. Construya las gráficas de las funciones $a=a(x)$ y $S=S(x)$.

80. ¿En qué conjunto E_y transforma la función f el conjunto E_x si:
   (a) $f(x)=x^2$, $E_x=\{x\in\mathbb{R}|-1\leq x<2\}$?
   (b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$, $E_x=\{x\in\mathbb{R}/-3\leq x<-1\}$?
   (c) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$, $E_x=\{x\in\mathbb{R}/0\leq x<\frac{1}{2}\}$?

81. Si la variable x recorre el intervalo $(0,1)$. ¿Qué conjunto recorre la variable y si:
   (a) $y=a+(b-a)x$ *para* a,b *en* $\mathbb{R}$?
   (b) $y=\dfrac{1}{1-x}$?
   (c) $y=\dfrac{x}{2x-1}$?
   (d) $y=\sqrt{x-x^2}$?

82. Halle los valores de x, para los cuales: 1) $f(x)=0$, 2) $f(x)>0$ y 3) $f(x)<0$, si
   (a) $f(x)=x-x^2$
   (b) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{1-x}$

83. Demuestre que si para una función lineal $f(x)=ax+b$ los valores del argumento $x=x_n$, *con* $n=1,2,\ldots$ forman una progresión aritmética, entonces los valores correspondientes de la función $y_n,=f(x_n)$, $n=1,2\ldots$ también forman una progresión aritmética.

84. Construya la gráfica de la función $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. con $ad\text{-}bc \neq 0$ y $c \neq 0$, reduciéndola a la forma $y = y_0 + \dfrac{m}{x-x_0}$. Examine el ejemplo $y=\dfrac{3x+2}{2x-3}$

85-88 ■ Obtenga una función cuya gráfica es la curva dada.

85. El segmento de recta que une a (-2,1) y (4,-6).

86. El segmento de recta que une a (-3,-2) y (6,3).

87. La mitad superior de la parábola $x + (y-1)^2 = 1$.

88. La mitad superior del círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

89. **¿Cuándo una gráfica representa una función?** Para cada entero n la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, a saber, $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ no es la de una función. ¿$x = y^3$ es la gráfica de una función? De ser así ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué enteros n la gráfica de $x = y^n$ es la de una función de x.

90. **Traslación vertical de funciones** Considere la función $f(x) = x^2$ y trace su gráfica, a continuación considere la familia de funciones $h(x) = f(x) + c = x^2 + c$ donde c es un número real dado y trace la grafica de h para diferentes valores positivos de c ¿Qué relación existe entre la gráfica de f y la grafica de las funciones h?. Considere otros ejemplos para verificar que su conclusión es correcta, si lo es demuéstrela en general. ¿Qué relación existe entre las gráficas de las funciones h y la gráfica de la función f si c es un real negativo?

91. **Traslación horizontal de funciones** Considere la función $f(x) = x^2$ y trace su gráfica, a continuación considere la familia de funciones $h(x) = f(x+a) = (x+a)^2$ donde a es un número real dado y trace la grafica de h para diferentes valores positivos de a ¿Qué relación existe entre la gráfica de f y la grafica de las funciones h?. Considere otros ejemplos para verificar que su conclusión es correcta, si lo es, demuéstrela en general. ¿Qué relación existe entre las gráficas de las funciones h y la gráfica de la función f si a es un real negativo?

92. **Reflexión de funciones** Considere la función $f(x) = x^3$ y trace su gráfica, a continuación considere la función $h(x) = f(-x)$ y trace su gráfica. ¿Qué relación existe entre la gráfica de f y la grafica de h?. Considere otros ejemplos para verificar que su conclusión es correcta, si lo es, demuéstrela en general. Defina la función $g(x) = -f(x)$ ¿Qué relación existe entre las gráficas de las funciones g y la gráfica de la función f?

93. **Contracción y dilatación vertical de funciones** ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y las gráficas de las funciones $h(x) = a\,f(x)$ cuando se consideran valores de a mayores de 1?. ¿Qué relación existe entre la grafica de la función $f(x) = x^2$ y las gráficas de las funciones $h(x) = a\,f(x)$ cuando se consideran valores de a en el intervalo (0,1)?. Considere otros ejemplos para verificar que su conclusión es correcta, si lo es, demuéstrela en general.

94. **Contracción y dilatación horizontal de funciones** ¿Qué relación existe entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y las gráficas de las funciones $h(x) = f(ax)$ cuando se consideran valores de a mayores de 1?. ¿Qué relación existe entre la grafica de la función $f(x) = x^2$ y las gráficas de las funciones $h(x) = f(ax)$ cuando se consideran valores de a en el intervalo (0,1)?. Considere otros ejemplos para verificar que su conclusión es correcta, si lo es, demuéstrela en general.

4.4 TIPOS DE FUNCIONES REALES

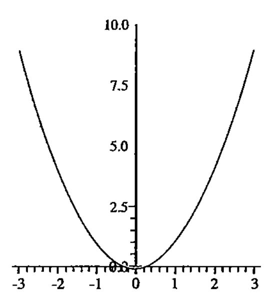


FIGURA 1

■ **Definición 1** Una función real f se dice **par** si para cualquier $x \in m(f)$ se tiene que $-x \in m(f)$ y $f(x) = f(-x)$. Note que si f es una función par los puntos $(x,f(x))$ y $(-x,f(x))$ pertenecen a la gráfica de f, por tanto, la representación gráfica de una función par es una curva simétrica respecto al eje Y. Considere la función $f(x)=x^2$. $Dom(f) = \mathbb{R}$; luego para cada $x \in m(f)$ se tiene que $-x \in m(f)$, además $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

Por tanto f es una función par, hecho que se observa en la simetría con respecto al eje Y de su gráfica.

■ **Definición 2** Una función real f se dice **impar** si para cualquier $x \in m(f)$ se tiene que $-x \in m(f)$ y $f(-x) = -f(x)$. Si f es una función impar los puntos $(x,f(x))$ y $(-x,-f(x))$ pertenecen a la gráfica de f, por tanto la representación gráfica de una función impar es una curva simétrica respecto al origen ya que f satisface: $f(0) = 0$.

Considere la función $f(x) = x^3$. $Dom(f) = \mathbb{R}$ luego para cada $-x \in m(f)$ se tiene que $-x \in Dom(f)$, además $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

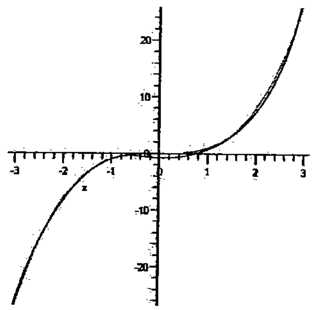


FIGURA 2

Por tanto f es una función impar, lo cual se observa en la simetría con respecto al origen de su gráfica.

EJEMPLO 1 ■ Determinación de paridad

Determine si las funciones dadas son pares o impares o ninguna de las dos:

$$\text{(a) } f(x)=(x^5-3x)^4;\ \text{(b) } g(x)=\frac{1}{(x-3)^3};\ \text{(c) } h(x)=x^3-5x$$

SOLUCIÓN

(a) $Dom(f)=\mathbb{R}$ entonces para cada $x\in Dom(f)$ se tiene que $-x\in Dom(f)$ y

$$f(-x)=((-x)^5-3(-x))^4=(-x^5+3x)^4=(-1)^4(x^5-3x)^4=f(x)$$

Por tanto f es una función par.

(b) $Dom(g)=\mathbb{R}-\{3\}$ entonces para cada $x\in m(g)$ se tiene que $-x\in m(g)$ y

$$g(-x)=\frac{1}{(-x-3)^3}=-\frac{1}{(x+3)^3}\neq g(x)$$

La función g no es par ni impar.

(c) $Dom(h)=\mathbb{R}$; entonces para cada $x\in m(h)$ se tiene que $-x\in m(h)$ y

$$h(-x)=(-x)^3+5x=-(x^3-5x)=-h(x)$$ ■

Por tanto h es una función impar.

Con un artificio simple se puede demostrar que cualquier función real es la suma de una función par más una función impar. En efecto, siendo f una función real,

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Sean $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Puesto que

$$h(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=h(x)$$

y

$$g(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-g(x)$$

se tiene que h es una función par, g es una función impar y $f(x)=h(x)+g(x)$.

■ **Definición 3** Una función real f se dice **periódica** de periodo p, si p es el número real positivo más pequeño tal que para cada $x\in\mathbb{R}$, $f(x+p)=f(x)$.

La gráfica de una función periódica f se repite por intervalos, como se puede observar en los ejemplos siguientes.

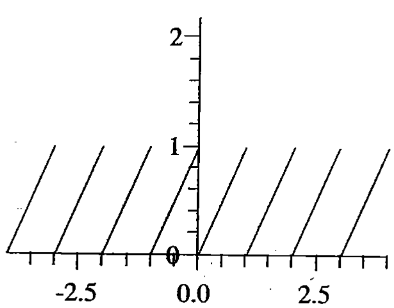


FIGURA 3

EJEMPLO 2 ■ Función de período 1

La función $f(x)=x-[x]$ es una función periódica de periodo 1, puesto que:

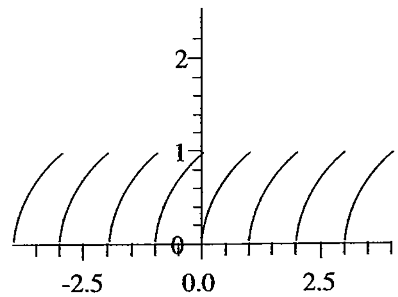
$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=(x+1)-([x]+1)=x-[x]=f(x).$$

Observe que no existe un número menor que 1 tal que $f(x+p)=f(x)$, ya que si existiera $f(x+p)=f(x)\Rightarrow(x+p)-[x+p]=x-[x]\Rightarrow p=[x+p]-[x]\in\mathbb{Z}$, lo cual no es posible.

Esta función es conocida como la función mantisa y su representación gráfica aparece en la figura 3. ■

EJEMPLO 3 ■ Otra función de período 1

La función $g(x)=\sqrt{x-[x]}$ es una función periódica de periodo 1 cuya representación gráfica es:



EJEMPLO 4 ■ Ejemplos de funciones periódicas

Las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente son ejemplos de funciones periódicas de periodo 2π, 2π, π y π, respectivamente. ■

Las funciones periódicas tienen aplicaciones importantes pues muchos fenómenos naturales o físicos son de tipo periódico.

Definición 4 Una función real f se dice:

1. **Creciente** en un intervalo [a,b], si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$ en $[a,b]$. Para demostrar que una función f es creciente en un intervalo $[a,b]$, es necesario verificar para cada $x_1,x_2 \in$ l$[a,b]$ la proposición:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. **Estrictamente creciente** en un intervalo $[a,b]$, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en $[a,b]$.

3. **Decreciente** en un intervalo $[a,b]$, si $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$ en $[a,b]$.

   Para demostrar que una función f es decreciente en un intervalo $[a,b]$, es necesario verificar para cada $x_1,x_2 \in [a,b]$ la proposición:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

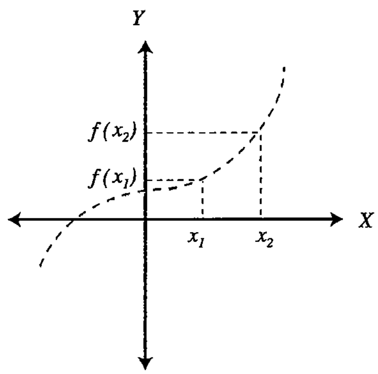
4. **Estrictamente decreciente** en un intervalo [a,b], si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en $[a,b]$.

5. ***Monótona*** en un intervalo $[a,b]$, si f es creciente o decreciente en $[a,b]$.

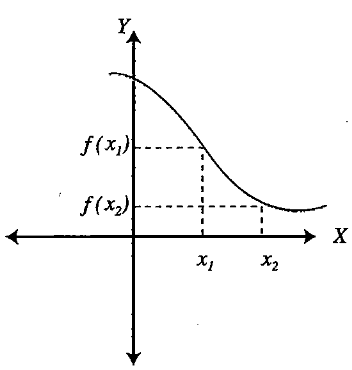
Observe que una función creciente es una función que conserva el orden, en el sentido de que si dos números del dominio están en cierto orden, las imágenes de estos dos números por medio de la función se encontrarán en el mismo orden (véase la figura 4a).

Análogamente, una función decreciente es una función que invierte el orden, en el sentido de que si dos números del dominio están en cierto orden, las imágenes de estos dos números por medio de la función se encontrarán en orden contrario (véase la figura 4b).

En los modelos económicos, una función de oferta normal es creciente; es un hecho comprobado, por ejemplo, que si al agricultor no le pagan bien su cosecha, no siembra. Es decir, a incrementos negativos del precio corresponden incrementos negativos de la oferta. En términos funcionales, si $x_1-x_2< 0$ entonces $f(x_1)$ - $f(x_2)< 0$, que es la definición de una función estrictamente creciente. Por otra parte, una función de demanda



(a)

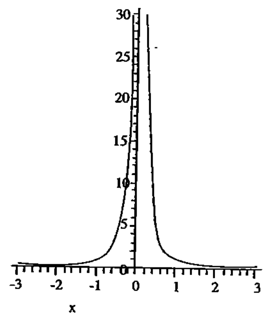


(b)

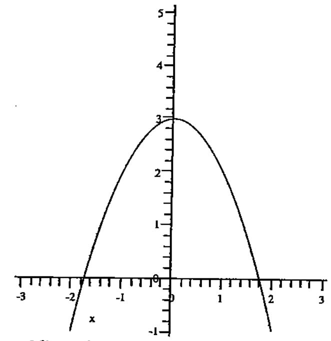
FIGURA 4

normal es decreciente; es simple observar que si se rebaja el precio de un artículo, en general aumenta su demanda. Esto es, a incrementos negativos del precio corresponden incrementos positivos en la demanda: si $x_1 - x_2 < 0$ entonces $f(x_1) - f(x_2) > 0$, que no es otra cosa que afirmar que la función es decreciente.

En general, la monotonía de una función no es común en todo su dominio, pero sí lo es en parte del mismo. El determinar los intervalos donde una función es creciente o decreciente es de vital importancia ya que si, por ejemplo, una función está definida en un intervalo $[a,b]$ y cuya gráfica no sufre interrupciones, es estrictamente creciente hasta un valor $x=c$ en el interior de $[a,b]$ y después de él es estrictamente decreciente, la función tendrá un valor máximo (relativo) en el punto $(c,f(c))$; análogamente, si es estrictamente decreciente hasta un valor $x=c$ en el interior de $[a,b]$ y después de él es estrictamente creciente, la función tendrá un valor mínimo (relativo) en el punto $(c,f(c))$.



La gráfica de la función se interrumpe. No tiene un valor máximo



La gráfica de la función es una curva continua. Tiene un valor máximo en x = 0

El interés de determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función no es meramente un interés gráfico; está íntimamente relacionado con problemas de optimización de funciones.

EJEMPLO 5 ■ Demostración de crecimiento

Demostrar que la función $f(x)=5x+3$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

SOLUCIÓN

Si x_1, x_2 son números reales cualesquiera, se tiene que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 + 3 < 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad ■$$

EJEMPLO 6 ■ Determinación de intervalos de monotonía

Determinar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

SOLUCIÓN

(a) Si $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, se tiene que:

$$0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 3 < x_2^2 + 3 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+3} > \frac{1}{x_2^2+3} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Lo que prueba que f es estrictamente decreciente en $[0,+\infty)$.

(b) Si $x_1 < 0$ y $x_2 < 0$, se tiene que:

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 3 > x_2^2 + 3 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+3} < \frac{1}{x_2^2+3} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

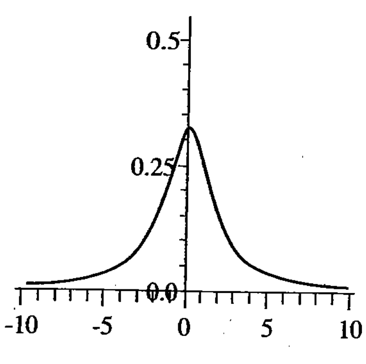


FIGURA 5

Lo que prueba que f es estrictamente creciente en $(-\infty,0)$.

Al realizar la gráfica de f (ver figura 5) se observa que en $x=0$ la función f tiene un valor máximo. ■

4.4 EJERCICIOS

1-8 ■ Determine si la función f es par, impar o ninguna de las dos. Si f es par o impar, utilice la simetría para trazar su gráfica.

1. $f(x)=|x|^3$.
2. $f(x)=x^2+x$.
3. $f(x)=x^3-x$.
4. $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$.
5. $f(x)=x^4-2x^2$.
6. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.
7. $f(x)=(x^5-3x)^4$.
8. $f(x)=\dfrac{|x|^3}{x}$.

9-21 ■ Determine el dominio y rango de cada uno de las funciones dadas. Trace su gráfica. ¿Cuáles de estas funciones son pares? ¿Cuáles impares? ¿Cuáles son periódicas?

9. $f(x)=x-|x|$.
10. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.
11. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.
12. $f(x)=4-\sqrt{9-x^2}$.
13. $f(x)=\max(x,x^2)$.
14. $f(x)=(\sqrt{x})^2$.
15. $f(x)=\sqrt{x^2}$.
16. $f(x)=\sin|x|$.
17. $f(x)=|\sin x|$.
18. $f(x)=\sqrt{\cos x}$
19. $f(x)=x\cos x$.
20. $f(x)=2x-[x]$.
21. $f(x)=\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}[2x]-\frac{1}{2}[1-2x]$.

22-27 ■ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada.

22. $f(x)=x^2-10x+29$.
23. $f(x)=3-x+2x$.
24. $f(x)=|x|+x$.
25. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.
26. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.
27. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & \text{si } 3\le x<4\\ 1-x^2 & \text{si } 4\le x<6\\ 10-x & \text{si } 6\le x\le 7\end{cases}$

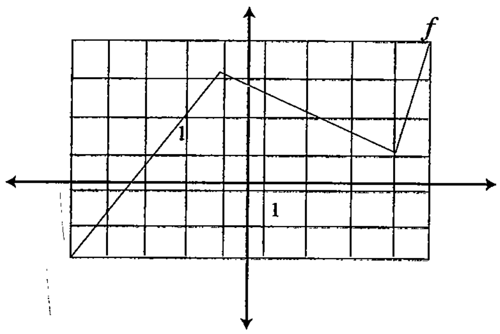
28-37 ■ Suponga que se da la gráfica de la función f. Describa cómo se puede obtener la gráfica de g a partir de la de f. (Para las deducciones tome la gráfica de varias funciones conocidas como $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ y $f(x)=\frac{1}{x}$.)

28. $g(x)=f(x)-4$.
29. $g(x)=f(x-4)$.
30. $g(x)=f(x)+5$.
31. $g(x)=f(x+5)$.
32. $g(x)=\frac{1}{3}f(x)$.
33. $g(x)=3f(x)$.
34. $g(x)=-f(x)$.
35. $g(x)=f(-x)$.
36. $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

37. $g(x) = f(2x)$.

38. Se da la gráfica de f. Trace la de cada una de las funciones siguientes:

(a) $g(x) = f(x-2)$.
(b) $h(x) = f(x)+2$.
(c) $t(x) = f(-x)$.
(d) $s(x) = -f(x)$.
(e) $w(x) = \frac{1}{2}f(x)$
(f) $r(x) = 3 + f(x)$



39. Utilice la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ para trazar la de cada una de las funciones dadas:

(a) $g(x) = -\frac{1}{x}$.
(b) $h(x) = \frac{1}{x-1}$.
(c) $t(x) = \frac{2}{x+2}$.
(d) $s(x) = 1 + \frac{1}{x-3}$.

40-46 ■ Trace la gráfica de cada una de las funciones dadas. Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule, si es posible, el valor máximo o mínimo de la función.

40. $f(x) = 2x - x^2$

41. $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$.

42. $f(x) = 1 - 6x - x^2$.

43. $f(x) = x^3 + 1$ si $-1 \le x \le 3$.

44. $f(x) = \frac{1}{x}$ si $-1 \le x \le 3$.

45. $f(x) = x - x^2$ si $-1 \le x \le 3$.

46. $f(x) = \sqrt{x+3}$ si $0 \le x \le 3$.

47. Sea f una función definida en un intervalo (a,b) cuya gráfica es continua (no se interrumpe) en todo el intervalo y $c \in (a,b)$.

(a) Si f es creciente en el intervalo (a,c) y decreciente en (c,b) demuestre que $\max\{f(x) / a < x < b\} = f(c)$.

(b) Si f es decreciente en el intervalo (a,c) y creciente en (c,b) demuestre que $\min\{f(x) / a < x < b\} = f(c)$.

(c) Utilice (a) y (b) para demostrar que el valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurre en $x = -\frac{b}{2a}$; si $a > 0$; entonces el valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ y si a < 0 el valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

48. Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

49. La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo ve el espectador. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad determinó que si la efectividad E se mide en una escala del 0 al 10, entonces $E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$, donde n es el número de veces que un espectador ve un cierto comercial. Para que éste tenga una efectividad máxima, ¿Cuántas veces deberá verlo un espectador?

50. Obtenga dos números cuya diferencia es 100 y cuyo producto sea lo mas pequeño posible.

51. Determine dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de sus cuadrados es mínima.

52. Entre todos los cuadrados que tienen un perímetro de 20 cm, determine las dimensiones de aquel que tiene la mayor área posible.

53. Un granjero tiene 2,400 m de cerca y desea cercar un campo rectangular que está a lo largo de un río recto. No necesita cerca a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

54. Determine el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en un triangulo rectángulo con catetos 3 cm y 4 cm, si dos lados del rectángulo están sobre los catetos del triángulo

55. Un estudiante fabrica y vende collares en la playa durante el verano. El material para cada collar le cuesta 200 pesos y ha estado vendiendo aproximadamente 20 collares por día a 600 pesos cada uno. Ahora se ha estado preguntando si debe o no subir el precio, por lo que hace una encuesta y descubre que por cada 50 pesos de aumento en el precio perderá dos ventas al día. ¿Cuál es el precio que debe establecer para los collares con el fin de maximizar las utilidades?

56. Una librería puede pedir cierto libro a un costo de 3 dólares el ejemplar. La librería ofrece el libro a 15 dólares el ejemplar. A este precio vende 200 ejemplares al mes. La librería planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada reducción de un dólar en el precio, se venderán 20 libros más al mes. Exprese la utilidad mensual de la librería por la venta de este libro como una función del precio de venta, dibuje su gráfica y calcule el precio óptimo de venta.

57. Un cultivador de frutas cítricas estima que si planta 60 naranjos, la producción media por árbol será de 400 naranjas. La producción media disminuirá 4 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el mismo número de hectáreas. Exprese la producción total del cultivador como una función del número de árboles adicionales plantados, trace su gráfica y calcule el número total de arboles que el cultivador debe plantar para maximizar la producción.

58. El departamento de recreación de la ciudad pide a una compañía 2,500 tablas de espuma de poliestireno destinadas a su programa de natación del verano. La compañía posee varias máquinas, cada una de las cuales puede producir 30 tablas por hora. El costo de poner en marcha las máquinas para producir el pedido especial es de 11,000 pesos por máquina. Una vez que las máquinas se ponen en marcha, la operación se automatiza por completo y pueden ser vigiladas por un solo supervisor de producción que gana 10,750 pesos por hora. Exprese el costo de producir las 2,500 tablas como una función del número de máquinas utilizadas, trace la gráfica y calcule el número de máquinas que la compañía debe utilizar para minimizar el costo.

4.5 ÁLGEBRA DE FUNCIONES

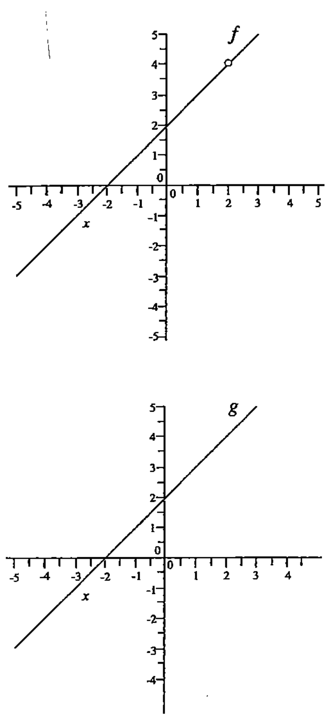


FIGURA 1

La manera como se operan las funciones depende del álgebra de los conjuntos de definición de la misma, si, por ejemplo, se consideran funciones reales es posible aprovechar la estructura de cuerpo de los números reales para definir la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.

Al querer introducir un álgebra de funciones, lo primero que es conveniente aclarar es el concepto de igualdad. Intuitivamente dos funciones serán iguales si se comportan igual, esto es:

Definición 1 Dadas f y g funciones de A en B, diremos que $f=g$ si y sólo si satisfacen las dos condiciones:

1. $Dom(f) = Dom(g) = C$
2. $f(x) = g(x)$ para todo $x \in C$.

Por ejemplo, considere las funciones reales: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=x+2$.

$f \neq g$ ya que $Dom(f) = \mathbb{R}-\{2\}$ y $Dom(g) = \mathbb{R}$, pero para todo $x \neq 2$ se tiene que

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2.$$

La diferencia entre estas dos funciones es sólo un punto: mientras la gráfica de g es una recta, la gráfica de f es la misma recta salvo que tiene un agujero en el punto (2,4).

OPERACIÓN CON FUNCIONES REALES

Sean f y g dos funciones reales. Se pueden construir nuevas funciones a partir de f y g por adición, multiplicación o división de sus valores, de la siguiente manera:

Suma

$$\begin{aligned} f+g:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f+g)(x)=f(x)+g(x) \end{aligned}$$

Note que:

$x \in Dom(f+g)$ si y solo si $x \in Dom(f)$ y $x \in Dom(g)$, esto es:

$$Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Producto

$$\begin{aligned} fg : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (fg)(x) = f(x)g(x) \end{aligned}$$

Análogamente al caso de la suma:

$x \in Dom(fg)$ si y sólo si $x \in Dom(f)$ y $x \in Dom(g)$, esto es:

$$Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Cociente

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

En este caso,

$x \in Dom(\frac{f}{g})$ si y sólo si $x \in Dom(f)$ y $x \in Dom(g)$ y $g(x) \neq 0$; así:

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = [Dom(f) \cap Dom(g)] - \{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$$

Es importante que usted trate de construir estas nuevas funciones a partir de las gráficas de f y g, para que observe que los valores de estas nuevas funciones se obtienen con la operación puntual (punto a punto) de los valores de f y g. La gráfica siguiente ilustra este hecho para la función suma:

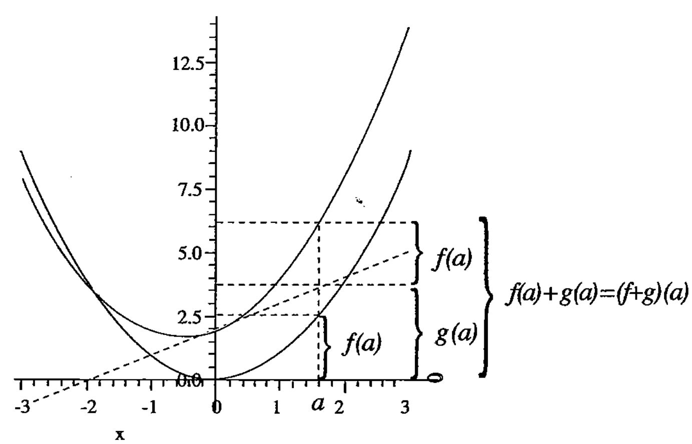


FIGURA 2

EJEMPLO 1 ■ Función suma, producto, resta y cociente

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Hallar las funciones $f+g$, fg, $f-g$, $\frac{f}{g}$ y calcular sus dominios.

SOLUCIÓN

$Dom(f)=\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $Dom(g)=\mathbb{R}-\{0\}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}=\frac{x\sqrt{x}+1}{x}$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}}=x\sqrt{x}$$

Para el cálculo del dominio se tiene:

$$Dom(f+g)=Dom(fg)=Dom(f)\cap Dom(g)=\ \mathbb{R}_+ .$$

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)=[Dom(f)\cap Dom(g)]-\{x\in \mathbb{R} \,/\, g(x)=0\}$$

Como $g(\mathrm{x}) \neq 0$ para cada x en su dominio, entonces

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)=\ \mathbb{R}_+ .$$

■

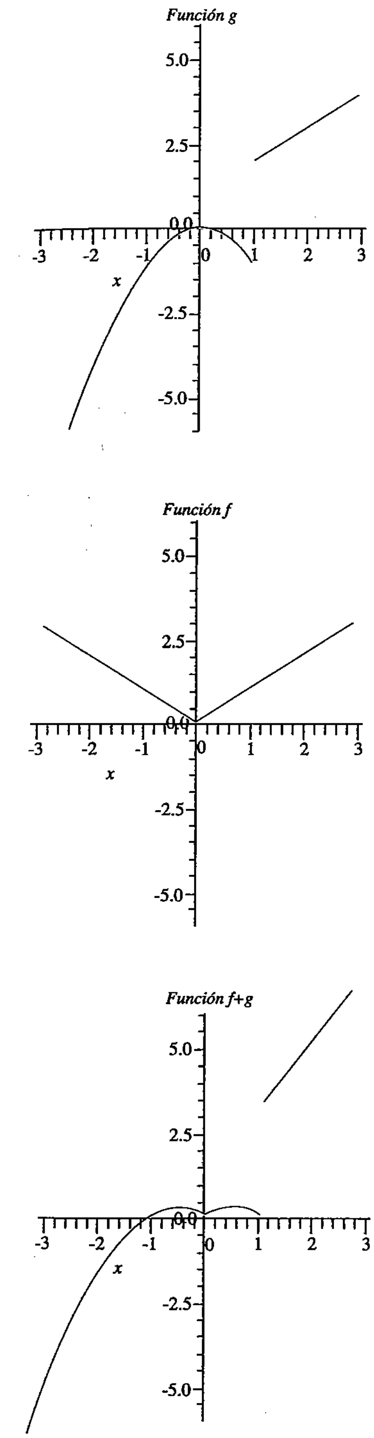


FIGURA 3

EJEMPLO 2 ■ Determinación de imágenes

Dadas las funciones $f(x)=|x|$ y $g(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \geq 1 \\ -x^2 \text{ si } x<1 \end{cases}$

(a) Determine $(f+g)(3)$, $(fg)(3)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

(b) Determine la función $f+g$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN

(a) $(f+g)(3)=f(3)+g(3)=|3|+(3+1)=7,$

$(fg)(3)=f(3)g(3)=|3|(3+1)=12$

$$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=|3|+(3+1)=7,$$

$$(fg)(3)=f(3)g(3)=|3|(3+1)=12$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{3}{4}$$

(b) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x\geq 1 \\ x^2 \quad \text{si } x<1 \end{cases}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\geq 1 \\ x-x^2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ -x-x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

■

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Definición 2 Sean $f:A \to B$ y $g:B \to C$ dos funciones, se define la función $g \circ f:A \to C$, llamada la composición de f con g, por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$g \circ f$ se lee "f compuesto g".

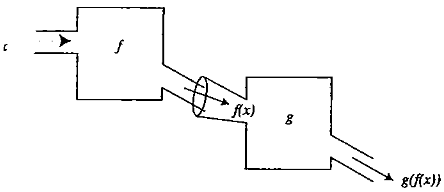


FIGURA 4

La función $g \circ f$ (f compuesto g) se obtiene aplicando primero la función f y a continuación la función g. Por lo tanto, componer funciones significa aplicarlas sucesivamente según se indica en la figura 4 que aparece en la columna lateral:

Puede observarse que para componer funciones, el conjunto de llegada de la función que se aplica primero debe coincidir con el conjunto de partida de la segunda. La condición que deben satisfacer las dos funciones para que exista $g \circ f$ es:

$$Rang(f) \subseteq Dom(g).$$

El dominio de $g \circ f$ es entonces:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in A \,/\, x \in Dom(f) \wedge f(x) \in Dom(g)\}$$

En el caso en que $f:A \to A$ y $g:A \to A$, se tiene que tanto $g \circ f$ como $f \circ g$ existen; resulta natural preguntarse si las funciones, $g \circ f$ y $f \circ g$ son iguales. Para responder a esta pregunta, piense en la siguiente situación; suponga que f es la función que empaca un producto determinado en la cual entra el producto y sale envuelto en papel y g la función que etiqueta, entran productos y salen etiquetados. ¿Será lo mismo primero empacar el producto y después etiquetarlo, que primero etiquetarlo y después empacarlo? Por supuesto que no.

EJEMPLO 3 ■ Determinación de $g \circ f$ y $f \circ g$

Sean f y g las funciones reales definidas por: $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+1$.

Determinar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$. ¿Son $g \circ f$ y $f \circ g$ funciones iguales?

SOLUCIÓN

Primero observe que $Dom(f)=Dom(g)=\mathbb{R}$, $Rang(f) \subseteq Dom(g)$ y $Rang(g) \subseteq Dom(f)$,, lo cual implica que las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ existen.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

lo que muestra que:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

EJEMPLO 4 ■ Comprobación de $g \circ f \neq f \circ g$

Sean f y g las funciones reales definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

Determinar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$. ¿Son $g \circ f$ y $f \circ g$ funciones iguales?

SOLUCIÓN

Como $Dom(g)=\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $Rang(f)=\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ se tiene que $g \circ f$ existe:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$ Por otro lado, $Dom(f)=\mathbb{R}$ y $Rang(g) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ luego $Rang(g) \subseteq Dom(f)$ por tanto $f \circ g$ existe y

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$
$$Dom(f \circ g) = \mathbb{R}+\cup\{0\}$$

Lo que muestra que:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

EJEMPLO 5 ■ Determinación de $g \circ f$ y $f \circ g$

Sean f y g las funciones reales definidas por: $f(x)=|x|$ y $g(x)=x^2+3x-1$.

(a) Determinar las funciones $g \circ f$ y trazar su gráfica.

(b) Determinar la función $f \circ g$ y trazar su gráfica.

SOLUCIÓN

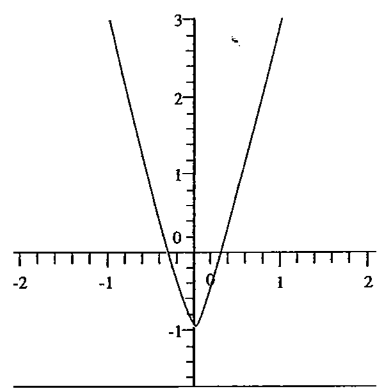
(a) $Rang(f)=R+\cup\{0\}$, $Dom(g)=R$; por tanto $Rang(f)\subseteq Dom(g)$ y la función $g \circ f$ existe.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |x|^2 + 3|x| - 1$$

Resolviendo el valor absoluto se obtiene:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2+3x-1 \text{si } x \geq 0 \\ x^2-3x-1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $g \circ f$ está formada por dos parábolas que se unen en 0.



(b) Para determinar el rango de la función g, observe que

$$x^2+3x-1 = (x^2+2(\frac{3}{2})x+\frac{9}{4})-\frac{9}{4}-1 = (x+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}$$

La función g es una parábola que tiene su punto mínimo en $(-\frac{3}{2},-\frac{13}{4})$,, por tanto $Rang(g)=[-\frac{13}{4},+\infty)$. Como $Dom(f) = \mathbb{R}$ se cumple que $Rang(g) \subseteq Dom(f)$ y de este modo se concluye que la función $f \circ g$ existe.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=|x^2+3x|$$

Aplicando la definición del valor absoluto se obtiene:

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} x^2+3x-1 \text{ si } x^2+3x-1 \geq 0 \\ -x^2-3x+1 \text{ si } x^2+3x-1 < 0 \end{cases}$$

Para determinar completamente la función f o g se debe encontrar el conjunto solución de la desigualdad:

$$x^2+3x-1\geq 0$$

Como

$$x^2+3x-1=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}=(x+\frac{3-\sqrt{13}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{13}}{2})$$

se tiene que

$$x^2+3x-1\geq 0$$

si y sólo si:

$$x\in(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}]\cup[\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty)$$

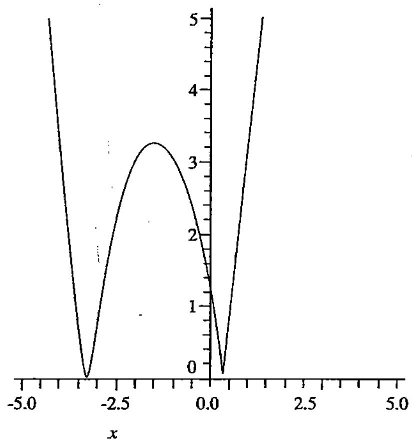


FIGURA 5

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} x^2+3x-1 & \text{si } x\in\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right) \\ -x^2-3x-1 & \text{si } x\in\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

La gráfica de f o g se ve en la figura 5.

Teorema 1 Cualesquiera sean las funciones $f{:}A\to B,\ g{:}B\to C$ y $h{:}C\to D$ se tiene que

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

DEMOSTRACIÓN:

$$Dom(h\circ(g\circ f))=Dom((h\circ g)\circ f),$$

en efecto,

$$\begin{aligned} Dom(h\circ(g\circ f)) &= \{x\in A/\, x\in Dom(g\circ f)\wedge(g\circ f)(x)\in Dom(h)\} \\ &= \{x\in A/x\in Dom(f)\wedge f(x)\in Dom(g)\wedge g(f(x))\in Dom(h)\} \\ &= \{x\in A/\, x\in Dom(f)\wedge f(x)\in Dom(h\circ g)\} \\ &= Dom((h\circ g)\circ f)). \end{aligned}$$

Además, para cada $x\in Dom(h\circ(g\circ f))$ se tiene:

$$\begin{aligned} [h\circ(g\circ f)](x) &= h((g\circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h\circ g)(f(x) \\ &= [(h\circ g)\circ f](x) \end{aligned}$$

Por tanto $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

■ **Definición 2** Una función $f: A \to B$ se dice **inyectiva ó 1 a 1** si para cada $a,b \in Dom(f)$ se tiene que

$$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$$

o equivalentemente

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

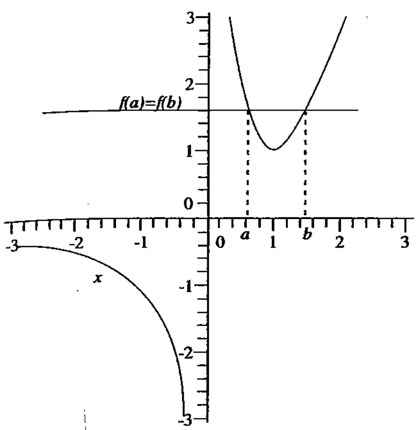


FIGURA 6

En otras palabras, una función $f: A \to B$ es inyectiva si no hay dos elementos en el dominio de f que tengan la misma imagen.

Una función f no será inyectiva si existen dos elementos en *Dom(f)* distintos para los cuales f(a)=f(b). Por tanto, f no es inyectiva si

$$f(a)=f(b) \text{ y } a \neq b.$$

Si se tiene la gráfica de la función f y existe una recta horizontal que intersecte la gráfica de f en dos puntos distintos, entonces f no es una función inyectiva, tal cual se muestra en la siguiente figura 6, ya que un y sería imagen de dos valores distintos de x.

EJEMPLO 6 ■ Demostración de inyectividad

Sea f la función real definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^3-8}$. Demostrar que f es una función inyectiva.

SOLUCIÓN

Dom(f)=R-{2}. Para cada $a,b \in Dom(f)$,

$$f(a)=f(b) \Rightarrow \frac{1}{a^3-8}=\frac{1}{b^3-8} \Rightarrow a^3-8=b^3-8 \Rightarrow a^3=b^3 \Rightarrow a=b$$

Por tanto f es una función inyectiva.

EJEMPLO 7 ■ ¿Es f inyectiva?

Sea f la función real definida por $f(x)=|x|$. ¿Es f una función inyectiva?

SOLUCIÓN

Puesto que

$$f(-1)=f(1) \text{y} -1 \neq 1$$

se tiene que f no es inyectiva.

EJEMPLO 8 ■ Clasificación de una función par

Muestre que toda función real par no es inyectiva.

SOLUCIÓN

Si f es una función par, x y $-x$ pertenecen al dominio de f y

$$f(-x)=f(x) \text{ y } -x \neq x.$$

Lo cual demuestra que f no es inyectiva.

■ **Definición 3** Una función $f{:}A \to B$ se dice **sobreyectiva o sobre** si

$$Rang(f)=B.$$

Esto significa que todo elemento y del conjunto B es la imagen de al menos un elemento x de A.

EJEMPLO 9 ■ Determinación de sobreyectividad

Sea f la función definida de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ por $f(x)=5x$. ¿Es f una función sobreyectiva?

SOLUCIÓN

f no es una función sobreyectiva ya que

$$Rang(f) \neq \mathbb{Z}$$

En efecto, $3 \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{Z}$ se tiene $f(x) = 5x \neq 3$.

Observe que con la definición que se ha dado una función siempre es sobreyectiva en su rango. Es decir, la sobreyectividad depende exclusivamente de la elección del conjunto de llegada que define la función. Si el conjunto de llegada es el rango de la función, la función es sobreyectiva. Si el conjunto de llegada tiene algún elemento que no pertenece al rango, la función no es sobreyectiva.

Además, demostrar sobreyectividad en un conjunto significa demostrar que todo elemento de ese conjunto tiene una preimagen en el dominio. En cambio, para demostrar que una función no es sobreyectiva en un conjunto, basta con exhibir un elemento del conjunto que no tenga preimagen en el dominio. ■

■ **Definición 4** Una función $f{:}A \to B$ se dice **biyectiva o una biyección** si ella es inyectiva y sobreyectiva.

EJEMPLO 10 ■ Determinación de biyectividad

Sea f la función definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ por $f(x)=x+1$. ¿Es f una biyección?

SOLUCIÓN

Para determinar si una función f es una biyección se deben verificar dos cosas:

(a) f es inyectiva, y

(b) f es sobreyectiva.

Como para cada $n,m \in N$ se tiene

$$f(n)=f(m) \Rightarrow n+1=m+1 \Rightarrow n=m$$

f es inyectiva. Además, como

$$Rang(f)=N$$

f es sobreyectiva y por tanto f es biyectiva. ■

EJEMPLO 11 ■ Función biyectiva

Sea f la función real definida por $f(x)=x^2$. ¿Es f una biyección?

SOLUCIÓN

Como f es una función par, f no es inyectiva y por tanto f no es una función biyectiva.

Teorema 2 La composición de dos funciones inyectivas, cuando existe, es una función inyectiva.

DEMOSTRACIÓN:
Sea $f{:}A \to B$ y $g{:}B \to C$ funciones inyectivas. Veamos que $g \circ f$ es inyectiva. Sean $a, b \in Dom(g \circ f)$,

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \quad \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b))$$
$$\Rightarrow f(a) = f(b) \text{ (puesto que}$$
$$g \textit{ es inyectiva}) \Rightarrow a = b \text{ (por ser } f \textit{ inyectiva})$$

Teorema 3 La composición de dos funciones sobreyectivas, cuando existe, es una función sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN: Ejercicio

Teorema 4 La composición de dos funciones biyectivas, cuando existe, es una función biyectiva.

DEMOSTRACIÓN: Ejercicio

■ **Definición 5** Sea f una función de A en B y $D \subseteq A$. La función g de D en B definida para cada $x \in D$ por:

$$g(x) = f(x)$$

se denomina **restricción** de f a D.

Esta función se denota por:

$$g = f|_D$$

Considere la función real $f(x) = |x|$. Una restricción g de f es la función:

$$\begin{array}{rcl} f: A & \to & B \\ x & \longmapsto & T = f(x) \end{array}$$

La cual se denota por:

$$g = f|_{R_+}.$$

Observe que cualquier restricción de una función inyectiva es inyectiva. En cambio, el recíproco es falso, y es común buscar restricciones inyectivas de funciones que no son inyectivas.

EJEMPLO 12 ■ Búsqueda de restricciones

Encuentre una restricción biyectiva de la función real f definida por $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN

Note que si $a, b \in \mathbb{R}_+$ se tiene que:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b.$$

Sea $g{:}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por:

$$g(x) = x^2.$$

y como $Rang(g)=$ $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$ $_+$, se tiene que g es biyectiva.

FUNCIONES IDENTIDADES

Si $f{:}A \to B$ es una función, existen dos funciones

$$\begin{array}{ll} id_A{:}A \longrightarrow A & id_B{:}B \longrightarrow B \\ \quad x \longmapsto id_A(x)=x & \quad x \longmapsto id_B(x)=x \end{array}$$

tales que:

$$f \circ id_A = f \text{ y } id_B \circ f = f$$

Estas funciones se denominan funciones identidades. Observe que las funciones identidades son biyectivas y se caracterizan por ser las funciones que al componerlas (a derecha o izquierda, según sea el caso) con otra, dejan a la función invariante. Las funciones identidades, a pesar de no hacer nada, son de gran importancia en los procesos de inversión ya que representan, para la composición de funciones, lo que el 0 representa para la suma de números reales y el 1 para la multiplicación: un elemento neutro, pero con algunas diferencias fundamentales: no es la misma función identidad la que se debe aplicar a derecha y a izquierda para dejar invariante la función por medio de la composición.

EJEMPLO 13 ■

Dada la función real $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, determine las funciones id_A y id_B tales que:

$$f \circ id_A = f \;\; y \;\; id_B \circ f = f$$

SOLUCIÓN

Puesto que $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ y $Rang(f)=\mathbb{R}_+$, sean:

$$\begin{array}{ll} id_{\mathbb{R}-\{0\}}{:}\mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{0\} & id_{\mathbb{R}_+}{:}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \quad x \longmapsto id_{\mathbb{R}-\{0\}}(x)=x & \quad x \longmapsto id_{\mathbb{R}_+}(x)=x \end{array}$$

Dado $x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$$(f \circ id_{\mathbb{R}-\{0\}})(x) = f(id_{\mathbb{R}\{0\}}(x)) = f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Si $x \in \mathbb{R}_+$

$$(id_{R+} \circ f)(x) = id_{R+}(f(x)) = id_{R+}(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$$

La gráfica de estas funciones identidades son las que se ven en la figura 7 (a) y (b). ■

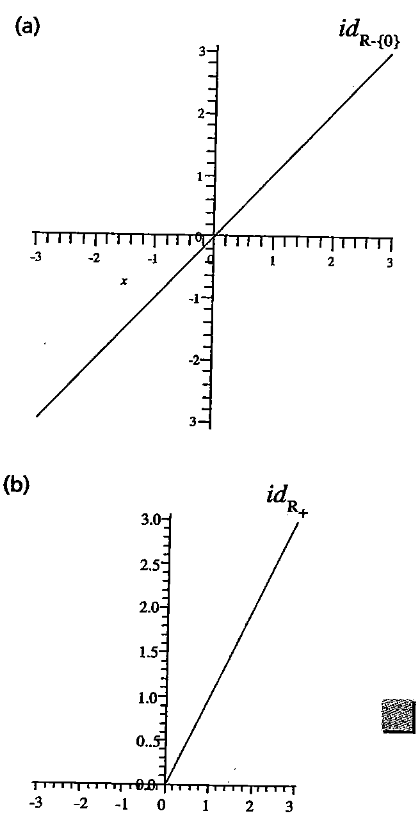


FIGURA 7

FUNCIÓN INVERSA

En varias oportunidades será de interés poder invertir los procesos con el fin de retornar al estado inicial. Como es obvio, esto no será siempre posible; un ejemplo de esto son todos aquellos procesos en los cuales hay pérdida de material. Sin embargo, cuando se describen los fenómenos mediante funciones, es posible caracterizar las funciones que se pueden invertir y determinar el proceso que permite la inversión del proceso.

Teorema 5 Si f es una biyección de A en B entonces existe una función biyectiva notada f^1 de B en A que satisface:

$$f \circ f^{-1} = id_B \text{ y } f^{-1} \circ f = id_A$$

La función f^1 es denominada la función inversa de f.
Demostración: Como f es sobreyectiva, para todo $y \in B$ existe un $x \in A$ tal que $y=f(x)$. Además, por ser f inyectiva x es único, puesto que para todo $x' \neq x$ se tiene $f(x') \neq f(x)$.
Sea $f^{-1}: B \rightarrow A$ la función definida por:

$$x=f^{-1}(y) \text{ si y sólo si } y=f(x).$$

Para cada $y \in B$ se tiene

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y,$$

lo que demuestra que $f \circ f^{-1} = id_B$.
Análogamente, para cada $x \in A$ se tiene

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y);$$

por tanto $f^{-1} \circ f = id_A$.

f^1 es una función inyectiva, ya que como f es una función, en efecto, para cada x, x' en A,

$$x=x' \Rightarrow f(x)=f(x') \Rightarrow y=y'$$

lo que equivale en términos de f^1 a que para cada y, y' en B,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y') \Rightarrow y = y'.$$

f^1 es sobreyectiva ya que para cada $x \in A$, $y=f(x)$ existe; por tanto $f^1(y)=x$

El anterior teorema no sólo da condiciones para que una función f tenga inversa, sino que proporciona un método para encontrar f, como se muestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 14 ■ Calculo de la función inversa

Dada la función real $f(x) = \frac{1}{x}$, determine si f tiene inversa y calcúlela.

SOLUCIÓN

Observe que si se considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función f no es sobreyectiva, ya que $Rang(f)=R-\{0\} \neq R$ y por tanto la función inversa de f no existe. Pero si se considera $f: R-\{0\} \rightarrow R-\{0\}$ se tiene que f es biyectiva, puesto que si $a \neq 0$ y $b \neq o$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow a = b;$$

es decir, f es inyectiva y como en este caso $Rang(f)=R-\{0\}$, f es sobreyectiva. Por tanto, al considerar $fR-\{0\} \rightarrow R-\{0\}$ se tiene que f^1 existe.
Para calcular f^1, se utiliza la definición dada en la demostración del teorema anterior:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

En este caso $f(x)=\frac{1}{x}$, reemplazando se obtiene:

$$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}.$$

Luego

$$y=\frac{1}{x},$$

es decir,

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x}=f(x).$$

Observe que si f es biyectiva se tiene que

$$Dom(f^{-1})=Rang(f)$$

y

$$Rang(f^{-1})=Dom(f).$$

EJEMPLO 15 ■

Dada la función real

$$g(x)=\begin{cases} x \text{ si } 1\le x<2 \\ -\frac{x}{2}+\frac{7}{2} \text{ si } 2\le x\le 3 \\ \frac{x}{2}+1 \text{ si } 3<x\le 4 \end{cases}$$

determine si g tiene inversa y calcúlela.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función g se muestra en la siguiente figura 8 que aparece en la columna:

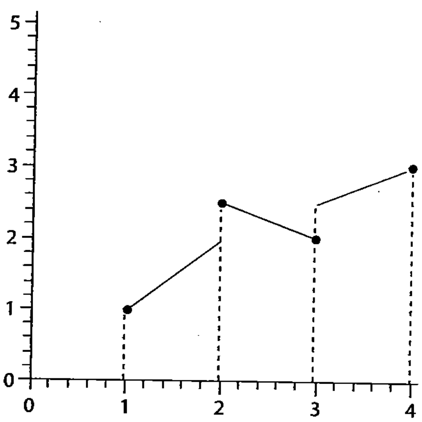


FIGURA 8

Es fácil demostrar que la función $g:[1,4]\to[1,3]$ es biyectiva (ejercicio) y por tanto existe

$$g^{-1}:[1,3]\to[1,4].$$

Utilizando la definición de la inversa se tiene:

$$y=g^{-1}(x)\Leftrightarrow x=g(y)$$

Por tanto:

1. $x=y$ si $1\le y<2$
2. $x=-\frac{y}{2}+\frac{7}{2}$ si $2\le y\le 3$
3. $x=\frac{y}{2}+1$ si $3<y\le 4$

de donde

1. $y=x$ si $1\le x<2$
2. $y=7-2x$ si $2\le 7-2x\le 3$
3. $y=2x-2$ si $3<2x-2\le 4$

Así se tiene

$$g^{-1}(x)=\begin{cases} x \text{ si } 1\le x<2 \\ 7-2x \text{ si } 2\le x\le \frac{5}{2} \\ 2x-2 \text{ si } \frac{5}{2}<x\le 3, \end{cases}$$

cuyo gráfico aparece en la figura 9. ■

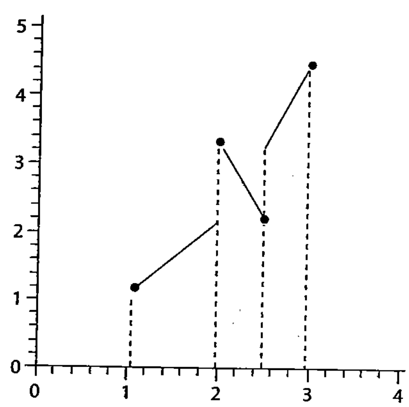
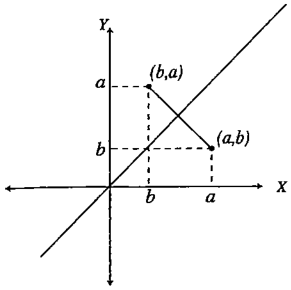
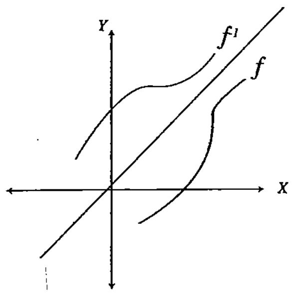


FIGURA 9





Note que si f es biyectiva, se tiene que f^{-1} es la función definida por

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(x).$$

Al transcribir esto en términos de las gráficas de las funciones se obtiene lo siguiente:

$$(x,y) \in G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (y,x) \in G_f,$$

lo que tiene una interpretación geométrica muy interesante en el caso de las funciones reales (veáse la figura 10):
"La gráfica de f^1 se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y=x$".

Sea f una función de A en B y $c \in B$, suponga que se quieren determinar las soluciones de la ecuación $f(x)=c$.
Si f es una función biyectiva, existirá una única solución, la cual estará determinada por:

$$x=f^{-1}(c).$$

Si f no es inyectiva y $c \in Rang(f)$, es posible encontrar las soluciones de la ecuación considerando restricciones biyectivas apropiadas de la función f, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 16 ■ Soluciones de una ecuación

Determinar todas las soluciones de la ecuación:

$$\frac{1}{x^2-2x+1} = 3$$

SOLUCIÓN

Utilizando funciones la ecuación dada es

$$f(x)=3$$

donde $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+1} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$,

La función f no es inyectiva ya que $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2})$.

Para solucionar esta ecuación consideremos las restricciones de f definidas por:

$$\begin{array}{llll} g_1: & (1,+\infty) & \to & (0,+\infty) \\ & x & \mapsto & g_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{llll} g_2: & (-\infty,1) & \to & (0,+\infty) \\ & x & \mapsto & g_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}$$

las cuales son biyectivas y sus inversas están dadas por:

$$\begin{array}{llll} g_1^{-1}: & (0,+\infty) & \to & (1,+\infty) \\ & x & \mapsto & g_1^{-1}(x) = 1+\sqrt{\dfrac{1}{x}} \end{array}$$

y

$$g_2^{-1}: \ (0,+\infty) \ \to \ (-\infty,1)$$

$$x \mapsto g_2^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{x}}$$

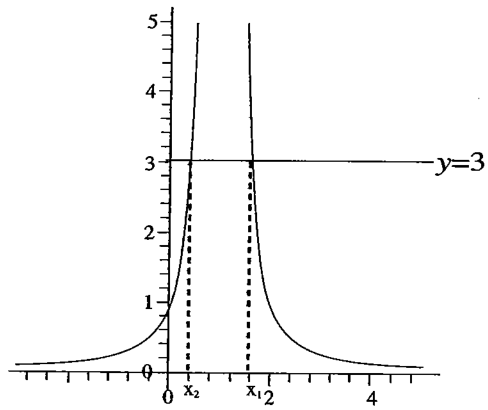
$f(x)=3$ si y sólo si $g_1(x)=3$ ó $g_2(x)=3$.

La ecuación $\dfrac{1}{x^2-2x+1} = 3$ tiene dos soluciones:

$$x_1 = g_1^{-1}(3) = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

y

$$x_2 = g_2^{-1}(3) = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$



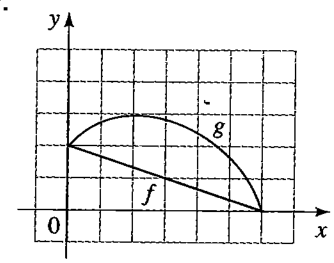
4.5 EJERCICIOS

1-6 ■ Determine las funciones $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$, así como su dominio.

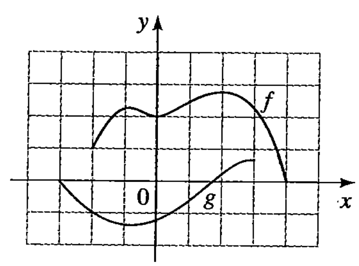
1. $f(x)=x^2-x$, $g(x)=x+5$.
2. $f(x)=x^3-2x^2$, $g(x)=3x^2-1$.
3. $f(x)=\sqrt{1+x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{2}{x+4}$
5. $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x>3 \end{cases}$, $g(x)=x+5$
6. $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<-3 \\ x+3 & \text{si } x>-3 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x<-1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } -1\le x\le 2 \\ 2-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

7-8 ■ Use la suma gráfica para graficar $f+g$

7.



8.



9-12 ■ Obtenga las gráficas de f, g y $f+g$ en una pantalla común, con el fin de ilustrar la suma gráfica.

9. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

10. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

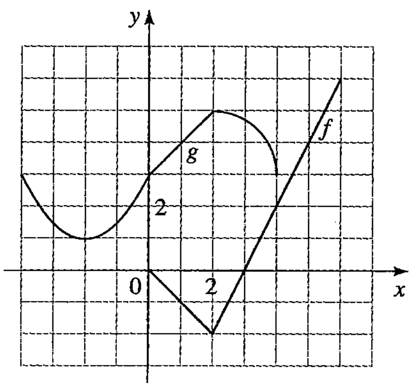
11. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

12. $f(x) = \sqrt[4]{1-x}$, $g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

13. Utilice las funciones $f(x) = 8x-1$ y $g(x) = x^2-3x$ para evaluar la expresión dada.

(a) $f(g(\circ))$ y $g(f(\circ))$.
(b) $f(f(2))$ y $g(g(3))$.
(c) $(g \circ f)(-2)$ y $(f \circ g)(-2)$.
(d) $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.
(e) $(g \circ g)(x)$ y $(f \circ f)(x)$.
(f) $(g \circ g)(x) + (g \circ f)(x)$.

14-19 ■ Utilice las gráficas de f y g para evaluar la expresión.



14. $f(g(2))$

15. $(g \circ f)(4)$

16. $(g \circ g)(-2)$

17. $g(f(0))$

18. $(f \circ g)(0)$

19. $(f \circ f)(4)$

20-35 ■ Determine las funciones $f \text{ o } g$, $g \text{ o } f$, y $f \text{ o } f$ así como su dominio.

20. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 4x - 1$

21. $f(x) = 6x - 5$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$

22. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3 + 2x$

24. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2$

25. $f(x) = x + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

27. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

28. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

29. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

30. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

31. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$

32. $f(x)=|x+3|$, $g(x)=|x|+3$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -3 \\ x^2 & \text{si } x > -3 \end{cases}$, $g(x) = x+3$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35. $f(x) = |x + \dfrac{1}{x}|$ y $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

36. Exprese la función dada en la forma $f \text{ o } g$.

(a) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$
(b) $j(x) = \sqrt{x}+1$
(c) $s(x) = \dfrac{1}{x+3}$
(d) $t(x)=|x-3|$
(e) $r(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

37. Sean a, b, c y d números reales fijos, f y g funciones definidas por:

$$f(x)=ax+b \qquad g(x)=cx+d.$$

Halle las condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes a, b, c y d para que $f \text{ o } g = g \text{ o } f$.

38. Demuestre las siguientes propiedades:

(a) La suma de funciones pares es una función par y la suma de dos funciones impares es impar.
(b) El producto de dos funciones pares es una función par.
(c) El producto de dos funciones impares es una función par.

39. Si f, g y h son funciones crecientes. Demuestre que si

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

entonces

$$f(f(x)) \le g(g(x)) \le h(h(x)).$$

40. Si $f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } |x|\le 1\\ 0 & \text{si } |x|>1\end{cases}$. Construya la gráfica de las

funciones $g_t(x)=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$

para $t=0$, $t=1$ y $t=2$.

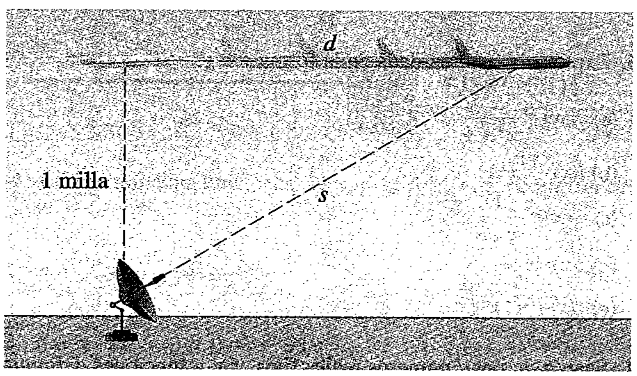
41. Construya la gráfica de la función compuesta $y=f(u)$ donde $u=x^2-2$ si

$$f(u)=\begin{cases}-1 & \text{si } \quad u\le -1\\ u & \text{si } \quad -1\le u\le 1\\ 1 & \text{si } \quad 1<u\end{cases}$$

42. Se deja caer una piedra a un lago, creando unas ondas circulares que se desplazan hacia el exterior a una rapidez de 60 cm/s. Exprese el área de este círculo como una función del tiempo t (en segundos).

43. Se tiene un globo esférico que se está inflando. Si el radio del globo aumenta a una razón de 1 cm/s, exprese el volumen del globo como una función del tiempo t (en segundos).

44. Un aeroplano vuela a una rapidez de 350 millas/h a una altitud de 1 milla. El aeroplano pasa directamente por encima de una estación de radar en el tiempo $t=0$.



(a) Exprese la distancia s entre el aeroplano y la estación de radar como una función de d.

(b) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que ha volado el aeroplano como una función de t (en horas).

(c) Utilice la composición para expresar s en función de t.

45-47 ■ Determine si la función dada es inyectiva (uno a uno).

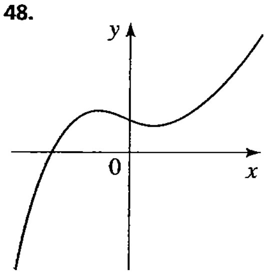
45. $f(x)=7x-2$

46. $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

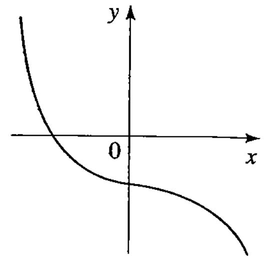
47. $f(x)=|x-3|$

48-53 ■ Se da la gráfica de una función f. Determine si f es inyectiva (uno a uno)

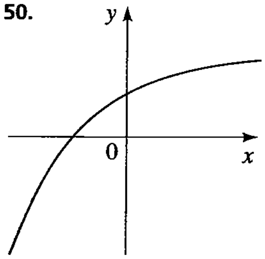
48.



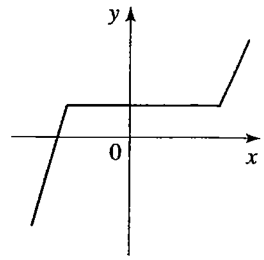
49.



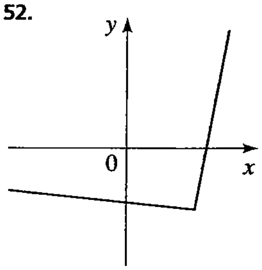
50.



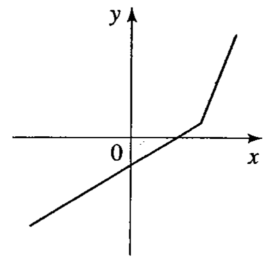
51.



52.



53.



54. Suponga que f es una función inyectiva

(a) Si $f(2)=7$ determine $f^{-1}(7)$

(b) Si $f^{-1}(3)=-1$ determine $f(-1)$

(c) Si $f(4)=\frac{1}{4}$ determine $f^{-1}(\frac{1}{4})$

55. Las siguientes ecuaciones pueden definir funciones biyectivas entre subconjuntos adecuados de $\mathbb{R}$. Determínelos.

(a) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$

(b) $y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

(c) $4x^2-y^2=9$

(d) $4y^2-x^2=9$

(e) $y^2-x=4$

56. ¿Las funciones f y g dadas son inversas?

(a) $f(x)=\dfrac{3-x}{4}$, $g(x)=3-4x$

(b) $f(x)=x^3+1$, $g(x)=(x-1)^{1/3}$

(c) $f(x)=\frac{1}{x-1}, x\neq 1$ $g(x)=\frac{1}{x}+1, x\neq 0$

57. Demuestre que si f es estrictamente creciente en todo su dominio, entonces f es inyectiva.

58-61 ■ En cada caso determine si g es una restricción de f o viceversa.

58. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$, $g(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$

59. $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

60. $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

61. $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{|x|}$, $g(x)=\sqrt{|1-x|}+\sqrt{x}$

62-64 ■ En cada caso determine si la función f dada es biyectiva. Si lo es calcule f^{-1}, si no, encuentre una restricción g de f biyectiva y determine g^{-1}.

62. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

63. $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{si x} < 2 \\ 7-2x \text{ si x } 2\end{cases}$

64. $f(x)=\begin{cases} |x| \text{ si x} < 3 \\ x^2+1 \text{ si x } 3\end{cases}$

65-83 ■ Obtenga la función inversa de f.

65. $f(x)=\frac{1}{x}$

66. $f(x)=2x+1$

67. $f(x)=6-x$

68. $f(x)=4x+7$

69. $f(x)=3-5x$

70. $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $x>-2$

71. $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$

72. $f(x)=\frac{1+3x}{5-2x}$

73. $f(x)=5-4x^3$

74. $f(x)=\sqrt{2+5x}$

75. $f(x)=x^2+x$, $x\geqslant -\frac{1}{2}$

76. $f(x)=4-x^2$, $x\geqslant 0$

77. $f(x)=\sqrt{2x-1}$

78. $f(x)=4+\sqrt[3]{x}$

79. $f(x)=(2-x^3)^5$

80. $f(x)=1+\sqrt{1+x}$

81. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 3$

82. $f(x)=x^4$, $x\geqslant 0$

83. $f(x)=1-x^2, x\leqslant 0$

84-87 ■ Se da una función f, trace la gráfica de f, use la gráfica de f para obtener la de f^{-1} y determine f^{-1}.

84. $f(x)=3x-6$

85. $f(x)=16-x^2$, $x\geqslant 0$

86. $f(x)=\sqrt{x+1}$

87. $f(x)=x^3-1$, $x\geqslant 0$

88. Sea $f(x)=1+\sqrt[4]{x}$

(a) Demuestre que f es inyectiva.

(a) Obtenga utilizando (a) la gráfica de f^{-1}.

(a) Escriba una ecuación para f^{-1}.

89. Determine f si $f(\frac{x}{x+1})=x^2$

90. Determine f si f *si* $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$

91-92 ■ Determine f si:

91. $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$, $|x|\geq 2$

91. $f(\frac{x}{x+1})=x^2$

DESCUBRIMIENTO Y ANÁLISIS

93. **Interés compuesto** Una cuenta de ahorros produce 5 por ciento de interés compuesto anualmente. Si se invierten x pesos en está cuenta, el monto $A(x)$ de la inversión después de un año de iniciada es: $A(x)=x+0.05=1.05x$. Obtenga A∘A, A∘A∘A y A∘A∘A∘A. ¿Qué representan estas composiciones? Determine una fórmula para lo que se obtiene cuando A se compone n veces.

94. **Resolución de una ecuación para una función incógnita** Si $g(x)=2x+1$ y $h(x)=4x^2+4x+7$, obtenga una función f tal que $f\circ g=h$. (Piense en las operaciones que tendría que llevar a cabo en la fórmula de g para obtener la fórmula de h.)
Ahora suponga que

$$f(x)=3x+5 \qquad \text{y} \qquad h(x)=3x^2+3x+2$$

Use el mismo razonamiento para determinar una función g tal que $f\circ g=h$.

95. **Composiciones de funciones pares e impares** Suponga que $h=f\circ g$. Si g es una función par, ¿h es necesariamente par? ¿Qué pasa si g y f son impares? ¿Cuál es el resultado si g es impar y f par?

96. **La inversa de una función de precio** Pizza Marcello asigna un precio base de \$7 por pizza grande, más \$2 por cada aderezo. Si ordena una pizza grande con x aderezos, el precio está dado por la función $f(x)=7+2x$. Determine f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

97. **Cuándo una función lineal tiene inversa** Para que la función lineal $f(x)=mx+b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto respecto a su pendiente? Si es uno a uno, ¿cuál es su inversa?

98. **Determinación de una inversa "mentalmente"** Hemos hecho

la observación de que la inversa de una función se puede determinar simplemente invirtiendo las operaciones que definen la función. Así, en el ejemplo se ve que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \qquad \text{es} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

porque la "inversa" de "multiplique por 3 y reste 2" es "sume 2 y divida por 3". Veamos otra función:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+7}$$

¿Es posible usar la inversión de operaciones para obtener la inversa de esta función? De ser así, hágalo. De no ser así, explique en qué estriba la diferencia respecto a esta función que dificulta la tarea.

4 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Defina con sus palabras los siguientes conceptos:
   (a) Función.
   (b) Conjuntos de definición de una función.
   (c) Dominio y rango de una función.
   (d) Gráfica de una función.
   (e) Representación gráfica de una función.
   (f) Función numérica o real.
   (g) Variables dependientes e independientes.
   (h) Función creciente y decreciente.
   (i) Función par e impar.
   (j) Función periódica.

2. Plantee un ejemplo de cada tipo de función:
   (a) Función constante.
   (b) Función lineal.
   (c) Función cuadrática.
   (d) Función escalonada.
   (e) Función definida a trozos.
   (f) Función identidad.

3. Trace sobre los mismos ejes las gráficas de las funciones
   (a) $f(x)=x$
   (b) $g(x)=x^2$
   (c) $h(x)=x^3$
   (d) $j(x)=x^4$

4. (a) Enuncie el criterio de la recta vertical
   (b) Enuncie el criterio de la recta horizontal

5. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas obtenidas de f como sigue:
   (a) Desplazando 3 unidades hacia arriba.
   (b) Desplazando 3 unidades hacia abajo.
   (c) Desplazando 3 unidades hacia la derecha
   (d) Desplazando 3 unidades hacia la izquierda.
   (e) Reflejando sobre el eje x.
   (f) Reflejando sobre el eje y.
   (g) Alargando verticalmente en un factor de 3.
   (h) Encogiendo verticalmente un factor de 1/3.
   (i) Alargando horizontal en un factor de 3
   (j) Encogiendo horizontal en un factor de 1/3.

6. (a) ¿Qué simetría posee la gráfica de una función par? Plantee un ejemplo de función par.
   (b) ¿Qué simetría posee la gráfica de una función impar? Plantee un ejemplo de función impar.
   (c) ¿Qué característica posee la gráfica de una función periódica? Plantee un ejemplo de función periódica.

7. Suponga que una función f tiene dominio A y g tiene dominio B.
   (a) ¿Cuándo es $f=g$?
   (b) ¿Cuál es el dominio de $f+g$?
   (c) ¿Cuál es el dominio de fg?
   (d) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{f}{g}$?

8. ¿Cómo se define la función f o g? ¿Cuál es el dominio de f o g?

9. ¿Qué importancia tienen las funciones identidades?

10. (a) ¿Qué es una función inyectiva?
    (b) ¿Cómo se puede saber a partir de la representación gráfica de una función si se trata de una función inyectiva?
    (c) ¿Qué es una función sobreyectiva?
    (d) ¿Qué es una función biyectiva?

11. (a) Dada una función f, ¿qué condiciones debe cumplir f para que sea una función invertible?
    (b) ¿Qué es una restricción de f?

12. Suponga que f es una función inyectiva con dominio A y rango B.
    (a) ¿Cómo se define la función inversa de f?
    (b) ¿Cuál es el dominio de f^{-1}?
    (c) ¿Cuál es el rango de f^{-1}?
    (d) Si se da una fórmula para f, ¿cómo se determina una fórmula para f^{-1}?

(e) Si se da la gráfica de f, ¿cómo se determina la gráfica de f^{-1}?
(f) Si se da la representación gráfica de f, ¿cómo se determina la representación gráfica de f^{-1}?

13. Si f es una función.

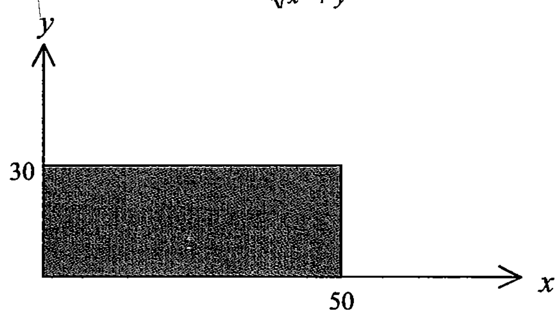
(a) ¿Cual es la negación de, f es una función creciente?
(b) ¿Cuál es la negación de, f es una función decreciente?

14. Demuestre o dé un contraejemplo.
(a) Si una función f es par, entonces f no es inyectiva.
(b) Una función estrictamente creciente es inyectiva
(c) Si f y g son funciones inyectivas, entonces $f + g$ es inyectiva.
(d) Si $f \circ g = id$ entonces $g = f^{-1}$.
(e) La composición de funciones inyectivas, si existe, es una función inyectiva.
(f) La suma de funciones biyectivas es una función biyectiva.
(g) Si f es estrictamente creciente, entonces f es una función par.
(h) Una función periódica no puede ser par ni impar.

EJERCICIOS

1. La temperatura sobre una placa rectangular de cobre situada en el plano (véase la figura) de ancho 30 cm y largo 50 cm está dada por

$$t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

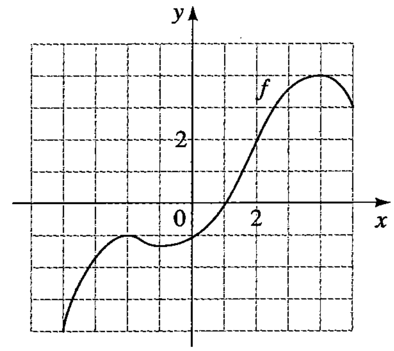


a) ¿Cuál es la temperatura en el punto (20,15)?
b) Encuentre una función para la temperatura de los puntos que se encuentran sobre el eje x. ¿Cuál es el dominio de esta función?
c) Encuentre una función para la temperatura de los puntos que se encuentran sobre el eje y. ¿Cuál es el dominio de esta función?
d) Encuentre una función para la temperatura de los puntos que se encuentran sobre la recta y = x? ¿Cuál es el dominio de esta función?

2. El recorrido de una partícula a través del tiempo se representa por la función $p(t)=(\sin t, \cos t)$
a) Determine los conjuntos de definición de la función p.
b) Si se grafican los puntos en el plano para cada instante de tiempo, ¿qué gráfica se obtiene?
c) Describa la gráfica de la función p, ¿Dónde se representaría gráficamente p?

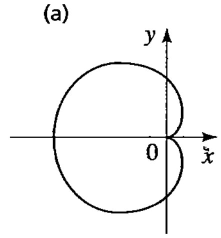
3. Si $f(x) = x^2 - x + 1$, determine $f(0), f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(x+1), f(2x)$, y $2f(x) - 2$.

4. Se da la gráfica de una función.
(a) Determine $f(-2)$ y $f(2)$.
(b) Determine el dominio de f.
(c) Obtenga el rango de f.
(d) ¿En qué intervalos está creciendo f? ¿En qué intervalos está decreciendo?
(e) ¿Es f uno a uno?

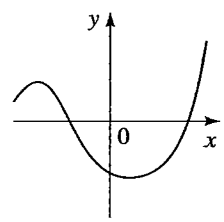


5. ¿Cuáles de las figuras siguientes son gráficas de funciones? ¿Cuáles de las funciones son uno a uno?

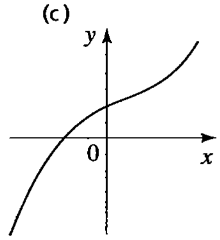
(a)



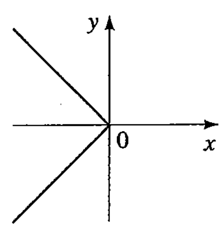
(b)



(c)



(d)



6. Sea $f(n) = \dfrac{1}{n}$ para $n \in IN$

(a) ¿Cuál es el dominio de f?
(b) ¿Cuál es el rango de f?
(c) Determine la gráfica de f y represéntela gráficamente
(d) Muestre que los valores de la función f tienden al valor cero.

7. Sea $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ y $g(n) = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(a) Si f y g se consideran como funciones definidas en *IN*, ¿f=g?
(b) Si f y g se consideran como funciones definidas en *IR*, ¿f=g?

8-12 ■ Determine el dominio de la función.

8. $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

9. $f(x) = 3x - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$

11. $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

12. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x}+2}$

13-23 ■ Trace la representación gráfica de la función.

13. $f(x) = \frac{1}{3}(x-5), \quad 2 \leqslant x \leqslant 8$

14. $g(t) = t^2 - 2t$

15. $f(x) = 3 - 8x - 2x^2$

16. $y = 1 - \sqrt{x}$

17. $y = -|x|$

18. $y = \sqrt{x+3}$

19. $H(x) = x^3 - 3x^2$

20. $G(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

21. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$

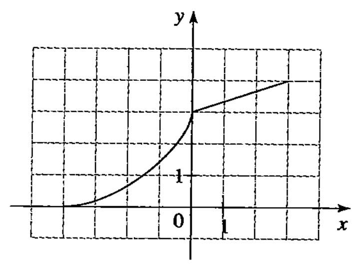
24. Determine, aproximadamente, el dominio de la función.
$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

25. Determine, aproximadamente, el rango de la función.
$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 6.$

26. Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo puede obtenerse la de cada una de las funciones siguientes a partir de la de f.

(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x+8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x-2) - 2$
(e) $y = f(-x)$ (f) $y = -f(-x)$
(g) $y = -f(x)$ (h) $y = f^{-1}(x)$

27. Se da la gráfica de f. Trace la de cada una de las funciones siguientes.

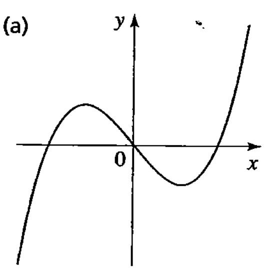


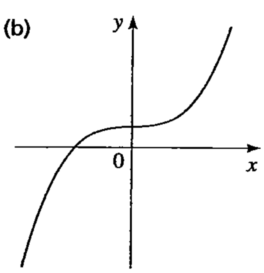
(a) $y = f(x-2)$ (b) $y = -f(x)$
(c) $y = 3 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f(-x)$

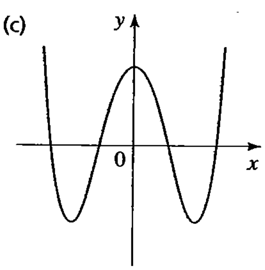
28. Determine si f es par, impar o ninguna de ellas.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ (b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

29. Determine si la función en la figura es par, impar o ninguna de ellas.

(a)


(b)


(c)


30-34 ■ Determine los intervalos de crecimiento y descrecimiento de la función dada

30. $f(x)=\sqrt{x}$

31. $f(x)=|x|+x$

32. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

33. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 3\le x<4 \\ x & \text{si } 4\le x<6 \\ 10-x & \text{si } 6\le x\le 7 \end{cases}$

34. $f(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si } x\le -3 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -3<x<0 \\ x^2-2x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

35. Determine el valor mínimo de la función.
$g(x)=2x^2+4x-5$

36. Obtenga el valor máximo de la función.
$f(x)=1-x-x^2$

37. Si $f(x)=x^2-3x+2$ y $g(x)=4-3x$, determine cada una de las funciones siguientes.
(a) $f+g$ (b) $f-g$ (c) fg
(d) f/g (e) $f\circ g$ (f) $g\circ f$

38. Si $f(x)=1+x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$, determine cada una de las funciones siguientes.
(a) $f\circ g$ (b) $g\circ f$ (c) $(f\circ g)(2)$
(d) $(f\circ f)(2)$ (e) $f\circ g\circ f$ (f) $g\circ f\circ g$

39-44 ■ Determine las funciones $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ y $g\circ g$

39. $f(x)=3x-1$, $g(x)=2x-x^2$

40. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{2}{x-4}$

41. $f(x)=x+3$, $g(x)=\begin{cases} 3-x & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

42. $f(x)=|x^2-2x+1|$, $g(x)=\sqrt{x-2}$

43. Determine $f\circ g\circ h$, donde $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=1-x^2$ y $h(x)=1+\sqrt{x}$.

44. Si $T(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, obtenga funciones f, g y h tales que $f\circ g\circ h=T$.

45-48 ■ Determine si la función es uno a uno.

45. $f(x)=3+x^3$

46. $g(x)=2-2x+x^2$

47. $h(x)=\dfrac{1}{x^4}$

48. $r(x)=2+\sqrt{x+3}$

49. Demuestre que $f(x)=3x-2$ es uno a uno y obtenga su función inversa.

50. Si $f(x)=1+\sqrt[5]{x-2}$, determine f^{-1}.

51. (a) Trace la gráfica de la función.

$$f(x)=x^2-4,\quad x\geqslant 0$$

(b) Utilice el inciso (a) para obtener la gráfica de f^{-1}.
(c) Plantee una ecuación para f^{-1}.

52. (a) Demuestre que la función $f(x)=1+\sqrt[4]{x}$ es uno a uno.
(b) Trace la gráfica de f.
(c) Utilice el inciso (b) para obtener la gráfica de f^{-1}.
(d) Escriba una ecuación para f^{-1}.

53-57 ■ Representar gráficamente de la ecuación dada.

(g) Justificar porque no representa una función.
(h) Dar una restricción que sea una función no inyectiva.
(i) Dar una restricción que sea una función biyectiva, demostrar que lo es para los conjuntos elegidos y determinar la función inversa.

53. $x^2=9-y^2$

54. $x^2+3y^2=3$

55. $4y^2-x^2=9$

56. $y^2=x+4$

57. $y=\cos x$

58. Suponga que M varía directamente con z y $M=120$ cuando $z=15$. Escriba una ecuación que exprese esta variación.

59. Suponga que z es inversamente proporcional a y. Si $y=16$, entonces $z=12$. Utilice esta información para escribir una ecuación que exprese a z en términos de y.

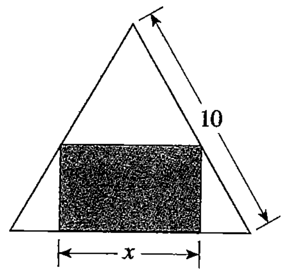
60. El número de tarjetas navideñas vendidas por una tienda depende del periodo del año. Trace una gráfica aproximada del número de tarjetas navideñas vendidas como una función de la fecha.

61. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Exprese el área A del mismo como una función de la longitud b de su base.

62. Un rectángulo está inscrito en una triángulo equilátero con un perímetro de 30 cm como se observa en la figura.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de la longitud x mostrada en la figura.

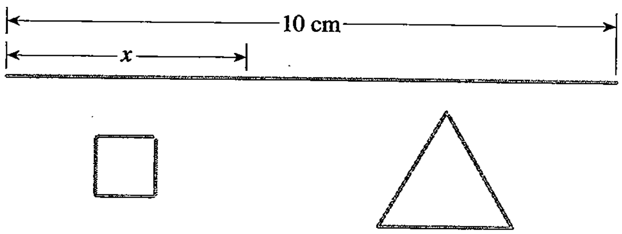
(b) Determine las dimensiones del rectángulo que tenga el área más grande.



63. Un tramo de alambre de 10 m de largo se corta en dos piezas. Una de longitud x se dobla para formar un cuadrado, y la otra se dobla para formar un triángulo equilátero.

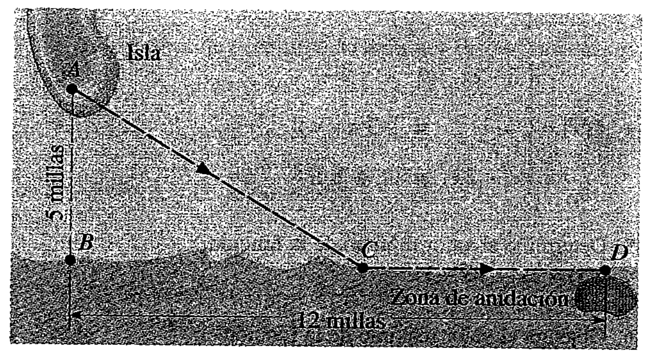
(a) Exprese el área total encerrada por ambas figuras como una función de x.

(b) ¿Para qué valor de x esta área total es mínima?



64. Un granjero desea cercar un corral rectangular de manera que tenga un área de 100 m^2. Determine las dimensiones del corral que requiera la cantidad mínima de cerca.

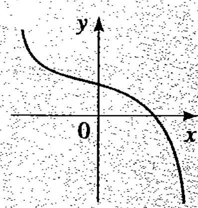
65. Un pájaro se libera del punto A en una isla, a 5 millas del punto más cercano B de una costa recta. El ave vuela al punto C de la costa y después a lo largo de la misma hasta la zona de anidación D (véase la figura). Suponga que el animal necesita de 10 kcal/milla de energía para volar sobre la tierra y 14 kcal/milla para hacerlo sobre el agua (véase el ejemplo 8 de la sección 1.6). Si instintivamente el pájaro escoge una trayectoria que minimice su consumo de energía, ¿a qué punto volará?



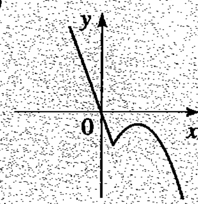
EXAMEN

1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son gráficas de funciones? Si la gráfica corresponde a una función ¿es ésta uno a uno?

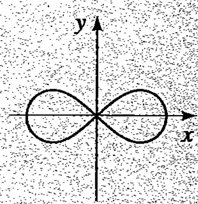
(a)



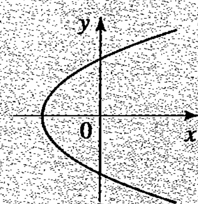
(b)



(c)



(d)



2. Determine el dominio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

3. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^3$.
   (b) Use el inciso (a) para graficar $g(x) = (x-1)^3 - 2$.

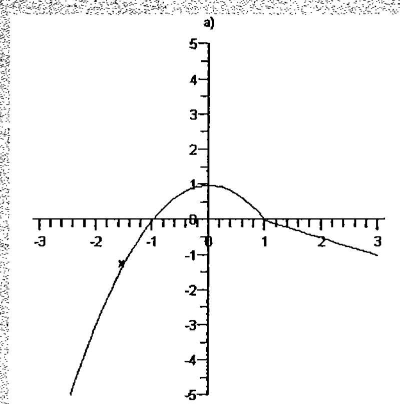
4. (a) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = 2 - f(x+3)$ a partir de la de f?
   (b) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = -f(-x)$ a partir de la de f?

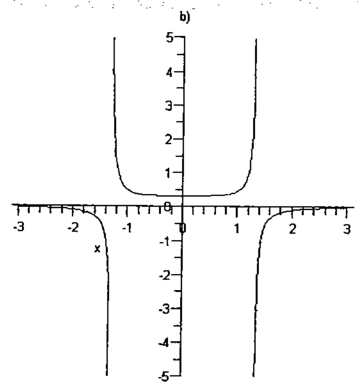
5. Sea $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

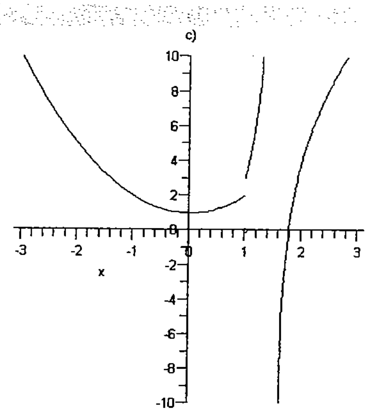
   a) Evalúe $f(-2)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ y $f(3)$.

   b) ¿Es f una función par? Justifique su respuesta.

6. Considere las gráficas







y las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1, \\ 1-\dfrac{1}{2}(x+1) & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1, \\ 1-\dfrac{1}{x^2-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \qquad j(x)=\frac{1}{3-x^4}$$

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ x & x>0 \end{cases} \quad \text{y} \quad k(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 10x-x^2-9+\dfrac{3}{3-2x} & x\geq 1 \end{cases}$$

(a) Relacione cada gráfica con una de las funciones dadas.

(b) ¿La función f es inyectiva en todos los reales? Si lo es, calcule su inversa. Si no lo es, considere una restricción del dominio para que exista su inversa y calcúlela.

(c) Calcule todos los valores de x que pertenezcan a los reales tales que $g_x\,(j\,(x))=1$.

7. Si $f(x)=1-|2x+1|$ y $g(x)=2-x^2$, determine la funciones:

a) $f+g$.

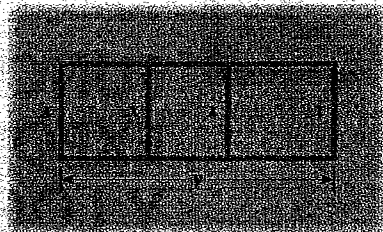
b) fg.

c) $\dfrac{f}{g}$.

d) $f\circ g$.

e) $g\circ f$.

8. (a) Si están disponibles 800 pies de cerca para construir tres corrales adyacentes, como se muestra en el diagrama, exprese el área total de éstos como una función de x.



(b) ¿Cuales son las dimensiones del terreno de máxima área que se puede cercar con estos 800 pies de cerca?

9. Sea $f(x) = 3x^4 - 14x^2 + 5x - 3$.

(a) Trace la gráfica de f en un rectángulo de visualización apropiado.

(b) ¿Es f uno a uno?

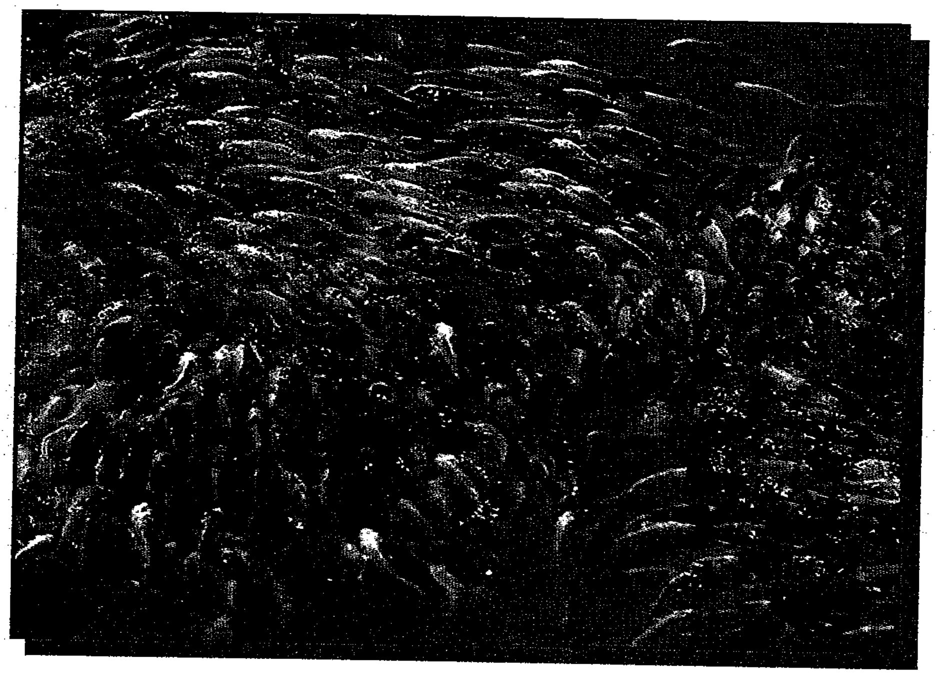
(c) Determine los valores máximo y mínimo locales de f y los valores de x en los que ocurren. Exprese cada respuesta correcta a dos decimales.

(d) Obtenga aproximadamente el rango de f.

(e) Determine aproximadamente los intervalos en los cuales f está creciendo y decreciendo.

5

FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA



El crecimiento demográfico —como el crecimiento de un cardumen en el océano— está modelado por funciones exponenciales. Éstas también describen el interés compuesto, la desintegración radiactiva y los cambios en la temperatura.

Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías profundas que los unifican.

JOSEPH FOURIER

Hasta aquí hemos estudiado funciones relativamente sencillas como los polinomios y las funciones racionales. Ahora analizaremos dos de las funciones más importantes de las matemáticas, la *función exponencial* y su inversa, la *función logarítmica*. Luego utilizamos éstas para describir el crecimiento exponencial en biología y economía, y la desintegración radiactiva en la física y química.

5.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

En la sección 1.2 definimos a^x si $a > 0$ y x es un número racional, pero aún no hemos definido potencias irracionales. Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}? Para poder responder estas preguntas primero veremos la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, donde x es racional. En la figura 1 se muestra una representación muy burda de esta gráfica; en ella se presentan huecos si x es irracional, deseamos llenar éstos con una curva suave. Para ello ampliamos el dominio de $f(x) = 2^x$ a todo $\mathbb{R}$ definiendo apropiadamente las potencias irracionales de 2. Por ejemplo, para definir $2^{\sqrt{3}}$ utilizamos aproximaciones racionales de $\sqrt{3}$. Puesto que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

nos aproximamos poco a poco a $2^{\sqrt{3}}$ usando las siguientes potencias racionales:

$$2^{1.7},\quad 2^{1.73},\quad 2^{1.732},\quad 2^{1.7320},\quad 2^{1.73205},\quad \ldots$$

Para demostrar la rapidez con que crece $f(x) = 2^x$, llevemos a cabo el siguiente experimento mental. Suponga que empezamos con un pedazo de papel de una milésima de pulgada de grueso, y que lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que lo doblamos se duplica el grosor, por lo que el valor resultante de éste sería de $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿Qué tan grande piensa que es este resultado? ¡Es más de 17 millones de millas!

Mediante técnicas de matemáticas avanzadas se demuestra que existe exactamente un número al cual tienden dichas potencias, y definimos a $2^{\sqrt{3}}$ como ese número. Intuitivamente estas potencias racionales de 2 tienden cada vez más a $2^{\sqrt{3}}$, y mediante este proceso de aproximación calculamos su valor correctamente hasta seis decimales:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

De manera similar definimos 2^x (o a^x si $a > 0$), donde x es cualquier número irracional.

Utilizando esta definición de las potencias irracionales, podemos trazar la gráfica de $f(x) = 2^x$ en todo $\mathbb{R}$, como se muestra en la figura 2. Se trata de una función creciente y, de hecho, aumenta muy rápidamente cuando $x > 0$ (véase la nota al margen).

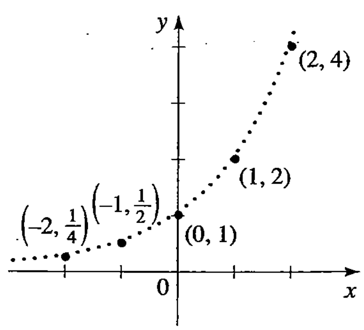


FIGURA 1
Representación de $f(x) = 2^x$ para x racional

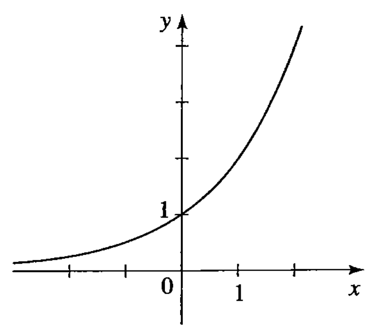


FIGURA 2
$f(x) = 2^x$ para x real

Se puede probar que *las leyes de los exponentes son válidas cuando los exponentes son números reales*.

EJEMPLO 1 ■ Gráfica de funciones exponenciales trazando puntos

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y de $g(x)$ y trazamos los puntos calculados para obtener las gráficas de la figura 3.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

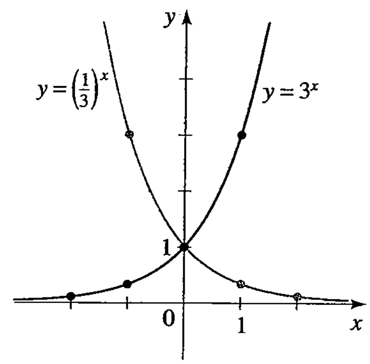


FIGURA 3

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

y por lo tanto hubiéramos obtenido la gráfica de g a partir de la de f reflejándola sobre el eje y. ■

La figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para diferentes valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto (0, 1) porque

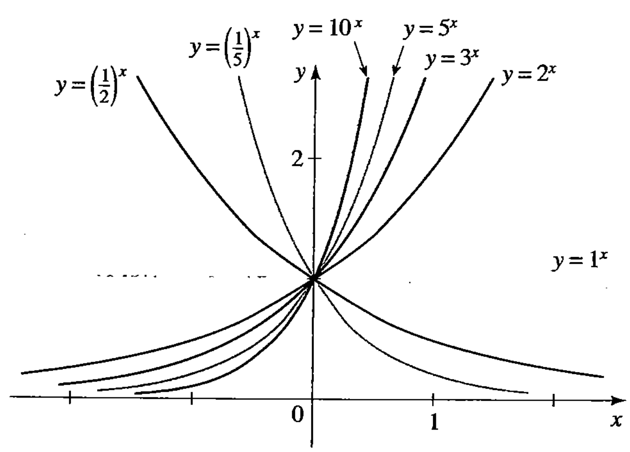


FIGURA 4
Familia de funciones exponenciales

$a^0 = 1$ para $a \neq 0$. A partir de la figura 4 puede verse que existen tres tipos de funciones exponenciales $y = a^x$: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a = 1$, $f(x)$ es constante; si $a > 1$, la función crece rápidamente, y mientras más grande sea la base más rápido será dicho crecimiento.

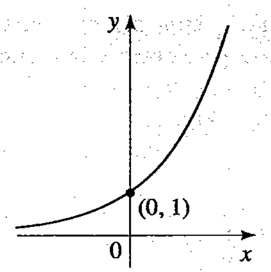
Si $a > 1$, entonces la gráfica de $y = a^x$ tiende a $y = 0$ cuando x decrece a través de valores negativos, por lo que el eje x es una asíntota horizontal. Si $0 < a < 1$, la gráfica tiende a $y = 0$ cuando x crece indefinidamente y de nuevo el eje x es una asíntota horizontal. En cualquiera de estos casos la gráfica nunca toca el eje x debido a que $a^x > 0$ para toda x. Así; para $a \neq 1$ la función exponencial $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. A continuación resumimos el análisis precedente.

FUNCIONES EXPONENCIALES

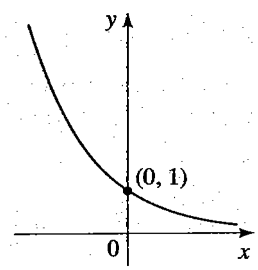
Para $a > 0$, la **función exponencial con base *a*** está definida por

$$f(x) = a^x$$

Para $a \neq 1$, el dominio de f es $\mathbb{R}$, el rango es $(0, \infty)$ y la gráfica de f tiene una de las formas siguientes:



$f(x) = a^x$ para $a > 1$

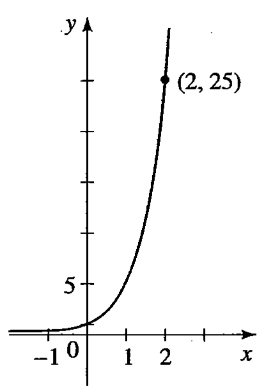


$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

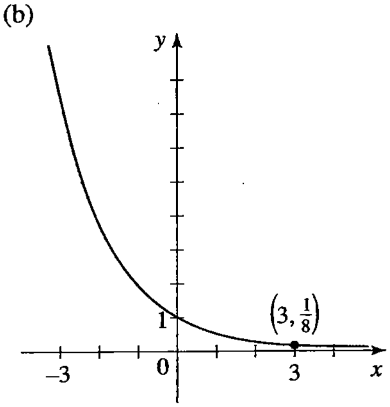
EJEMPLO 2 ■ Identificación de las gráficas de funciones exponenciales

Determine la función exponencial $f(x) = a^x$ de las siguientes gráficas.

(a)



(b)



SOLUCIÓN

(a) Dado que $f(2) = a^2 = 25$, por inspección determinamos que la base es $a = 5$. Por lo tanto ésta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = 5^x$.

(b) Dado que $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, por inspección obtenemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Por lo tanto ésta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. ■

En los dos ejemplos siguientes vemos cómo graficar ciertas funciones sin trazar puntos de ellas; sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la figura 4 y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la sección 2.4.

EJEMPLO 3 ■ Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para obtener la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$ (b) $h(x) = -2^x$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$ se obtiene a partir de la de $f(x) = 2^x$ en la figura 5(a) desplazándola hacia arriba 1 unidad. En la figura 5(b) observe que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

(b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero ahora la reflejamos sobre el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se muestra en la figura 5(c).

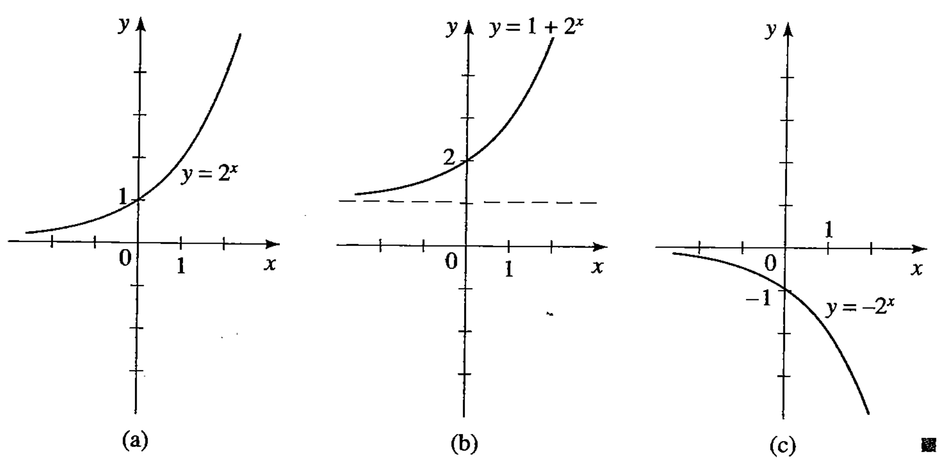


FIGURA 5 ■

EJEMPLO 4 ■ Transformaciones de funciones exponenciales

(a) Utilice la gráfica de $f(x) = 10^x$ para obtener la de $g(x) = 10^{x-1} - 2$.
(b) Determine la asíntota, el dominio y el rango de esta función.

SOLUCIÓN

(a) Recuerde de la sección 2.4 que obtenemos la gráfica de $y = f(x - 1)$ a partir de la de $y = f(x)$ desplazándola 1 unidad hacia la derecha. Por lo tanto, obtenemos la gráfica de $y = 10^{x-1} - 2$ desplazando la de $y = 10^x$ una unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo, como se muestra en la figura 6.

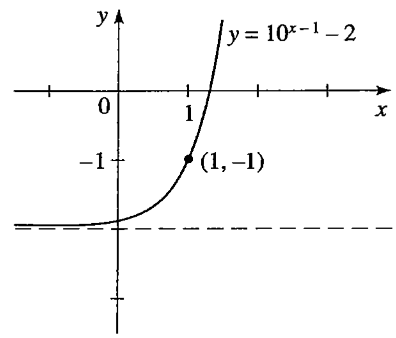


FIGURA 6

(b) La asíntota horizontal es $y = -2$, el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es

$$\{y \mid y > -2\} = (-2, \infty)$$

■

EJEMPLO 5 ■ Comparación de funciones exponencial y de potencias

Compare las razones de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencias $g(x) = x^2$ trazando la gráfica de ambas en cada uno de los siguientes rectángulos de visualización.

(a) $[0, 3]$ por $[0, 8]$ (b) $[0, 6]$ por $[0, 25]$ (c) $[0, 20]$ por $[0, 1{,}000]$

SOLUCIÓN

(a) La figura 7(a) muestra que en $x = 2$ la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza a la de $f(x) = 2^x$ y después crece aún más.

(b) El rectángulo de visión más amplio de la figura 7(b) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ alcanza la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

(c) La figura 7(c) da una visión más global y muestra que cuando x es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho mayor que $g(x) = x^2$.

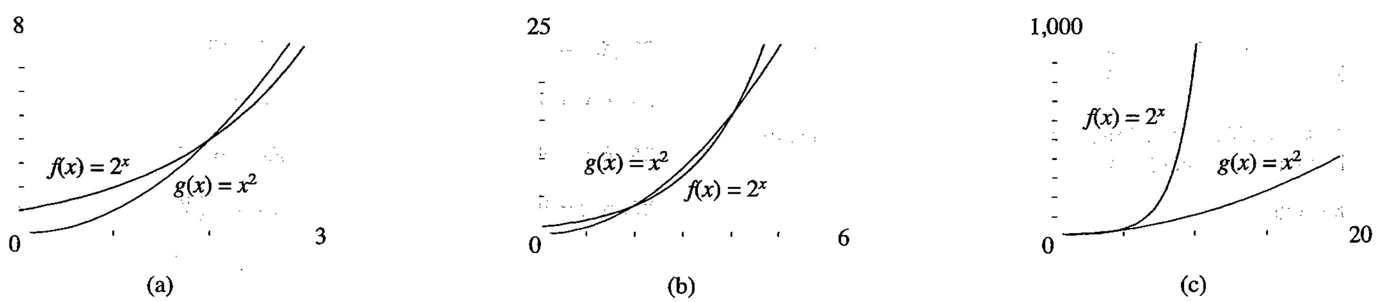


FIGURA 7

■

5.1 EJERCICIOS

1-8 ■ Trace la gráfica de la función utilizando una tabla de valores. Use una calculadora si fuera necesario.

1. $f(x) = 2^x$ **2.** $g(x) = 8^x$

3. $h(x) = 6^x$ **4.** $h(x) = (0.8)^x$

5. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ **6.** $h(x) = (1.1)^x$

7. $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ **8.** $f(x) = (\frac{3}{2})^x$

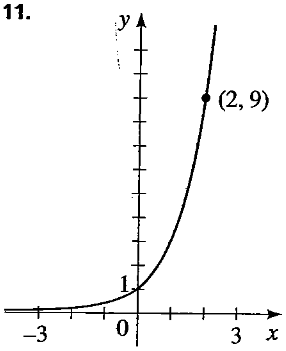
9-10 ■ Grafique ambas funciones en un mismo sistema de ejes.

9. $y = 4^x$ y $y = 7^x$

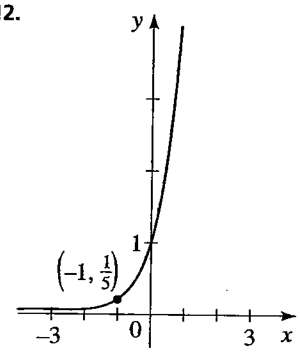
10. $y = (\frac{2}{3})^x$ y $y = (\frac{4}{3})^x$

11-14 ■ Determine la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

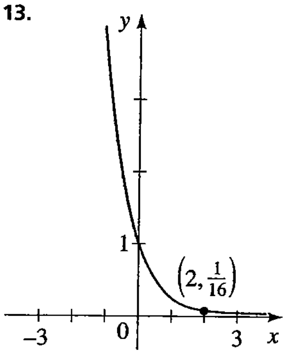
11.



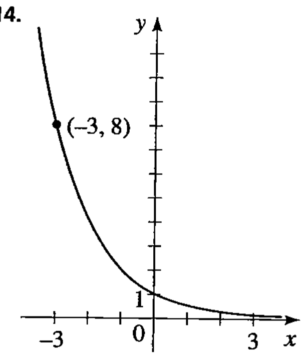
12.



13.



14.



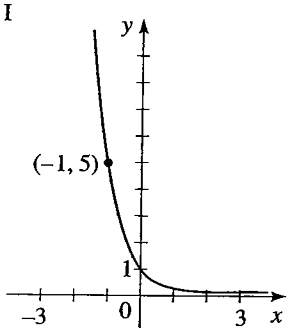
15-20 ■ Identifique a qué función exponencial corresponden las gráficas numeradas del I al VI.

15. $f(x) = 5^x$ **16.** $f(x) = -5^x$

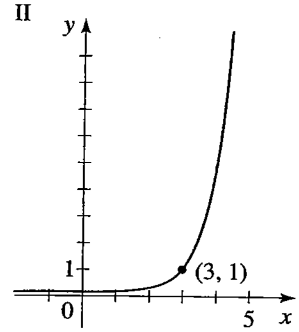
17. $f(x) = 5^{-x}$ **18.** $f(x) = 5^x + 3$

19. $f(x) = 5^{x-3}$ **20.** $f(x) = 5^{x+1} - 4$

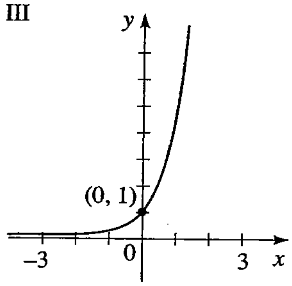
I



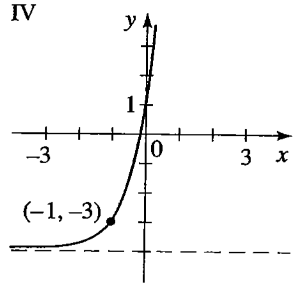
II



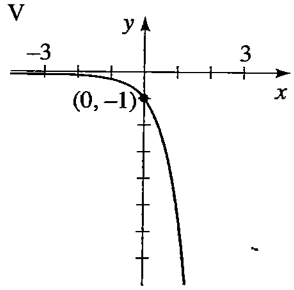
III



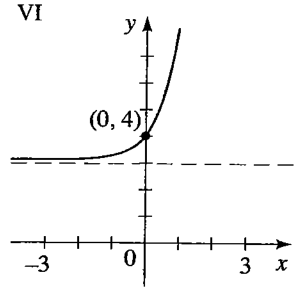
IV



V



VI



21-36 ■ Grafique la función sin usar el procedimiento de trazar puntos, sino partiendo de las gráficas de la figura 4. Determine el dominio, el rango y las asíntotas.

21. $f(x) = -3^x$ **22.** $f(x) = 10^{-x}$

23. $g(x) = 2^x - 3$ **24.** $g(x) = 2^{x-3}$

25. $h(x) = 4 + (\frac{1}{2})^x$ **26.** $h(x) = 6 - 3^x$

27. $f(x) = 10^{x+3}$ **28.** $f(x) = -(\frac{1}{5})^x$

29. $f(x) = -3^{-x}$ **30.** $f(x) = 10^{-x} - 4$

31. $y = 5^{-2x}$ **32.** $y = 1 + 2^{x+1}$

33. $f(x) = 5 - 2^{x-1}$

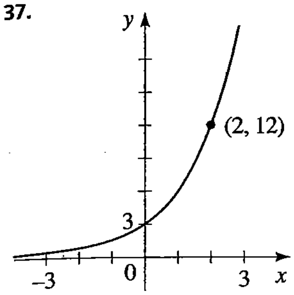
34. $f(x) = 1 - 2^{-x}$

35. $y = 2^{|x|}$

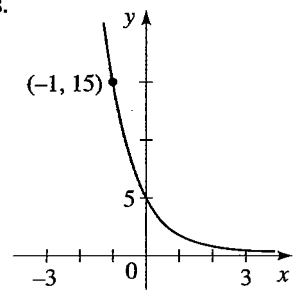
36. $y = 2^{-|x|}$

37-38 ■ Obtenga la función de la forma $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica se da.

37.



38.



39. **(a)** Trace la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la de $g(x) = 3(2^x)$.
(b) ¿Cómo están relacionadas?

40. **(a)** Trace la gráfica de $f(x) = 9^{x/2}$ y la de $g(x) = 3^x$.
(b) Utilice la ley de los exponentes para explicar la relación entre ambas.

41. Si $f(x) = 10^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right)$$

42. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ evaluando ambas en $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$ y 20. Después trace las gráficas de f y g en un mismo sistema de ejes.

43. **(a)** Compare las razones de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ obteniendo la gráfica de ambas en cada uno de los rectángulos de visualización siguientes.
(i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$
(ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$
(iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$
(b) Determine las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$, correctas a un decimal.

44. **(a)** Compare las razones de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ obteniendo la gráfica de ambas en cada uno de los rectángulos de visualización siguientes:
(i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$
(ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$
(iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$
(b) Obtenga las soluciones de la ecuación $3^x = x^4$, correctas a dos decimales.

45-46 ■ Trace las gráficas de la familia de funciones dadas para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

45. $f(x) = c2^x$

46. $f(x) = 2^{cx}$

47-48 ■ Grafique la función dada y comente acerca de las asíntotas verticales y horizontales.

47. $y = 2^{1/x}$

48. $y = \dfrac{2^x}{x}$

49-50 ■ Determine los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el cual ocurren. Exprese cada respuesta correcta a dos decimales.

49. $g(x) = x^3 \quad (x > 0)$

50. $g(x) = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0)$

51-52 ■ Determine, con sus extremos correctos, a dos decimales **(a)** los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente y **(b)** el rango de la función.

51. $y = 10^{x - x^2}$

52. $y = x2^x$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

53. Crecimiento de una función exponencial Suponga que se le ofrece un trabajo de un mes, donde se le pagará bien. ¿Cuál de las formas de pago siguientes resultan más redituables para usted?
(a) Un millón de dólares al final del mes
(b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercero y, en general, 2^n centavos el día n

54. Altura de la gráfica de una función exponencial Su profesor de matemáticas le pide que trace la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$ para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades por pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

5.2 FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Cualquier número positivo puede utilizarse como base para una función exponencial, pero algunas bases se utilizan con mayor frecuencia que otras. En las secciones restantes de este capítulo veremos que las bases 2 y 10 son convenientes para ciertas aplicaciones, pero la más importante es el número identificado mediante la letra e.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1,000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828
10,000,000	2.71828

El número e está definido como el valor al que tiende $(1 + 1/n)^n$ cuando n se hace grande. (En cálculo esto se define de manera más precisa a través del concepto de límite. Véase el ejercicio 41.) La tabla al margen muestra los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores cada vez más grandes que n. Parece que, correcto a cinco decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Puede demostrarse que e es un número irracional, por lo que no escribimos su valor exacto.

¿Por qué usar una base tan extraña para una función exponencial? Al principio parecería mucho más cómodo trabajar con una base como el 10. Sin embargo, veremos que en ciertas aplicaciones el número e es la mejor base posible. En esta sección estudiaremos cómo se presenta e en la descripción del interés compuesto y en el crecimiento demográfico.

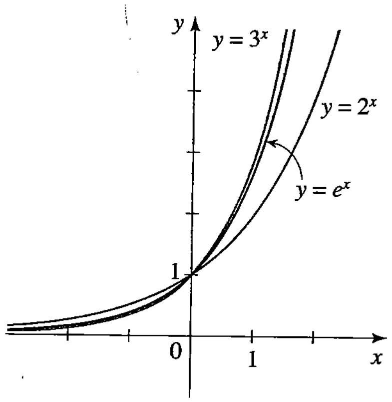


FIGURA 1
Gráfica de la función exponencial natural

FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

con base e. A menudo se conoce como *la* función exponencial.

Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la figura 1.

Las calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. En el siguiente ejemplo utilizaremos esta tecla.

La notación e para la base de la función exponencial natural fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler, probablemente porque se trata de la primera letra de la palabra *exponencial*.

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión aproximando la respuesta a cinco decimales.

(a) e^3 (b) $2e^{-0.53}$ (c) $e^{4.8}$

SOLUCIÓN Utilizamos la tecla $\boxed{e^x}$ de la calculadora para evaluar la función exponencial.

(a) $e^3 \approx 20.08554$

(b) $2e^{-0.53} \approx 1.17721$

(c) $e^{4.8} \approx 121.51042$ ■

EJEMPLO 2 ■ Transformaciones de la función exponencial

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = e^{-x}$ (b) $g(x) = 3e^{0.5x}$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como se muestra en la figura 2.

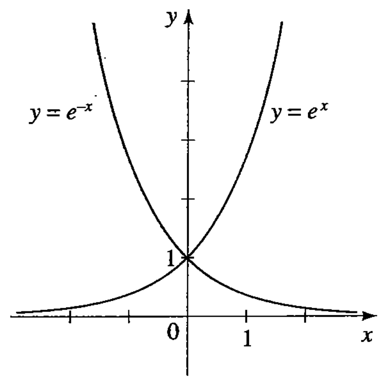


FIGURA 2

(b) Calculamos varios valores, graficamos los puntos resultantes y después los unimos con una curva suave. La gráfica se muestra en la figura 3.

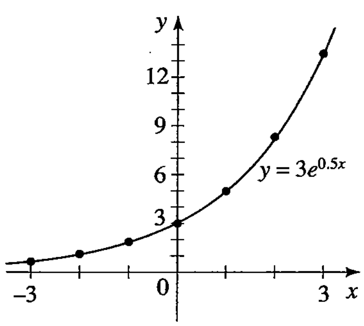


FIGURA 3

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
−3	0.67
−2	1.10
−1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

■

INTERÉS COMPUESTO

La función exponencial natural se presenta en el cálculo del interés continuamente compuesto. Empezamos explicando el interés compuesto.

Si un monto de dinero P, conocido como el **capital**, se invierte a una tasa de interés simple r, entonces después de un periodo el interés es Pr, y el monto A de dinero es

$$A = P + Pr = P(1 + r)$$

Si el interés se reinvierte, el nuevo capital es ahora $P(1 + r)$ y el monto después de otro periodo es $A = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$. De manera similar, después de un tercer periodo el monto es $A = P(1 + r)^3$. En general, después de k periodos, el monto es

$$A = P(1 + r)^k$$

Note que ésta es una función exponencial con base $1 + r$.

Si el interés se calcula n veces al año, entonces en cada periodo la tasa de interés es r/n y existen nt periodos en t años. Esto lleva a la siguiente fórmula para el monto después de t años

A menudo r se conoce como la *tasa de interés anual nominal*.

INTERÉS COMPUESTO

El **interés compuesto** se calcula mediante la fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A = monto después de t años
P = capital
r = tasa de interés
n = veces que se calcula el interés al año
t = número de años

EJEMPLO 3 ■ Cálculo del interés compuesto

Se invierte una suma de \$1,000 a una tasa de interés de 12% al año. Determine los montos en la cuenta después de 3 años si el interés se calcula anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente y diariamente.

SOLUCIÓN Utilizamos la fórmula del interés compuesto con $P = \$1,000$, $r = 0.12$ y $t = 3$.

Periodos de composición	n	**Monto después de 3 años**
Anual	1	$1{,}000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1{,}404.93$
Semestral	2	$1{,}000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1{,}418.52$
Trimestral	4	$1{,}000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1{,}425.76$
Mensual	12	$1{,}000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1{,}430.77$
Diario	365	$1{,}000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1{,}433.24$

■

A partir del ejemplo 3 vemos que el interés pagado aumenta conforme se incrementa el número n de periodos compuestos. Veamos qué ocurre si n se incrementa de manera indefinida. Si hacemos $m = n/r$, entonces

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando m aumenta, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ tiende al número e. Por lo tanto, el monto tiende a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da el monto cuando el interés se compone "a cada instante".

INTERÉS CONTINUAMENTE COMPUESTO

El **interés continuamente compuesto** se calcula con la fórmula

$$A = Pe^{rt}$$

donde A = monto después de t años
P = capital
r = tasa de interés
t = número de años

EJEMPLO 4 ■ Cálculo del interés continuamente compuesto

Determine el monto después de 3 años si se invierten \$1,000 a una tasa de interés de 12% anual, continuamente compuesta.

SOLUCIÓN Utilizamos la fórmula para el interés continuamente compuesto con $P = \$1{,}000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

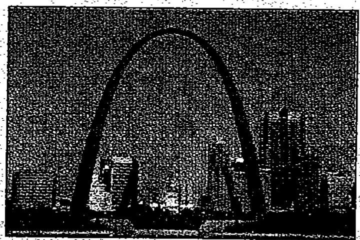
$$A = 1{,}000e^{(0.12)3} = 1{,}000e^{0.36} = \$1{,}433.33$$

Compare esta cantidad con las del ejemplo 3. ■

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Los biólogos han observado que la población de una especie siempre duplica su tamaño en un periodo fijo. Por ejemplo; bajo condiciones ideales una cierta población de bacterias se duplica de tamaño cada 3 horas. Si el cultivo se inicia con 1,000 bacterias, entonces después de 3 horas habrán 2,000 bacterias, después de otras 3 horas habrán 4,000 y así sucesivamente. Si $n = n(t)$ es el número de bacterias después de t horas, entonces

$$\begin{aligned}
n(0) &= 1{,}000 \\
n(3) &= 1{,}000 \cdot 2 \\
n(6) &= (1{,}000 \cdot 2) \cdot 2 = 1{,}000 \cdot 2^2 \\
n(9) &= (1{,}000 \cdot 2^2) \cdot 2 = 1{,}000 \cdot 2^3 \\
n(12) &= (1{,}000 \cdot 2^3) \cdot 2 = 1{,}000 \cdot 2^4
\end{aligned}$$



El **Gateway Arch** en San Luis, Missouri, tiene la forma de la gráfica de una combinación de funciones exponenciales (*no* de una parábola como pudiera parecer a primera vista). Específicamente se trata de una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(véase el ejercicio 43). Se seleccionó esta forma porque es la óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo los tramos de cable suspendidos entre pares de postes telefónicos) cuelgan formando una catenaria.

A partir de este patrón se concluye que el número de bacterias después de t horas es

$$n(t) = 1{,}000 \cdot 2^{t/3}$$

En general, suponga que el tamaño inicial de una población es n_0 y el periodo de duplicación es a. Entonces el tamaño de la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{ct}$$

donde $c = 1/a$. Si conociéramos el tiempo de triplicación b, entonces la fórmula sería $n(t) = n_0 3^{ct}$, donde $c = 1/b$. Estas fórmulas indican que el crecimiento de las bacterias es exponencial. Pero, ¿qué base deberemos utilizar en nuestra fórmula? La respuesta es e, porque entonces se demuestra (utilizando el cálculo) que la fórmula es

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde r es la *tasa relativa de crecimiento de la población, expresada como una proporción de la población en cualquier momento*. Por ejemplo, si $r = 0.02$ entonces en cualquier momento t la tasa de crecimiento es 2% de la población al tiempo t.

Note que la fórmula para el crecimiento de la población es la misma que para el interés continuamente compuesto. De hecho, en ambos casos opera el mismo principio: el crecimiento de una población (o de una inversión) por periodo es proporcional al tamaño de la población (o al monto de la inversión). Una población de 1,000,000 crecerá más en un año que una de 1,000; exactamente de la misma manera, una de $1,000,000 crecerá más en un año que una inversión de $1,000.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Una población que experimenta **crecimiento exponencial** aumenta de acuerdo con la fórmula

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ = población al tiempo t

n_0 = tamaño inicial de la población

r = tasa relativa de crecimiento (expresada como una proporción de la población)

t = tiempo

EJEMPLO 5 ■ Predicción del tamaño de una población

El conteo inicial de bacterias en un cultivo es de 500. Posteriormente un biólogo hace un conteo de muestra y encuentra que la tasa relativa de crecimiento es de 40% por hora.

(a) Obtenga una fórmula para el número $n(t)$ de bacterias después de t horas.
(b) ¿Cuál es el conteo estimado después de 10 horas?
(c) Trace la gráfica de la función $n(t)$

SOLUCIÓN

(a) Utilizamos la fórmula para el crecimiento exponencial de la población con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

(b) Utilizando la fórmula del inciso (a), determinamos que el conteo de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^4 \approx 27{,}300$$

(c) Graficamos varios puntos y trazamos la gráfica de la figura 4.

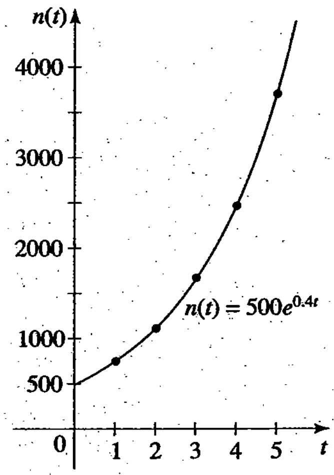


FIGURA 4

■

EJEMPLO 6 ■ Comparación de los efectos de diferentes tasas de crecimiento de población

En 1995 la población en el mundo era de 5,700 millones y la tasa relativa de crecimiento era de 2% al año. Se dice que una tasa de 1.6% anual produciría una diferencia significativa en la población total en sólo unas cuantas décadas. Verifique esta afirmación estimando la población mundial en el año 2035 utilizando una tasa relativa de crecimiento de (a) 2% anual y (b) 1.6% anual.

Grafique las funciones de población para los siguientes 100 años de acuerdo con las dos tasas relativas de crecimiento en el mismo rectángulo de visualización.

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con la fórmula del crecimiento exponencial de la población, tenemos

$$n(t) = 5.7e^{0.02t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y t se mide en años a partir de 1995. Puesto que el año 2035 acaecerá 40 años después de 1995, obtenemos que

$$n(40) = 5.7e^{0.02(40)} = 5.7e^{0.8} \approx 12.7$$

Por lo tanto, la población estimada en el año 2035 será de aproximadamente 13,000 millones.

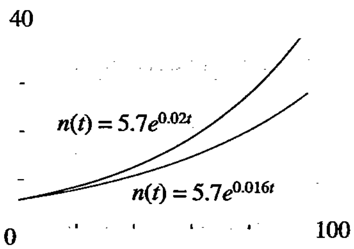


FIGURA 5

(b) Utilizamos la fórmula

$$n(t) = 5.7e^{0.016t}$$

y obtenemos $\quad n(40) = 5.7e^{0.016(40)} = 5.7e^{0.64} \approx 10.8$

Por lo tanto, la población estimada en el año 2035 será de aproximadamente 11,000 millones.

Las gráficas de la figura 5 muestran que una pequeña modificación en la tasa relativa de crecimiento puede, con el transcurso del tiempo, provocar una gran diferencia en el tamaño de la población. ■

EJEMPLO 7 ■ Determinación de la población inicial

Una cierta raza de conejo fue introducida en una pequeña isla hace 8 años. Se estima que la población actual es de 4,100, con una tasa relativa de crecimiento de 55% anual.

(a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?
(b) Estime la población dentro de 12 años a partir de ahora.

SOLUCIÓN

(a) Partiendo de la fórmula del crecimiento exponencial de la población tenemos

$$n(t) = n_0 e^{0.55t}$$

y sabemos que la población al tiempo $t = 8$ es $n(8) = 4{,}100$. Sustituimos lo que sabemos en la ecuación y despejamos función de n_0:

$$4100 = n_0 e^{0.55(8)}$$

$$n_0 = \frac{4100}{e^{0.55(8)}} \approx \frac{4100}{81.45} \approx 50$$

Por lo tanto, estimamos que se introdujeron 50 conejos en la isla.

(b) Ahora que conocemos n_0, escribimos una fórmula para el crecimiento de la población:

$$n(t) = 50e^{0.55t}$$

Dentro de 12 años, $t = 20$ y

$$n(20) = 50e^{0.55(20)} \approx 2{,}993{,}707$$

Por lo tanto, estimamos que la población de conejos en la isla dentro de 12 años será de aproximadamente 3 millones. ■

Otra forma de resolver la parte (b) es suponer que t es el número de años a partir de ahora. En este caso, $n_0 = 4100$ (la población actual). Así, la población 12 años después será

$$n(12) = 4100\, e^{0.55(12)} \approx 3 \text{ millones.}$$

¿La población de conejos del ejemplo 7(b) puede realmente alcanzar una cifra tan elevada? En realidad conforme la isla se va sobrepoblando de conejos, el crecimiento de la población irá disminuyendo debido a la escasez de alimento y otros factores. Un modelo que tome en consideración este tipo de factores, es *la fórmula de crecimiento logístico* que se describe en los ejercicios 31 y 32.

5.2 EJERCICIOS

1-2 ■ Complete la tabla y utilícela para graficar la función.

1. $f(x) = 3e^x$

x	$f(x) = 3e^x$
−2	
−1.5	
−1	
−0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	

2. $g(x) = 2e^{-0.5x}$

x	$g(x) = 2e^{-0.5x}$
−4	
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

3-8 ■ Grafique la función sin trazar puntos, sino partiendo de la gráfica de $y = e^x$ de la figura 1. Determine el dominio, rango y asíntotas.

3. $y = -e^x$

4. $y = 1 - e^x$

5. $y = e^{-x} - 1$

6. $y = -e^{-x}$

7. $y = e^{x-2}$

8. $y = e^{x-3} + 4$

9. Si se invierten \$10,000 a una tasa de interés anual de 10%, compuesto semestralmente, determine el valor de la inversión después del número de años dado.
(a) 5 años (b) 10 años (c) 15 años

10. Si se obtiene un prestamo de \$4,000 a una tasa de 16% de interés anual, compuesto trimestralmente, determine el monto al vencimiento al final del número de años dado.
(a) 4 años (b) 6 años (c) 8 años

11. Si se invierten \$3,000 a una tasa de interés de 9% anual, determine el monto de la inversión al final de 5 años para cada uno de los siguientes modos de interés compuesto.
(a) Anual (b) Semestral
(c) Mensual (d) Semanal
(e) Diario (f) Por hora
(g) Continuo

12. Si se invierten \$4,000 en una cuenta en la cual se calcula el interés compuesto trimestralmente, determine el monto de la inversión al fin de 5 años para cada una de las siguientes tasas de interés
(a) 6% (b) $6\frac{1}{2}$% (c) 7% (d) 8%

13. ¿Cuáles tasas de interés y periodos de cálculo del interés compuesto darían la mejor inversión?
(i) $8\frac{1}{2}$% al año, calculado semestralmente.
(ii) $8\frac{1}{4}$% al año, calculado trimestralmente
(iii) 8% al año, calculado continuamente

14. ¿Cuáles de las tasas de interés dadas y periodos de cálculo de interés compuesto darían la mejor inversión?
(i) $9\frac{1}{4}$% anual, calculado semestralmente
(ii) 9% anual, calculado continuamente

15-16 ■ El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que debe invertirse hoy a una tasa de interés dada, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

15. Determine el valor presente de \$10,000 si el interés se paga a una tasa de 9% anual, compuesta semestralmente durante 3 años.

16. Determine el valor presente de \$100,000 si el interés se paga a una tasa de 8% anual, compuesta mensualmente durante 5 años.

17. El número de bacterias en un cultivo está dado por la fórmula

$$n(t) = 500e^{0.45t}$$

donde t se mide en horas.
(a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de esta población de bacterias? Exprese su respuesta como porcentaje.
(b) ¿Cuál es la población inicial del cultivo (en $t = 0$)?
(c) ¿Cuántas bacterias contendrá el cultivo al tiempo $t = 5$?

18. La población de ratas en la Ciudad de Nueva York está dada por la fórmula

$$n(t) = 54e^{0.12t}$$

donde t se mide en años desde 1990 y $n(t)$ en millones.
(a) ¿Cuáles la tasa relativa de crecimiento de la población? Exprese la respuesta como porcentaje.
(b) ¿Cuál fue la población en 1990?
(c) ¿Cuál es la población esperada para el 2000?
(d) Trace la gráfica de la función de población.

19. La población de zorros en una cierta región tiene una tasa de crecimiento relativo de 8% anual. Se estima que la población en 1992 fue de 18,000.
(a) Determine una fórmula para la población t años después de 1992.
(b) Use la fórmula del inciso (a) para estimar la población en el 2000.
(c) Trace la gráfica de la función de la población de zorros para los años 1992–2000.

20. La población de cierta ciudad tiene una tasa de crecimiento relativo de 5% anual. La población en 1988 era de 421,000. Determine la población proyectada de la ciudad para cada uno de los años que siguen
(a) 2000 (b) 2030

21. La población de un país tiene una tasa de crecimiento relativo de 3% anual. El gobierno intenta reducir el crecimiento a 2%. La población en 1995 era de aproximadamente 110 millones. Determine la población proyectada para el 2020 en cada una de las condiciones siguientes.
(a) La tasa de crecimiento relativo se conserva en 3% anual.
(b) Se reduce la tasa de crecimiento relativo a 2% anual.

22. La población de cierta ciudad era de 680,000 en 1992 y está creciendo una tasa de crecimiento relativo de 12% anual.
(a) Determine una fórmula para la población de esta ciudad t años después de 1992.
(b) Estime la población del 2000.

23. La población de la tierra en 1987 era de 5,000 millones y la tasa de crecimiento relativo se estimó en 2% anual. Suponiendo que la población mundial sigue un modelo de crecimiento exponencial, determine la población mundial proyectada en 1995. (Compare lo anterior con la población real de 5,700 millones en 1995.)

24. La tasa de crecimiento relativo de una determinada población de bacterias es de 80% por hora. Se prepara un pequeño cultivo, y tres horas después un conteo muestra aproximadamente 21,500 bacterias.
(a) Determine el número inicial de bacterias en el cultivo.
(b) Estime el número de bacterias 5 horas después del inicio del cultivo.

25. Bajo condiciones ideales, un cierto tipo de estas bacteria tiene una tasa de crecimiento relativo de 220% por hora. Accidentalmente se introduce un determinado número de estas bacterias en un producto alimenticio. Dos horas después de la contaminación, un conteo bacterial muestra que existen aproximadamente 40,000 bacterias en el alimento.
(a) Determine el número inicial de bacterias introducidas en el alimento.
(b) Estime el número de bacterias en el alimento 3 horas después de la contaminación.

26. Una sustancia radiactiva se desintegra de forma que la cantidad de masa que queda después de t días está dada por la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.
(a) Determine la masa en el tiempo $t = 0$
(b) ¿Cuánta masa queda después de 45 días?

27. Los médicos utilizan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertos desórdenes de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra de forma que la masa que queda después de t días está dada por la función

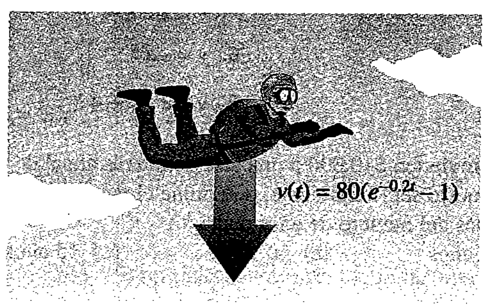
$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ está dada en gramos.
(a) Determine la masa en el tiempo $t = 0$.
(b) ¿Cuánta masa queda después de 20 días?

28. Un paracaidista deportivo salta desde una altura razonable. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se demuestra que la velocidad del paracaidista en el tiempo t está dada por

$$v(t) = 80(e^{-0.2t} - 1)$$

donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).



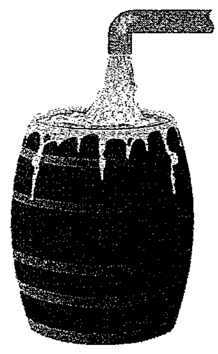
(a) Determine la velocidad inicial del paracaidista.
(b) Determine la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

(c) Trace la gráfica de la función de la velocidad $v(t)$.
(d) La velocidad máxima de un objeto en caída con resistencia del viento se conoce como *velocidad terminal*. A partir de la gráfica del inciso (c), determine la velocidad terminal de este paracaidista.

29. Un barril de 50 galones está lleno de agua pura. Entonces se bombea en el barril agua salada con una concentración de 0.3 lb/gal, y la mezcla resultante se derrama a la misma velocidad. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t está dada por

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.
(a) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?
(b) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?
(c) Trace la gráfica de la función $Q(t)$.
(d) Use la gráfica del inciso (c) para determinar el valor al que tiende la cantidad de sal en el barril conforme t se hace grande. ¿Es esto lo que usted esperaba?



$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$

30. Se invierte un monto de $5,000 a una tasa de interés de 9% anual, compuesto semestralmente.
(a) Determine el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.
(b) Trace la gráfica de $A(t)$.
(c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo la inversión alcanzará el valor de $25,000.

31. Suponga que la población de conejos del ejemplo 7 se comporta de acuerdo con la *fórmula de crecimiento logístico*

$$n(t) = \frac{300}{0.05 + \left(\dfrac{300}{n_0} - 0.05\right)e^{-0.55t}}$$

donde n_0 es la población inicial de conejos.
(a) Si la población inicial es de 50 conejos, ¿cuál será la población después de 12 años?
(b) Obtenga en el rectángulo de visualización [0, 15] por [0, 12,000], las gráficas de la función $n(t)$ para $n_0 = 50$, 500, 2,000, 8,000 y 12,000
(c) A partir de las gráficas del inciso (b) observe que, independientemente de la población inicial, conforme pasa el tiempo la población de conejos parecería acercarse a un cierto número. ¿Cuál es éste? (Es el número de conejos que la isla puede sostener.)

32. La población de una especie de ave está limitada por el tipo de hábitat necesario para la anidación. La población está modelada por la *fórmula de crecimiento logístico*

$$n(t) = \frac{5{,}600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

donde t se mide en años.
(a) Determine la población inicial de aves.
(b) Trace la gráfica de la función $n(t)$.
(c) ¿A qué tamaño tiende la población conforme transcurre el tiempo?

33. Auxíliece con una calculadora para graficar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para $x \geqslant 0$. Use entonces el hecho de que f es una función par para trazar el resto de la gráfica.

34. (a) Compare las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3$ trazando sus gráficas en cada uno de los siguientes rectángulos de visualización:
(i) [0, 3] por [0, 15]
(ii) [0, 6] por [0, 120]
(iii) [0, 20] por [0, 10,000]
(b) Determine las soluciones de la ecuación $e^x = x^3$, y exprésela a dos decimales.

35. La *función coseno hiperbólico* se define como

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Trace la gráfica de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes y utilice la suma gráfica (véase la sección 2.6) para trazar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

36. La *función de seno hiperbólico* está definida por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Trace la gráfica de esta función utilizando la suma gráfica como en el ejercicio 35.

37-40 ■ Use las definiciones de los ejercicios 35 y 36 para probar la identidad.

37. $\cosh(-x) = \cosh(x)$

38. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$

39. $[\cosh(x)]^2 - [\operatorname{senh}(x)]^2 = 1$

40. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

41. Ilustre la definición del número e graficando la curva $y = (1+1/x)^x$ y la recta $y = e$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

42. Investigue el comportamiento de la función

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

cuando $x \to \infty$ graficando f y la recta $y = 1/e$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[0, 20]$ por $[0, 1]$.

43. (a) Trace las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5, 1, 1.5$ y 2.

(b) ¿Cómo afecta a la gráfica un valor más grande de a?

44. Grafique la función $y = e^x/x$ y comente acerca de las asíntotas verticales y horizontales.

45-46 ■ Determine los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el cual ocurre cada uno. Exprese cada respuesta a dos decimales.

45. $f(x) = xe^{-x}$ **46.** $f(x) = e^x + e^{-3x}$

5.3 FUNCIONES LOGARITMO

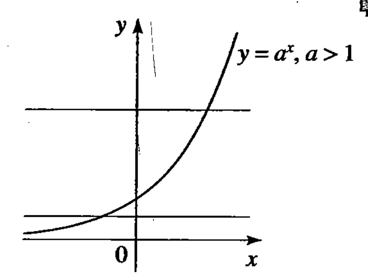


FIGURA 1
$f(x) = a^x$ es uno a uno

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función uno a uno según el criterio de la recta horizontal (véase la figura 1 para el caso $a > 1$) y, por lo tanto, tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se conoce como la *función logaritmo con base a* y se denota como $\log_a$. Recuerde de la sección 2.7 que f^{-1} está definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto nos lleva a la siguiente definición de la función logaritmo.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logaritmo con base a**, denotada por $\log_a$, se define como

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$\log_a x = y$ se lee "el logaritmo de x con base a es y."

Es decir que

$\log_a$ es el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener x.

Por tradición, el nombre de la función logaritmo es $\log_a$ y no una sola letra. También, por lo general, omitimos los paréntesis en la notación de la función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando usamos la definición de logaritmos para intercambiar una de otra entre la **forma logaritmo** $\log_a x = y$ y la **exponencial** $a^y = x$, resulta útil notar que para ambas formas la base es la misma:

Forma logaritmo	**Forma exponencial**
exponente ↓	exponente ↓
$\log_a x = y$	$a^y = x$
↑ base	↑ base

Los siguientes ejemplos ilustran cómo intercambiar una ecuación de una de estas formas a la otra.

EJEMPLO 1 ■ Formas logaritmo y exponencial

Las formas logaritmo y exponencial son ecuaciones equivalentes —si una es verdadera también lo será la otra—. Por lo tanto podemos pasar de una forma a la otra como en los siguientes casos.

Forma logaritmo	**Forma exponencial**
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2(\frac{1}{8}) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

■

x	$\log_{10} x$
10	1
10^2	2
10^3	3
10^4	4
10^{-1}	−1
10^{-2}	−2
10^{-3}	−3
10^{-4}	−4

Es importante comprender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números en la columna derecha de la tabla al margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ■ Evaluación de logaritmos

(a) $\log_{10} 1{,}000 = 3$ porque $10^3 = 1{,}000$

(b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

(c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

(d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$ ■

GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARITMO

Recuerde que si una función f uno a uno tiene dominio A y contradominio B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y contradominio A. Puesto que la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y contradominio $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y un contradominio $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) es una función que crece muy rápido, para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función que crece lentamente para $x > 1$ (véase el ejercicio 74).

Note que puesto que $a^0 = 1$, tenemos

$$\log_a 1 = 0$$

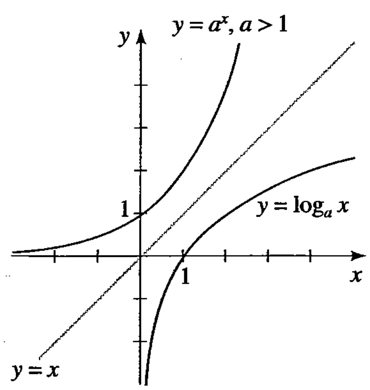


FIGURA 2
Gráfica de la función logaritmo $f(x) = \log_a x$.

y, por lo tanto, la intersección en x de la función $y = \log_a x$ es 1. Note también que debido a que el eje x es una asíntota horizontal de $y = a^x$, el eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$. De hecho, usando la notación de la sección 3.5, escribimos

$$\log_a x \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+$$

para el caso $a > 1$

EJEMPLO 3 ■ Gráfica de una función logaritmo trazando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

SOLUCIÓN Para elaborar una tabla de valores, escogemos los valores de x como potencias de 2 para encontrar fácilmente sus logaritmos. Graficamos estos puntos y los unimos con una curva suave como en la figura 3.

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
2^2	2
2^3	3
2^4	4
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

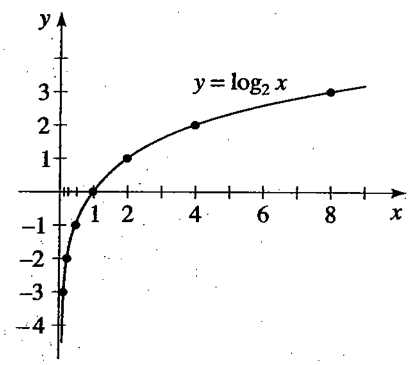


FIGURA 3 ■

La figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logaritmo con base 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se han dibujado reflejando las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (véase la figura 4 de la sección 5.1) en la recta $y = x$. También podemos graficar puntos como una ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el ejemplo 3.

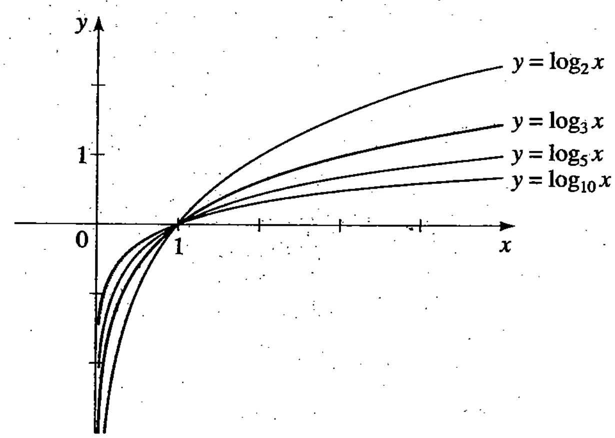


FIGURA 4
Familia de funciones logaritmo

En los dos ejemplos siguientes, graficamos funciones logaritmo comenzando con las gráficas básicas de la figura 4.

EJEMPLO 4 ■ Reflexión de gráficas de funciones logaritmo

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = -\log_2 x$ (b) $g(x) = \log_2 (-x)$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $y = \log_2 x$ de la figura 5(a) y la reflejamos en el eje x para obtener la de $f(x) = -\log_2 x$ *que se muestra* en la figura 5(b).

(b) Para obtener la de $g(x) = \log_2(-x)$, reflejamos la de $y = \log_2 x$ en el eje y. Véase la figura 5(c).

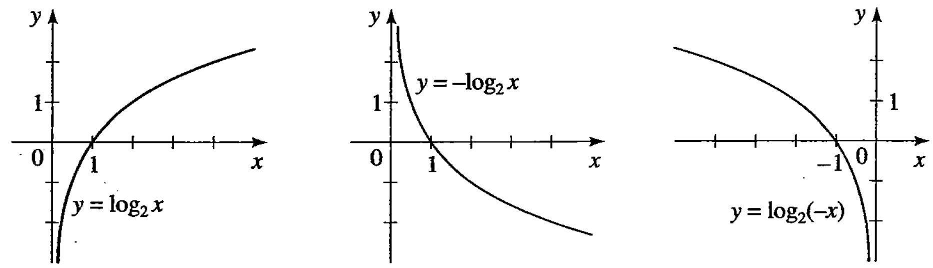


FIGURA 5 (a) (b) (c)

EJEMPLO 5 ■ Desplazamiento de gráficas de funciones logaritmo

Determine el dominio de cada función y trace la gráfica.

(a) $f(x) = 2 + \log_5 x$ (b) $g(x) = \log_{10}(x - 3)$

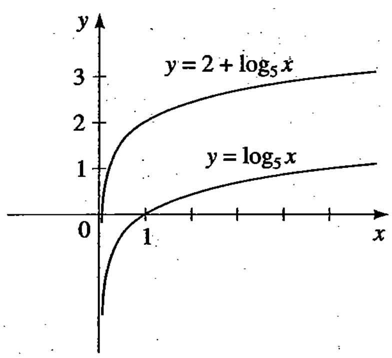


FIGURA 6

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de f se obtiene a partir de la de $y = \log_5 x$ (figura 4) desplazándola 2 unidades hacia arriba (véase la figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

(b) La gráfica de g se obtiene a partir de la de $y = \log_{10} x$ (figura 4) desplazándola 3 unidades hacia la derecha (véase la figura 7). La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. El dominio de $y = \log_a x$ es el intervalo $(0, \infty)$, por lo que $\log_{10} x$ sólo está definido cuando $x > 0$. Por lo tanto, el dominio de $g(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$

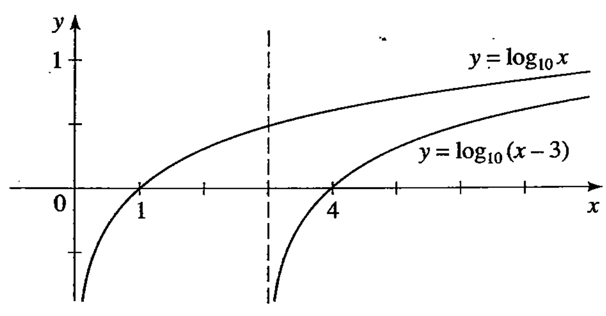


FIGURA 7

Anteriormente vimos que una función f y su función inversa f^{-1} satisfacen las ecuaciones

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para } x \text{ en el dominio de } f$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

Cuando estas ecuaciones se aplican a $f(x) = a^x$ y a $f^{-1}(x) = \log_a x$, se convierten en

$$\log_a(a^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$$

A continuación listamos estas y otras propiedades de los logaritmos analizadas en esta sección.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Propiedad	Justificación
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la cual debe elevarse a para obtener x.

EJEMPLO 6 ■ Aplicación de las propiedades de los logaritmos

Ilustramos las propiedades de los logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$ Propiedad 1 $\qquad$ $\log_5 5 = 1$ Propiedad 2

$\log_5 5^8 = 8$ Propiedad 3 $\qquad$ $5^{\log_5 12} = 12$ Propiedad 4 ■

LOGARITMOS COMUNES Y NATURALES

Hoy día utilizamos una calculadora para evaluar los logaritmos con base 10 (logaritmos comunes) y con base e (logaritmos naturales). En la siguiente sección veremos que podemos usar una calculadora para determinar logaritmos con *cualquier* base.

LOGARITMO COMÚN

El logaritmo con base 10 se conoce como **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

A partir de la definición de logaritmo determinamos que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo se determina log 50? Necesitamos determinar el exponente y tal que $10^y = 50$. Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 demasiado grande. Por esto

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación experimentamos para encontrar una potencia de 10 más cercana a 50. Afortunadamente, las calculadoras científicas están equipadas con la tecla $\boxed{\log}$ que da directamente los valores de los logaritmos comunes.

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de logaritmos comunes

Utilice una calculadora para obtener valores apropiados de $f(x) = \log x$ para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN Elaboramos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de x que no son potencias de 10. Graficamos estos puntos y los unimos con una curva suave como en la figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1
15	1.176

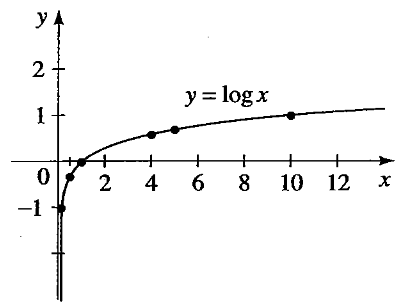


FIGURA 8 ■

De todas las posibles bases a para logaritmos, resulta que la elección más conveniente para fines del cálculo es el número e, mismo que se definió en la sección 5.2.

La notación ln es la abreviatura para logaritmo natural

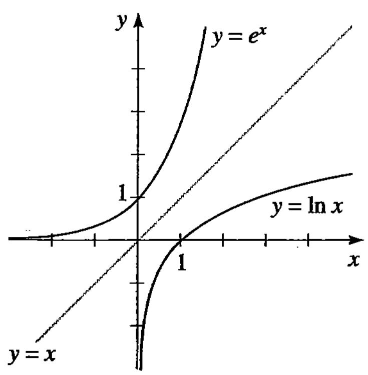


FIGURA 9
Gráfica de la función logaritmo natural

LOGARITMO NATURAL

El logaritmo con base e se conoce como **logaritmo natural** y se denota por **ln**:

$$\ln x = \log_e x$$

La función logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$. Ambas funciones están graficadas en la figura 9. Por la definición de función inversa tenemos

$$\boxed{\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$$

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" en vez de "$\log_e$" en las propiedades de los logaritmos antes mencionadas, obtenemos las propiedades siguientes de los logaritmos naturales.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS NATURALES

Propiedad	Justificación
1. $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la cual debe elevarse e para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con la tecla $\boxed{\ln}$ que da directamente los valores de los logaritmos naturales.

EJEMPLO 8 ■ Evaluación de la función logaritmo natural

(a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

(c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla $\boxed{\ln}$ de la calculadora ■

EJEMPLO 9 ■ Determinación del dominio de una función logarítmo

Determine el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

SOLUCIÓN Como en el caso de cualquier función logaritmo, $\ln x$ está definido cuando $x > 0$. Así, el dominio de f es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$ ■

EJEMPLO 10 ■ Trazo de la gráfica de una función logaritmo

Trace la gráfica de la función $y = x \ln(4 - x^2)$ y utilícela para determinar las asíntotas y los valores de de los máximos y mínimos locales.

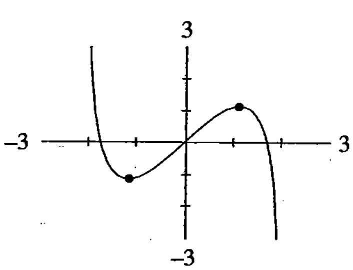


FIGURA 10
$y = x \ln(4 - x^2)$

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 9, el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, por lo que escogemos el rectángulo de visualización $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la figura 10, y a partir de ella vemos que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto que es máximo local a la derecha de $x = 1$ y un punto que es mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Amplificando la gráfica encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y éste ocurre cuando $x \approx 1.15$. De manera similar (o bien observando que la función es impar) encontramos que el valor mínimo local es aproximadamente -1.13, y ocurre cuando $x \approx -1.15$. ■

5.3 EJERCICIOS

1-6 ■ Exprese la ecuación dada en forma exponencial.

1. (a) $\log_2 32 = 5$ (b) $\log_5 1 = 0$

2. (a) $\log_{10} 0.1 = -1$ (b) $\log_4 512 = 3$

3. (a) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ (b) $\log_2 (\frac{1}{16}) = -4$

4. (a) $\log_3 81 = 4$ (b) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

5. (a) $\ln 5 = x$ (b) $\ln y = 5$

6. (a) $\ln(x + 1) = 2$ (b) $\ln(x - 1) = 4$

7-12 ■ Exprese la ecuación dada en forma de logaritmo.

7. (a) $2^3 = 8$ (b) $10^{-3} = 0.001$

8. (a) $10^4 = 10{,}000$ (b) $81^{1/2} = 9$

9. (a) $4^{-3/2} = 0.125$ (b) $7^3 = 343$

10. (a) $8^{-1} = \frac{1}{8}$ (b) $10^m = n$

11. (a) $e^x = 2$ (b) $e^3 = y$

12. (a) $e^{x+1} = 0.5$ (b) $e^{0.5x} = t$

13-22 ■ Evalúe la expresión dada.

13. (a) $\log_5 5^4$ (b) $\log_4 64$ (c) $\log_9 9$

14. (a) $\log_3 3$ (b) $\log_3 1$ (c) $\log_3 3^2$

15. (a) $\log_8 64$ (b) $\log_7 49$ (c) $\log_7 7^{10}$

16. (a) $\log_2 32$ (b) $\log_8 8^{17}$ (c) $\log_6 1$

17. (a) $\log_3 (\frac{1}{27})$ (b) $\log_{10}\sqrt{10}$ (c) $\log_5 0.2$

18. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_{49} 7$ (c) $\log_9 \sqrt{3}$

19. (a) $2^{\log_2 37}$ (b) $3^{\log_3 8}$ (c) $e^{\ln\sqrt{5}}$

20. (a) $e^{\ln \pi}$ (b) $10^{\log 5}$ (c) $10^{\log 87}$

21. (a) $\log_8 0.25$ (b) $\ln e^4$ (c) $\ln(1/e)$

22. (a) $\log_4 \sqrt{2}$ (b) $\log_4 (\frac{1}{2})$ (c) $\log_4 8$

23-28 ■ Use la definición de función logaritmo para determinar x.

23. (a) $\log_2 x = 5$ (b) $\log_2 16 = x$

24. (a) $\log_5 x = 4$ (b) $\log_{10} 0.1 = x$

25. (a) $\log_{10} x = 2$ (b) $\log_5 x = 2$

26. (a) $\log_x 1000 = 3$ (b) $\log_x 25 = 2$

27. (a) $\log_x 16 = 4$ (b) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

28. (a) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ (b) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

29-32 ■ Use una calculadora para evaluar la expresión, y exprese la respuesta a cuatro decimales.

29. (a) $\log 2$ (b) $\log 35.2$ (c) $\log (\frac{2}{3})$

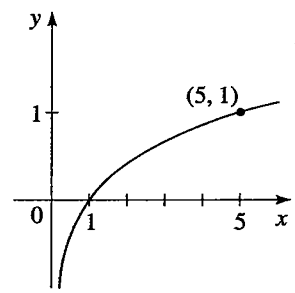
30. (a) $\log 50$ (b) $\log \sqrt{2}$ (c) $\log(3\sqrt{2})$

31. (a) $\ln 5$ (b) $\ln 25.3$ (c) $\ln(1 + \sqrt{3})$

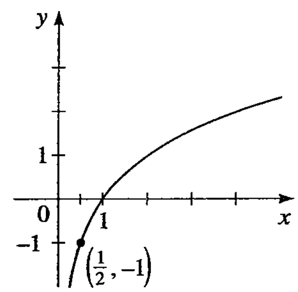
32. (a) $\ln 27$ (b) $\ln 7.39$ (c) $\ln 54.6$

33-36 ■ Determine la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

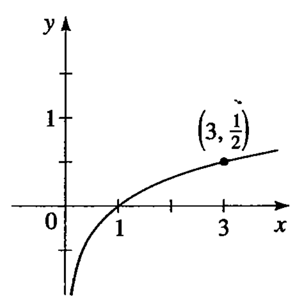
33.



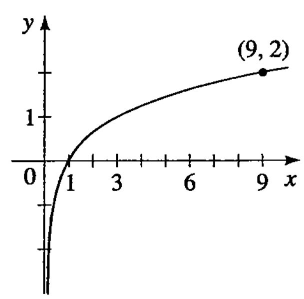
34.



35.



36.



37-42 ■ Relacione la función logaritmo dada con alguna de las gráficas identificadas como I–VI de la página 312.

37. $f(x) = -\ln x$

38. $f(x) = \ln(x - 2)$

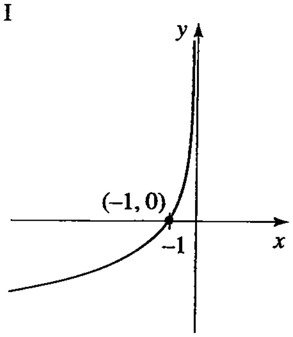
39. $f(x) = 2 + \ln x$

40. $f(x) = \ln(-x)$

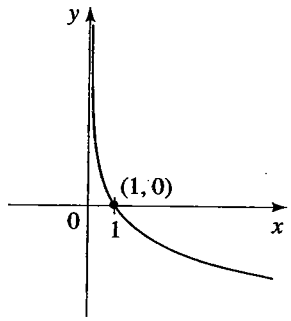
41. $f(x) = \ln(2 - x)$

42. $f(x) = -\ln(-x)$

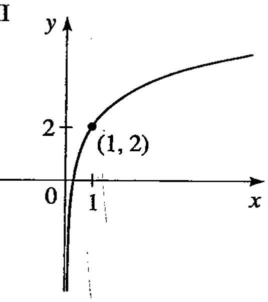
I



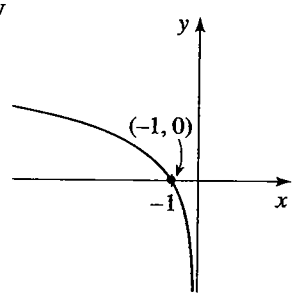
II



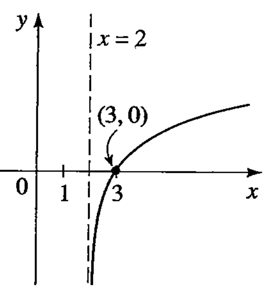
III



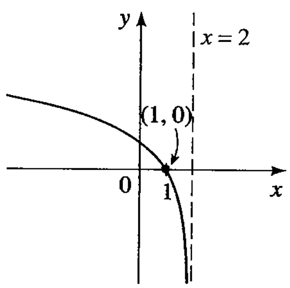
IV



V



VI



43. Trace la gráfica de $y = 4^x$, y después úsela para trazar la gráfica de $y = \log_4 x$.

44. Trace la gráfica de $y = 3^x$, y después úsela para trazar la gráfica de $y = \log_3 x$.

45-54 ■ Grafique la función, sin trazar puntos, sino partiendo de las gráficas de las figuras 4 y 9. Diga cuál es el dominio, el contradominio y las asíntotas.

45. $f(x) = \log_2(x - 4)$ **46.** $f(x) = -\log_{10} x$

47. $g(x) = \log_5(-x)$ **48.** $g(x) = \ln(x + 2)$

49. $y = 2 + \log_3 x$ **50.** $y = \log_3(x - 1) - 2$

51. $y = 1 - \log_{10} x$ **52.** $y = 1 + \ln(-x)$

53. $y = |\ln x|$ **54.** $y = \ln|x|$

55-60 ■ Determine el dominio de la función dada.

55. $f(x) = \log_{10}(2 + 5x)$ **56.** $f(x) = \log_2(10 - 3x)$

57. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **58.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

59. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

60. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

61-66 ■ Obtenga la gráfica de la función en un rectángulo de visualización adecuado y utilícela para determinar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

61. $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **62.** $y = \ln(x^2 - x)$

63. $y = x + \ln x$ **64.** $y = x(\ln x)^2$

65. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **66.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

67. Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ obteniendo su gráfica en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

68. (a) Obteniendo la gráfica de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de visualización apropiado, demuestre que incluso cuando un función logaritmo empieza más arriba que una función raíz cuadrada, finalmente será alcanzada por ésta.

(b) Determine, aproximadas a dos decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

69-70 ■ Se da una familia de funciones.
(a) Trace las gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4.
(b) ¿De qué manera están relacionadas las gráficas del inciso (a)?

69. $f(x) = \log(cx)$ **70.** $f(x) = c \log x$

71-72 ■ Se da la función $f(x)$.
(a) Determine el dominio de la función f.
(b) Determine la función inversa de f.

71. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$ **72.** $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

73. (a) Determine la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

(b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

74. Altura de la gráfica de una función logaritmo Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ se traza en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es una pulgada.

(a) Demuestre que a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica es de aproximadamente 265 millas.

(b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, qué tan lejos hacia la derecha del origen tendremos que ir antes de que la altura de la curva alcance 2 pies.

75. **Googolplex** Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Determine el log (log(googol)) así como el log(log(log(googolplex))).

76. **Comparación de logaritmos** ¿Cuál es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento,

77. **Número de dígitos en un entero** Compare log 1,000 con el número de dígitos de 1,000. Haga lo mismo para 10,000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1,000 y 10,000? ¿Entre qué par de valores se encuentra el logaritmo común de ese número? Utilice sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos en cualquier entero positivo x es $[[\log x]] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la función mayor entero definida en la sección 2.2.)

5.4 LEYES DE LOS LOGARITMOS

Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes son la base de las leyes de los logaritmos. Estas propiedades le dan a las funciones logaritmo una amplia gama de aplicaciones, como se verá en la sección 5.6.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean $A > 0$, $B > 0$ y C, números reales cualesquiera.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

■ **Demostración** Utilizamos la propiedad $\log_a a^x = x$ de la sección 4.3.

1. Supongamos que $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$

Cuando se escriben en forma exponencial, estas ecuaciones se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Por lo tanto

$$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$$

$$= u + v = \log_a A + \log_a B$$

John Napier (1550–1617) fue un hacendado escocés para quien las matemáticas eran un pasatiempo. Hoy día se le conoce principalmente como el inventor de los logaritmos. Publicó su invención en 1614 bajo el título de *A Description of the Marvelous Rule of Logarithms*. En tiempos de Napier los logaritmos se utilizaban exclusivamente para simplificar cálculos complicados. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes los escribimos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261{,}872{,}564 \end{aligned}$$

La idea es que es fácil multiplicar potencias de 10 (simplemente sumamos sus exponentes). Napier elaboró extensas tablas dando los logaritmos (o exponentes) de los números. Desde el advenimiento de las calculadoras y las computadoras, los logaritmos ya no se utilizan para este fin. Sin embargo, las funciones logaritmo, han encontrado muchas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre muchos otros temas. Una de sus obras más curiosas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el cual predecía que el mundo se terminaría en el año 1700.

2. Utilizando la ley 1 tenemos

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

por lo que $$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

3. Sea $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C\log_a A \qquad \square$$

Como muestran los ejemplos siguientes, estas leyes se utilizan en ambas direcciones. Puesto que el dominio de cualquier función logaritmo es el intervalo $(0, \infty)$, suponemos que todas las cantidades cuyos logaritmos se consideran son positivas.

EJEMPLO 1 ■ Uso de las leyes de los logaritmos para expandir expresiones

Use las leyes de logaritmos para reescribir cada expresión.

(a) $\log_2(6x)$ (b) $\log\sqrt{5}$

(c) $\log_5(x^3y^6)$ (d) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

SOLUCIÓN

(a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ Ley 1

(b) $\log\sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \frac{1}{2}\log 5$ Ley 3

(c) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ Ley 3

(d) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ Ley 3 ■

EJEMPLO 2 ■ Uso de las leyes de los logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe cada expresión

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$ (b) $\log_2 80 - \log_2 5$ (c) $-\frac{1}{3}\log 8$

SOLUCIÓN

(a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$ Ley 1

$= \log_4 64 = 3$ Porque $4^3 = 64$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2(\frac{80}{5})$ Ley 2

$= \log_2 16 = 4$ Porque $2^4 = 16$

(c) $$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}\log 8 &= \log 8^{-1/3} && \text{Ley 3} \\ &= \log\left(\tfrac{1}{2}\right) && \text{Propiedad de los exponentes negativos} \\ &\approx -0.301 && \text{Use una calculadora} \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 ■ Escribir una expresión como un solo logaritmo

Exprese $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\log x + \tfrac{1}{2}\log(x+1) &= \log x^3 + \log(x+1)^{1/2} && \text{Ley 3} \\ &= \log\left(x^3(x+1)^{1/2}\right) && \text{Ley 1} \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 ■ Escribir una expresión como un solo logaritmo

Exprese $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1)$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\ln s + \tfrac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 3} \\ &= \ln(s^3t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 1} \\ &= \ln\left(\frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right) && \text{Ley 2} \end{aligned}$$ ■

ADVERTENCIA Aunque las leyes de los logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o cociente, *no existe una regla correspondiente para el logaritmo de una suma o de una diferencia*. Por ejemplo

$$\log_a(x+y) \cancel{=} \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$.

Tampoco simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo

$$\frac{\log 6}{\log 2} \cancel{=} \log\left(\frac{6}{2}\right)$$

$$(\log_2 x)^3 \cancel{=} 3\log_2 x$$

CAMBIO DE BASE

Para algunos fines, resulta útil cambiar de logaritmos con una base a logaritmos con otra. Consideremos que se nos da $\log_a x$ y deseamos determinar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos lo anterior en forma exponencial y tomamos el logaritmo con base a en ambos lados.

$b^y = x$	Forma exponencial
$\log_a(b^y) = \log_a x$	Tome el $\log_a$ en ambos lados
$y \log_a b = \log_a x$	Ley 3
$y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$	Divida por $\log_a b$

Esto prueba la fórmula siguiente

Podemos escribir la fórmula del cambio de base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Así $\log_b x$ es simplemente un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\dfrac{1}{\log_a b}$

FÓRMULA DE CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si hacemos $x = a$, entonces $\log_a a = 1$ y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo con *cualquier* base utilizando la fórmula del cambio de base para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o naturales y después utilizando una calculadora.

EJEMPLO 5 ■ Uso de la fórmula del cambio de base para evaluar logaritmos

Utilice la fórmula del cambio de base y los logaritmos comunes o naturales para evaluar cada uno de los siguientes logaritmos, y exprese la respuesta a cinco decimales.

(a) $\log_8 5$ (b) $\log_9 20$

SOLUCIÓN

(a) Utilizamos la fórmula del cambio de base con $b = 8$ y $a = 10$ para hacer la conversión a logaritmos comunes.

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

(b) Utilizamos la fórmula del cambio de base con $b = 9$ y $a = e$ para convertir a logaritmos naturales.

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

■

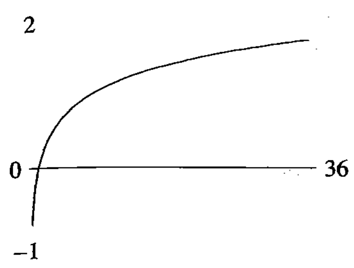


FIGURA 1

$f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

EJEMPLO 6 ■ Uso de la fórmula de cambio de base para graficar una función logaritmo

Use una calculadora graficadora para graficar $f(x) = \log_6 x$.

SOLUCIÓN Las calculadoras no tienen una tecla para $\log_6$, por lo que utilizamos la fórmula del cambio de base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Dado que las calculadoras tienen una tecla $\boxed{\ln}$, introducimos esta nueva forma de la función y la graficamos. La gráfica se muestra en la figura 1. ■

5.4 EJERCICIOS

1-24 ■ Use las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión dada en una forma sin logaritmo de un producto, cociente o potencia.

1. $\log_2(x(x-1))$

2. $\log_5\left(\dfrac{x}{2}\right)$

3. $\log 7^{23}$

4. $\ln(\pi x)$

5. $\log_2(AB^2)$

6. $\log_6\sqrt[4]{17}$

7. $\log_3(x\sqrt{y})$

8. $\log_2(xy)^{10}$

9. $\log_5\sqrt[3]{x^2+1}$

10. $\log_{12}\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$

11. $\ln\sqrt{ab}$

12. $\ln\sqrt[3]{3r^2s}$

13. $\log\left(\dfrac{x^3y^4}{z^6}\right)$

14. $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$

15. $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

16. $\log_5\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

17. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$

18. $\ln\dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$

19. $\log\sqrt[4]{x^2+y^2}$

20. $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$

21. $\log\sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$

22. $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

23. $\ln\left(\dfrac{z^4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2+6y+17}}\right)$

24. $\log\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

25-34 ■ Evalúe la expresión dada.

25. $\log_5\sqrt{125}$

26. $\log_2 112 - \log_2 7$

27. $\log 2 + \log 5$

28. $\log\sqrt{0.1}$

29. $\log_4 192 - \log_4 3$

30. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

31. $\ln 6 - \ln 15 + \ln 20$

32. $e^{3\ln 5}$

33. $10^{2\log 4}$

34. $\log_2 8^{33}$

35-44 ■ Reescriba la expresión dada como un solo logaritmo

35. $\log_3 5 + 5\log_3 2$

36. $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2$

37. $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

38. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$

39. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

40. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$

41. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

42. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_3 z)$

43. $\frac{1}{3}\log(2x+1) + \frac{1}{2}[\log(x-4) - \log(x^4-x^2-1)]$

44. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

45-52 ■ Use la fórmula del cambio de base y una calculadora para evaluar el logaritmo, y exprese el valor a seis decimales. Utilice logaritmos naturales o comunes.

45. $\log_2 7$

46. $\log_5 2$

47. $\log_3 11$

48. $\log_6 92$

49. $\log_7 3.58$

50. $\log_6 532$

51. $\log_4 322$

52. $\log_{12} 2.5$

53. Utilice la fórmula del cambio de base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

Después utilice este hecho para trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

54. Obtenga la gráfica de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2, e, 5$ y 10 en la misma pantalla, utilizando el rectángulo de visualización $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

55. Utilice la fórmula del cambio de base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

56. Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

57. Demuestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

58. **¿Es la ecuación una identidad?** Analice cada una de las ecuaciones y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore valores de las variables para los cuales cualquier término queda indefinido.)

(a) $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log x}{\log y}$

(b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

(c) $\log_5\left(\dfrac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

(d) $\log 2^z = z \log 2$

(e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

(f) $\dfrac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

(g) $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

(h) $\log_a a^a = a$

(i) $\log(x - y) = \dfrac{\log x}{\log y}$

(j) $-\ln\left(\dfrac{1}{A}\right) = \ln A$

59. **Encuentre el error** ¿Qué está mal en el desarrollo siguiente?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

60. **Desplazamiento, compresión y extensión de las gráficas de funciones** Suponga que $f(x) = x^2$. Demuestre que $f(2x) = 4f(x)$ y explique cómo muestra esto que la compresión horizontal de la gráfica de f tiene el mismo efecto que si se le alarga verticalmente. Después utilice las identidades $e^{2+x} = e^2 e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para demostrar que para $g(x) = e^x$, un desplazamiento horizontal es lo mismo que un alargamiento vertical, y que para $h(x) = \ln x$, una compresión horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

5.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En esta sección resolvemos ecuaciones que involucran funciones exponencial o de logaritmo. Las técnicas que desarrollaremos se utilizarán en la sección siguiente para la resolución de problemas de aplicaciones.

ECUACIONES EXPONENCIALES

En una ecuación exponencial la variable se presenta en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para encarar este problema tomamos el logaritmo de ambos lados y después usamos las leyes de los logaritmos para "bajar a x" del exponente.

$$2^x = 7$$

$$\ln 2^x = \ln 7 \qquad \text{Tome ln en ambos lados}$$

$$x \ln 2 = \ln 7 \qquad \text{Ley 3 ("baje" el exponente)}$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2} \qquad \text{Despeje } x$$

$$\approx 2.807 \qquad \text{Use una calculadora}$$

Recuerde que la ley 3 de las leyes de los logaritmos dice que $\log_a A^C = C \log_a A$.

El método que utilizamos para resolver $2^x = 7$ es típico de los métodos que usamos para resolver todas las ecuaciones exponenciales, y se puede resumir en los tres pasos siguientes.

SUGERENCIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial de un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de ambos lados, y después utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 1 ■ Resolución de una ecuación exponencial

Determine la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, y exprese la respuesta a seis decimales.

SOLUCIÓN Tomamos el logaritmo común de ambos lados y utilizamos la ley 3.

$$3^{x+2} = 7$$

$$\log(3^{x+2}) = \log 7 \qquad \text{Tome el logaritmo de ambos lados}$$

$$(x+2)\log 3 = \log 7 \qquad \text{Ley 3 ("baje" el exponente)}$$

$$x + 2 = \frac{\log 7}{\log 3} \qquad \text{Divida por log3}$$

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2 \qquad \text{Reste 2}$$

$$\approx -0.228756 \qquad \text{Use una calculadora}$$

Podríamos utilizar logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, utilizando los mismos pasos obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

COMPRUEBE SU RESPUESTA ■ Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y utilizando una calculadora obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✓$$

■

EJEMPLO 2 ■ Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$

SOLUCIÓN Primero dividimos entre 8 con la finalidad de aislar el término exponencial de una lado de la ecuación.

$$8e^{2x} = 20$$

$$e^{2x} = \tfrac{20}{8} \qquad \text{Divida entre 8}$$

$$\ln e^{2x} = \ln 2.5 \qquad \text{Tome ln de ambos lados}$$

$$2x = \ln 2.5 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$x = \frac{\ln 2.5}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

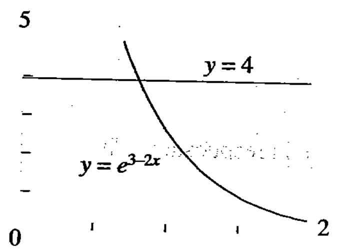
$$\approx 0.458 \qquad \text{Use una calculadora}$$

■

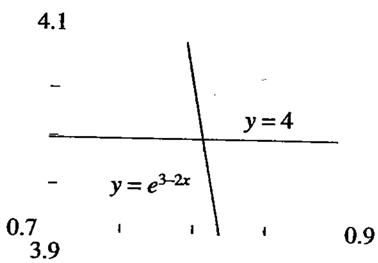
COMPRUEBE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora obtenemos $8e^{2(0.458)} \approx 20$. ✓

Un método alterno es la resolución gráfica (véase la sección 1.9). Para la ecuación del ejemplo 3, obtenemos las gráficas de $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de visualización.



Amplificando en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que la solución es $x \approx 0.807$.



EJEMPLO 3 ■ Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$.

SOLUCIÓN Puesto que la base del término exponencial es e, para resolver esta ecuación utilizaremos logaritmos naturales.

$$\ln(e^{3-2x}) = \ln 4 \qquad \text{Tome ln de ambos lados}$$

$$3 - 2x = \ln 4 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$2x = 3 - \ln 4$$

$$x = \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807$$

Verifique que esta respuesta satisface la ecuación original. ■

EJEMPLO 4 ■ Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Para aislar el término exponencial, factorizamos

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de los exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorice (expresión cuadrática en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

La ecuación $e^x = 3$ nos lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Por lo tanto, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Compruebe que esta respuesta satisface la ecuación original. ■

EJEMPLO 5 ■ Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3x^2e^x + x^3e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3x^2e^x + x^3e^x = 0$$

$$(3x^2 + x^3)e^x = 0 \qquad \text{Factorice y cancele } e^x$$

$$x^2(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorice y cancele } x^2$$

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \quad \text{o} \quad e^x = 0 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = -3$$

La ecuación $e^x = 0$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Por lo tanto, $x = 0$ y $x = -3$ son las únicas soluciones. ■

COMPRUEBE SUS RESPUESTAS

$x = 0$

$$3(0)^3e^0 + 0^3e^0 = 0 \quad ✓$$

$x = -3$:

$$3(-3)^2e^{-3} + (-3)^3e^{-3}$$
$$= 27e^{-3} - 27e^{-3} = 0 \quad ✓$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la cual está presente la variable logaritmo. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x escribimos la ecuación en forma exponencial.

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x.$$

Otra forma de describir el primer paso es elevar la base, 2, tomando como exponente cada lado de la ecuación.

$$2^{\log 2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 tomando como exponente cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de los logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Los procedimientos usados para resolver este problema simple son típicos. Resumimos los pasos como sigue.

SUGERENCIAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; quizá sea necesario primero combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base tomando como exponente cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

Fechamiento por radiocarbono es un método que usan los arqueólogos para calcular la edad de objetos antiguos. El bióxido de carbono en la atmósfera contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono-14 (^{14}C), con una vida media de aproximadamente 5,730 años. Las plantas absorben bióxido de carbono de la atmósfera, mismo que después sigue su camino hacia los animales a través de la cadena alimenticia. Por lo tanto, todas las criaturas vivientes contienen la misma proporción fija de ^{14}C a ^{12}C no radiactivo que contiene la atmósfera.

Cuando un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de éste en el organismo empieza a reducirse exponencialmente. Entonces podemos determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo midiendo la cantidad de ^{14}C aún existente en él.

Por ejemplo, si un hueso de asno contiene 73% de ^{14}C comparado con un asno vivo y aquel murió hace t años, entonces según la fórmula de la desintegración radiactiva (sección 4.6).

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para obtener $t \approx 2{,}600$, por lo que el hueso tiene una antigüedad de aproximadamente 2,600 años.

EJEMPLO 6 ■ Resolución de ecuaciones logarítmicas

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes para x.

(a) $\ln x = 8$ (b) $\log_2(25 - x) = 3$

SOLUCIÓN

(a)

$$\ln x = 8$$

$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

Otra manera de resolver este problema es como sigue.

$$\ln x = 8$$

$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ tomando como exponente cada lado}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

(b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3$$

$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 2 tomando como exponente cada lado)}$$

$$25 - x = 8$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

COMPRUEBE SU RESPUESTA ■ Si $x = 17$, obtenemos

$$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3 \quad ✓$$

■

EJEMPLO 7 ■ Resolución de ecuaciones logarítmicas

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

SOLUCIÓN Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permitirá escribir la ecuación en forma exponencial.

$$4 + 3\log(2x) = 16$$

$$3\log(2x) = 12 \qquad \text{Reste 4}$$

$$\log(2x) = 4 \qquad \text{Divida entre 3}$$

$$2x = 10^4 \qquad \text{Forma exponencial (o bien eleve 10 tomando como exponente cada lado)}$$

$$x = 5{,}000 \qquad \text{Divida entre 2}$$

■

COMPRUEBE SU RESPUESTA

Si $x = 5{,}000$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4 + 3\log 2(5{,}000) &= 4 + 3\log 10{,}000 \\ &= 4 + 3(4) \\ &= 16 \quad ✓ \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 ■ Resolución de ecuaciones logarítmicas

Resuelva la ecuación $\log(x+2)+\log(x-1)=1$.

SOLUCIÓN Primero combinamos los términos logarítmicos usando las leyes de los logaritmos.

$$\log[(x+2)(x-1)=1 \qquad \text{Ley 1}$$

$$(x+2)(x-1)=10 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 10 tomando como exponente cada lado)}$$

$$x^2+x-2=10 \qquad \text{Expanda el lado izquierdo}$$

$$x^2+x-12=0 \qquad \text{Reste 10}$$

$$(x+4)(x-3)=0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x=-4 \quad \text{o} \quad x=3$$

Verificamos estas soluciones posibles en la ecuación original y determinamos que $x=-4$ no es una solución (porque los logaritmos de los números negativos no están definidos), sin embargo $x=3$ es una solución. (Véase *Compruebe sus respuestas*.)

COMPRUEBE SUS RESPUESTAS

$x=-4$:

$$\log(-4+2)+\log(-4-1)=\log(-2)+\log(-5) \quad \text{no definido} \qquad ✗$$

$x=3$:

$$\log(3+2)+\log(3-1)=\log 5+\log 2=\log(5\cdot 2)=\log 10=1 \qquad ✓$$

■

5.5 EJERCICIOS

1-24 ■ Determine la solución de la ecuación exponencial, y exprésela a cuatro decimales.

1. $5^x=16$ **2.** $10^{-x}=2$

3. $2^{1-x}=3$ **4.** $3^{2x-1}=5$

5. $3e^x=10$ **6.** $2e^{12x}=17$

7. $e^{1-4x}=2$ **8.** $4(1+10^{5x})=9$

9. $4+3^{5x}=8$ **10.** $2^{3x}=34$

11. $8^{0.4x}=5$ **12.** $3^{x/14}=0.1$

13. $5^{-x/100}=2$ **14.** $e^{3-5x}=16$

15. $e^{2x+1}=200$ **16.** $(\frac{1}{4})^x=75$

17. $5^x=4^{x+1}$ **18.** $10^{1-x}=6^x$

19. $2^{3x+1}=3^{x-2}$ **20.** $7^{x/2}=5^{1-x}$

21. $\dfrac{50}{1+e^{-x}}=4$ **22.** $\dfrac{10}{1+e^{-x}}=2$

23. $100(1.04)^{2t}=300$ **24.** $(1.00625)^{12t}=2$

25-32 ■ Resuelva la ecuación dada.

25. $x^2 2^x-2^x=0$ **26.** $x^2 10^x-x10^x=2(10^x)$

27. $4x^3e^{-3x}-3x^4e^{-3x}=0$ **28.** $x^2e^x+xe^x-e^x=0$

29. $e^{2x}-3e^x+2=0$ **30.** $e^{2x}-e^x-6=0$

31. $e^{4x}+4e^{2x}-21=0$ **32.** $e^x-12e^{-x}-1=0$

33-48 ■ Resuelva la ecuación logarítmica para x.

33. $\ln x=10$ **34.** $\ln(2+x)=1$

35. $\log x=-2$ **36.** $\log(x-4)=3$

37. $\log(3x+5)=2$ **38.** $\log_3(2-x)=3$

39. $2-\ln(3-x)=0$ **40.** $\log_2(x^2-x-2)=2$

41. $\log_2 3+\log_2 x=\log_2 5+\log_2(x-2)$

42. $2\log x=\log 2+\log(3x-4)$

43. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

44. $\log_5 x + \log_5 (x + 1) = \log_5 20$

45. $\log_5 (x + 1) - \log_5 (x - 1) = 2$

46. $\log x + \log(x - 3) = 1$

47. $\log_9 (x - 5) + \log_9 (x + 3) = 1$

48. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

49. ¿Para qué valor de x es verdadera la expresión siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

50. ¿Para qué valor de x es verdadero que $(\log x)^3 = 3 \log x$?

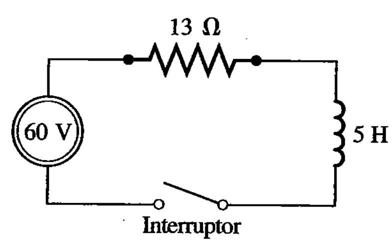
51. Resuelva para x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$.

52. Resuelva para x: $\log_2(\log_3 x) = 4$.

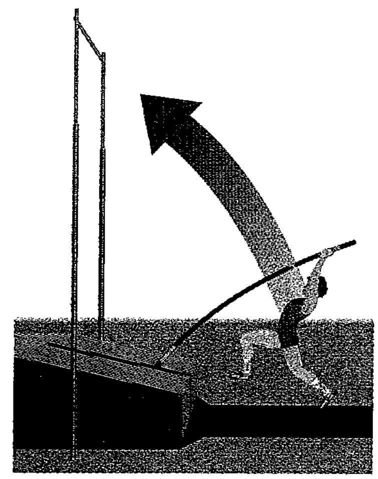
53. Una muestra de 15 gramos de yodo radiactivo se desintegra de forma tal que la masa que queda después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087}t$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días sólo quedarán 5 gramos?

54. La velocidad de un paracaidista deportivo t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(e^{-0.2t} - 1)$. ¿Después de cuántos segundos la velocidad es de 70 pies/s?

55. La figura muestra un circuito eléctrico formado por una batería que produce un voltaje de 60 volts, un resistor con una resistencia de 13 ohms y un inductor con una inductancia de 5 henrys. Utilizando el cálculo se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de que se haya cerrado el interruptor es $I = \frac{60}{13}\left(1 - e^{-13t/5}\right)$.
(a) Use esta ecuación para expresar el tiempo t como una función de la corriente I.
(b) ¿Después de cuántos segundos llega la corriente a 2 amperes?



56. Una *curva de aprendizaje* es la gráfica de una función $P(t)$ que mide el desempeño de alguien aprendiendo una técnica como función del tiempo de capacitación t. Al principio, la razón de aprendizaje es rápida. Después, conforme aumenta el desempeño y se acerca a un valor máximo M, la razón se reduce. Se ha determinado que la función $P(t) = M - Ce^{-kt}$ donde k y C son constantes positivas y $C < M$, es un modelo razonable para el aprendizaje.
(a) Exprese el tiempo de aprendizaje como una función del nivel de desempeño P.
(b) Para un competidor en salto de garrocha, la curva de aprendizaje está dada por $P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$, donde $P(t)$ es la altura a la que puede saltar después de t meses. ¿En cuántos meses de entrenamiento podrá saltar 12 pies?
(c) Trace la gráfica de la curva de aprendizaje del inciso (b).



57-64 ■ Utilice una calculadora graficadora para determinar las soluciones de la ecuación, correctas a dos decimales.

57. $\ln x = 3 - x$

58. $\log x = x^2 - 2$

59. $x^3 - x = \log(x + 1)$

60. $x = \ln(4 - x^2)$

61. $e^x = -x$

62. $2^{-x} = x - 1$

63. $4^{-x} = \sqrt{x}$

64. $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

65. Resuelva la desigualdad $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$.

66. Resuelva la desigualdad $3 \leqslant \log_2 x \leqslant 4$.

67. Resuelva la desigualdad $2 < 10^x < 5$.

68. Resuelva la desigualdad $x^2e^x - 2e^x < 0$

69. Resuelva la ecuación $(x - 1)^{\log(x - 1)} = 100(x - 1)$.

70. Resuelva la ecuación $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

71. Resuelva la ecuación $4^x - 2^{x+1} = 3$
[*Sugerencia*: primero escriba la ecuación como una ecuación cuadrática en 2^x.]

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

72. **Estimación de una solución** Sin realmente resolver la ecuación, obtenga dos números enteros entre los cuales se debe encontrar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique la forma en que llegó a sus conclusiones.

73. **Una ecuación sorprendente** Aplique logaritmos para demostrar que la ecuación $x^{1/\log x} = 5$ no tiene solución. ¿Para qué valores de k la ecuación $x^{1/\log x} = k$ tiene una solución? ¿Qué indica esto respecto a la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta utilizando una calculadora graficadora.

5.6 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y DE LOGARITMO

Los logaritmos fueron inventados por John Napier con el fin de eliminar los cálculos tediosos involucrados en la multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces de números grandes que se presentan en astronomía y en otras ciencias. Con el advenimiento de las computadoras y las calculadoras, los logaritmos ya no tienen importancia para este tipo de cálculos. Sin embargo, los logaritmos se presentan en problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial puesto que son las inversas de las funciones exponenciales. Debido a las leyes de los logaritmos, también resultan ser útiles en la medición de la intensidad de un sonido, la intensidad de los terremotos y muchos otros fenómenos. En esta sección estudiaremos algunas de estas aplicaciones.

INTERÉS COMPUESTO

Recuerde las fórmulas del interés que vimos en la sección 5.2.

Si un capital P está invertido a una tasa de interés r durante un periodo de t años, entonces el monto A de la inversión está dado por

$A = P(1 + r)$ Interés simple (durante un año).

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ Interés compuesto n veces por año.

$A = Pe^{rt}$ Interés continuamente compuesto

Podemos utilizar los logaritmos para determinar el tiempo que necesita el capital para aumentar a un cierto monto.

EJEMPLO 1 ■ Determinación del tiempo para que se duplique una inversión

Se invierte una suma de \$5,000 a una tasa de interés de 9% anual. Determine el tiempo necesario para que este dinero se duplique si el interés se calcula de acuerdo con el método siguiente.

(a) Compuesto semestral (b) Compuesto continuo

SOLUCIÓN

(a) Utilizamos la fórmula del interés compuesto con $P = \$5{,}000$, $A = \$10{,}000$, $r = 0.09$, $n = 2$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante en función de t.

$$5{,}000\left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^{2t} = 10{,}000$$

$$(1.045)^{2t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5,000}$$

$$\log 1.045^{2t} = \log 2 \qquad \text{Tome el logaritmo de ambos lados}$$

$$2t \log 1.045 = \log 2 \qquad \text{Ley 3}$$

$$t = \frac{\log 2}{2 \log 1.045} \qquad \text{Divida entre 2 log 1.045}$$

$$\approx 7.9 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

El dinero se duplicará en 7.9 años

(b) Utilizamos la fórmula del interés continuamente compuesto con $P = \$5{,}000$, $A = \$10{,}000$, $r = 0.09$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante.

$$5{,}000e^{0.09t} = 10{,}000$$

$$e^{0.09t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5,000}$$

$$\ln e^{0.09t} = \ln 2 \qquad \text{Tome ln de ambos lados}$$

$$0.09t = \ln 2 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.09} \qquad \text{Divida entre 0.09}$$

$$t \approx 7.702 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

El dinero se duplicará en 7.7 años ■

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento porcentual anual** (APY, por sus siglas en inglés) es la tasa de interés *simple* que rinde el mismo monto al final de un año.

EJEMPLO 2 ■ Cálculo del rendimiento porcentual anual

Determine el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% anual, compuesto diariamente.

SOLUCIÓN Después de un año el capital P crecerá hasta el monto

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

La fórmula del interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Haciendo la comparación, vemos que el rendimiento porcentual anual es de 6.183%. ■

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

En la sección 5.2 estudiamos la fórmula del crecimiento exponencial que describe el crecimiento de una población de animales o de bacterias.

Si n_0 es el tamaño inicial de la población, entonces la población $n(t)$ en el tiempo t está dada por

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde r es la tasa de crecimiento relativo expresada como una fracción de la población,

Ahora que ya conocemos los logaritmos, podemos responder a preguntas relacionadas con el tiempo en el cual una población alcanza un determinado tamaño.

EJEMPLO 3 ■ Proyecciones de la población mundial

La población del mundo en 1995 era de 5,700 millones, y la tasa de crecimiento relativa estimada es de 2% al anual. Si la población sigue creciendo a esta tasa, ¿cuándo alcanzará 57,000 millones de personas?

SÓLO HAY SITIO DE PIE

La población del mundo era de aproximadamente 5,700 millones en 1995. La tasa de incremento recientemente observada es de 2% anual. Utilizando el modelo exponencial para el crecimiento de la población, y suponiendo que cada persona ocupa un promedio de 4 pies cuadrados de superficie terrestre, obtenemos que para el año 2559 ¡sólo habrá sitio de pie! (El total de la superficie de la tierra es de aproximadamente 1.8×10^{15} pies^2.)

SOLUCIÓN Utilizamos la fórmula para el crecimiento de la población con $n_0 = 5{,}700$ millones, $r = 0.02$ y $n(t) = 57{,}000$ millones. Esto nos lleva a una ecuación exponencial, de la que despejamos t.

$$5.7e^{0.02t} = 57$$

$$e^{0.02t} = 10 \qquad \text{Divida entre 5.7}$$

$$\ln e^{0.02t} = \ln 10 \qquad \text{Tome ln de ambos lados}$$

$$0.02t = \ln 10 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 10}{0.02} \qquad \text{Divida entre 0.02}$$

$$t \approx 115.129 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

Por lo tanto, la población alcanzará 57,000 millones en aproximadamente 115 años, esto es, el año 1995 + 115 = 2110. ■

EJEMPLO 4 ■ Bacterias en un cultivo

Un cultivo se inicia con 10,000 bacterias, y su número se duplica cada 40 minutos.

(a) Obtenga una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t.
(b) Determine el número de bacterias después de una hora.
(c) ¿Después de cuántos minutos habrán 50,000 bacterias?
(d) Trace la gráfica del número de bacterias en el tiempo t.

SOLUCIÓN

(a) Para determinar la fórmula del crecimiento de la población, necesitamos obtener la tasa r. Para ello utilizamos la fórmula con $n_0 = 10{,}000$, $t = 40$ y $n(t) = 20{,}000$, y después despejamos r.

$$10{,}000 \cdot e^{r(40)} = 20{,}000$$

$$e^{40t} = 2 \qquad \text{Divida entre 10,000}$$

$$\ln e^{40t} = \ln 2 \qquad \text{Aplique ln de cada lado}$$

$$40r = \ln 2 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$r = \frac{\ln 2}{40} \qquad \text{Divida entre 40}$$

$$r \approx 0.01733 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

Ahora que ya sabemos que $r \approx 0.01733$, podemos escribir la fórmula del crecimiento de la población:

$$n(t) = 10{,}000 \cdot e^{0.01733t}$$

(b) Utilizando la fórmula obtenida en el inciso (a) con $t = 60$ minutos (1 hora), obtenemos

$$n(60) = 10{,}000 \cdot e^{0.01733(60)} \approx 28{,}287$$

Por lo tanto, el número de bacterias después de una hora es de aproximadamente 28,000.

(c) Utilizamos la fórmula obtenida en el inciso (a) con $n(t) = 50{,}000$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante para t.

$$10{,}000 \cdot e^{0.01733t} = 50{,}000$$

$$e^{0.01733t} = 5 \qquad \text{Divida entre 10,000}$$

$$\ln e^{0.01733t} = \ln 5 \qquad \text{Aplique ln de ambos lados}$$

$$0.01733t = \ln 5 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 5}{0.01733} \qquad \text{Divida entre 0.01733}$$

$$t \approx 92.9 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

El conteo de bacterias alcanzará 50,000 en aproximadamente 93 minutos.

(d) En la figura 1 se muestra la gráfica de la función $n(t) = 10{,}000 \cdot e^{0.01733t}$. ■

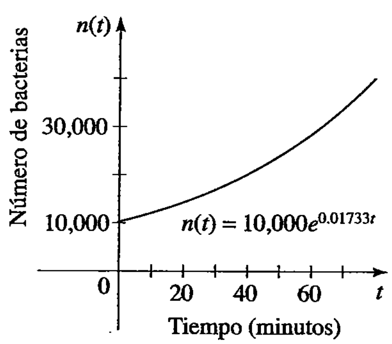


FIGURA 1

DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones de manera espontánea. La taza de desintegración es directamente proporcional a la masa de la sustancia, y esto es análogo al crecimiento de la población, excepto en que la masa del material

DESECHOS RADIACTIVOS

Siempre que ocurre una reacción nuclear se producen dañinos isótopos radiactivos, sea esto debido a la prueba de una bomba atómica; a un accidente nuclear como el de Chernobyl, Ucrania en 1986; o la producción de electricidad en una planta generadora nuclear.

Un material radiactivo producido en las bombas atómicas, es el estroncio90 (^{90}Sr), con una vida media de 28 años. Éste se deposita como calcio en los tejidos de los huesos humanos donde puede causar leucemia y otros tipos de cáncer. Sin embargo, en las décadas desde que se detuvieron las pruebas atmosféricas de las armas nucleares, los niveles de ^{90}Sr en el entorno se han reducido a un nivel que ya no representa una amenaza para la salud.

Las plantas generadoras nucleares producen plutonio-239 radiactivo (^{230}Pu), que tiene una vida media de 24,360 años. En vista de su larga vida media, el ^{230}Pu pudiera resultar una amenaza al entorno durante miles de años. Por lo que debe tenerse gran cuidado de deshacerse de él adecuadamente. La dificultad de mantener la seguridad de los deshechos radiactivos eliminados es una de las razones por las cuales las plantas generadoras nucleares siguen siendo objeto de controversia.

radiactivo *disminuye*. Se puede demostrar que la fórmula para la masa $m(t)$ que queda en el tiempo t, está dada por

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde r es la tasa de desintegración expresada como una proporción de la masa y m_0 es la masa inicial. Los físicos expresan la tasa de desintegración en términos de **la vida media**, el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de la masa. Obtener la tasa r de lo anterior como sigue. Si h es la vida media, entonces la masa de 1 unidad se convertirá en $\frac{1}{2}$ unidad cuando $t = h$. Sustituyendo lo anterior en la fórmula, tenemos

$$\tfrac{1}{2} = 1 \cdot e^{-rh}$$

$$\ln(\tfrac{1}{2}) = -rh \qquad \text{Tome ln de ambos lados}$$

$$r = -\frac{1}{h}\ln(2^{-1}) \qquad \text{Resuelva para } r$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \qquad \ln 2^{-1} = -\ln 2 \text{ según la ley 3}$$

Esta última ecuación nos permite determinar la tasa r partiendo de la vida media h.

> Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con una vida media h, entonces la masa $m(t)$ que queda al tiempo t está dada por
>
> $$m(t) = m_0 e^{-rt}$$
>
> donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$

EJEMPLO 5 ■ Desintegración radiactiva

El polonio-210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

(a) Determine una fórmula para la cantidad de la muestra que queda al tiempo t.
(b) Determine la masa que queda después de 1 año.
(c) ¿Cuánto tardará para que la muestra se desintegre hasta tener una masa de 200 mg?
(d) Trace la gráfica de la masa de la muestra como una función del tiempo.

SOLUCIÓN

(a) Utilizando la fórmula de la desintegración radiactiva con $m_0 = 300$ y $r = (\ln 2/140) \approx 0.00495$, tenemos

$$m(t) = 300e^{-0.00495t}$$

(b) Utilizamos la fórmula obtenida en el inciso (a) con $t = 365$ (1 año)

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Así, quedarán aproximadamente 49 mg de ^{210}Po después de 1 año.

(c) Utilizamos la fórmula que obtuvimos en el inciso (a) con $m(t) = 200$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante para t.

$$
\begin{aligned}
300e^{-0.00495t} &= 200 \\
e^{-0.00495} &= \tfrac{2}{3} && \text{Divida entre 300} \\
\ln e^{-0.00495t} &= \ln\left(\tfrac{2}{3}\right) && \text{Tome ln de ambos lados} \\
-0.00495t &= \ln\left(\tfrac{2}{3}\right) && \text{Propiedad de ln} \\
t &= -\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0.00495} && \text{Divida entre } -0.00495 \\
t &\approx 81.9 && \text{Utilice una calculadora}
\end{aligned}
$$

El tiempo necesario para que se desintegre la muestra es de aproximadamente 82 días.

(d) En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $m(t) = 300e^{-0.00495t}$. ■

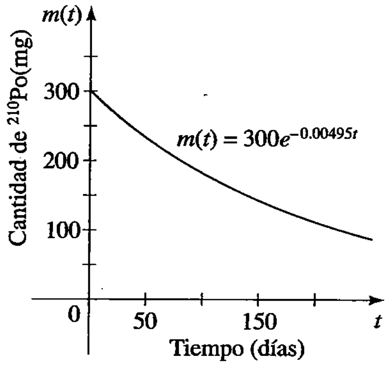


FIGURA 2

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La ley de enfriamiento de Newton dice que la tasa de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno, siempre que dicha diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Utilizando el cálculo, de esta ley se deduce la siguiente fórmula.

> Si D_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y su entorno, y si su entorno tiene una temperatura T_s, entonces la temperatura del objeto al tiempo t está dada por
>
> $$T(t) = T_s + D_0 e^{-kt}$$
>
> donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto.

EJEMPLO 6 ■ Ley de enfriamiento de Newton

Una taza de café tiene una temperatura de 200°F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70°F. Después de 10 minutos, la temperatura del café es de 150°F.

(a) Determine una fórmula para la temperatura del café en el tiempo t.
(b) Determine la temperatura del café después de 15 minutos.
(c) ¿En cuánto tiempo se habrá enfriado el café hasta 100°F?
(d) Ilustre trazando la gráfica de la función de la temperatura.

SOLUCIÓN

(a) La temperatura de la habitación es $T_s = 70°\text{F}$, y la diferencia inicial de temperatura es

$$D_0 = 200 - 70 = 130°\text{F}$$

La vida media de los **elementos radiactivos** varían desde muy largos a muy breves. A continuación damos algunos ejemplos.

Elementos	Vida media
Torio232	14,500 millones de años
Uranio235	4,500 millones de años
Torio230	80,000 años
Plutonio239	24,360 años
Carbono14	5,730 años
Radio226	1,600 años
Cesio137	30 años
Estroncio90	28 años
Polonio210	140 días
Torio234	25 días
Yodo135	8 días
Radón222	3.8 días
Plomo211	3.6 minutos
Kriptón91	10 segundos

Así, según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura después de t minutos es

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Necesitamos determinar la constante k asociada con esta taza de café. Para ello utilizamos el hecho de que cuando $t = 10$ la temperatura es $T(10) = 150$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-10k} &= 150 \\
130e^{-10k} &= 80 && \text{Reste 70} \\
e^{-10k} &= \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre 130} \\
-10k &= \ln\left(\tfrac{8}{13}\right) && \text{Tome ln de ambos lados} \\
k &= -\tfrac{1}{10}\ln\left(\tfrac{8}{13}\right) && \text{Divida entre } -10 \\
k &\approx 0.04855 && \text{Utilice una calculadora}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de k en la expresión para $T(t)$, obtenemos

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

(b) Utilizamos la fórmula que obtuvimos en el inciso (a) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133°\text{F}$$

(c) Utilizamos la fórmula que obtuvimos en el inciso (a) con $T(t) = 100$ y resolvemos la ecuación exponencial resultante para t.

$$\begin{aligned}
70 + 130e^{-0.04855t} &= 100 \\
130e^{-0.04855t} &= 30 && \text{Reste 70} \\
e^{-0.04855t} &= \tfrac{3}{13} && \text{Divida entre 130} \\
-0.04855t &= \ln\left(\tfrac{3}{13}\right) && \text{Tome ln de ambos lados} \\
t &= -\frac{\ln\left(\tfrac{3}{13}\right)}{0.04855} && \text{Divida entre } -0.04855 \\
t &\approx 30.2 && \text{Utilice una calculadora}
\end{aligned}$$

El café se habrá enfriado hasta 100°F después de aproximadamente media hora.

(d) La gráfica de la función de la temperatura se muestra en la figura 3. Note que la recta $T = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?) ■

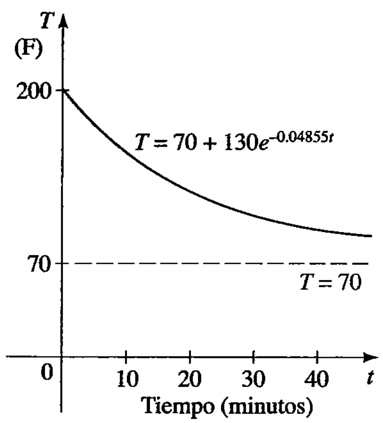


FIGURA 3
Temperatura del café después de t minutos.

ESCALAS LOGARÍTMICAS

Cuando una cantidad física varía en un rango muy grande, a menudo resulta conveniente tomar su logaritmo a fin de tener un conjunto de números más manejables. Analizaremos 3 de estas situaciones: la escala del pH, que mide la acidez; la escala de Richter, que mide la intensidad de los terremotos; y la escala de decibeles, que mide la intensidad de los sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son la intensidad luminosa, la capacidad de información y la radiación.

ESCALA DEL pH Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno, hasta que Sorensen, en 1909, propuso una medida más conveniente. Definió

$$\boxed{\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]}$$

donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Hizo lo anterior a fin de evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo

$$\text{Si} \quad [\mathrm{H}^+] = 10^{-4}\ \mathrm{M}, \qquad \text{Entonces} \qquad \mathrm{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las soluciones con un pH = 7 se definen como *neutras*, con un pH < 7 son *ácidas* y con un pH > 7 son *básicas*. Note que cuando el pH se incrementa en una unidad $[\mathrm{H}^+]$ se reduce por un factor de 10.

EJEMPLO 7 ■ Escala del pH y concentración de iones de hidrógeno

(a) La concentración de iones de hidrógeno de una muestra de sangre humana se midió como $[\mathrm{H}^+] = 3.16 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

(b) La lluvia más ácida que jamás se haya medido ocurrió en Escocia en 1974; su pH era de 2.4. Determine la concentración de iones de hidrógeno.

SOLUCIÓN

(a) Una calculadora nos da

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

En vista que esto es superior a 7, la sangre es básica.

(b) Para determinar la concentración de iones de hidrógeno, es necesario que resolvamos para $[\mathrm{H}^+]$ en la ecuación logarítmica

$$\log[\mathrm{H}^+] = -\mathrm{pH}$$

Así, la escribimos en forma exponencial

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

En este caso, pH = 2.4 entonces

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{M} \qquad ■$$

ESCALA DE RICHTER En 1935, el geólogo norteamericano Charles Richter (1900 – 1984) definió la magnitud de un terremoto como

$$\boxed{M = \log \frac{I}{S}}$$

donde I es la intensidad del terremoto (medida según la amplitud de una lectura de sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto) y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es de 1 micrón = 10^{-4}cm). La magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió muchos terremotos ocurridos entre 1900 y 1950. El más fuerte fue de una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y el más pequeño de una magnitud de 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800,000,000, por lo que la escala de Richter proporciona números más manejables para trabajar. Por ejemplo, un sismo de magnitud 6 es 10 veces más fuerte que uno de magnitud 5.

EJEMPLO 8 ■ Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 de San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. El mismo año el terremoto más fuerte registrado jamás ocurrió en la frontera entre Colombia y Ecuador y fue 4 veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del sismo entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

SOLUCIÓN Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces dé la definición de magnitud tenemos

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto entre Colombia y Ecuador fue de $4I$, por lo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$ ■

EJEMPLO 9 ■ Intensidad de los terremotos

El terremoto de Loma Prieta de 1989 que sacudió a San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso el sismo de 1906 (véase el ejemplo 8) que el de 1989?

SOLUCIÓN Si I_1 e I_2 son las intensidades de los terremotos de 1906 y de 1989, entonces se nos pide que determinemos I_1/I_2. Para relacionar lo anterior con la definición de magnitud, dividimos tanto el numerador como el denominador entre S.

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{I_1/S}{I_2/S} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } S$$

$$= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S} \qquad \text{Ley 2 de los logaritmos}$$

$$= 8.3 - 7.1 = 1.2 \qquad \text{Definición de magnitud de terremoto}$$

Por lo tanto

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El de 1906 fue aproximadamente 16 veces más intenso que el terremoto de 1989. ■

ESCALA DE DECIBELES El oído es sensible a una gama extremadamente amplia de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}$ watts/m^2 a una frecuencia de 1,000 Hertz, lo que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de la audición). La sensación psicológica del volumen sonoro varía según el logaritmo de la intensidad (la ley Weber–Fechner) y por lo tanto el **nivel de intensidad** β, medido en decibeles (dB), se define como

$$\boxed{\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$\beta = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Fuente de sonido	β (dB)
Despegue de jet	140
Martillo neumático	130
Concierto de Rock	120
Tren subterráneo	100
Tráfico pesado	80
Tráfico normal	70
Conversación normal	50
Murmullo	30
Susurro de hojas	10–20
Umbral de audición	0

EJEMPLO 10 ■ Intensidad sonora del despegue de un Jet

Determine el nivel de intensidad en decibeles de un motor jet durante el despegue si la intensidad que se midió fue de 100 W/m^2 (Watts por metro cuadrado).

SOLUCIÓN De la definición del nivel de intensidad, vemos que

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Así, el nivel de intensidad es de 140 dB. ■

La tabla al margen lista los niveles de intensidad en decibles de algunos sonidos comunes que van desde el umbral de audición hasta el despegue del jet del ejemplo 10. El umbral de dolor es de aproximadamente 120 dB.

5.6 EJERCICIOS

1. Una persona invierte $10,000 en una cuenta que paga 8.5% anual compuesto trimestralmente
(a) Determine el monto después de 3 años
(b) ¿Cuánto tarda la inversión en duplicarse?

2. Una persona invierte $6,500 en una cuenta que paga 6% de interés anual continuamente compuesto.
(a) ¿Cuál es el monto después de 2 años?
(b) ¿Cuánto tardará para que la inversión alcance $8,000?

3. Determine el tiempo necesario para que una inversión de $5,000 crezca a $8,000 a una tasa de interés de 9.5% anual compuesto trimestralmente.

4. Nancy desea invertir $4,000 en certificados de ahorro que tienen una tasa de interés de 9.75% anual, compuesto semestralmente. ¿Qué periodo debe escoger para ahorrar un total de $5,000?

5. ¿Cuánto tardará una inversión de $1,000 en duplicar su valor si la tasa de interés es de 8.5% anual continuamente compuesto?

6. Se invierte una suma de $1,000 durante 4 años, y se calcula un interés compuesto semestral. Si esta suma alcanzó $1,435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

7. Determine el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana 8% anual compuesto mensualmente.

8. Determine el rendimiento porcentual anual de una inversión $5\frac{1}{2}$% anual, continuamente compuesto.

9. El número de bacterias en un cultivo está dado por la fórmula

$$n(t) = 500e^{0.45t}$$

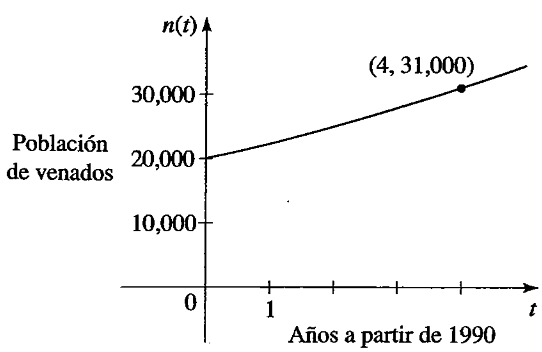
donde t se mide en horas.
(a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias?
(b) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de esta población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.
(c) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo después de 3 horas?
(d) ¿Después de cuántas horas será de 10,000 el número de bacterias?

10. El número de una determinada especie de pez está dada por la fórmula $n(t) = 12e^{0.012t}$, donde t se mide en años y $n(t)$ se mide en millones.
(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de la población de peces? Exprese su respuesta como porcentaje.
(b) ¿Cuál será la población de peces después de 5 años?
(c) ¿Dentro de cuántos años alcanzará el número de peces la cifra de 30 millones?
(d) Trace la gráfica de la función $n(t)$ de la población de peces.

11. La población de una determinada ciudad fue de 112,000 en 1994, y la tasa de crecimiento relativo observada es de 4% anual.
(a) Determine la fórmula $n(t)$ para la población después de t años.
(b) Determine la población proyectada en el año 2000
(c) ¿En qué año alcanzará la población la cifra de 200,000?

12. La población de ranas en un pequeño estanque crece exponencialmente. La población actual es de 85 ranas, y la tasa de crecimiento relativo es de 18% anual.
(a) Determine una fórmula $n(t)$ para la población después de t años.
(b) Determine la población proyectada después de 3 años.
(c) Determine el número de años necesarios para que la población de ranas alcance 600.

13. La gráfica muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entra 1990 y 1994. Suponga que la población crece exponencialmente.



(a) ¿Cuál fue la población de venados en 1990?
(b) Determine una fórmula para la población de venados t años después de 1990.
(c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 1998?
(d) ¿En qué año la población de venados alcanzará 100,000?

14. Un cultivo contiene inicialmente 1,500 bacterias y se duplica cada 30 minutos.
(a) Determine una fórmula $n(t)$ para el número de bacterias después de t minutos.
(b) Determine el número de bacterias después de 2 horas.
(c) ¿Después de cuántos minutos contendrá el cultivo 4,000 bacterias?

15. Un cultivo se inicia con 8,600 bacterias. Después de 1 hora, el conteo alcanza 10,000.
(a) Determine una fórmula $n(t)$ para el número de bacterias después de t horas.
(b) Determine el número de bacterias después de 2 horas.
(c) ¿Después de cuántas horas se duplicará el número de bacterias?

16. El conteo en un cultivo de bacterias fue de 400 después de 2 horas y de 25,600 después de 6 horas.
(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de la población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.
(b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
(c) Determine una fórmula $n(t)$ para el número de bacterias después de t horas.
(d) Determine el número de bacterias después de 4.5 horas.
(e) ¿Cuándo llegará a 50,000 el número de bacterias?

17. La población del mundo fue de 5,700 millones en 1995 y la tasa de crecimiento relativo observada fue de 2% anual.
(a) ¿Para qué año se habrá duplicado la población?
(b) ¿Para qué año se habrá triplicado la población?

18. La población de California era de 10.586,223 en 1950 y de 23.668,562 en 1980. Suponga que la población crece exponencialmente.
(a) Determine una fórmula para la población t años después de 1950.
(b) Determine el tiempo necesario para que se duplique la población.
(c) Utilice la información para predecir la población de California en el año 2000.

19. Una cepa infecciosa de bacterias se incrementa en número a una tasa de crecimiento relativo de 200% por hora. Cuando un cierto número crítico de bacterias están presentes en la corriente sanguínea, la persona se enferma. Si una sola bacteria infecta a una persona, el nivel crítico se alcanza en 24 horas. ¿Cuánto tardará en alcanzarse el nivel crítico si la misma persona es infectada por 10 bacterias?

20. La vida media del radio226 es de 1,600 años. Suponga que tenemos una muestra de 22 mg.
(a) Obtenga una fórmula para la masa que queda después de t años.
(b) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 4,000 años?
(c) ¿Después de cuánto tiempo solamente quedarán 18 mg?

21. La vida media del cesio137 es 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 10 gm.
(a) Determine una fórmula para la masa que queda después de t años.
(b) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 80 años?
(c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedarán 2 gm de la muestra?

22. La masa $m(t)$ que queda después de t días de una muestra de 40 gm de torio234 está dada por

$$m(t) = 40e^{-0.0277t}$$

(a) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 60 días?
(b) ¿Después de cuántos días sólo quedarán 10 gm de la muestra?
(c) Determine la vida media del torio234.

23. La vida media del estroncio90 es de 25 años. ¿Cuánto tardará una muestra de 50 mg en reducirse por desintegración a una masa de 32 mg?

24. El radio221 tiene una vida media de 30 segundos. ¿Cuánto tardará para que se desintegre 95% de una muestra?

25. Si 250 mg de un elemento radiactivo se desintegra hasta 200 mg en 48 horas, determine la vida media del elemento.

26. Después de 3 días una muestra de radón222 se ha desintegrado hasta 58% de su masa original.
(a) ¿Cuál es la vida media del radón222?
(b) ¿Cuánto tardará la muestra en desintegrarse hasta 20% de su cantidad original?

27. Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% del carbono14 que está presente en los árboles vivos. ¿Hace cuánto tiempo se fabricó este artefacto? (La vida media del carbono14 es de 5,730 años.)

28. La tela de la mortaja de una momia egipcia se estima que contiene 59% del carbono14 que contenía originalmente. ¿Hace cuánto tiempo fue enterrada la momia? (La vida media del carbono14 es de 5,730 años.)

29. En una cena se sirve un tazón de sopa caliente. Empieza a enfriarse de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton de forma que su temperatura en el tiempo t está dada por

$$T(t) = 65 + 145e^{-0.05t}$$

donde t se mide en minutos y T en °F.
(a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?
(b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?
(c) ¿Después de cuanto tiempo llegará la temperatura a los 100°F?

30. La ley de enfriamiento de Newton se utiliza en investigaciones de homicidios para determinar el tiempo de la muerte. La temperatura normal del cuerpo es de 98.6°F, e inmediatamente después de la muerte empieza a enfriarse. Se ha determinado experimentalmente que la constante en la ley de enfriamiento de Newton es aproximadamente de $k = 0.1947$. Si la temperatura del entorno es de 60°F y la del cuerpo es ahora de 72°F, ¿hace cuánto fue la muerte?

31. Un pavo asado se saca del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa en una habitación donde la temperatura es de 75°F.
(a) Si la temperatura del pavo es de 150°F después de media hora, ¿cuál será su temperatura después de 45 minutos?
(b) ¿Cuándo se habrá enfriado el pavo hasta 100°F?

32. Una tetera llena de agua se hace hervir en una habitación con una temperatura de 20°C. Después de 15 minutos la temperatura del agua se ha reducido de 100°C a 75°C. Determine la temperatura después de otros 10 minutos. Trace la gráfica de la función de la temperatura.

33. A continuación se da concentración de iones de hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Su pH
(a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-3}$ M.
(b) Jugo de tomate: $[H^+] = 3.2 \times 10^{-4}$ M.
(c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$ M.

34. Una sustancia desconocida tiene una concentración de iones hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Obtenga el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

35. A continuación se da lectura del pH de una muestra de cada sustancia. Calcule la concentración de iones de hidrógeno de la misma.
(a) Vinagre: pH = 3.0
(b) Leche: pH = 6.5

36. Se da la lectura del pH de un vaso de líquido. Determine la concentración de iones de hidrógeno del líquido.
(a) Cerveza: pH = 4.6
(b) Agua = pH = 7.3

37. Las concentraciones de iones de hidrógeno en los quesos van desde 4.0×10^{-7} M hasta 1.6×10^{-5} M. Determine el rango correspondiente en lecturas de pH.

38. Las lecturas de pH para los vinos varían desde 2.8 hasta 3.8. Determine el rango correspondiente en concentraciones de iones de hidrógeno.

39. Si un terremoto es 20 veces más intenso que otro, ¿cuánto es más grande en la escala de Richter?

40. El terremoto de 1906 de San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala de Richter. Simultáneamente en el Japón hubo un terremoto con una magnitud de 4.9 que sólo causó daños menores. ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de San Francisco en comparación con el japonés?

41. El terremoto de Alaska de 1964 tuvo una magnitud de 8.6 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso este terremoto que el de 1906 de San Francisco?

42. El terremoto de Northridge, Calif., de 1994 tuvo una magnitud de 6.8 en la escala de Richter. Un año después, un terremoto de magnitud 7.2 azotó Kobe, Japón ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de Kobe que el de Northridge?

43. El terremoto de la ciudad de México de 1985 tuvo una magnitud de 8.1 en la escala de Richter. El terremoto de 1976 en Tangshan, China, fue 1.26 veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del terremoto de Tangshan?

44. La intensidad del sonido del tráfico en un cruce con mucha circulación se midió en 2.0×10^{-5} W/m^2. Determine el nivel de intensidad en decibeles.

45. El nivel de intensidad del sonido de un tren subterráneo se midió en 98 dB. Determine la intensidad en W/m^2.

46. El ruido de una podadora de césped eléctrica se midió en 106 dB. El nivel de ruido en un concierto de rock se midió en 120 dB. Determine la relación de la intensidad del rock con la podadora de césped.

47. Es una ley de la física que la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d de la fuente:

$$I = \frac{k}{d^2}$$

(a) Utilice lo anterior así como la ecuación

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

(descrita en esta sección) para demostrar que los niveles de decibeles β_1 y β_2 a las distancias d_1 y d_2 de una fuente sonora están relacionadas por la ecuación

$$\beta_2 = \beta_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

(b) El nivel de intensidad en un concierto de rock es de 120 dB a una distancia de 2 m de los altavoces. Determine el nivel de intensidad a una distancia de 10 m.

5 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base a.
   (b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
   (c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es el rango de esta función?
   (d) Trace la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los casos siguientes.
   (i) $a > 1$ (ii) $a = 1$
   (iii) $a < 1$

2. Si x es grande, ¿qué función crece más aprisa, $y = 2^x$ o $y = x^2$?

3. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) ¿Cuál es la función exponencial natural?

4. (a) ¿Cómo se define la función logaritmo $y = \log_a x$?
   (b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
   (c) ¿Cuál es el rango de esta función?
   (d) Trace la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$
   (e) ¿Qué es el logaritmo natural?
   (f) ¿Qué es el logaritmo común?

5. Enuncie las 3 leyes de los logaritmos.

6. Enuncie la fórmula del cambio de base.

7. (a) ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial?
   (b) ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica?

8. Suponga que se invirtió una cantidad P a una tasa de interés r y A es el monto después de t años.
   (a) Escriba una expresión para A si el interés es compuesto n veces por año.
   (b) Escriba una expresión para A si el interés es continuamente compuesto.

9. Si el tamaño inicial de un población es n_0 y la población crece exponencialmente con una tasa de crecimiento relativo r, escriba una expresión para la población $n(t)$ en el tiempo t.

10. (a) ¿Qué es la vida media de una sustancia radiactiva?
    (b) Si una sustancia radiactiva tiene una masa inicial m_0 y una vida media h, escriba una expresión para la masa $m(t)$ que queda en el tiempo t.

11. ¿Qué dice la ley de enfriamiento de Newton?

12. ¿Qué tienen en común la escala del pH, la escala de Richter y la escala de decibeles? ¿Qué miden?

EJERCICIOS

1-12 ■ Trace la gráfica de la función dada. Dé el dominio, el rango y la asíntota.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$
2. $g(x) = 3^{x-2}$
3. $y = 5 - 10^x$
4. $y = 1 + 5^{-x}$
5. $f(x) = \log_3(x - 1)$
6. $g(x) = \log(-x)$
7. $y = 2 - \log_2 x$
8. $y = 3 + \log_5(x + 4)$
9. $F(x) = e^x - 1$
10. $G(x) = \frac{1}{2}e^{x-1}$
11. $y = 2 \ln x$
12. $y = \ln(x^2)$

13-14 ■ Determine el dominio de la función dada.

13. $f(x) = 10^{x^2} + \log(1 - 2x)$
14. $g(x) = \ln(2 + x - x^2)$

15-18 ■ Escriba la ecuación dada en forma exponencial.

15. $\log_2 1024 = 10$
16. $\log_6 37 = x$
17. $\log x = y$
18. $\ln c = 17$

19-22 ■ Escriba la ecuación dada en forma logarítmica.

19. $2^6 = 64$
20. $49^{-1/2} = \frac{1}{7}$
21. $10^x = 74$
22. $e^k = m$

23-38 ■ Evalúe la expresión sin usar calculadora.

23. $\log_2 128$
24. $\log_8 1$
25. $10^{\log 45}$
26. $\log 0.000001$
27. $\ln(e^6)$
28. $\log_4 8$
29. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$
30. $2^{\log_2 13}$
31. $\log_5 \sqrt{5}$
32. $e^{2\ln 7}$
33. $\log 25 + \log 4$
34. $\log_3 \sqrt{243}$
35. $\log_2 16^{23}$
36. $\log_5 250 - \log_5 2$

37. $\log_8 6 - \log_8 3 + \log_8 2$

38. $\log \log 10^{100}$

39-44 ■ Reescriba la expresión en una forma que no tenga logaritmos de productos, cocientes o potencias.

39. $\log(AB^2C^3)$

40. $\log_2 (x\sqrt{x^2+1})$

41. $\ln \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

42. $\log \left(\dfrac{4x^3}{y^2(x-1)^5}\right)$

43. $\log_5 \left(\dfrac{x^2(1-5x)^{3/2}}{\sqrt{x^3-x}}\right)$

44. $\ln \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4+12}}{(x+16)\sqrt{x-3}}\right)$

45-50 ■ Reescriba la expresión como un solo logaritmo.

45. $\log 6 + 4 \log 2$

46. $\log x + \log(x^2y) + 3 \log y$

47. $\frac{3}{2} \log_2(x-y) - 2 \log_2(x^2+y^2)$

48. $\log_5 2 + \log_5(x+1) - \frac{1}{3} \log_5(3x+7)$

49. $\log(x-2) + \log(x+2) - \frac{1}{2} \log(x^2+4)$

50. $\frac{1}{2} [\ln(x-4) + 5 \ln(x^2+4x)]$

51-60 ■ Utilice una calculadora para obtener la solución de la ecuación, correcta a dos decimales.

51. $\log_2(1-x) = 4$

52. $2^{3x-5} = 7$

53. $5^{5-3x} = 26$

54. $\ln(2x-3) = 14$

55. $e^{3x/4} = 10$

56. $2^{1-x} = 3^{2x+5}$

57. $\log x + \log(x+1) = \log 12$

58. $\log_8 (x+5) - \log_8 (x-2) = 1$

59. $x^2e^{2x} + 2xe^{2x} = 8e^{2x}$

60. $2^{3x} = 5$

61-64 ■ Utilice una calculadora para obtener la solución de la ecuación, correcta a seis decimales.

61. $5^{-2x/3} = 0.63$

62. $2^{3x-5} = 7$

63. $5^{2x+1} = 3^{4x-1}$

64. $e^{-15k} = 10{,}000$

65-68 ■ Trace la gráfica de la función y utilícela para determinar las asíntotas y los valores máximos y mínimos locales.

65. $y = e^{x/(x+2)}$

66. $y = 2x^2 - \ln x$

67. $y = \log(x^3 - x)$

68. $y = 10^x - 5^x$

69-70 ■ Determine las soluciones de las ecuaciones, correctas a dos decimales.

69. $3 \log x = 6 - 2x$

70. $4 - x^2 = e^{-2x}$

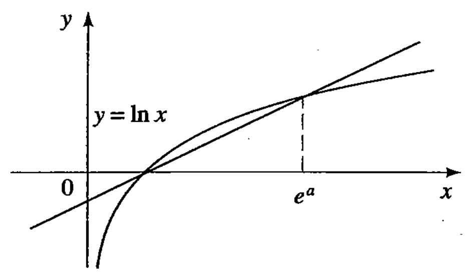
71-72 ■ Resuelva gráficamente la desigualdad.

71. $\ln x > x - 2$

72. $e^x < 4x^2$

73. Utilice una gráfica de $f(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$ para determinar aproximadamente los intervalos en los cuales f está creciendo y aquellos en los que f está decreciendo.

74. Obtenga una ecuación para la recta que se muestra en la figura.



75. Evalúe $\log_4 15$, correcta a seis decimales.

76. Resuelva la desigualdad: $0.2 \leq \log x < 2$.

77. ¿Cuál es más grande $\log_4 258$ o $\log_5 620$?

78. Determine la función inversa de la función $f(x) = 2^{3x}$ y especifique su dominio y su contradominio.

79. Si se invierten \$12,000 a una tasa de interés del 10% anual, determine el monto de la inversión al final de 3 años para cada método de interés compuesto.
(a) Semestral
(b) Mensual
(c) Diario
(d) Continuamente

80. Se invierte una suma de \$5,000 a una tasa de interés de $8\frac{1}{2}$% anual, compuesto semestralmente.
(a) Determine el monto de la inversión después de $1\frac{1}{2}$ años.
(b) ¿Después de qué periodo de tiempo alcanzará la inversión el monto de \$7,000?

81. La población de gatos callejeros en una pequeña ciudad crece exponencialmente. En 1994, la ciudad tenía 30 gatos callejeros y la tasa de crecimiento relativa era de 15% anual.
(a) Determine una fórmula $n(t)$ para la población de gatos callejeros después de t años.
(b) Determine la población proyectada después de 4 años.
(c) Determine el número de años que se requiere para que la población de gatos callejeros alcance 500.

82. Un cultivo contiene inicialmente 10,000 bacterias. Después de una hora el conteo bacterial es de 25,000.
(a) Obtenga el periodo de duplicación
(b) Determine la población después de 3 horas.

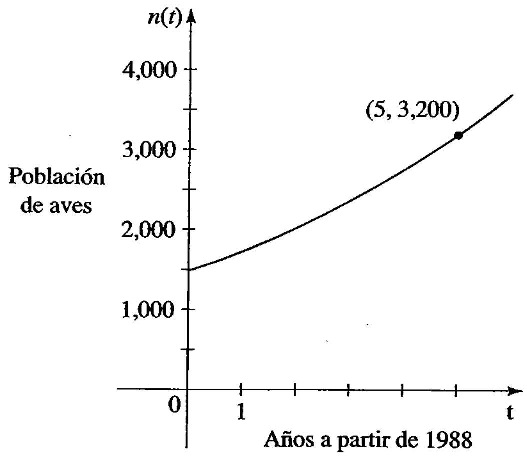
83. El uranio234 tiene una vida media de 2.7×10^5 años.
(a) Determine la cantidad que queda de una muestra de 10 mg después de 1,000 años.
(b) ¿Cuánto tiempo pasará para que esta muestra se desintegre hasta que su masa se reduzca a 7 mg?

84. Una muestra de bismuto210 se desintegró a 33% de su masa original después de 8 días.
(a) Determine la vida media de este elemento.
(b) Determine la masa que queda después de 12 días.

85. La vida media del radio226 es de 1,590 años.
(a) Si una muestra tiene una masa de 150 mg, obtenga una fórmula para la masa que queda después de t años.
(b) Determine la masa que quedará después de 1,000 años.
(c) ¿Después de cuántos años solamente quedarán 50 mg?

86. La vida media del paladio100 es de 4 días. Después de 20 días una muestra ha reducido su masa hasta 0.375 g.
(a) ¿Cuál fue la masa inicial de la muestra?
(b) Determine una fórmula para la masa restante después de t días.
(c) ¿Cuál es la masa después de 3 días?
(d) ¿Después de cuántos días habrán únicamente 0.15 g?

87. La gráfica muestra la población de una especie rara de aves, donde t representa años a partir de 1988 y $n(t)$ se mide en miles.
(a) Determine una fórmula para la población de aves en el tiempo t que tenga la fórmula $n(t) = n_0e^{rt}$.
(b) ¿Qué población de aves se espera que exista en el año 1999?



88. El motor de un automóvil opera a una temperatura de 190°F, cuando se apaga el motor, se enfría siguiendo la ley de enfriamiento de Newton con una constante $k = 0.341$. Determine el tiempo necesario para que se enfríe el motor hasta 90°F si la temperatura ambiente es de 60°F.

89. Se midió la concentración de iones de hidrógeno de las claras de huevos frescos como

$$[H^+] = 1.3 \times 10^{-8}\ M$$

Determine el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

90. El pH del jugo de lima es 1.9. Determine la concentración de iones de hidrógeno.

91. Si un terremoto tiene una magnitud de 6.5 en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud de otro terremoto que es 35 veces más intenso?

92. El ruido de un martillo neumático fue de 132 dB. El sonido del murmullo es de 28 dB. Determine la razón de la intensidad del ruido del martillo y la del murmullo.

5 EXAMEN

1. Grafique las funciones $y = 4^x$ y $y = \log_4 x$ sobre los mismos ejes.

2. Trace la gráfica de la función $f(x) = \log(x + 2)$ y dé el dominio, el rango y las asíntotas.

3. Evalúe cada expresión logarítmica.

(a) $\log_3 \sqrt{27}$ (b) $\log_2 56 - \log_2 7$
(c) $\log_8 4$ (d) $\log_6 4 + \log_6 9$

4. Utilice las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión

$$\log \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3(y^2 + 1)^5}}$$

sin logaritmos de productos, cocientes, potencias o raíces.

5. Escriba como un solo logaritmo: $\ln x - 2\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(3 - x^4)$

6. Determine la solución de la ecuación, correcta a 2 lugares decimales.

(a) $2^{x-1} = 10$ (b) $5\ln(3 - x) = 4$
(c) $10^{x+3} = 6^{2x}$ (d) $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = 2$

7. El tamaño inicial de un cultivo de bacterias es de 1,000. Después de una hora el conteo de bacterias es de 8,000.

(a) Determine una fórmula para la población después de t horas.
(b) Determine la población después de 1.5 horas.
(c) ¿Cuándo alcanzará la población la cifra de 15,000?
(d) Trace la gráfica de la función de la población.

8. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse el valor de una inversión si la tasa de interés es de 8.5% anual compuesto semestralmente?

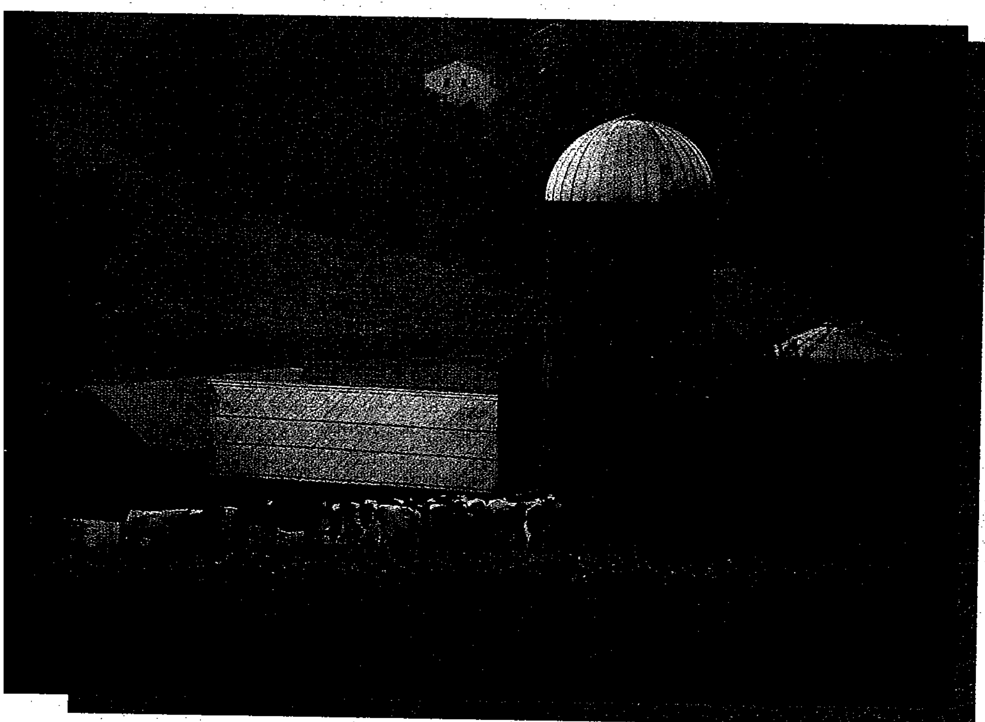
9. Determine el dominio de la función $f(x) = \log(x + 4) + \log(8 - 5x)$.

10. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$.

(a) Grafique f en un rectángulo de visualización apropiado.
(b) Dé las asíntotas de f.
(c) Determine, correcto a 2 decimales el valor mínimo local de f y el valor de x en el cual ocurre.
(d) Determine el rango de f.
(e) Resuelva la ecuación $\dfrac{e^x}{x^3} = 2x + 1$. Dé cada solución correcta a 2 decimales.

6

POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES



En aplicaciones matemáticas, muchas situaciones se modelan utilizando funciones polinomiales. Por ejemplo, el volumen de un silo de altura constante es una función polinomial de su radio.

Cada uno de los problemas que resolví se convirtió en una regla que posteriormente sirvió para resolver otros problemas.

RENÉ DESCARTES

Anteriormente hemos estudiado funciones constantes, lineales y cuadráticas que se representan, respectivamente, mediante las ecuaciones $f(x) = c$, $f(x) = mx + b$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$. Éstos son casos especiales de una clase importante de funciones llamadas polinomios. Un **polinomio** P de **grado** n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$. Los polinomios se forman usando las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Si introducimos la división, obtenemos el conjunto de las funciones racionales. Una función racional r es de la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios.

En términos generales todas las funciones que se utilizan en matemáticas y ciencias se evalúan numéricamente mediante aproximaciones polinomiales. En este capítulo estudiamos esta clase de funciones, analizando primero su gráfica. Después planteamos cómo determinar las soluciones racionales, irracionales y complejas de las ecuaciones polinomiales, y finalmente estudiamos las funciones racionales y sus gráficas.

El análisis de las funciones polinomiales y racionales tiene aspectos numéricos, algebraicos y gráficos, los que utilizaremos para obtener una comprensión más profunda de éstas.

6.1 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Antes de aprender a trabajar con polinomios, debemos ponernos de acuerdo en cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, es un **polinomio de grado** n. Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se conocen como los **coeficientes** del polinomio, a_0 es el **coeficiente constante** y a_n es el coeficiente de la potencia más alta o **coeficiente principal.**

Si un polinomio consta de un solo término, se le llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son monomios.

La gráfica de los polinomios de grado 0 o 1 son rectas (sección 1.10); y la de los de grado 2 son parábolas (sección 2.5). Mientras más elevado sea el grado de un polinomio, más complicada será su gráfica. En esta sección estudiaremos las características generales de la gráfica de los polinomios, y para ello empezamos con los más simples, los que corresponden a $y = x^n$.

EJEMPLO 1 ■ Gráfica de monomios simples

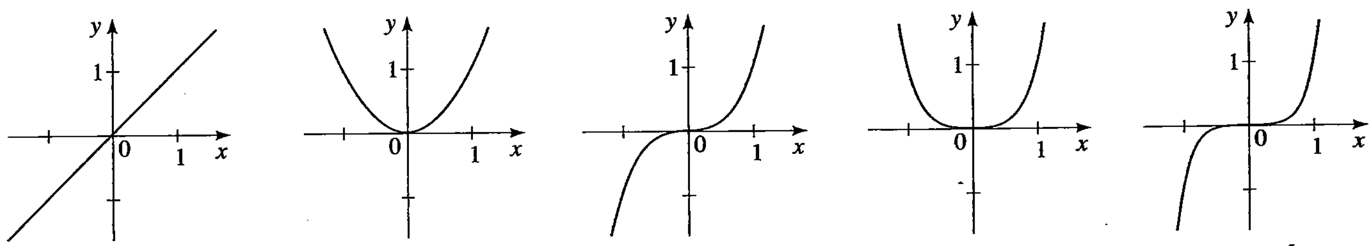
Grafique cada una de las funciones siguientes

(a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$

SOLUCIÓN A partir de nuestro trabajo anterior ya conocemos algunas de estas gráficas, pero se incluyen aquí para mayor claridad.

x	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^4$	$y = x^5$
0.1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
0.2	0.2	0.04	0.008	0.0016	0.00032
0.5	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125
0.7	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.16807
1.0	1.0	1.00	1.000	1.0000	1.00000
1.2	1.2	1.44	1.728	2.0736	2.48832
1.5	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375
2.0	2.0	4.00	8.000	16.0000	32.00000

Si n es impar, entonces $(-x)^n = -x^n$ por lo que $y = x^n$ es una función impar. Si n es par, entonces $(-x)^n = x^n$ por lo que $y = x^n$ es una función par (véase la sección 2.4). Ahora utilizamos estos hechos para determinar los valores negativos de x en la tabla. El trazo de los puntos nos conduce a las gráficas de la figura 1.



(a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$

FIGURA 1

Como sugiere el ejemplo 1, cuando n es impar la gráfica de $y = x^n$ tiene una forma general parecida a la de $y = x^3$, y cuando n es par la gráfica de $y = x^n$ tiene más o menos la misma forma de U que corresponde a $y = x^2$. Sin embargo, observe que conforme el grado de n aumenta, las gráficas se hacen más planas alrededor del origen y de pendiente más pronunciada en los demás puntos.

EJEMPLO 2 ■ Transformaciones de monomios

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = -x^3$ (b) $y = (x-2)^4$ (c) $y = -2x^5 + 4$

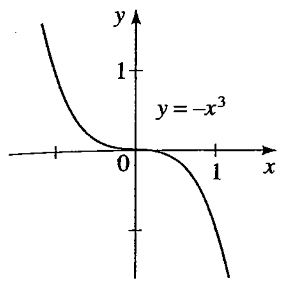


FIGURA 2

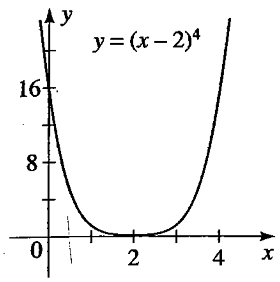


FIGURA 3

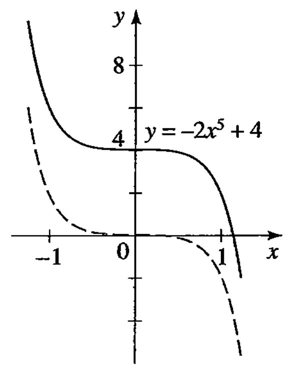
SOLUCIÓN Utilizamos las gráficas del ejemplo 1 y las transformamos.

(a) La función $y=-x^3$ es la negativa de $y=x^3$, por lo que simplemente reflejamos la gráfica de la figura 1(c) sobre el eje x para obtener la de la figura 2.

(b) La gráfica de $y=(x-2)^4$ tiene la misma forma que la de $y=x^4$. Sustituyendo x por $x-2$ se desplaza la gráfica de $y=x^4$ [figura 1(d)] 2 unidades a la derecha (véase la figura 3).

(c) Empezamos con la gráfica de $y=x^5$ que se muestra en la figura 1(e). Al multiplicar la función por 2 se alarga la gráfica verticalmente. Como el signo negativo refleja la gráfica respecto al eje x, en esta etapa tenemos la gráfica punteada de la figura 4. Finalmente, sumando 4 a la función desplazamos la gráfica hacia arriba 4 unidades. Puesto que $-2x^5+4=0$ cuando $x^5=2$, la gráfica cruza el eje x en $x=\sqrt[5]{2}$.

FIGURA 4



■

Si $y=P(x)$ es un polinomio y c es un número tal que $P(c)=0$, entonces decimos que c es un **cero** de P. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x)=0$. Cuando tenemos ecuaciones polinomiales, a menudo nos referimos a las soluciones como **raíces**. Para determinar las raíces de las ecuaciones polinomiales, factorizamos el polinomio y después utilizamos el principio del producto cero, como en la sección 1.5. Note que si $P(c)=0$, entonces la gráfica de $y=P(x)$ tiene una intersección con el eje x en $x=c$, por lo que las intersecciones en x de la gráfica son los ceros de la función.

CEROS DE POLINOMIOS

Si P es un polinomio y c es un número tal que $P(c)=0$, entonces decimos que c es un **cero** de P. A continuación se presentan formas equivalentes de decir lo mismo.

1. c es un cero de P

2. $x=c$ es una raíz de la ecuación $P(x)=0$

3. $x-c$ es un factor de $P(x)$

4. $x=c$ es una intersección en x de la gráfica de P

Entre cualesquiera dos ceros sucesivos del polinomio, los valores del mismo serán todos positivos o negativos. Por lo tanto, entre dos ceros sucesivos la gráfica se encontrará en su totalidad por encima o por debajo del eje x. En el ejemplo siguiente usamos los ceros de un polinomio para trazar su gráfica.

EJEMPLO 3 ■ Gráfica de un polinomio de tercer grado

Trace la gráfica de la función $P(x) = (x + 2)(x - 2)(x - 1)$.

SOLUCIÓN Los ceros de P ocurren en donde los factores del polinomio son iguales a 0. Así, $P(x) = 0$ cuando $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$ y $x - 1 = 0$, por tanto los ceros son -2, 2 y 1, y éstos son las intersecciones con el eje x de la gráfica. Puesto que $P(0) = 4$, la intersección con el eje y es 4.

Para trazar la gráfica, debemos calcular $P(x)$ para otros valores de x que se encuentren, a la derecha o a la izquierda de ceros sucesivos con el fin de determinar si $P(x)$ es positivo o negativo en cada uno de los intervalos determinados por los ceros. Si $P(x)$ es positivo en cualquier x que se encuentre entre ceros sucesivos, entonces su gráfica está por encima del eje x en este intervalo, y si $P(x)$ es negativo entonces la gráfica está por debajo del eje x. Al trazar los puntos dados en la tabla y unirlos obtenemos la gráfica de la figura 5.

x	$P(x)$
-3	-20
-2	0
-1	6
0	4
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{8}$
2	0
3	10

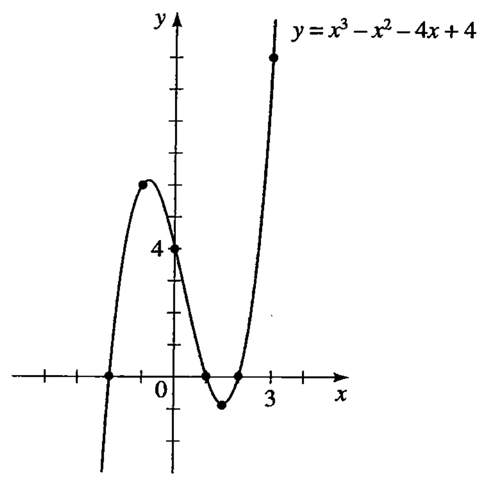


FIGURA 5 ■

Para ver por qué P y Q tienen el mismo comportamiento final, factorice P como sigue

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right)$$

$$Q(x) = 3x^5$$

Cuando $|x|$ es grande, el segundo y tercer términos dentro del paréntesis son muy pequeños (véase el ejercicio 66 del capítulo 1), por lo que

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 + 0)$$
$$= 3x^5 = Q(x)$$

En el ejemplo 3 graficamos un polinomio en las cercanías de sus ceros, esto es, para valores relativamente pequeños de x. El **comportamiento final** de un polinomio es la descripción de lo que le ocurre a los valores del mismo conforme $|x|$ se hace grande. *El comportamiento final está determinado por el término en el polinomio que tiene la potencia más alta de x,* porque cuando x es grande los demás términos son relativamente pequeños. Por ejemplo, los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ tienen el

x	$P(x)$	$Q(x)$
15	2,261.280	2,278,125
30	72,765,060	72,900,000
50	936,875,100	937,500,000
−15	−2,261,280	−2,278,125
−30	−72,765,060	−72,900,000
−50	−936,875,100	−937,500,000

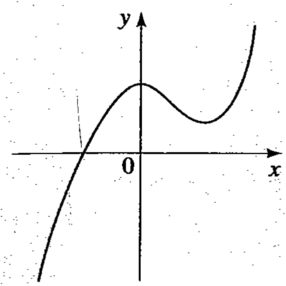
mismo comportamiento final porque cuando x se hace grande en la dirección positiva los valores de ambos se hacen muy grandes y positivos, y cuando x se hace grande en la dirección negativa sus valores son muy grandes y negativos (véase la tabla al margen). Describimos este comportamiento escribiendo

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

En el recuadro siguiente se muestran los cuatro tipos posibles de comportamiento final, en base al grado de la potencia más alta y el signo de su coeficiente.

COMPORTAMIENTO FINAL DE LOS POLINOMIOS

$y = P(x)$ tiene grado impar

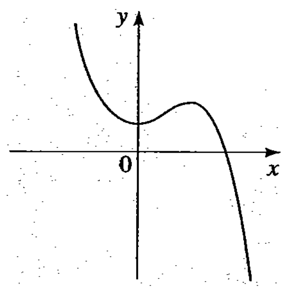


El coeficiente principal es positivo

Comportamiento final

$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$



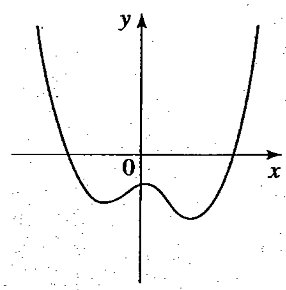
El coeficiente principal es negativo

Comportamiento final

$y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$

$y = P(x)$ tiene grado par

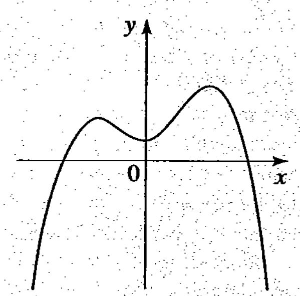


El coeficiente principal es positivo

Comportamiento final

$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$



El coeficiente principal es negativo

Comportamiento final

$y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$

$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

Para trazar la gráfica de un polinomio, usamos los ceros y el comportamiento final del mismo como se indica en el recuadro siguiente.

RECOMENDACIONES PARA GRAFICAR UN POLINOMIO

1. Factorice el polinomio para determinar todos sus ceros reales; éstos son las intersecciones con el eje x de la gráfica.
2. Elabore una tabla de valores del polinomio evaluando x entre y, a la izquierda y a la derecha de los ceros determinados en el paso 1. Incluya en la tabla la intersección y.
3. Grafique las intersecciones y los puntos determinados en el paso 2.
4. Determine el comportamiento final del polinomio.
5. Trace una curva suave que pase por los puntos graficados en el paso 3 y que exhiba el comportamiento final.

Sir Isaac Newton (1642–1727) sigue siendo universalmente considerado, a más de 270 años de su muerte, como uno de los gigantes de la física y la matemática. Es bien conocido por haber descubierto las leyes del movimiento y de la gravedad y por inventar el cálculo, pero su contribución también incluye el teorema del binomio, las leyes de la óptica y métodos para resolver ecuaciones polinomiales con cualquier grado de exactitud deseado. Nació el día de Navidad, fue un niño enfermizo, su padre falleció unos cuantos meses antes. Después de una infancia infeliz, ingresó a la Cambridge University donde aprendió matemáticas estudiando las obras de Euclides y Descartes.

Durante los años de la peste de 1665 y 1666, la universidad fue cerrada y Newton ocupó su tiempo en pensar y escribir sus ideas que posteriormente habrían de revolucionar las ciencias. Debido a un pavor patológico a la crítica publicó sus escritos mucho después, en parte debido al estímulo de Edmund Halley (quien descubrió el cometa hoy famoso). Después de publicar su obra, ésta le trajo a Newton enorme fama y prestigio en vida. Incluso los poetas se sintieron motivados para expresar elogios a Newton. Alejandro Pope escribió:

La Naturaleza y sus leyes se
mantenían ocultas en la oscuridad
de la noche.
Dios dijo: "Que aparezca Newton",
y todo se volvió luz.

(continúa)

EJEMPLO 4 ■ Gráfica de un polinomio de cuarto grado

Trace la gráfica de la función $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

SOLUCIÓN Factorizamos para obtener

$$\begin{aligned} P(x) &= -x^2(2x^2 + x - 3) \\ &= -x^2(2x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

por lo que los ceros de P son $0, -\frac{3}{2}$ y 1. La intersección y es $P(0) = 0$. En la tabla siguiente damos los valores de P en otros puntos. (Estos valores se obtienen muy fácilmente usando una calculadora programable.) Recuerde que debemos seleccionar puntos entre ceros sucesivos para determinar si el polinomio es positivo o negativo entre éstos, y luego los graficamos como se muestra en la figura 6.

x	$P(x)$
-2	-12
-1.5	0
-1	2
-0.5	0.75
0	0
0.5	0.5
1	0
1.5	-6.75

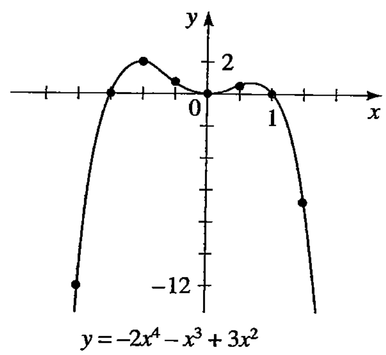


FIGURA 6

Dado que P tiene grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Uniendo los puntos para formar una curva suave, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 6. ■

Observe que aunque $x = 0$ es un cero del polinomio del ejemplo 4, la gráfica no cruza el eje x en 0 sino que apenas lo toca y después se eleva nuevamente. Decimos que la gráfica es *tangente* al eje x en $x = 0$.

DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN Y POLINOMIOS

Ahora usaremos dispositivos de graficación para explorar características adicionales de la gráfica de los polinomios. En el siguiente ejemplo usamos una calculadora gráfica para visualizar el comportamiento final de un polinomio de quinto grado.

Newton era mucho más modesto respecto a sus logros. Dijo: "Creo que fui un niño jugando a la orilla del mar... mientras todo un océano de verdades se extendía sin descubrir ante mí." Newton fue hecho caballero por la Reina Ana en 1705 y enterrado con grandes honores en la Abadía de Westminster.

EJEMPLO 5 ■ Comportamiento final de un polinomio de quinto grado

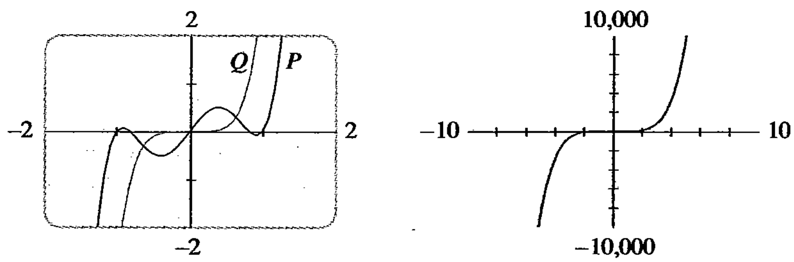
Grafique los polinomios

$$P(x) = 3x^3 - 5x^3 + 2x \qquad \text{y} \qquad Q(x) = 3x^5$$

en la misma pantalla, primero usando el rectángulo de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y después el de $[-10, 10]$ por $[-10,000,10,000]$. Describa y compare el comportamiento final de ambas funciones.

SOLUCIÓN La figura 7(a) muestra que las dos funciones tienen una apariencia muy distinta en el rectángulo de visualización más pequeño: el polinomio P tiene cuatro máximos locales, pero Q no tiene ninguno. Sin embargo en el rectángulo grande que se muestra en la figura 7(b) ambas funciones se ven prácticamente igual. Esto significa que P y Q tienen el mismo comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$



(a) (b)

La nota al margen anterior explica por qué P y Q tienen el mismo comportamiento final.

FIGURA 7 $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$ ■

Recuerde que si dentro de cierto rectángulo el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto de la gráfica de f entonces $f(a)$ es un máximo local de f, y si $(b, f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de f entonces $f(b)$ es un mínimo local (véase la figura 8). Decimos que $(a, f(a))$ es un **punto máximo local** y que $(b, f(b))$ es un **punto mínimo local**. El conjunto

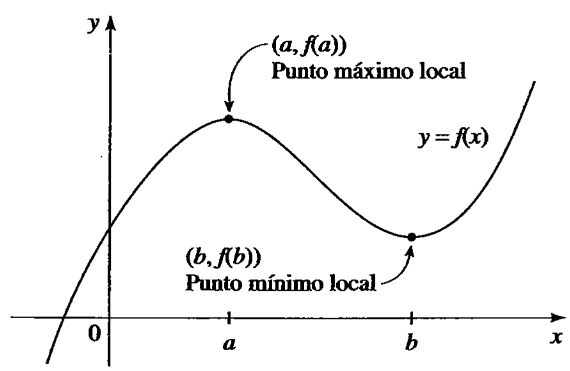


FIGURA 8

de todos los puntos máximos y mínimos locales de la gráfica de una función se conoce como **extremos locales**.

EJEMPLO 6 ■ Gráfica de un polinomio de tercer grado

Grafique la función polinomial

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 15$$

Determine las intersecciones en x y en y, y las coordenadas de los extremos locales de esta gráfica.

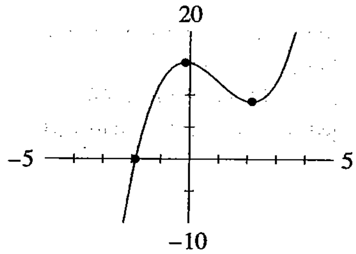


FIGURA 9
$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 15$

SOLUCIÓN Haciendo $x = 0$ vemos que la intersección en y de la gráfica es 15, por lo que debemos escoger un rectángulo de visualización que verticalmente sea mayor que este valor.

En la figura 9 se muestra la gráfica de P en el rectángulo de $[-5, 5]$ por $[-10, 20]$: ésta tiene una intersección en x, $x \approx -1.86$, y dos extremos, un máximo y un mínimo locales. Acercándonos a cada uno de ellos y recorriendo la gráfica con el cursor (como se explicó en la sección 2.5), encontramos que el punto máximo local es $(-0.16, 15.08)$ y que el punto mínimo local es $(2.15, 8.92)$, redondeados a dos decimales. ■

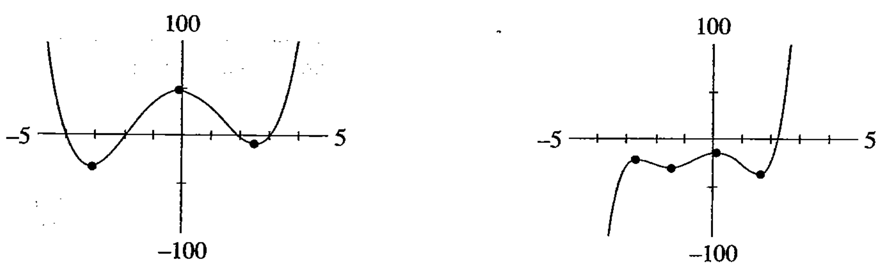
EJEMPLO 7 ■ Polinomios de cuarto y quinto grado

En el rectángulo de visualización $[-5, 5]$ por $[-100, 100]$, grafique cada uno de los siguientes polinomios y determine cuántos extremos locales tiene cada función.

(a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

(b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$

SOLUCIÓN Las gráficas se muestran en la figura 10. Vemos que P_1 tiene dos mínimos locales y un máximo local, es decir, tres extremos locales. El polinomio P_2 tiene dos mínimos locales y dos máximos locales —un total de cuatro extremos locales.



(a) (b)

FIGURA 10 $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$ $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$ ■

El polinomio P del ejemplo 6 es de grado 3 y su gráfica tiene dos extremos locales y el del ejemplo 7, P_1, es de cuarto grado y tiene tres extremos locales, en tanto que P_2 es de grado 5 y tiene cuatro. El número de extremos en cada caso es uno menos que el grado, lo cual no es una coincidencia como lo muestra el principio enunciado en el recuadro siguiente. (Una demostración de este principio requiere de métodos de cálculo.)

EXTREMOS LOCALES DE POLINOMIOS

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n, entonces la gráfica de P tiene como máximo $n-1$ extremos locales.

De hecho un polinomio de grado n puede tener menos de $n - 1$ extremos locales, como veremos en el ejemplo 8. El principio anterior sólo nos dice que un polinomio de grado n no puede tener más de $n - 1$ extremos locales.

EJEMPLO 8 ■ Extremos locales de polinomios

Grafique cada uno de los siguientes polinomios utilizando un dispositivo de graficación, y determine las coordenadas aproximadas de los extremos locales.

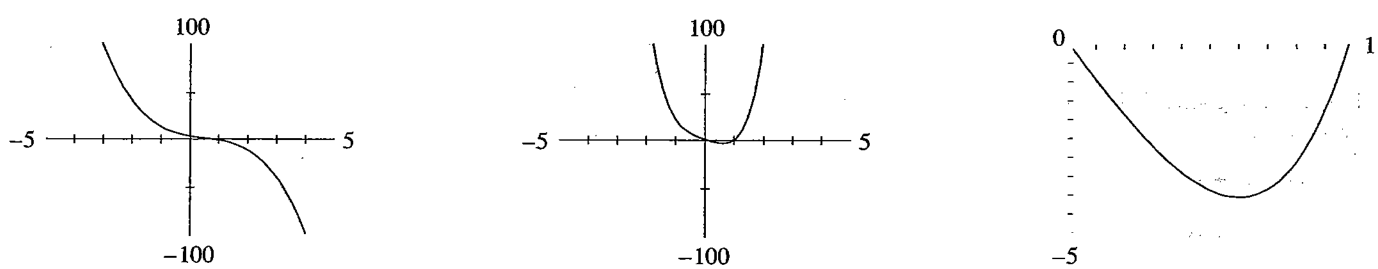
(a) $F(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x + 2$

(b) $G(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

SOLUCIÓN

(a) En el rectángulo de visualización $[-5, 5]$ por $[-100, 100]$ obtenemos la gráfica de F que se muestra en la figura 11(a). En ésta vemos que los valores de $F(x)$ parecen disminuir de manera continua, por lo que la función no tiene ningún máximo o mínimo local. Si seleccionamos otros rectángulos de visualización, observamos el mismo comportamiento, por lo que la función no tiene extremos locales.

(b) En el rectángulo de $[-5, 5]$ por $[-100, 100]$, la gráfica de G tienen la forma que se muestra en la figura 11(b); parece tener simplemente un mínimo local en el cuadrante IV. Para confirmar lo anterior, agrandamos la parte de la gráfica cercana a este punto mínimo. El rectángulo de $[0, 1]$ por $[-5, 0]$ proporciona la gráfica de la figura 11(c). Con el cursor, localizamos el punto mínimo local en $(0.61, -4.01)$, correcto a dos decimales.



(a) $F(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ (b) $G(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$ (c) $G(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

FIGURA 11 ■

FAMILIAS DE POLINOMIOS

Una calculadora gráfica nos permite obtener fácilmente la gráfica de varias funciones en la misma pantalla de visualización. Con ello podemos ver cómo afecta a la forma de la gráfica cambiar un valor en la definición de la función. En el siguiente ejemplo aplicaremos este principio a una familia de polinomios de tercer grado.

EJEMPLO 9 ■ Familia de polinomios

Trace la familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$ para $c = 0, 1, 2$ y 3. ¿De qué manera afecta a la gráfica el cambio en el valor de c?

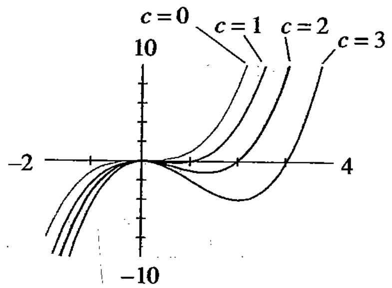


FIGURA 12
Familia de polinomios
$P(x) = x^3 - cx^2$

SOLUCIÓN Los polinomios

$$P_0(x) = x^3 \qquad P_1(x) = x^3 - x^2$$

$$P_2(x) = x^3 - 2x^2 \qquad P_3(x) = x^3 - 3x^2$$

se muestran graficados en la figura 12. Vemos que incrementar el valor de c hace que la gráfica muestre un "valle" cada vez más profundo a la derecha del eje y, creando un máximo local en el origen y un mínimo local en un punto en el cuadrante IV. Este mínimo local se mueve más hacia abajo y más lejos a la derecha conforme crece c. Para ver por qué ocurre lo anterior, factorice $P(x) = x^2(x - c)$. El polinomio P tiene ceros en 0 y en c, y mientras más grande se haga c, más alejado hacia la derecha estará el mínimo entre 0 y c.

6.1 EJERCICIOS

1-8 ■ Obtenga la gráfica de la función transformando la de una función apropiada de la forma $y = x^n$. Muestre todas las intersecciones x y en y de cada gráfica.

1. $y = x^3 - 8$

2. $y = (x - 2)^3$

3. $y = -x^4 + 16$

4. $y = -2(x - 1)^3$

5. $y = -(x - 1)^4 + 1$

6. $y = 3x^5 - 9$

7. $y = 4(x - 2)^5 - 4$

8. $y = 3x^4 - 27$

9-26 ■ Trace la gráfica de la función, y describa su comportamiento final.

9. $y = (x - 3)(x + 1)$

10. $y = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

11. $y = x(x - 2)(x + 1)$

12. $y = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

13. $y = (x - 1)^2(x - 3)$

14. $y = \frac{1}{4}(x + 1)^3(x - 3)$

15. $y = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$

16. $y = x^3 + x^2 - x - 1$

17. $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

18. $y = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

19. $y = x^3 - x^2 - 6x$

20. $y = (x^2 - 2x - 3)^2$

21. $y = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)$

22. $y = x^4 - 3x^2 - 4$

23. $y = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

24. $y = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

25. $y = x^5 - 9x^3$

26. $y = x^6 - 2x^3 + 1$

27-30 ■ Diga a cuál de las gráficas I a IV corresponde cada una de las funciones polinomiales. Explique su elección.

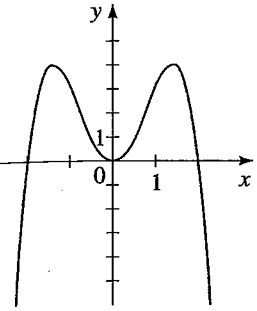
27. $P(x) = x(x^2 - 4)$

28. $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

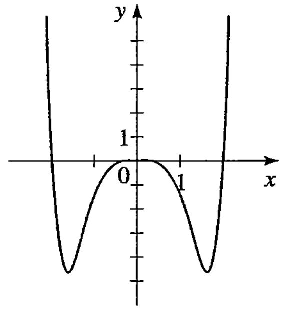
29. $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$

30. $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$

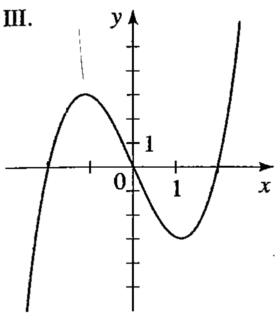
I.



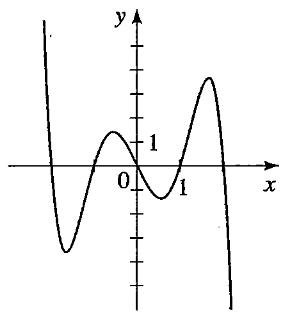
II.



III.



IV,



31-36 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar el polinomio, y describa su comportamiento final.

31. $y = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$

32. $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x$

33. $y = x^4 - 7x^2 + 5x + 5$

34. $y = (1 - x)^5$

35. $y = x^{11} - 9x^9$

36. $y = 2x^2 - x^{12}$

37-44 ■ Grafique el polinomio en el rectángulo de visualización dado. Determine las intersecciones x (si es que hay alguna) y en y, y las coordenadas de sus extremos locales. Exprese cada respuesta correcta hasta dos decimales.

37. $y = -x^2 + 8x$, $[-4, 12]$ por $[-50, 30]$

38. $y = x^3 - 3x^2$, $[-2, 5]$ por $[-10, 10]$

39. $y = x^3 - 12x + 9$, $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

40. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 32$, $[-5, 5]$ por $[-60, 30]$

41. $y = x^4 + 4x^3$, $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

42. $y = x^4 - 18x^2 + 32$, $[-5, 5]$ por $[-100, 100]$

43. $y = 3x^5 - 5x^3 + 3$, $[-3, 3]$ por $[-5, 10]$

44. $y = x^5 - 5x^2 + 6$, $[-3, 3]$ por $[-5, 10]$

45-54 ■ Determine los extremos locales del polinomio, correctos a dos decimales.

45. $y = -2x^2 + 3x + 5$

46. $y = x^3 + 12x$

47. $y = x^3 - x^2 - x$

48. $y = 6x^3 + 3x + 1$

49. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

50. $y = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$

51. $y = (x - 2)^5 + 32$

52. $y = (x^2 - 2)^3$

53. $y = x^8 - 3x^4 + x$

54. $y = \frac{1}{3}x^7 - 17x^2 + 7$

55-60 ■ Grafique la familia de polinomios en un mismo rectángulo de visualización utilizando los valores dados para c. Explique la forma en que cambia la gráfica al modificar c.

55. $P(x) = cx^3$; $c = 1, 2, 5, \frac{1}{2}$

56. $P(x) = (x - c)^3$; $c = -1, 0, 1, 2$

57. $P(x) = x^4 + c$; $c = -1, 0, 1, 2,$

58. $P(x) = x^3 + cx$; $c = 2, 0, -2, -4$

59. $P(x) = x^4 - cx$; $c = 0, 1, 8, 27$

60. $P(x) = x^c$; $c = 1, 3, 5, 7$

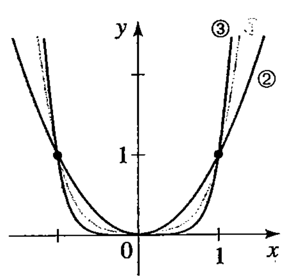
61. (a) Sobre los mismos ejes coordenados trace las gráficas (tan exacto como sea posible) de las funciones

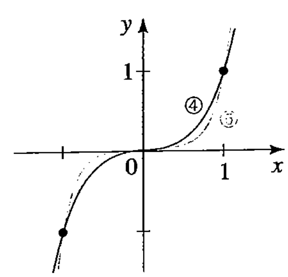
$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad \text{y} \quad y = -x^2 + 5x + 2$$

(b) Basándose en el inciso (a), ¿en cuántos puntos parecen intersectarse las dos gráficas?

(c) Determine las coordenadas de los puntos de intersección.

62. En las figuras se muestran trazadas partes de las gráficas de $y = x^2, y = x^3, y = x^4, y = x^5$ y $y = x^6$. Determine qué función corresponde a cada gráfica.





63. Recuerde que una función es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ o *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo x real.

(a) Demuestre que si f y g son impares, también lo es $f + g$.

(b) Demuestre que si f y g son pares, entonces también lo es $f + g$.

(c) Demuestre que si f es impar y g es par, y ninguna tiene el valor constante 0, entonces $f + g$ no es ni par ni impar.

(d) Demuestre que un polinomio $P(x)$ que sólo contiene potencias impares de x es una función impar.

(e) Demuestre que un polinomio $P(x)$ que sólo contiene potencias pares de x es una función par.

(f) Demuestre que si un polinomio $P(x)$ contiene potencias pares e impares de x, entonces no es una función par ni impar.

(g) Exprese la función

$$P(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 2x + 5$$

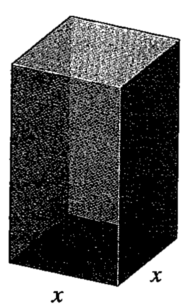
como la suma de una función impar y una par.

64. Una caja de cartón tiene una base cuadrada y cada una de las cuatro aristas de la base tiene una longitud de x pulgadas, como se muestra en la figura. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 pulgadas.

(a) Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

(b) Trace la gráfica de la función V.

(c) Dado que tanto x como V representan cantidades positivas (longitud y volumen, respectivamente), ¿cuál es el dominio de V?



65. Un analista de mercados que trabaja para un pequeño fabricante de aparatos domésticos determina que si la empresa produce y vende x licuadoras anualmente, la utilidad total (en dólares) es

$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Obtenga la gráfica de la función P en un rectángulo de visualización apropiado y use ésta para responder las preguntas siguientes.

(a) Cuando se fabrican sólo algunas licuadoras, la empresa pierde dinero (la utilidad es negativa). [Por ejemplo, $P(10) = -263.3$, por lo que la empresa pierde \$263.30 si produce y vende sólo 10 licuadoras.] ¿Cuántas licuadoras deberá producir para no tener perdidas ni utilidades?

(b) ¿Aumenta la utilidad de manera indefinida conforme se producen y venden más licuadoras? De no ser así, ¿cual es la utilidad más elevada posible que puede ganar la empresa?

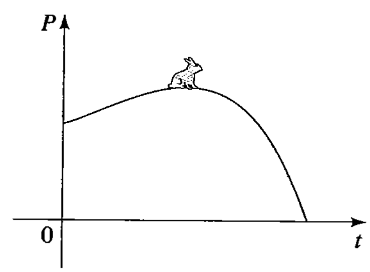
66. Se observa que la población de conejos en una pequeña isla está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1{,}000$$

donde t es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones.

(a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población, y cuál es ésta?

(b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?



67. (a) Grafique la función $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ y determine los extremos locales, exactos al decimal más cercano.

(b) Grafique la función

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4) + 5$$

y use sus respuestas del inciso (a) para determinar todos los extremos locales, exactos al decimal más próximo.

(c) Si $a < b < c$, explique por qué la función

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

debe tener dos extremos locales.

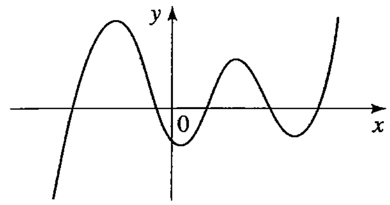
(d) Si $a < b < c$ y d es cualquier número real, explique por qué la función $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c) + d$ debe tener dos extremos locales.

68. (a) ¿Cuántas intersecciones en x y cuántos extremos locales tiene el polinomio $P(x) = x^3 - 4x$?
(b) ¿Cuántas intersecciones en x y cuántos extremos locales tiene el polinomio $Q(x) = x^3 + 4x$?
(c) Si $a > 0$, cuántas intersecciones en x y cuántos extremos locales tiene cada uno de los polinomios $P(x) = x^3 - ax$ y $Q(x) = x^3 + ax$? Explique su respuesta.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

69. **Gráfica de potencias altas** Grafique las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \leq x \leq 1$, en los mismos ejes coordenados. ¿Cuál piensa que sería la apariencia de la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Y qué piensa respecto a $y = x^{101}$? Elabore una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

70. **Número máximo de extremos locales** ¿Cuál es el grado más pequeño posible que puede tener el polinomio cuya gráfica se muestra? Explique su respuesta.



71. **Número posible de extremos locales** ¿Es posible que un polinomio de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Un polinomio de cuarto grado puede tener exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener polinomios de tercer, cuarto, quinto y sexto grado? (Piense en el comportamiento final de éstos.) Plantee un ejemplo de un polinomio con seis extremos locales.

72. **¿Situación imposible?** ¿Es posible que un polinomio tenga dos máximos locales y ningún mínimo local? Explique su respuesta.

6.2 CEROS REALES DE LOS POLINOMIOS

Hasta aquí hemos estado estudiando *gráficamente* las funciones polinomiales; en esta sección las empezamos a estudiar *algebraicamente*. La mayor parte de nuestra tarea se centrará en determinar las soluciones de las ecuaciones polinomiales, pero primero veremos la división de polinomios.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división larga de polinomios es muy parecida al proceso de la división larga con números. Por ejemplo, para dividir $6x^2 - 26x + 12$ (el **dividendo**) entre $x - 4$ (el **divisor**), lo hacemos como sigue.

$$\begin{array}{rrrl}
 & \boxed{\text{cociente}} & & \\
 & \downarrow & & \\
 & 6x - 2 & & \\
\boxed{\text{divisor}} \longrightarrow & x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12} & \longleftarrow \boxed{\text{dividendo}} & \\
 & \underline{6x^2 - 24x} & & \text{Multiplique el divisor por } 6x \\
 & -2x + 12 & & \text{Reste y “baje” 12} \\
 & \underline{-2x + 8} & & \text{Multiplique el divisor por } -2 \\
 & 4 & \longleftarrow \boxed{\text{residuo}} & \text{Reste}
\end{array}$$

Evaristo Galois (1811–1832) es uno de los pocos matemáticos cuyo nombre, en su honor, se ha usado para referirse a una teoría entera. A pesar de que falleció antes de cumplir los 21 años, dejó totalmente resuelto el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela que cualquier ecuación dada puede ser resuelta mediante operaciones algebraicas. Aunque Galois fue uno de los matemáticos más grandes de su tiempo nadie lo sabía, excepto él mismo. Repetidamente envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson, quienes o bien perdieron sus cartas o no comprendieron sus ideas. Galois escribía con un estilo lacónico e incluía pocos detalles, lo que probablemente fue un factor en su fracaso al intentar pasar el examen de admisión en la Ecole Polytechnique de París. Por otro lado, era políticamente un radical y pasó varios meses en prisión debido a sus actividades revolucionarias. Su breve vida llegó a un trágico desenlace cuando fue muerto en un duelo ocasionado por una aventura amorosa. La noche previa al duelo, ante el temor de perder la vida, Galois escribió lo esencial de sus ideas y se las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "...habrá, espero, personas que encontrarán provechoso descifrar todo este enredo." Esto es exactamente lo que el matemático Camille Jordan hizo 14 años después.

El proceso termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. Entonces el último renglón contiene el **residuo**, y el superior el **cociente**. El resultado de la división se puede interpretar de cualquiera de las siguientes dos formas.

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4} = 6x - 2 + \frac{4}{x - 4}$$

o

$$6x^2 - 26x + 12 = (x - 4)(6x - 2) + 4$$

Resumimos lo que ocurre en este o en cualquier otro problema de división larga con el siguiente teorema.

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

donde $R(x)$ es 0 o de un grado inferior que el de $D(x)$. Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se conocen como el **dividendo** y el **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **residuo**.

EJEMPLO 1 ■ División larga de polinomios

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Determine polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

SOLUCIÓN Utilizamos la división larga después de incluir primero el término $0x^3$ en el dividendo, para asegurarnos que las columnas se alinearán correctamente en el proceso.

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 4x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
2x^2 - x + 2 \big) & 8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1 \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \\
 & \qquad 4x^3 - 2x^2 - 3x \\
 & \qquad \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \\
 & \qquad\qquad\qquad -7x + 1
\end{array}$$

El proceso queda terminado en este punto porque $-7x + 1$ es un grado menor que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la tabla de la división larga, vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, por lo que

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1) \qquad ■$$

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios, y puede utilizarse cuando el divisor es de la forma $x - c$. En esta forma de dividir sólo escribimos las partes esenciales de la tabla de la división larga. Compare éstas en el siguiente caso en que dividimos $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x - 3 \\ x - 3 \overline{)2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \qquad\qquad \\ -x^2 + 0x \qquad \\ \underline{-x^2 + 3x} \qquad \\ -3x + 5 \\ \underline{-3x + 9} \\ -4 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & -4 \end{array}$$

En la división sintética sólo escribimos las partes esenciales de la tabla de la división larga. Abreviamos $2x^3 - 7x^2 + 5$ escribiendo únicamente los coeficientes 2 –7 0 5, y en lugar de $x - 3$ simplemente escribimos 3. (Escribir 3 y no –3 nos permite sumar en lugar de restar en el proceso de división, sin embargo esto cambia el signo de todos los números que se encuentran en los recuadros amarillos.)

A continuación se muestra la forma en que se obtiene en la práctica la tabla de la división larga. Empiece escribiendo el divisor y el dividendo:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Baje el 2, multiplique $3 \cdot 2 = 6$ y escriba el resultado en el renglón de en medio. A continuación sume:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & & \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$$

Repita este proceso de multiplicar y después sumar hasta que la tabla este completa.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & -4 \end{array}$$

DIVISIÓN SINTÉTICA

Para dividir $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ por $x - c$, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{c|cccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & cb_{n-1} & cb_{n-2} & cb_{n-3} & \cdots & cb_2 & cb_1 & cb_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdots & b_1 & b_0 & r \end{array}$$

Aquí $b_{n-1} = a_n$ y cada número del renglón inferior se obtiene sumando los números que están por encima de él. El residuo es r y el cociente es

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

Si el divisor en el algoritmo de la división es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser una constante (puesto que el grado del residuo es inferior al del divisor). Si llamamos a esta constante r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Haciendo $x = c$ en esta ecuación, obtenemos $P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$. Esto prueba el teorema siguiente.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si el polinomio $P(x)$ se divide por $x - c$, entonces el residuo es $P(c)$.

EJEMPLO 2 ■ Uso del teorema del residuo para determinar el valor de un polinomio

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

(a) Determine el cociente y el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.
(b) Utilice le teorema del residuo para determinar $P(-2)$.

SOLUCIÓN

(a) Puesto que $x + 2 = x - (-2)$, la tabla de la división sintética para este problema toma la forma siguiente.

$$\begin{array}{c|cccccc} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ y el residuo es 5. Por lo que

$$3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3 = (x + 2)(3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + 5$$

o
$$\frac{3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3}{x + 2} = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1 + \frac{5}{x + 2}$$

(b) Según el teorema del residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. Del inciso (a) el residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$. ■

Si el polinomio $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

A la inversa, si $P(c) = 0$ entonces por el teorema del residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

por lo que $x - c$ es un factor de $P(x)$. Por tanto, hemos probado el teorema siguiente.

TEOREMA DEL FACTOR

$P(c) = 0$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

EJEMPLO 3 ■ Factorización de un polinomio usando el teorema del factor

Sea que $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Demuestre que $P(1) = 0$, y utilice este hecho para factorizar completamente $P(x)$.

1	1	0	−7	6
		1	1	−6
	1	1	−6	0

	$x^2 + x - 6$
$x - 1$	$x^3 + 0x^2 - 7x + 6$
	$x^3 - x^2$
	$x^2 - 7x$
	$x^2 - x$
	$-6x + 6$
	$-6x + 6$
	0

SOLUCIÓN Sustituyendo, vemos que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Según el teorema de la factorización, esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Utilizando división sintética o la división larga (véase el margen), vemos que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3) \qquad \text{Factorice la cuadrática } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$ ■

Recuerde que si $P(c) = 0$, entonces el número c es un **cero** del polinomio P. También expresamos lo anterior diciendo que c es una **raíz** de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Así, los ceros del polinomio del ejemplo 3 son 1, 2 y −3. Con esta terminología el teorema del factor nos dice que $x - c$ es un factor de $P(x)$ si y sólo si c es un cero de $P(x)$.

EJEMPLO 4 ■ Determinación de un polinomio con ceros especificados

Obtenga un polinomio $F(x)$ de grado 4 que tenga como ceros −3, 0, 1 y 5.

SOLUCIÓN Según el teorema del factor, $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben ser factores del polinomio deseado, por lo que hacemos

$$F(x) = (x + 3)(x - 0)(x - 1)(x - 5) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Puesto que $F(x)$debe ser de grado 4, cualquier otra solución del problema debe ser un múltiplo constante del polinomio que hemos elegido, ya que la multiplicación por cualquier polinomio diferente a una constante incrementaría el grado. ■

CEROS RACIONALES DE LOS POLINOMIOS

El teorema del factor nos dice que la determinación de los ceros de un polinomio, es realmente lo mismo que factorizarlo en factores lineales. Estudiaremos ahora un método para determinar todos los ceros *racionales* de un polinomio.

Para comprender el siguiente teorema, consideremos el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)(x+4) && \text{Forma factorizada} \\ &= x^3 - x^2 - 14x + 24 && \text{Forma expandida} \end{aligned}$$

A partir de la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, 3 y -4. Al expandir el polinomio, se obtiene la constante 24 al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto quiere decir que los ceros del polinomio son factores del término constante. El siguiente teorema generaliza esta observación.

TEOREMA DE LOS CEROS RACIONALES

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0

y q es un factor del coeficiente principal a_n.

Demostración Si p/q es un cero racional simplificado completamente del polinomio P, entonces tenemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0 q^n \text{ y factorice el lado izquierdo}$$

Ahora p es un factor del lado izquierdo, de forma que también lo debe ser del lado derecho. Puesto que p/q está simplificado completamente, p y q no tienen ningún factor en común y p debe ser un factor de a_0. Una demostración similar muestra que q es un factor de a_n.

Si $a_n = 1$ en el teorema de los ceros racionales entonces q debe ser 1 o -1, por lo que en este caso cualquier cero racional p/q es de hecho un factor *entero* de a_0. *Así, si el término de potencia más alta en un polinomio es simplemente x^n, todos sus ceros racionales son enteros, no fracciones.*

EJEMPLO 5 ■ **Uso del teorema de los ceros racionales para factorizar un polinomio**

Factorice el polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

SOLUCIÓN Según el teorema de los ceros racionales, si p/q es un cero de $P(x)$ entonces p divide a 6 y q divide a 2, por lo que p/q es de la forma

$$\frac{\text{factor de } 6}{\text{factor de } 2}$$

Los factores de 6 son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, y los de 2 son $\pm1, \pm2$. Entonces, los valores posibles de p/q son

$$\pm\tfrac{1}{1},\quad \pm\tfrac{2}{1},\quad \pm\tfrac{3}{1},\quad \pm\tfrac{6}{1},\quad \pm\tfrac{1}{2},\quad \pm\tfrac{2}{2},\quad \pm\tfrac{3}{2},\quad \pm\tfrac{6}{2}$$

Simplificando las fracciones y eliminando duplicados, obtenemos la lista siguiente de valores posibles de p/q.

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\quad \pm6,\quad \pm\tfrac{1}{2},\quad \pm\tfrac{3}{2}$$

Ahora verificamos para ver cuáles de estos *posibles* ceros lo *son* realmente, sustituyendo uno por uno en el polinomio P hasta que determinemos uno que haga $P(x) = 0$. Tenemos

$$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4 \qquad \text{1 } \textit{no} \text{ es un cero de } P$$

$$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0 \qquad \text{2 } \textit{es} \text{ un cero de } P$$

Puesto que $x = 2$ es un cero de P, se concluye que $x - 2$ es un factor de $P(x)$. Utilizando la división sintética (como se muestra al margen), obtenemos la factorización siguiente:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\ &= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) && \text{Véase el margen} \\ &= (x-2)(2x-1)(x+3) && \text{Factorice } 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$ ■

El recuadro siguiente explica cómo utilizar el teorema de los ceros racionales con la división sintética para factorizar un polinomio.

DETERMINACIÓN DE LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO

1. Liste todos los ceros posibles utilizando el teorema de los ceros racionales.
2. Utilice la división sintética para evaluar el polinomio en cada uno de los candidatos a ceros racionales determinados en el paso 1. Cuando el residuo sea 0, anote el cociente obtenido.
3. Repita los pasos 1 y 2 para el cociente. Deténgase cuando llegue a un cociente que sea cuadrático o que se pueda factorizar con facilidad, y utilice la fórmula cuadrática o factorice para determinar los ceros restantes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 1 & -4 & -9 & 14 \\ \hline & 1 & -4 & -9 & 14 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 2 & -6 & -22 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -11 & 1 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 5 & 0 & -25 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

EJEMPLO 6 ■ Uso del teorema de los ceros racionales y de la fórmula cuadrática

Determine las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 + 0$.

SOLUCIÓN Supongamos que $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x$. El coeficiente principal de P es 1, por lo que todos los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Entonces, los candidatos posibles son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Usando la división sintética (véase el margen) obtenemos que 1 y 2 no son ceros, pero 5 lo es y P se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x - 5)(x^3 - 5x - 2)$$

Ahora intentamos factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus posibles ceros son los divisores de -2, es decir,

$$\pm 1, \quad -2$$

Como ya hemos visto que 1 y 2 no son ceros del polinomio original P, no es necesario probarlos otra vez. Al verificar los candidatos restantes -1 y -2, observamos que -2 es un cero y que P se factoriza en la forma

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x - 5)(x^3 - 5x - 2) \\ &= (x - 5)(x + 2)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Las soluciones a la ecuación son $5, -2, 1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$. ■

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES Y COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA LAS RAÍCES

En algunos casos, la regla siguiente —descubierta por el filósofo y matemático francés René Descartes alrededor de 1637— es útil para la eliminación de candidatos de largas listas de posibles raíces racionales. Para describir esta regla, necesitamos el concepto de *variación del signo*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito en la forma de potencias descendentes de x (y omitiendo potencias con coeficiente 0), entonces una **variación en el signo** ocurre siempre que coeficientes adyacentes tengan signos opuestos. Por ejemplo,

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones en el signo.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Sean que $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en el signo en $P(x)$ o es menor que éste en un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en el signo en $P(-x)$ o es menor que éste en un número entero par.

EJEMPLO 7 ■ Uso de la regla de Descartes

Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos del polinomio

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

SOLUCIÓN El polinomio tiene una variación en el signo y por lo tanto posee un cero positivo. Ahora

$$\begin{aligned} P(-x) &= 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3 \\ &= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(-x)$ tiene tres variaciones en el signo. Entonces $P(x)$ posee una o tres raíces negativas, la cual hace un total de dos o cuatro raíces reales; las restantes son números imaginarios, mismos que estudiaremos en la sección 3.3. ■

Decimos que a es una **cota inferior** y b es una **cota superior** para las raíces de una ecuación polinomial si toda raíz real c de la ecuación satisface $a \leqslant c \leqslant b$. El teorema siguiente nos permite determinar estas cotas para cualquier ecuación polinomial.

EL TEOREMA DE LAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. Si dividimos $P(x)$ entre $x - b$ (siendo $b > 0$) utilizando la división sintética, y el renglón que contiene el cociente y el residuo no tiene ningún valor negativo, entonces b es una cota superior para las raíces reales de $P(x) = 0$.
2. Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$ (siendo $a < 0$) utilizando la división sintética, y el renglón que contiene el cociente y el residuo tiene valores que son alternadamente no positivos y no negativos, entonces a es una cota inferior para las raíces reales de $P(x) = 0$.

En los ejercicios 90 y 91 se sugiere una demostración de este teorema. La frase "alternadamente no positivos y no negativos" simplemente significa que se alternan los signos de los números, considerando el cero como positivo o negativo según se requiera.

EJEMPLO 8 ■ Cotas superior e inferior para los ceros de un polinomio

Demuestre que las raíces reales de la ecuación $x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$ se encuentran entre -3 y 2.

SOLUCIÓN Dividimos el polinomio entre $x - 2$ y $x + 3$ mediante la división sintética.

2	1	0	−3	2	−5	
		2	4	2	8	
	1	2	1	4	3	← Todos los valores son positivos

−3	1	0	−3	2	−5	
		−3	9	−18	48	
	1	−3	6	−16	43	← Los valores alternan su signo

Según el teorema de las cotas superior e inferior, -3 es una cota inferior y 2 es una superior para las raíces. Puesto que ni -3 ni 2 son raíces (los residuos no son iguales a 0 en la tabla de división), todas las raíces reales se encuentran entre esos números. ■

EJEMPLO 9 ■ Factorización de un polinomio de quinto grado

Factorice completamente el polinomio

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

SOLUCIÓN Los ceros racionales posibles de $P(x)$ son $\pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}, \pm3, \pm\frac{9}{2}$ y ±9. Primero revisamos los candidatos positivos, empezando por el más pequeño.

$\frac{1}{2}$	2	5	−8	−14	6	9	
		1	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{33}{4}$	$-\frac{9}{8}$	
	2	6	−5	$-\frac{33}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{63}{8}$	← $\frac{1}{2}$ no es un cero

1	2	5	−8	−14	6	9	
		2	7	−1	−15	−9	
	2	7	−1	−15	−9	0	← $P(1) = 0$

Así, 1 es un cero y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Continuamos factorizando el cociente.

1	2	7	−1	−15	−9	
		2	9	8	−7	
	2	9	8	−7	−16	← 1 no es un cero

$\frac{3}{2}$	2	7	−1	−15	−9	
		3	15	21	9	
	2	10	14	6	0	← $P(\frac{3}{2}) = 0$, y todos los valores son no negativos

Vemos que $\frac{3}{2}$ es a la vez un cero y una cota superior para los ceros de $P(x)$, por lo que no necesitamos revisar más valores en busca de ceros positivos, ya que los candidatos restantes son mayores que $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x - \tfrac{3}{2})(2x^3 + 10x^2 + 14x + 6) \\ &= (x - 1)(2x - 3)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

Se factorizan 2 del último factor, y se multiplica dentro del segundo factor

De acuerdo con la regla de los signos de Descartes, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene un cero positivo por lo que los únicos ceros racionales posibles son –1 y –3.

$$\begin{array}{r|rrrrl} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 & \\ \hline & & -1 & -4 & -3 & \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 & \leftarrow P(-1)=0 \end{array}$$

Por lo tanto
$$P(x) = (x-1)(2x-3)(x+1)(x^2+4x+3)$$
$$= (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3)$$

Esto significa que los ceros de P son $1, \frac{3}{2}, -1$, y -3. ■

USO DEL ÁLGEBRA Y DE DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN PARA RESOLVER ECUACIONES POLINOMIALES

En la sección 1.9 utilizamos dispositivos de graficación para resolver ecuaciones gráficamente. Ahora podemos utilizar las técnicas algebraicas que hemos aprendido para escoger un rectángulo de visualización apropiado al resolver ecuaciones polinomiales.

EJEMPLO 10 ■ Resolución de una ecuación de cuarto grado

Determine todas las soluciones reales de la ecuación siguiente, correctas hasta el decimal más cercano.

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

SOLUCIÓN Primero usaremos el teorema de las cotas superior e inferior para obtener dos números entre los cuales deben encontrarse todas las soluciones. Esto nos permitirá escoger un rectángulo de visualización que contenga con seguridad todas las intersecciones en x de la función polinomial. Utilizamos la división sintética y procedemos por ensayo y error.

Utilizamos el teorema de las cotas superior e inferior para determinar dónde pueden encontrarse las raíces.

Para obtener una cota superior, probamos los números enteros $1, 2, 3, \ldots$ como candidatos posibles. Vemos que 2 es una cota superior para las raíces.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 \\ \hline & & 3 & 7 & 0 & -2 \\ \hline & 3 & 7 & 0 & -2 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrl} 2 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 & \\ \hline & & 6 & 20 & 26 & 48 & \\ \hline & 3 & 10 & 13 & 24 & 45 & \leftarrow \text{Todos son positivos} \end{array}$$

Ahora buscamos una cota inferior, probando con los números –1, –2 y –3 como candidatos posibles.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 \\ \hline & & -3 & -1 & 8 & -6 \\ \hline & 3 & 1 & -8 & 6 & -9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 \\ \hline & & -6 & 4 & 6 & -8 \\ \hline & 3 & -2 & -3 & 4 & -11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrl} -3 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 & \\ \hline & & -9 & 15 & -24 & 78 & \\ \hline & 3 & -5 & 8 & -26 & 75 & \leftarrow \text{Los valores alternan su signo} \end{array}$$

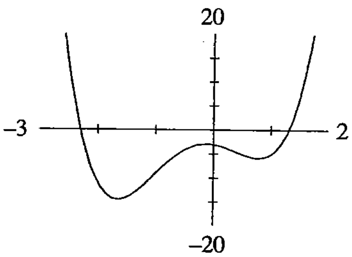


FIGURA 1
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Entonces -3 es una cota inferior para las raíces, por lo que el rectángulo de visualización $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene todas las intersecciones en x de $y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$. La gráfica de la figura 1 tiene dos intersecciones en x, uno entre -3 y -2 y el otro entre 1 y 2. Al amplificar observamos que las soluciones de la ecuación, expresadas al decimal más cercano, son -2.3 y 1.3. ■

EJEMPLO 11 ■ Determinación del tamaño de un depósito de combustible

Un depósito de combustible está formado por una sección central cilíndrica de 4 pies de largo y dos secciones semiesféricas en los extremos, como se muestra en la figura 2. Si el depósito tiene un volumen de 100 pies^3, ¿cuál es el radio r mostrado en la figura, correcto al centésimo de pie más próximo?

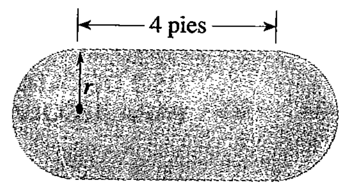


FIGURA 2

SOLUCIÓN Utilizando la fórmula del volumen que se encuentra en el interior de la primera de forros de este libro, vemos que el volumen de la sección cilíndrica del depósito es

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera cuyo volumen es

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Dado que el volumen total del depósito es de 100 pies^3, obtenemos la ecuación siguiente:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para r no tendría sentido en esta situación física, y por substitución podemos verificar que $r = 3$ nos conduce a un depósito que tiene más de 226 pies^3 de volumen, un valor mayor que los 100 pies^3. Entonces sabemos que el radio correcto es algún valor entre 0 y 3 pies, y por lo tanto usamos un rectángulo de visualización de $[0, 3]$ por $[50, 150]$ para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$, como se muestra en la figura 3. Puesto que deseamos que el valor de esta función sea igual a 100, también graficamos la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo. El radio correcto será la coordenada en x del punto de intersección de la curva con la recta. Usando el cursor y amplificando, vemos que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, correcto a dos decimales. Por lo tanto, el depósito tiene un radio de aproximadamente 2.15 pies. ■

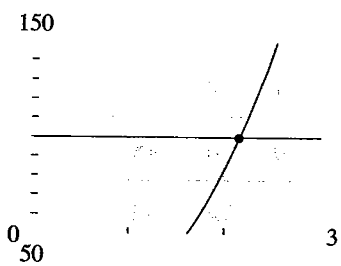


FIGURA 3
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

Observe que también podríamos haber resuelto la ecuación del ejemplo 11 escribiéndola primero en la forma

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y después determinamos la intersección en x de la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 - 100$.

6.2 EJERCICIOS

1-12 ■ Determine el cociente y el residuo

1. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

2. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$

3. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$

4. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$

5. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$

6. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

7. $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$

8. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 20x - 5}{x^2 + x + 3}$

9. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$

10. $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$

11. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

12. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

13-19 ■ Use división sintética y el teorema del residuo para evaluar $P(c)$.

13. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

14. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

15. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

16. $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

17. $P(x) = 5x^4 + 30x^2 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

18. $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

19. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

20. Suponga que

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ mediante (a) división sintética, y (b) sustituyendo $x = 7$ en el polinomio y evaluando directamente.

21-24 ■ Liste todos los ceros racionales posibles aplicando el teorema de los ceros racionales (pero sin verificar qué valores son realmente ceros).

21. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

22. $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 20$

23. $R(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 6$

24. $S(x) = 6x^4 - x^3 - x^2 - 12$

25-44 ■ Determine todas las raíces racionales de la ecuación, y después use la fórmula cuadrática para obtener las raíces irracionales, si hubiera alguna.

25. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

26. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

27. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

28. $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

29. $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

30. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

31. $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$

32. $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$

33. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

34. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$

35. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0$

36. $x^4 - x^3 - 23x^2 - 3x + 90 = 0$

37. $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$

38. $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$

39. $4x^3 - 7x + 3 = 0$

40. $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

41. $4x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0$

42. $8x^3 + 10x^2 - x - 3 = 0$

43. $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24 = 0$

44. $3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10 = 0$

45-46 ■ Demuestre que el polinomio no tiene ningún cero racional.

45. $x^3 - x - 2$

46. $2x^4 - x^3 + x + 2$

47-50 ■ Determine un polinomio del grado especificado que tenga los ceros dados.

47. Grado 3; ceros $-1, 1, 3$

48. Grado 4; ceros $-2, 0, 2, 4$

49. Grado 4; ceros $-1, 1, 3, 5$

50. Grado 5; ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

51-56 ■ Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y negativos puede tener el polinomio. Después obtenga el número total posible de ceros reales.

51. $x^3 - x^2 - x - 3$

52. $2x^3 - x^2 + 4x - 7$

53. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$

54. $x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x$

55. $4x^7 - 3x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

56. $x^8 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

57-60 ■ Demuestre que los valores dados para a y b son cotas inferior y superior, respectivamente, para las raíces reales de la ecuación.

57. $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$; $a = -3, b = 1$

58. $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$; $a = -3, b = 5$

59. $8x^3 + 10x^2 - 39x + 9 = 0$; $a = -3, b = 2$

60. $3x^4 - 17x^3 + 24x^2 - 9x + 1 = 0$; $a = 0, b = 6$

61-64 ■ Determine los enteros que sean cotas superior e inferior para las raíces reales de la ecuación.

61. $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

62. $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$

63. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0$

64. $x^5 - x^4 + 1 = 0$

65-70 ■ Determine todas las raíces racionales de la ecuación, y después obtenga las raíces irracionales, si es que hay alguna. Siempre que sea apropiado, utilice el teorema de los ceros racionales, el teorema de las cotas superior e inferior, la regla de los signos de Descartes, la fórmula cuadrática o bien otras técnicas de factorización.

65. $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$

66. $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 20x + 4 = 0$

67. $4x^4 - 21x^2 + 5 = 0$

68. $6x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x = 0$

69. $x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24 = 0$

70. $8x^5 - 14x^4 - 22x^3 + 57x^2 - 35x + 6 = 0$

71-74 ■ Todas las soluciones reales de la ecuación dada son racionales. Liste todas las raíces racionales posibles utilizando el teorema de los ceros racionales, y después grafique el polinomio en el rectángulo de visualización dado para determinar cuáles valores son realmente las soluciones de la ecuación. (Todas las soluciones pueden verse en el rectángulo dado.)

71. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

72. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-30, 30]$

73. $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 5x + 12 = 0$;
$[-2, 5]$ por $[-40, 40]$

74. $3x^3 + 8x^2 + 5x + 2 = 0$; $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

75-82 ■ Use un dispositivo de graficación para determinar todas las soluciones reales de la ecuación, correctas a dos decimales.

75. $x^3 - 5x^2 - 4 = 0$

76. $x^4 - x - 4 = 0$

77. $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$

78. $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

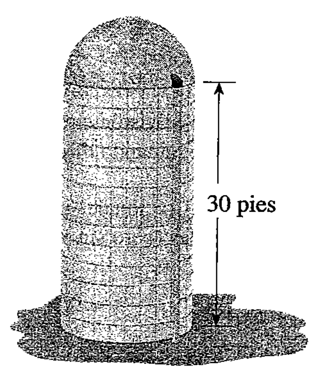
79. $10x^4 - 9x^3 - 11x^2 + 5x - 3 = 0$

80. $3x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 5x + 2 = 0$

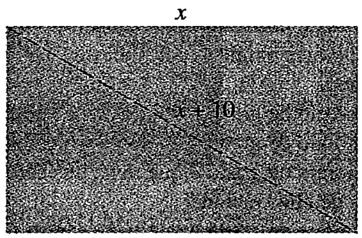
81. $4.00x^4 + 4.00x^3 - 10.96x^2 - 5.88x + 9.09 = 0$

82. $x^5 + 2.00x^4 + 0.96x^3 + 5.00x^2 + 10.00x + 4.80 = 0$

83. Un silo de granos está formado por una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo (incluyendo la parte dentro de la sección del techo) es de 15,000 pies^3 y la parte cilíndrica tiene 30 pies de altura, ¿cuál es el radio del silo, correcto a la décima de pie más cercana?



84. Un predio rectangular tiene un área de 5,000 pies^2. Una diagonal entre esquinas opuestas mide 10 pies más que un lado del predio. ¿Cuáles son las dimensiones del predio, correctas al pie más cercano?



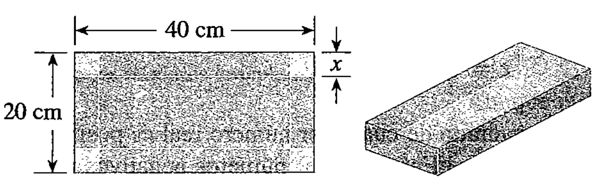
85. Empezó a nevar el Domingo. La cantidad de nieve sobre el piso en cierto lugar al tiempo t está dada por la función

$$h(t) = 11.60t - 12.4t^2 + 6.20t^3 - 1.58t^4 + 0.20t^5 - 0.01t^6$$

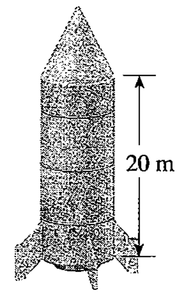
donde t se mide en días a partir del inicio de la nevada y $h(t)$ es la profundidad de la nieve en pulgadas. Trace una gráfica de esta función y use ésta para contestar las preguntas siguientes.

(a) ¿Qué ocurrió después de mediodía del martes?
(b) ¿Había en algún momento más de 5 pulgadas de nieve sobre el piso? De ser así, ¿qué día(s)?
(c) ¿Qué día y a qué hora (la hora más próxima) desapareció totalmente la nieve?

86. Debe construirse una caja abierta con un volumen de 1,500 cm^3 a partir de un pedazo de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de lado x en cada esquina y doblando los costados. Demuestre que esto se puede hacer de dos formas distintas, y en cada caso determine las dimensiones exactas de la caja.



87. Un cohete está formado de un cilindro recto circular de 20 m de altura coronado por un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es el mismo que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio (correcto a dos decimales) si el volumen total debe ser $500\pi/3$ m^3?

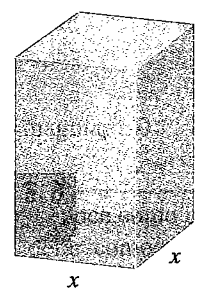


88. Una caja rectangular con un volumen de $2\sqrt{2}$ pies^3 tiene una base cuadrada. La diagonal de la caja (entre un par de esquinas opuestas) tiene 1 pie más que cada lado de la base.

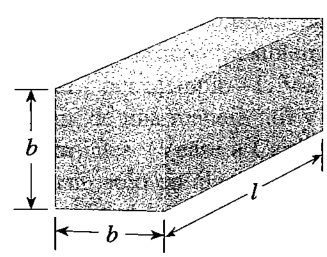
(a) Si la base tiene lados de x pies de longitud, demuestre que

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 8 = 0$$

(b) Demuestre que hay dos cajas distintas que satisfacen las condiciones dadas. Determine las dimensiones en cada caso, correctas a la centésima de pie más cercana.



89. Una caja con base cuadrada tiene una longitud que sumada al perímetro de su base da 108 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es de 2,200 pulgadas^3?



90. Sean que $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales y $b > 0$. Use el algoritmo de la división para escribir

$$P(x) = (x - b) \cdot Q(x) + r$$

Suponga que $r \geqslant 0$ y que todos los coeficientes en $Q(x)$ son no negativos. Sea $z > b$.

(a) Demuestre que $P(z) > 0$

(b) Pruebe la primera parte del teorema de las cotas superior e inferior.

91. Utilice la primera parte del teorema de las cotas superior e inferior para probar la segunda parte [*Sugerencia*: muestre que si $P(x)$ satisface la segunda parte del teorema, entonces $P(-x)$ satisface la primera parte.]

92. Demuestre que la ecuación

$$x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 12x - 6 = 0$$

tiene exactamente una raíz racional, y después pruebe que debe tener dos o cuatro raíces irracionales.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

93. ¿División imposible? Suponga que en un examen se le pide que resuelva los dos siguientes problemas:

Determine el residuo cuando $6x^{1{,}000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

¿Es $x - 1$ un factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente resulta imposible resolver estos problemas usando división larga o sintética, dado el elevado grado de los polinomios. Utilice uno o más de los teoremas de esta sección, para resolver estos problemas *sin* hacer la división.

94. ¿Cuántos ceros reales puede tener un polinomio? Proporcione ejemplos de polinomios que tengan las siguientes propiedades, o bien explique por qué no es posible encontrar uno de ese tipo.

(a) Un polinomio de grado 3 que no tiene ceros reales

(b) Un polinomio de grado 4 que no tiene ceros reales

(c) Un polinomio de grado 3 que tiene tres ceros reales, con sólo uno de ellos racional

(d) Un polinomio de grado 4 que tiene cuatro ceros reales, y ninguno de ellos racional

¿Qué es lo que debe ser verdadero respecto al grado de un polinomio con coeficientes enteros, si no tiene ceros reales?

95. Forma anidada de un polinomio Expanda Q para probar que los polinomios P y Q son el mismo.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Intente evaluar mentalmente $P(2)$ y $Q(2)$, utilizando las formas dadas. ¿Cuál es más sencillo? Ahora escriba el polinomio $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma "anidada", como el polinomio Q. Utilice la forma anidada para determinar mentalmente $R(3)$.

6.3 NÚMEROS COMPLEJOS

En la sección 1.5 vimos que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, entonces la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

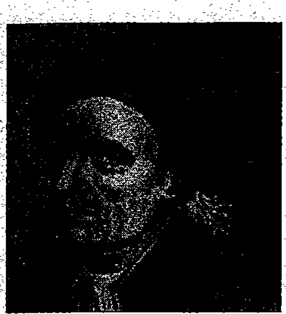
no tiene solución real. Si intentamos resolverla obtenemos $x^2 = -4$, por lo que

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible, ya que el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo $(-2)^2 = 4$ es un número positivo.] Entonces, los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

A fin de que sea posible resolver *todas* las ecuaciones cuadráticas, los matemáticos inventaron un sistema expandido de números conocido como el *sistema de números complejos*. Primero definieron el nuevo número

$$i = \sqrt{-1}$$



Leonhard Euler (1707–1783) nació en Basilea, Suiza, hijo de un pastor. A los 13 años su padre lo envió a la Universidad de Basilea a estudiar teología, pero pronto decidió dedicarse a las ciencias. Además de teología estudió matemáticas, medicina, astronomía, física y lenguas orientales. Se dice que Euler podía calcular con el mismo esfuerzo que "la gente respira o las águilas vuelan". Cien años antes que Euler, Fermat había conjeturado que $2^{2^n} + 1$ es un número primo para toda n. Los primeros cinco de estos números son 5, 17, 257, 65537 y 4,294,967,297. Es fácil demostrar que los primeros cuatro son primos. Se pensaba que el quinto era primo hasta que Euler, con su fenomenal capacidad de cálculo, demostró que se trataba del producto $641 \times 6{,}700{,}417$ y por tanto no es primo. Euler publicó más que ningún otro matemático en la historia, y su colección de obras ocupan 75 grandes volúmenes. A pesar de que se quedó ciego durante los últimos 17 años de su vida, continuó su trabajo y sus publicaciones. En sus escritos popularizó el uso de los símbolos π, e, así como i, mismos que encontrará en este texto. Una de las contribuciones más importantes de Euler es el desarrollo de los números complejos.

Esto significa que, $i^2 = -1$. Por lo tanto un número complejo es de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

DEFINICIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es a y la **parte imaginaria** es b. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Note que tanto la parte real como la imaginaria de un número complejo son números reales.

EJEMPLO 1 ■ Números complejos

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0 ■

Un número como $6i$, que tiene parte real 0, se conoce como un **número imaginario puro**. Un número real como -7 se puede considerar como un número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos toda ecuación cuadrática tiene solución. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2i^2 = 4(-1) = -4 \qquad \text{y} \qquad (-2i)^2 = (-2)^2i^2 = 4(-1) = -4$$

Aunque utilizamos el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no deben ser considerados menos "reales" (en el sentido común de la palabra) que los negativos o los irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana —por ejemplo -1, $\sqrt{2}$ e i. Estudiamos los números complejos porque ellos completan, de una manera útil y elegante, el estudio de las soluciones de las ecuaciones polinomiales. (Véase a Cardano, página 256.) De hecho los números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y en matemáticas, sino también en otras ciencias. Para sólo dar un ejemplo, en electricidad la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen de la misma manera en que se hace con un número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que hemos de tener presente es que $i^2 = -1$. Así, los siguientes cálculos son válidos.

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 \qquad \text{Multiplique y agrupe términos semejantes}$$

$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \qquad i^2 = -1$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{Combine partes reales e imaginarias}$$

Por lo tanto definimos la suma, la diferencia y el producto de números complejos como sigue.

ADICIÓN, SUSTRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Definición	Descripción
Adición $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Para sumar números complejos, sume las partes reales y las imaginarias.
Sustracción $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Para restar números complejos, reste las partes reales y las imaginarias.
Multiplicación $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	Multiplique números complejos como binomios, usando $i^2 = -1$.

EJEMPLO 2 ■ Adición, sustracción y multiplicación de números complejos

Exprese cada uno de los siguientes números en la forma $a + bi$.

(a) $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ (b) $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

(c) $(3 + 5i)(4 - 2i)$ (d) i^{23}

SOLUCIÓN

(a) Según la definición, sumamos la partes reales y las imaginarias.

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

(b) $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

(c) $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

(d) $i^{23} = i^{20+3} = (i^2)^{10}i^3 = (-1)^{10}i^2i = (1)(-1)i = -i$ ■

Complejos conjugados

Número	Conjugado
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$1 - i$	$1 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

La división de números complejos es muy similar a la racionalización del denominador de una expresión radical que vimos en la sección 1.4. Para el número $z = a + bi$ definimos su **complejo conjugado** como $\overline{z} = a - bi$. Note que $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Así, el producto de un número complejo y su conjugado es siempre un número real no negativo. Utilizamos esta propiedad para dividir números complejos.

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para simplificar el cociente $\dfrac{a + bi}{c + di}$, multiplique el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

En lugar de memorizar esta fórmula, es mejor recordar el primer paso y después multiplicar y el numerador y el denominador de forma normal.

EJEMPLO 3 ■ División de números complejos

Exprese cada uno de los números en la forma $a + bi$.

(a) $\dfrac{3 + 5i}{1 - 2i}$ (b) $\dfrac{7 + 3i}{4i}$

SOLUCIÓN Multiplicamos el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador, para transformar el denominador en un número real.

(a) El complejo conjugado de $1 - 2i$ es $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$.

$$\frac{3 + 5i}{1 - 2i} = \left(\frac{3 + 5i}{1 - 2i}\right)\left(\frac{1 + 2i}{1 + 2i}\right) = \frac{-7 + 11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

(b) El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por lo tanto

$$\frac{7 + 3i}{4i} = \left(\frac{7 + 3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12 - 28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$ ■

Así como todo número real positivo r tiene dos raíces cuadradas ($\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$), todo número negativo también tiene dos raíces cuadradas y ambas son números imaginarios puros ya que si $r > 0$ es real, entonces

$$(i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r \qquad \text{y} \qquad (-i\sqrt{r})^2 = (-1)^2 i^2 r = -r$$

A $i\sqrt{r}$ le llamamos la *raíz cuadrada principal* de $-r$, y utilizamos el símbolo $\sqrt{-r}$ para denotar ésta. La otra raíz cuadrada será entonces $-\sqrt{-r} = -i\sqrt{r}$. Note que las dos son complejos conjugados uno respecto del otro.

RAÍCES CUADRADAS DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Si $-r < 0$, entonces las raíces cuadradas de $-r$ son

$$i\sqrt{r} \qquad \text{y} \qquad -i\sqrt{r}$$

La **raíz cuadrada principal** de $-r$ es $i\sqrt{r}$.

Generalmente escribimos $i\sqrt{b}$ en vez de $\sqrt{b}\,i$ para evitar confusión con $\sqrt{bi}$.

EJEMPLO 4 ■ Raíces cuadradas de números negativos

(a) $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$ (b) $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$ (c) $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$ ■

Debe tenerse especial cuidado al efectuar cálculos que involucren las raíces cuadradas de números negativos. Aunque $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando a y b son positivos, esto *no* es cierto cuando ambos son negativos. Por ejemplo,

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

pero $$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6}$$

por lo que $$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} \neq \sqrt{(-2)(-3)}$$

Al multiplicar radicales de números negativos, expréselos primero en la forma $i\sqrt{r}$ (siendo $r > 0$) a fin de evitar posibles errores de este tipo.

EJEMPLO 5 ■ Uso de las raíces cuadradas de números negativos

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ y exprese esto en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4}) \\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i) \\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2 \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$ ■

GRAFICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

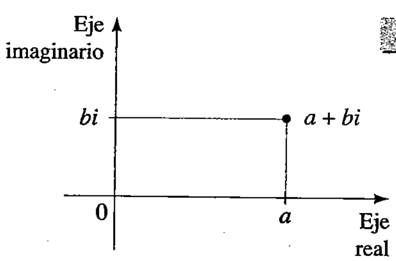


FIGURA 1

Para graficar números reales o conjuntos de números reales, hemos utilizado la recta numérica que sólo tiene una dimensión. Sin embargo, los números complejos tienen dos componentes: la parte real y la imaginaria. Esto sugiere que serán necesarios dos ejes para graficar números complejos: uno para la parte real y otro para la imaginaria; los llamamos el **eje real** y el **eje imaginario**, respectivamente. El plano determinado por estos dos ejes se conoce como **plano complejo**. Para graficar el número complejo $a + bi$, trazamos en este plano el par ordenado de números (a,b) como se indica en la figura 1.

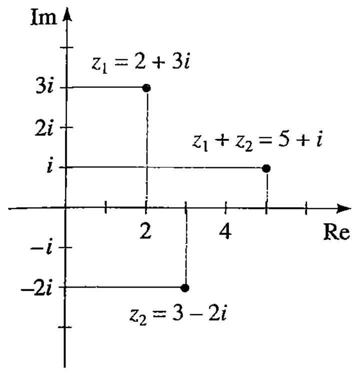


FIGURA 2

EJEMPLO 6 ■ Graficación de números complejos

Grafique los números complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$, y $z_1 + z_2$.

SOLUCIÓN Tenemos que $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = 5 + i$. La gráfica se muestra en la figura 2. ■

EJEMPLO 7 ■ Graficación de conjuntos de números complejos

Grafique cada uno de los siguientes conjuntos de números complejos.

(a) $S = \{a + bi \mid a \geqslant 0\}$ (b) $T = \{a + bi \mid a < 1, b \geqslant 0\}$

SOLUCIÓN

(a) S es el conjunto de números complejos cuya parte real es no negativa. La gráfica se muestra en la figura 3(a).

(b) T es el conjunto de números complejos para los cuales la parte real es menor que 1 y la parte imaginaria es no negativa. La gráfica se muestra en la figura 3(b).

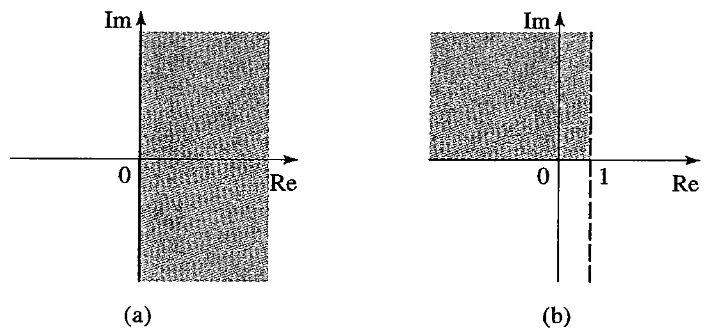


FIGURA 3 ■

Recuerde de la sección 1.1 que el valor absoluto de un número real puede pensarse como su distancia al origen sobre la recta numérica.) Definimos el valor absoluto en el caso de números complejos de una manera similar. De la figura 4 podemos ver, usando el teorema de Pitágoras, que la distancia entre $a + bi$ y el origen en el plano complejo es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

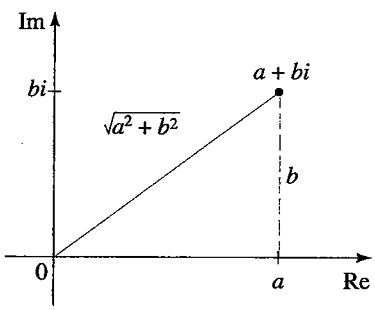


FIGURA 4

El **módulo** (o **valor absoluto**) del número complejo $z = a + bi$ es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 8 ■ Cálculo del módulo

Determine el módulo de los números complejos $3 + 4i$ y $8 - 5i$.

El plural de módulo (*modulus* en latín) es módulos (*moduli*).

SOLUCIÓN

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|8 - 5i| = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$$ ■

EJEMPLO 9 ■ Valor absoluto de números complejos

Grafique cada uno de los siguientes conjuntos de números complejos.

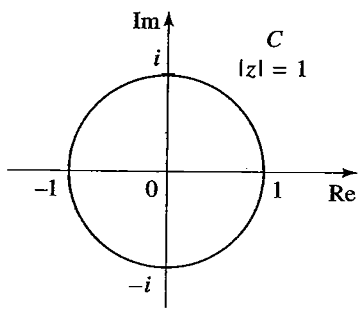
(a) $C = \{z \mid |z| = 1\}$ (b) $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$

SOLUCIÓN

(a) C es el conjunto de números complejos cuya distancia al origen es 1. Entonces, C es la circunferencia de radio 1 con centro en el origen.

(b) D es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es menor o igual a 1. Entonces, D es el disco formado por todos los números complejos que están sobre y dentro de la circunferencia C del inciso (a).

Las gráficas de C y de D se muestran en la figura 5.



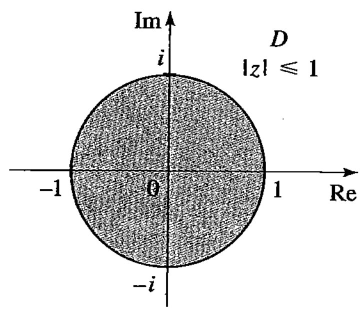


FIGURA 5 (a) (b) ■

6.3 EJERCICIOS

1-6 ■ Determine la parte real y la imaginaria del número complejo.

1. $3 - 5i$

2. $\dfrac{2 + 4i}{3}$

3. $6i$

4. $\frac{1}{2}$

5. $\sqrt{2} + \sqrt{-3}$

6. $\dfrac{2 + 4i}{\sqrt{-16}}$

7-40 ■ Evalúe la expresión y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

7. $(4 + 3i) + (5 - 2i)$

8. $(7 - 6i) + (-3 + 7i)$

9. $(7 - \frac{1}{2}i) + (5 + \frac{3}{2}i)$

10. $(-4 + i) - (2 - 5i)$

11. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$

12. $6i - (4 - i)$

13. $4(-1 + 2i)$

14. $2i(\frac{1}{2} - i)$

15. $(7 - i)(4 + 2i)$

16. $(5 - 3i)(1 + i)$

17. $(3 - 4i)(5 - 12i)$

18. $(\frac{2}{3} + 12i)(\frac{1}{6} + 24i)$

19. $\dfrac{1}{i}$

20. $\dfrac{1}{1 + i}$

21. $\dfrac{2 - 3i}{1 - 2i}$

22. $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$

23. $\dfrac{26 + 39i}{2 - 3i}$

24. $\dfrac{25}{4 - 3i}$

25. $\dfrac{10i}{1 - 2i}$

26. $(2 - 3i)^{-1}$

27. i^3

28. $(2i)^4$

29. i^{100}

30. i^{1002}

31. $\sqrt{-25}$

32. $\sqrt{\dfrac{-9}{4}}$

33. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

34. $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$

35. $(3 - \sqrt{-5}(1 + \sqrt{-1})$

36. $\dfrac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}}$

37. $\dfrac{2 + \sqrt{-8}}{1 + \sqrt{-2}}$

38. $(\sqrt{3} - \sqrt{-4})(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

39. $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

40. $\dfrac{\sqrt{-7}\sqrt{-49}}{\sqrt{28}}$

41-48 ■ Grafique el número complejo y determine su módulo.

41. $3i$

42. -3

43. $5 + 2i$

44. $7 - 3i$

45. $\sqrt{3} + i$

46. $-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

47. $\dfrac{3 + 4i}{5}$

48. $\dfrac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

49-50 ■ Grafique los números complejos z, $2z$, $-z$ y $\frac{1}{2}z$ en el mismo plano complejo.

49. $z = 1 + i$

50. $z = 2 - 3i$

51-52 ■ Grafique el número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ en el mismo plano complejo.

51. $z = 8 + 2i$

52. $z = -5 + 6i$

53-54 ■ Grafique z_1, z_2 y $z_1 + z_2$ en el mismo plano complejo.

53. $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 2 + i$

54. $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 2 - 3i$

55-62 ■ Grafique el conjunto dado en el plano complejo.

55. $\{z = a + bi \mid a \leqslant 0, b \geqslant 0\}$

56. $\{z = a + bi \mid a > 1, b > 1\}$

57. $\{z \mid |z| = 3\}$

58. $\{z \mid |z| \geqslant 1\}$

59. $\{z \mid |z| < 2\}$

60. $\{z \mid 2 \leqslant |z| \leqslant 5\}$

61. $\{z = a + bi \mid a + b < 2\}$

62. $\{z = a + bi \mid a \geqslant b\}$

63-70 ■ Pruebe cada enunciado. Suponga que $z = a + bi$ y $w = c + di$.

63. $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$

64. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

65. $(\bar{z})^2 = \overline{z^2}$

66. $\bar{\bar{z}} = z$

67. $z + \bar{z}$ es un número real

68. $z = \bar{z}$ si y sólo si z es real

69. $\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} + \dfrac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$

70. $\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z} = \dfrac{4abi}{a^2 + b^2}$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

71. Raíces complejas conjugadas Suponga que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene coeficientes reales y raíces complejas. ¿Por qué las raíces deben ser complejas conjugadas una respecto de la otra? (Piense en cómo determinaría las raíces.)

72. Potencias de i Calcule las primeras 12 potencias de i, esto es, $i, i^2, i^3, \ldots, i^{12}$. ¿Advierte algún patrón? Explique cómo calcularía cualquier potencia de i, utilizando el patrón descubierto. Utilice este procedimiento para calcular i^{4446}.

6.4 RAÍCES COMPLEJAS Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Ya hemos visto que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, tiene las soluciones

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. Sin embargo en el sistema de números complejos, esta ecuación siempre tendrá soluciones porque en este conjunto los números negativos tienen raíz cuadrada.

Gerolamo Cardano (1501–1576) es sin lugar a dudas uno de los personajes más singulares en la historia de las matemáticas. En su época fue el médico con mayor renombre en Europa y a pesar de ello sufrió toda su vida numerosas enfermedades, incluyendo fracturas, hemorroides y el terror irracional a encontrarse con perros rabiosos. Sus adorados hijos lo hicieron sufrir —su consentido finalmente fue decapitado por haber asesinado a su esposa. Cardano fue un jugador compulsivo pero aprovechó este vicio para escribir el *Book on Games of Chance*, el primer estudio de las probabilidades desde un punto de vista matemático correcto.

Su obra matemática de mayor importancia fue el *Ars magna*, en el cual detalló la solución de las ecuaciones polinomiales generales de tercer y cuarto grado. En el momento de su publicación los matemáticos se sentían incómodos incluso con los números negativos, pero las fórmulas de Cardano abrieron camino a la aceptación no sólo de los números negativos, sino también de los números imaginarios, ya que se presentan de manera natural en la resolución de las ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, una de sus fórmulas da la solución

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$$

para la ecuación cúbica

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Este valor para x de hecho resulta ser el *entero* 4, aunque para determinarlo Cardano tuvo que utilizar el número imaginario $\sqrt{-121} = 11i$.

EJEMPLO 1 ■ Uso de la fórmula cuadrática para determinar raíces complejas

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes.

(a) $x^2 + 9 = 0$ (b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, por lo que $x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$. Las soluciones son $3i$ y $-3i$.

(b) Según la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

y las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$. ■

EJEMPLO 2 ■ Factorización y uso de la fórmula cuadrática para determinar raíces complejas

Determine todas las raíces de la ecuación $x^6 - 64 = 0$.

SOLUCIÓN

$$x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2$$

$$= (x^3 - 8)(x^3 + 8) \qquad \text{Fórmula de la diferencia de cuadrados}$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \qquad \text{Fórmulas de la diferencia y suma de cubos}$$

Esta expresión será igual a 0 cuando cualquier factor sea 0, por lo que determinamos las soluciones como sigue.

$x - 2 = 0$ significa $x = 2$

$x^2 + 2x + 4 = 0$ significa $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$

$x + 2 = 0$ significa $x = -2$

$x^2 - 2x + 4 = 0$ significa $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

Las raíces de la ecuación son

$$2, \quad -2, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad -1 - i\sqrt{3}, \quad 1 + i\sqrt{3}, \quad \text{y} \quad 1 - i\sqrt{3}$$ ■

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Es un hecho notable el que la simple adición del número $\sqrt{-1}$ y sus múltiplos reales al sistema de los números reales sea suficiente para proporcionar un sistema de números en el cual *toda* ecuación polinomial tiene una raíz. Aunque no probaremos este hecho (una demostración requiere conocimientos matemáticos que están fuera del alcance de este libro), es la base para gran parte de nuestro trabajo en la resolución de ecuaciones polinomiales. Este teorema fue demostrado por el matemático alemán C.F. Gauss en 1799.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geqslant 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene por lo menos un cero complejo.

Dado que cualquier número real es también un número complejo, el teorema se aplica de igual forma a polinomios con coeficientes reales.

Puesto que todo cero de un polinomio corresponde a un factor lineal (según el teorema del factor), el teorema fundamental del álgebra asegura que podemos factorizar cualquier polinomio $P(x)$ de grado n como

$$P(x) = (x - c_1) \cdot Q_1(x)$$

donde $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$ y c_1 es un cero de $P(x)$. Al aplicar ahora el teorema fundamental del álgebra al cociente $Q_1(x)$ obtenemos la factorización

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot Q_2(x)$$

donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$ y c_2 es un cero de $Q_1(x)$. Continuando este proceso durante n pasos, llegaremos a un cociente final $Q_n(x)$ de grado 0, que es por lo tanto una constante diferente de cero que llamaremos a. Esto prueba el siguiente corolario del teorema fundamental del álgebra.

TEOREMA DE FACTORIZACIÓN COMPLETA

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen números complejos a, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tales que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

El número a es claramente el coeficiente de x^n, y los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los ceros de $P(x)$ (según el teorema del factor). Estos ceros no necesitan ser todos distintos: si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización completa de $P(x)$, entonces decimos que c es un cero de **multiplicidad k.**

De esto se deduce que $P(x)$ no puede tener un cero distinto a $c_1, c_2, \ldots, c_n$, dado que si

$$P(c) = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n) = 0$$

entonces por lo menos uno de los factores $c - c_i$ debe ser cero, por lo que $c = c_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Hemos probado el teorema siguiente.

TEOREMA DE LOS CEROS

Todo polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene exactamente n ceros, siempre y cuando un cero de multiplicidad k sea contado k veces.

En el ejemplo 2, el polinomio $x^6 - 64$ es de grado 6 y tiene exactamente seis ceros.

EJEMPLO 3 ■ Factorización de un polinomio con ceros complejos.

Determine la factorización completa y los cinco ceros del polinomio

$$P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$$

SOLUCIÓN Los términos de P tienen como factor común a $3x$, por lo que obtenemos la factorización siguiente

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x^4 + 8x^2 + 16) \\ &= 3x(x^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Para factorizar $x^2 + 4$ note que $2i$ y $-2i$ son ceros de este polinomio. Entonces, $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x[(x - 2i)(x + 2i)]^2 \\ &= 3x(x - 2i)(x - 2i)(x + 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

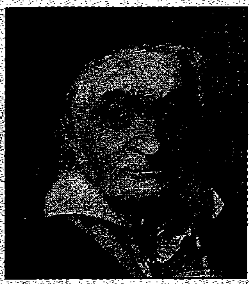
Al hacer cada factor igual a cero, vemos que los ceros de P son $0, 2i$ y $-2i$. Sin embargo, $2i$ y $-2i$ se cuentan cada uno dos veces puesto que el factor de P que corresponde a ellos se presenta dos veces en la factorización. Cada uno de éstos es un cero de multiplicidad 2 (o un *cero doble*), por lo que el número total de ceros, contando la multiplicidad, es de cinco. ■

EJEMPLO 4 ■ Determinación de polinomios con ceros especificados

Obtenga un polinomio que satisfaga la descripción dada.

(a) Un polinomio $P(x)$ de grado 4 con ceros $i, -i, 2$ y -2, y con $P(3) = 25$

(b) Un polinomio $Q(x)$ de grado 4 con ceros -2 y 0, donde -2 es un cero de multiplicidad tres.



Carl Friedrich Gauss (1777–1855) es considerado como el matemático más importante de los tiempos modernos, y sus contemporáneos lo llamaban el "Príncipe de las Matemáticas". Gauss nació en una familia pobre; su padre se ganaba la vida como albañil. Siendo aún pequeño encontró un error de cálculo en las cuentas de su padre. Éste fue el primero de muchos incidentes que evidencian su precocidad matemática. A los 19 años Gauss demostró que se podía construir el polígono regular de 17 lados utilizando sólo una regla y un compás. Esto resultó notable porque, desde tiempos de Euclides, se pensaba que los únicos polígonos regulares que así se podían construir eran el triángulo y el pentágono. En vista de este descubrimiento Gauss decidió seguir una carrera en matemáticas y no en idiomas, que era su otra pasión. En su disertación doctoral, escrita a los 22 años, Gauss probó el teorema fundamental del álgebra: un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces. Sus demás logros abarcan todas las áreas de las matemáticas, así como de la física y astronomía.

SOLUCIÓN

(a) El polinomio requerido tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x-i)(x-(-i))(x-2)(x-(-2)) \\ &= a(x^2+1)(x^2-4) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= a(x^4-3x^2-4) && \text{Multiplique} \end{aligned}$$

Sabemos que $P(3) = a(3^4 - 3\cdot 3^2 - 4) = 50a = 25$, por lo que $a = \frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2$$

(b) Requerimos

$$\begin{aligned} Q(x) &= a(x-(-2))^3(x-0) \\ &= a(x+2)^3x \\ &= a(x^3+6x^2+12x+8)x && \text{Fórmula 4 de producto (sección 1.3)} \\ &= a(x^4+6x^3+12x^2+8x) \end{aligned}$$

Puesto que no se nos da información respecto a Q excepto sus ceros y su multiplicidad, elegimos cualquier número para a. Si usamos $a = 1$, obtenemos

$$Q(x) = x^4 = 6x^3 + 12x^2 + 8x$$ ■

EJEMPLO 5 ■ Determinación de todos los ceros de un polinomio

Obtenga los cuatro ceros de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

SOLUCIÓN Utilizando el teorema de los ceros racionales de la sección 6.2, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Verificando éstos mediante división sintética, determinamos que 2 y $-\frac{1}{3}$ son ceros y obtenemos la factorización siguiente.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x-2)(3x^3+4x^2+7x+2) && \text{Factorice } x-2 \\ &= (x-2)(x+\tfrac{1}{3})(3x^2+3x+6) && \text{Factorice } x+\tfrac{1}{3} \\ &= (x-2)(x+\tfrac{1}{3})(3)(x^2+x+2) && \text{Factorice 3} \\ &= (x-2)(3x+1)(x^2+x+2) && \text{Multiplique} \end{aligned}$$

Los ceros del factor cuadrático son:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

por lo que los ceros de $P(x)$ son

$$2, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$ ■

Como quizás ya observó a partir de los ejemplos dados hasta ahora, las raíces complejas de las ecuaciones polinomiales con coeficientes reales vienen en pares. Siempre que $a + bi$ es una raíz, también lo es su complejo conjugado $a - bi$. Este siempre es el caso, como lo indica el teorema siguiente.

TEOREMA DE LAS RAÍCES CONJUGADAS

Si el polinomio $P(x)$ de grado $n > 0$ tiene coeficientes reales, y si el número complejo z es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, entonces su complejo conjugado $\overline{z}$ es también una raíz.

■ **Demostración** Supongamos que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada coeficiente es real. Suponga que $P(z) = 0$. Debemos probar que $P(\overline{z}) = 0$. Utilizamos los hechos de que el complejo conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados, y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados (véanse los ejercicios 63 y 64 de la sección 6.3).

$$\begin{aligned}
P(\overline{z}) &= a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} && \text{Porque los coeficientes son reales} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

Esta deducción muestra que el conjugado $\overline{z}$ también es un cero de $P(x)$, y así hemos demostrado el teorema. □

EJEMPLO 6 ■ Polinomio con un cero complejo especificado

Obtenga un polinomio $P(x)$ de grado 3 que tenga coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y $3 - i$.

SOLUCIÓN Dado que $3 - i$ es un cero, entonces según el teorema de las raíces conjugadas también lo es $3 + i$. Esto quiere decir que $P(x)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
P(x) &= a(x - \tfrac{1}{2})[x - (3 - i)][x - (3 + i)] \\
&= a(x - \tfrac{1}{2})[(x - 3) + i][(x - 3) - i] && \text{Reagrupe} \\
&= a(x - \tfrac{1}{2})[(x - 3)^2 - i^2] && \text{Fórmula de la diferencia de cuadrados} \\
&= a(x - \tfrac{1}{2})(x^2 - 6x + 10) && \text{Expanda} \\
&= a(x^3 - \tfrac{13}{2}x^2 + 13x - 5) && \text{Expanda}
\end{aligned}$$

Para hacer todos los coeficientes enteros, planteamos que $a = 2$ y obtenemos

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10$$

Cualquier otro polinomio que satisfaga los requerimientos dados, debe ser un múltiplo entero de éste. ■

EJEMPLO 7 ■ Uso de la regla de Descartes para contar ceros reales e imaginarios

Sin factorizar, determine cuántos ceros reales positivos, reales negativos e imaginarios puede tener el polinomio siguiente

$$P(x) = x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 14x - 24$$

SOLUCIÓN Puesto que existe un cambio de signo, de acuerdo con la regla de los signos de Descartes P tiene un cero real positivo. También $P(-x) = x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 14x - 24$ tiene tres cambios de signo, por lo que existen uno o tres ceros reales negativos. Así, P tiene un total de cuatro o dos ceros reales. En vista de que P es de grado 4 tiene en total cuatro ceros, lo que nos da las siguientes posibilidades,

Ceros reales positivos	Ceros reales negativos	Ceros imaginarios
1	3	0
1	1	2

■

6.4 EJERCICIOS

1-22 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación

1. $x^2 + 16 = 0$

2. $4x^2 + 25 = 0$

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$

4. $x^2 - x + 1 = 0$

5. $x^2 + 4x + 8 = 0$

6. $2x^2 + 2x + 1 = 0$

7. $3x^2 - 5x + 4 = 0$

8. $2x^2 - 3x + 2 = 0$

9. $x^2 - 8x + 17 = 0$

10. $3x^2 - 4x + 2 = 0$

11. $t + 3 + \dfrac{3}{t} = 0$

12. $\theta^3 + \theta^2 + \theta = 0$

13. $x^4 - 1 = 0$

14. $x^3 - 64 = 0$

15. $x^3 + 8 = 0$

16. $x^4 + 4 = 0$

17. $x^4 - 16 = 0$

18. $16x^4 - 81 = 0$

19. $x^6 - 729 = 0$

20. $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

21. $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

22. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

23-28 ■ Obtenga un polinomio con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones dadas.

23. $P(x)$ tiene grado 3, y ceros 2 e i.

24. $Q(x)$ tiene grado 3, y ceros -3 y $1 + i$.

25. $R(x)$ tiene grado 4, y ceros $1 - 2i$ y 1 con multiplicidad 2.

26. $S(x)$ tiene grado 4, y ceros $2i$ y $3i$.

27. $T(x)$ tiene grado 4, ceros i y $1 + i$, y un coeficiente constante 12.

28. $U(x)$ tiene grado 5, ceros $\frac{1}{2}$, -1 y $-i$, y coeficiente principal 4; el cero -1 tiene multiplicidad 2.

29-36 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación.

29. $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$

30. $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$

31. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

32. $x^3 + 7x^2 + 18x + 18 = 0$

33. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$

34. $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

35. $x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18 = 0$

36. $x^5 + x^3 + 8x^2 + 8 = 0$ [Sugerencia: factorice mediante agrupación.]

37-44 ■ Determine la factorización completa del polinomio.

37. $P(x) = x^3 + 27$

38. $P(x) = x^4 - 625$

39. $P(x) = x^6 + 7x^3 - 8$

40. $P(x) = x^5 + 3x^3 + 2x$

41. $P(x) = x^3 - x - 6$

42. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 12x + 9$

43. $P(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$

44. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

45-48 ■ Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos, reales negativos e imaginarios puede tener un polinomio.

45. $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5$

46. $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x + 12$

47. $R(x) = 6x^5 - x^4 - 5x - 2$

48. $S(x) = x^6 + x^4 - 3x^3 - x^2 + 10$

49. Según el teorema de los ceros, toda ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n soluciones (incluyendo posiblemente algunas repetidas). Algunas de éstas pueden ser reales y otras imaginarias. Utilice una calculadora gráfica para determinar cuántas soluciones reales y cuántas imaginarias tiene cada una de las ecuaciones siguientes.
(a) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$
(b) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x - 5 = 0$
(c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 40 = 0$

50-52 ■ Hasta ahora hemos trabajado solamente con polinomios que tienen coeficientes reales. Estos ejercicios incluyen polinomios con coeficientes reales e imaginarios.

50. Determine todas las soluciones de la ecuación.
(a) $2x + 4i = 1$ (b) $x^2 - ix = 0$
(c) $x^2 + 2ix - 1 = 0$ (d) $ix^2 - 2x + i = 0$

51. (a) Demuestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.
(b) Explique por qué el resultado del inciso (a) no viola el teorema de las raíces conjugadas.

52. (a) Determine el polinomio con coeficientes *reales* del grado más pequeño posible para el cual i y $1 + i$ sean ceros, y en el cual el coeficiente principal sea 1.
(b) Obtenga el polinomio con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el cual i y $1 + i$ sean ceros, y en el cual el coeficiente principal sea 1.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

53. Polinomios de grado impar El teorema de las raíces conjugadas dice que los ceros complejos de un polinomio con coeficientes reales se presentan en pares conjugados. Explique cómo este hecho prueba que un polinomio con coeficientes reales y grado impar tiene por lo menos un cero real.

54. Raíces de la unidad Existen dos raíces cuadradas de 1, es decir, 1 y −1. Éstas son las soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$, o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 existen? Determínelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones $x^3 = 1$, o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 existen? Determínelas. ¿De qué manera determinaría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas existen? Haga una conjetura sobre el número de raíces de orden n de 1.

6.5 FUNCIONES RACIONALES

Una **función racional** es de la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios; suponemos que éstos no tienen ningún factor en común. Las funciones racionales no están definidas para aquellos valores de x en los cuales el denominador $Q(x)$ es cero. La gráfica de una función racional queda determinada de manera importante por su forma en las cercanías de estos valores de x. Empezamos graficando una función racional muy simple.

EJEMPLO 1 ■ Función racional simple

Trace la gráfica de la función racional $r(x) = \dfrac{1}{x}$.

SOLUCIÓN La función r no está definida para $x = 0$. Las tablas que siguen muestran que cuando x es cercano a cero, el valor de $|r(x)|$ es grande, y mientras más cerca esté x de cero más grande se hará $|r(x)|$.

Para números reales positivos

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{Número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{Número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

x	$r(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100{,}000$

x	$r(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	100,000

Describimos este comportamiento diciendo que "$r(x)$ se acerca a infinito negativo cuando x tiende a cero por la izquierda" y "$r(x)$ se acerca a infinito cuando x tiende a cero por la derecha". En símbolos escribimos

$$r(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^- \qquad \text{y} \qquad r(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+$$

Decimos que $x = 0$ es una **asíntota vertical** de la función r.

Las siguientes dos tablas muestran el comportamiento de la función r conforme $|x|$ se hace grande.

x	$r(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100{,}000$	-0.00001

x	$r(x)$
10	0.1
100	0.01
100,000	0.00001

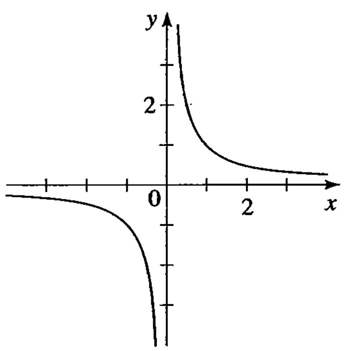


FIGURA 1
$r(x) = \dfrac{1}{x}$

Estas tablas muestran que cuando $|x|$ se hace grande, el valor de $r(x)$ se acerca cada vez más a cero. Describimos esta situación en símbolos escribiendo

$$r(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad r(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Decimos que la recta $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de la función r. Utilizando la información dada por estas tablas y graficando algunos puntos adicionales, obtenemos la gráfica de la figura 1. ■

EJEMPLO 2 ■ Gráfica de una función racional

Trace la gráfica de la función racional $s(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

SOLUCIÓN 1 La función no está definida para $x = 2$, por lo que primero determinamos la gráfica de la función para valores de x cercanos a 2.

$x \to 2^-$

x	y
1	0
1.5	−1
1.9	−9
1.95	−19
1.99	−99
1.999	−999

$x \to 2^+$

x	y
3	2
2.5	3
2.1	11
2.05	21
2.01	101
2.001	1,001

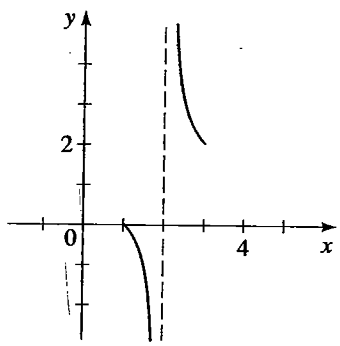


FIGURA 2

Vemos en la primera tabla que cuando x tiende a 2 por la izquierda, los valores de y decrecen sin límite. En símbolos

$y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ "y se acerca a infinito negativo cuando x tiende a 2 por la izquierda"

La segunda tabla muestra que cuando x tiende a 2 por la derecha, los valores de y crecen sin límite. En símbolos

$y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$ "y se acerca a infinito cuando x tiende a 2 por la derecha"

Por lo tanto la gráfica de $y = r(x)$ tiene cerca de $x = 2$ la forma que se muestra en la figura 2.

Ahora examinaremos el comportamiento de la función cuando x se hace más grande en valor absoluto (tanto para x negativa como positiva).

$x \to -\infty$

x	y
−10	0.8750
−100	0.9898
−1,000	0.9990
−10,000	0.9999

$x \to \infty$

x	y
10	1.0833
100	1.0098
1,000	1.0010
10,000	1.0001

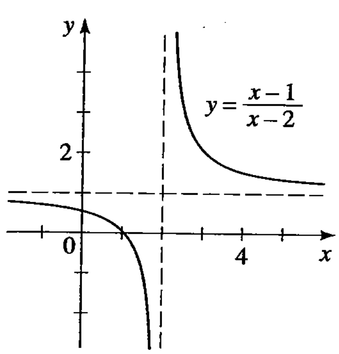


FIGURA 3

Cuando $|x|$ se hace más grande, los valores de y se acercan a 1. Esto significa que la gráfica de $y = r(x)$ se acercará a la recta horizontal $y = 1$ cuando x aumente o disminuya sin límite. Expresamos lo anterior diciendo que "y tiende a 1 cuando x tiende a infinito o a infinito negativo" y escribimos

$y \to 1$ cuando $x \to \infty$ y $y \to 1$ cuando $x \to -\infty$

Esto significa que podemos completar la gráfica de $y = r(x)$ como se muestra en la figura 3.

SOLUCIÓN 2 Utilizando división larga, vemos que

$$s(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Esto significa que la gráfica de s es simplemente la de la función r del ejemplo 1 desplazada hacia arriba 1 unidad y 2 unidades hacia la derecha. Así, obtenemos la gráfica de la figura 3 a partir de la gráfica de la figura 1, simplemente desplazándola horizontalmente y después verticalmente. ■

En el ejemplo 2 presentamos la notación descrita en el recuadro siguiente.

NOTACIÓN DE FLECHAS

Símbolo	Significado
$x \to a^-$	x tiende a a por la izquierda
$x \to a^+$	x tiende a a por la derecha
$x \to -\infty$	x pasa a infinito negativo; esto es, x decrece sin límite
$x \to \infty$	x pasa a infinito; esto es, x crece sin límite

La recta $x = 2$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica de la figura 3, y la recta $y = 1$ es una *asíntota horizontal*. Hablando de manera informal, una asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de una función se acerca cada vez más conforme se recorre la recta en cualquier dirección. Formalmente establecemos las definiciones siguientes.

ASÍNTOTAS

1. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si

$$y \to \infty \quad \text{o} \quad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^+ \quad \text{o} \quad x \to a^-$$

2. La recta $y = b$ es la asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si

$$y \to b \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o} \quad x \to -\infty$$

En el ejemplo siguiente mostramos un procedimiento general para determinar las asíntotas horizontales y verticales y graficar funciones racionales.

EJEMPLO 3 ■ Gráfica de una función racional

Trace la gráfica de la función racional $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$.

SOLUCIÓN Factorizamos el numerador y el denominador, obtenemos las intersecciones y asíntotas y esbozamos la gráfica.

Factorice: $\quad r(x) = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

Una fracción es 0 si y sólo si su numerador es 0.

Intersecciones en x: Éstas son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

Intersección en y: Para determinar ésta, sustituimos $x = 0$ en la forma original de la función:

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) = 4}{(0)^2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La intersección en y es 2.

Asíntota horizontal: Ésta (en caso de que exista) es el valor al que se acerca y cuando $x \to \pm\infty$. Para determinar este valor dividimos tanto el numerador como el denominador entre la potencia más elevada de x que se encuentra en el denominador (en este caso, x^2).

$$y = r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

x	$4/x^2$
10	0.04
100	0.0004
1,000	0.000004
10,000	0.00000004

↑
tiende a 0

Cualquier expresión de la forma c/x^n se acerca a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (si $n > 0$). La tabla al margen ilustra lo anterior para el término $4/x^2$. Así, cuando $x \to \pm\infty$, tenemos

$$y = \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \to \frac{2 + 0 - 0}{1 + 0 - 0} = 2$$

Por tanto, la asíntota horizontal es $y = 2$.

Asíntotas verticales: Éstas se presentan donde el denominador es 0, esto es, donde la función no está definida. Así, de la forma factorizada las asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = -2$.

Comportamiento cerca de las asíntotas verticales: Es necesario que sepamos si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ al lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de y para valores de x cercanos a las asíntotas verticales, utilizamos valores de prueba. Por ejemplo, conforme $x \to 1^-$, usamos un valor de prueba cercano y a la izquierda de 1 (digamos, $x = 0.9$) para verificar si y es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$:

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9 - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(-)} \quad \text{(negativo)}$$

Así, $y \to \infty$ conforme $x \to 1^-$. Por otra parte, conforme $x \to 1^+$, utilizamos un valor de prueba cercano y a la derecha de 1 (digamos $x = 1.1$), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Por lo tanto $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Los demás valores de la tabla siguiente se calculan de manera similar

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de y es así $y = \dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)}$
así $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

Valores adicionales:

x	y
-6	0.93
-3	-1.75
-1	4.50
1.5	6.29
2	4.50
3	3.50

Gráfica:

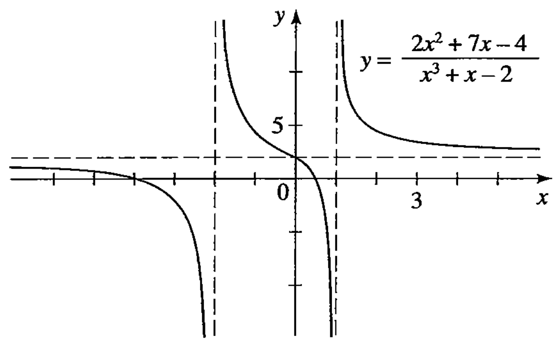


FIGURA 4

A continuación se da un resumen del procedimiento a seguir al graficar funciones racionales.

DIBUJO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

1. **FACTORIZACIÓN.** Factorice el numerador y el denominador.
2. **INTERSECCIONES.** Obtenga las intersecciones en x determinando los ceros del numerador, y la intersección en y a partir del valor de la función en $x = 0$.
3. **ASÍNTOTAS VERTICALES.** Obtenga las asíntotas verticales determinando los ceros del denominador, y entonces vea si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ a cada lado de toda asíntota vertical.
4. **ASÍNTOTA HORIZONTAL.** Determine la asíntota horizontal (si hubiera alguna) dividiendo tanto el numerador como el denominador entre la potencia más elevada de x se encuentre en el denominador, y después haciendo que $x \to \pm\infty$.
5. **TRACE LA GRÁFICA.** Grafique la información obtenida en los cuatro primeros pasos. Después trace tantos puntos adicionales como sea necesario para obtener el resto de la gráfica de la función.

Tres formas de una función racional

Para determinar la **intersección en y** de una función racional, utilizamos la *forma original* de la función.

Para determinar la **intersecciones en x** y las **asíntotas verticales**, utilizamos la *forma factorizada* de la función.

Para determinar la **asíntota horizontal**, utilizamos una *forma de fracción compuesta* de la función.

Note que al llevar a cabo el análisis utilizamos tres formas de la ecuación que define a la función racional. En el ejemplo 3 la *forma original*

$$r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

fácilmente nos dio la intersección en y, $r(0) = (-4)/(-2) = 2$. La *forma factorizada*

$$r(x) = \frac{(2x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$$

nos dio las intersecciones en x $\frac{1}{2}$ y -4 y las asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -2$. Finalmente la *forma de fracción compuesta*

$$r(x) = \frac{2 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{4}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}$$

nos da que la asíntota horizontal es $y = \frac{2}{1} = 2$.

Podemos determinar si una función racional $r(x) = P(x)/Q(x)$ tiene una asíntota horizontal considerando los grados del numerador y del denominador. Si los grados de P y de Q son iguales (digamos ambos n), entonces dividiendo el numerador y el denominador entre x^n vemos que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

como vimos en el ejemplo 3. El recuadro siguiente resume el procedimiento para determinar las asíntotas.

ASÍNTOTAS DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Sea

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

una función racional.

1. Las asíntotas verticales son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.
2. (a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

   (b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

   (c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

EJEMPLO 4 ■ Gráfica de una función racional.

Trace la gráfica de la función racional $r(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)}$

Intersección en x: 2, a partir de $x - 2 = 0$

Intersección en y: 2, porque $r(0) = \dfrac{0-2}{0^2-1} = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$, puesto que el grado del numerador < al grado del denominador

Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$, a partir de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de las asíntotas verticales:

Cuando $x \to$	1^+	1^-	-1^+	-1^-
el signo de y es así $y = \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)}$ es	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$	$\dfrac{(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$
así $y \to$	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$

Valores adicionales:

x	y
−2	−1.33
−0.5	3.33
0.5	2
1.5	−0.4
3	0.125
4	0.133
5	0.125

Gráfica:

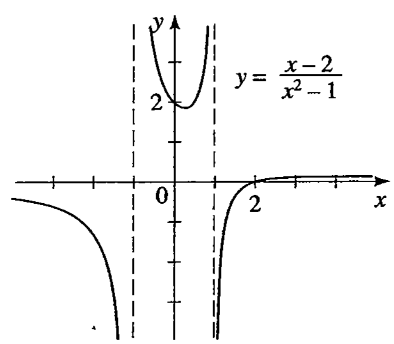


FIGURA 5 ■

De la gráfica de la figura 5, vemos que *contrariamente a un error de concepción común, la gráfica puede intersectar una asíntota horizontal.*

EJEMPLO 5 ■ Graficación de una función racional

Trace la gráfica de la función racional $r(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{2x^2+4x}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$

Intersecciones en x: -1 y 4, a partir de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

Intersección en y: Ninguna, porque $r(0)$ no está definido

Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador es igual al del denominador y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = -2$, a partir de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de las asíntotas verticales:

Conforme $x \to$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
el signo de y es así $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
así $y \to$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

Valores adicionales:

x	y
-3	2.33
-2.5	3.90
-0.5	1.50
1	-1.00
3	-0.13
5	0.09

Gráfica:

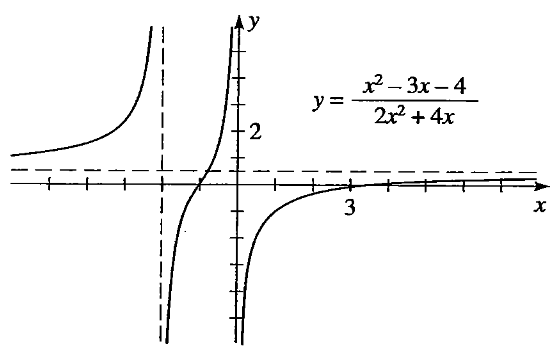


FIGURA 6

ASÍNTOTAS INCLINADAS

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la cual el grado del numerador es uno más que el del denominador, podemos utilizar el algoritmo de la división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de R es menor que el de Q y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$ por lo que para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = r(x)$ se acerca a la gráfica de la recta $y = ax + b$. En esta situación decimos que $y = ax + b$ es la **asíntota inclinada** o la **asíntota oblicua**.

EJEMPLO 6 ■ Una función racional con una asíntota inclinada

Trace la gráfica de la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

$$\begin{array}{r}
x \;\; - 1 \\
x - 3\overline{)x^2 - 4x - 5} \\
x^2 - 3x \\
-x - 5 \\
\underline{-x + 3} \\
-8
\end{array}$$

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es uno más que el del denominador, la función tiene una asíntota inclinada. Dividiendo $x^2 - 4x - 5$ entre $x - 3$ obtenemos

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

por lo que la asíntota inclinada es la recta $y = x - 1$. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical, y resulta fácil ver que $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$ y $r(x) \to \infty$ cuando $x \to 3^-$.

Factorizando el numerador original para r da

$$r(x) = \frac{(x + 1)(x - 5)}{x - 3}$$

por lo que las intersecciones en x son -1 y 5, y la intersección en y es $\frac{5}{3}$. Trazando las asíntotas, las intersecciones y los puntos adicionales que se listan en la tabla podemos completar la gráfica como se muestra en la figura 7.

x	y
-2	-1.4
1	4
2	9
4	-5
6	2.33

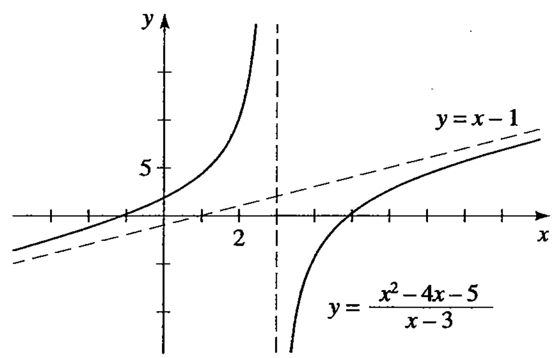


FIGURA 7 ■

USO DE DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN PARA GRAFICAR FUNCIONES RACIONALES

Hasta ahora hemos considerado únicamente asíntotas horizontales e inclinadas como comportamientos finales de funciones racionales. En el siguiente ejemplo graficamos una función que se comporta como una parábola para valores grandes de $|x|$.

EJEMPLO 7 ■ Comportamiento final de una función racional

Grafique la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

en rectángulos de visualización apropiados a fin de mostrar la asíntota vertical y determinar su comportamiento final.

SOLUCIÓN Primero graficamos la función en un rectángulo de visualización angosto para observar la asíntota vertical. La función no está definida cuando $x = 2$, por lo que elegimos el rectángulo de $[-4, 4]$ por $[-20, 20]$ y obtenemos la gráfica de la figura 8(a). La función tiene la intersección x en -1, la asíntota vertical $x = 2$ y un punto mínimo local con coordenadas aproximadas $(2.74, 11.56)$. Para determinar el comportamiento final, intentamos un rectángulo más grande, en este caso $[-30, 30]$ por $[-200, 200]$. En la gráfica de la figura 8(b) la asíntota vertical ha desaparecido prácticamente, y la gráfica se parece a una parábola. Para ver por qué es así, dividimos el numerador entre el denominador de f y escribimos el resultado en la forma cociente–residuo:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-2\overline{)x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 3 \end{array}$$

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

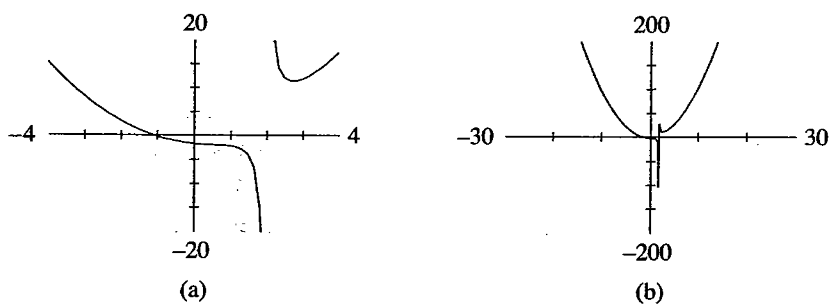


FIGURA 8
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

Cuando $|x|$ es grande, $3/(x-2)$ es pequeño; esto es $3/(x-2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que para $|x|$ grande, la gráfica de f estará cerca de la correspondiente a $y = x^2$. Por lo tanto, el comportamiento final de la función f es parecido al de la parábola $y = x^2$.

En la figura 9 las gráficas de $y = (x^3 - 2x^2 + 3)/(x - 2)$ y $y = x^2$ se muestran en el rectángulo de $[-8, 8]$ por $[-5, 20]$; observamos que ambas están muy cerca por todos lados excepto en la cercanía de la asíntota vertical. ■

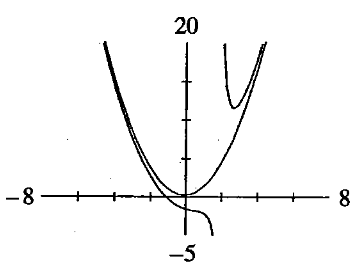


FIGURA 9
$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2} \quad \text{y} \quad y = x^2$$

Las funciones racionales ocurren con frecuencia en las aplicaciones científicas del álgebra. En el siguiente ejemplo analizamos la gráfica de una función correspondiente a la teoría de la electricidad.

EJEMPLO 8 ■ Resistencia eléctrica

Cuando dos resistores de resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo, su resistencia combinada R está dada por

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Suponga que un resistor fijo de 8 ohms está conectado en paralelo con un resistor variable, como se muestra en la figura 10. Si la resistencia del resistor variable es x, entonces la resistencia combinada R es una función de x. Grafique R y dé una interpretación física de la gráfica.

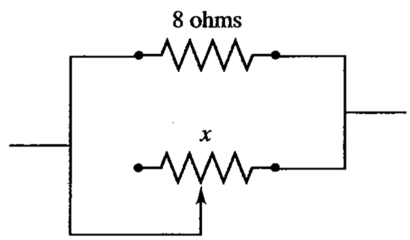


FIGURA 10

SOLUCIÓN Sustituyendo $R_1 = 8$ y $R_2 = x$ en la fórmula obtenemos la función

$$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$$

Dado que la resistencia no puede ser negativa, esta función tiene un significado físico sólo cuando $x > 0$. La gráfica de la función se muestra en la figura 11(a) usando el rectángulo de visualización $[0, 20]$ por $[0, 10]$. La función no tiene asíntota vertical cuando x queda restringida a valores positivos y la resistencia combinada R aumenta conforme la resistencia variable x aumenta. Si ensanchamos el rectángulo a $[0, 100]$ por $[0, 10]$, obtenemos la gráfica de la figura 11(b). Para x grandes, la resistencia combinada R se nivela, acercándose más y más a la asíntota horizontal $R = 8$. No importando lo grande que pueda llegar a ser x, la resistencia combinada nunca es mayor de 8 ohms.

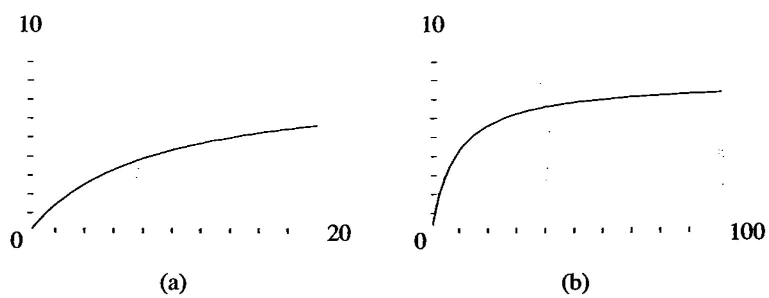


FIGURA 11
$R(x) = \dfrac{8x}{8 + x}$

■

6.5 EJERCICIOS

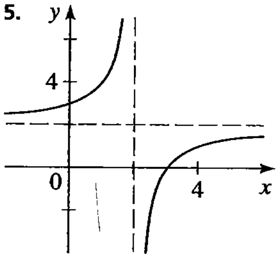
1-4 ■ Determine las intersecciones en x y en y de la función dada.

1. $y = \dfrac{x-6}{x+1}$ **2.** $y = \dfrac{2}{x-2}$

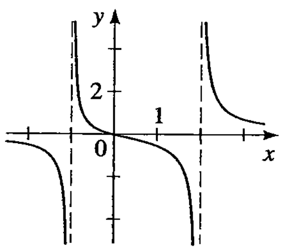
3. $y = \dfrac{x}{x^2-2x-15}$ **4.** $y = \dfrac{x^2+10}{2x}$

5-6 ■ A partir de la gráfica, determine las intersecciones en x y en y, así como las asíntotas verticales y horizontal.

5.



6.



7-16 ■ Determine todas las asíntotas (incluyendo las verticales, horizontal e inclinada).

7. $y = \dfrac{5}{x+3}$ **8.** $y = \dfrac{3x+3}{x-3}$

9. $y = \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$ **10.** $y = \dfrac{2x-4}{x^2+2x+1}$

11. $y = \dfrac{6}{x^2+2}$ **12.** $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$

13. $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ **14.** $y = \dfrac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

15. $y = \dfrac{2x^3-x^2-8x+4}{x+3}$ **16.** $y = \dfrac{6x^4}{x^2-3}$

17-38 ■ Determine las intersecciones y las asíntotas, y después trace la gráfica de la función racional.

17. $y = \dfrac{4}{x-2}$ **18.** $y = \dfrac{9}{x+3}$

19. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ **20.** $y = \dfrac{x+9}{x-3}$

21. $y = \dfrac{4x-4}{x+2}$ **22.** $y = \dfrac{2x+6}{-6x+3}$

23. $y = \dfrac{2x-4}{x}$ **24.** $y = \dfrac{x}{2x-4}$

25. $y = \dfrac{18}{(x-3)^2}$ **26.** $y = \dfrac{x-2}{(x+1)^2}$

27. $y = \dfrac{4x+8}{(x-4)(x+1)}$ **28.** $y = \dfrac{x-9}{(x+3)(x-1)}$

29. $y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$ **30.** $y = \dfrac{2x(x+4)}{(x-1)(x-2)}$

31. $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$ **32.** $y = \dfrac{4x^2}{x^2-2x-3}$

33. $y = \dfrac{2x^2+10x-12}{x^2+x-6}$ **34.** $y = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x}$

35. $y = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x}$ **36.** $y = \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$

37. $y = \dfrac{3x^2+6}{x^2-2x-3}$ **38.** $y = \dfrac{5x^2+5}{x^2+4x+4}$

39-46 ■ Determine la asíntota inclinada, las asíntotas verticales y trace la gráfica de la función.

39. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ **40.** $y = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$

41. $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$ **42.** $y = \dfrac{3x-x^2}{2x-2}$

43. $y = \dfrac{x^2+5x+4}{x-3}$ **44.** $y = \dfrac{x^3+4}{2x^2+x-1}$

45. $y = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$ **46.** $y = \dfrac{2x^3+2x}{x^2-1}$

47-50 ■ Grafique la función racional f y determine todas las asíntotas verticales. Después, grafique f y g en un rectángulo de visualización suficientemente grande para mostrar que tienen el mismo comportamiento final.

47. $f(x) = \dfrac{2x^2+6x+6}{x+3}$, $g(x) = 2x$

48. $f(x) = \dfrac{-x^3+6x^2-5}{x^2-2x}$, $g(x) = -x+4$

49. $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+16}{x-2}$, $g(x) = x^2$

50. $f(x) = \dfrac{-x^4+2x^3-2x}{(x-1)^2}$, $g(x) = 1-x^2$

51-54 ■ Grafique la función racional y determine todas las asíntotas verticales, intersecciones en x y en y, todos los extremos locales, correctos a el decimal más próximo. Después use la división larga para obtener un polinomio que tenga el mismo comportamiento final que la función racional, y grafique ambas en un rectángulo de visualización suficientemente grande para verificar que los comportamientos finales del polinomio y de la función racional son iguales.

51. $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x + 3}$ **52.** $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x}$

53. $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$ **54.** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

55. En este capítulo hemos adoptado la regla convencional de que en las funciones racionales, el numerador y el denominador no tienen un factor común. En este ejercicio consideramos la gráfica de una función racional que no satisface esta regla. Demuestre que la gráfica de

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x - 2}$$

es la recta $y = 3x + 3$ con el punto $(2, 9)$ eliminado. [*Sugerencia*: Factorice. ¿Cuál es el dominio de r?]

56-59 ■ Grafique la función racional, utilizando el método del ejercicio 55.

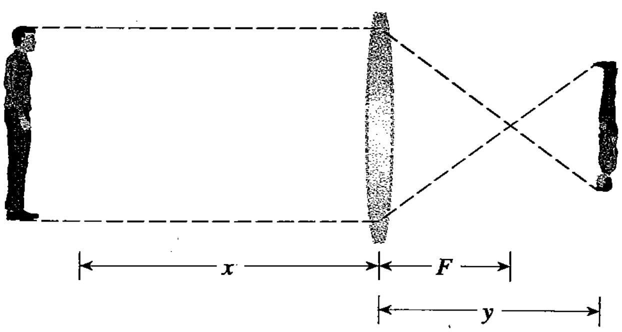
56. $y = \dfrac{x^2 + x - 20}{x + 5}$ **57.** $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$

58. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ **59.** $y = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$

60. Para que una cámara con un lente de longitud focal fija F enfoque sobre un objeto que está a una distancia x del lente, la película debe estar colocada a una distancia y por detrás del lente, donde F, x y y se relacionan de la forma siguiente

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$

(Véase la figura.)

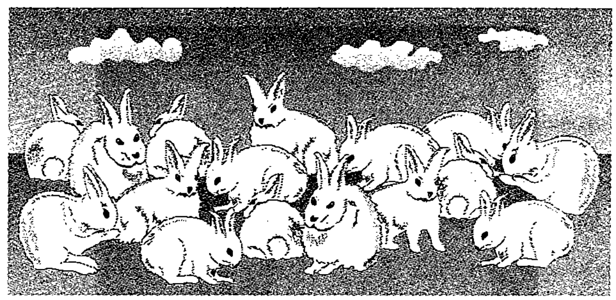


Suponga que la cámara tiene un lente de 55 mm ($F = 55$).
(a) Exprese y como una función de x y grafique la función.
(b) ¿Qué le ocurre a la distancia de enfoque y conforme el objeto se aleja del lente?
(c) ¿Qué le ocurre a la distancia de enfoque y conforme el objeto se acerca al lente?

61. La población de conejos de la granja del señor Jenkins se comporta de acuerdo con la fórmula

$$p(t) = \frac{3{,}000t}{t + 1}$$

donde $t \geqslant 0$ es el tiempo (en meses) desde el principio del año.
(a) Trace la gráfica de la población de conejos.
(b) ¿Qué pasa finalmente con la población de conejos?



62. Después de inyectar cierto medicamento en un paciente, se supervisa la concentración c de la droga en la sangre. En el momento $t \geqslant 0$ (en minutos desde el momento de la inyección), la concentración (en mg/l) está dada por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

(a) Trace la gráfica de la concentración de la medicina.
(b) ¿Qué ocurre finalmente con la concentración de la medicina en la sangre?

63. A un paciente se le administra una medicina y se monitorea la concentración de la misma en la corriente sanguínea. En el momento $t \geqslant 0$ (en horas desde la administración de la droga), la concentración (en mg/l) está dada por

$$c(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

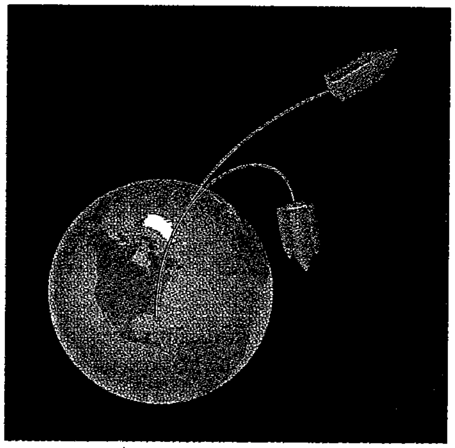
Grafique la función c utilizando un dispositivo graficador.
(a) ¿Cuál es la concentración de medicina más elevada alcanzada en la corriente sanguínea del paciente?
(b) ¿Qué le ocurre a la concentración de la medicina después de un largo periodo?

(c) ¿Cuánto tiempo pasa para que la concentración sea menor de 0.3 mg/l?

64. Suponga que se dispara un cohete hacia arriba desde la superficie de la tierra con una velocidad inicial v (medida en m/s). Entonces la altura máxima h (en metros) alcanzada por el cohete está dada por la función

$$h(v) = \frac{Rv^2}{2gR - v^2}$$

donde $R = 6.4 \times 10^6$ m es el radio de la tierra y $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración debida a la gravedad. Utilice un dispositivo de graficación para obtener la gráfica de la función h (note que tanto h como v deben ser positivas, por lo que el rectángulo de visualización no necesita contener valores negativos). ¿Qué es lo que representa físicamente la asíntota vertical?



65. Conforme un tren se mueve hacia el observador (véase la figura), la frecuencia de su silbato suena más agudo para el observador que si el tren estuviera en reposo, porque las crestas de las ondas sonoras se han comprimido acercándose. Este fenómeno se conoce como *efecto Doppler*. La frecuencia observada P es una función de la rapidez v del tren y está dada por

$$P(v) = P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$$

donde P_0 es la frecuencia real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ m/s es la rapidez del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato de frecuencia $P_0 = 440$ Hz. Grafique la función $y = P(v)$ utilizando un dispositivo de graficación. ¿Cómo se interpreta físicamente la asíntota vertical de esta función?

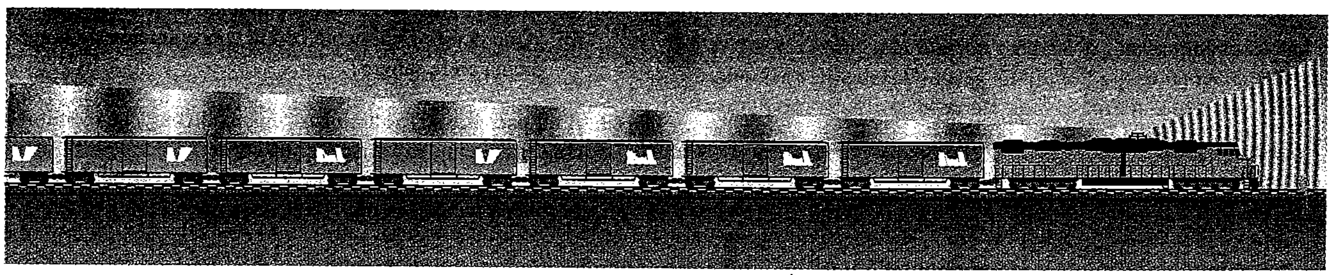
DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

66. Planteamiento de una función racional a partir de sus asíntotas. Proporcione un ejemplo de una función racional que tenga una asíntota vertical $x = 3$. Ahora dé un ejemplo de una que tenga una asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 2$. Ahora dé un ejemplo de una función racional con asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$ e intersección en x igual a 4.

67. Una función racional sin asíntotas. Explique cómo puede saber (sin hacer la gráfica) que la función

$$r(x) = \frac{x^6 + 10}{x^4 + 8x^2 + 15}$$

no tiene intersección en x, ni asíntotas horizontal, verticales o inclinada. ¿Cuál es su comportamiento terminal?.



6 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Describa la ecuación que define un polinomio P de grado n.
   (b) ¿Qué quiere decir que c es un cero de P?
2. Trace gráficas mostrando los comportamientos finales posibles de los polinomios de grado impar y par.
3. ¿Qué pasos seguiría para graficar un polinomio a mano?
4. (a) ¿Qué quiere decir un punto máximo local o un punto mínimo local de un polinomio?
   (b) ¿Cuántos extremos locales puede tener un polinomio de grado n?
5. Enuncie el algoritmo de la división e identifique dividendo, divisor, cociente y residuo.
6. ¿Cómo funciona la división sintética?
7. (a) Escriba el teorema del residuo.
   (b) Escriba el teorema del factor.
8. (a) Escriba el teorema de los ceros racionales.
   (b) ¿Qué pasos seguiría para determinar los ceros racionales de un polinomio?
9. Escriba la regla de los signos de Descartes.
10. (a) ¿Qué significa decir que a es una cota inferior y b es una cota superior para los ceros de un polinomio?
    (b) Escriba el teorema de las cotas superior e inferior.
11. (a) ¿Qué es un número complejo?
    (b) ¿Cuáles son las partes real e imaginaria de un número complejo?
    (c) ¿Cuál es el complejo conjugado de un número complejo?
    (d) ¿Cuál es el módulo de un número complejo?
    (e) ¿Cómo suma, resta, multiplica y divide números complejos?
12. (a) Escriba el teorema fundamental del álgebra.
    (b) Escriba el teorema de la factorización completa
    (c) ¿Qué significa decir que c es un cero de multiplicidad k de un polinomio P?
    (d) Escriba el teorema de los ceros.
    (e) Escriba el teorema de la raíces conjugadas.
13. (a) ¿Qué es una función racional?
    (b) ¿Qué significa decir que $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$?
    (c) ¿Cómo localiza una asíntota vertical?
    (d) ¿Qué significa decir que $y = b$ es la asíntota horizontal de $y = f(x)$?
    (e) ¿Cómo localiza la asíntota horizontal?
    (f) ¿Qué pasos seguiría para trazar la gráfica de una función racional a mano?
    (g) ¿Bajo qué circunstancias una función racional tiene asíntota inclinada? Si existe, ¿cómo la determina?

EJERCICIOS

1-6 ▪ Grafique el polinomio. Muestre claramente todas las intersecciones en x y en y.

1. $y = (x-2)^3 + 8$
2. $y = 32 - 2x^4$
3. $y = x^3 - 9x$
4. $y = x^3 - 5x^2 - 6x$
5. $y = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
6. $y = x^4 - 9x^2$

7-10 ▪ Utilice un dispositivo de graficación para graficar el polinomio. Determine las intersecciones en x y en y y las coordenadas de todos los extremos locales, correctamente a el decimal más próximo. Describa el comportamiento terminal de la función.

7. $y = 2x^3 + x^2 - 18x - 9$
8. $y = x^4 - 8x^2 + 16$
9. $y = x^5 + x^2 - 5$
10. $y = 3x^5 + x^4 - 4x$

11-18 ▪ Determine el cociente y el residuo.

11. $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 11}{x-3}$
12. $\dfrac{x^4 + 30x + 12}{2x + 6}$

13. $\dfrac{x^3 - x^2 - 11x + 6}{x^2 + 2x - 5}$

14. $\dfrac{x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 20x - 6}{x^2 + 2x - 6}$

15. $\dfrac{x^4 - 25x^2 + 4x + 15}{x + 5}$

16. $\dfrac{2x^3 - x^2 - 5}{x - \frac{3}{2}}$

17. $\dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1}{x - \sqrt{3}}$

18. $\dfrac{15x - 7}{5x + 12}$

19-20 ■ Determine el valor indicado del polinomio utilizando el teorema del residuo.

19. $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 13$; determine $P(5)$

20. $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 15$; determine $Q(-3)$

21. Demuestre que $\frac{1}{2}$ es un cero del polinomio

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 + 10x - 4$$

22. Utilice el teorema del factor para demostrar que $x + 4$ es un factor del polinomio

$$x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 23x^2 + 12x + 12$$

23. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio $x^{500} + 6x^{201} - x^2 - 2x + 4$ se divide por $x - 1$?

24. ¿Cuál es el residuo cuando $x^{101} - x^4 + 2$ se divide entre $x + 1$?

25-26 ■ Liste todas las raíces racionales posibles (sin verificar que lo sean), y después determine el número posible de raíces reales positivas y negativas utilizando la regla de los signos de Descartes.

25. $x^5 - 6x^3 - x^2 + 2x + 18 = 0$

26. $6x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 4 = 0$

27-36 ■ Evalúe la expresión y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

27. $(3 - 5i) - (6 + 4i)$

28. $(-2 + 3i) + (\frac{1}{2} - i)$

29. $(2 + 7i)(6 - i)$

30. $3(5 - 2i)\dfrac{i}{5}$

31. $\dfrac{2 - 3i}{2 + 3i}$

32. $\dfrac{2 + i}{4 - 3i}$

33. i^{45}

34. $(3 - i)^3$

35. $(1 - \sqrt{-3})(2 + \sqrt{-4})$

36. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-20}$

37. Obtenga un polinomio de grado 3 con un coeficiente constante 12 y con ceros $-\frac{1}{2}$, 2 y 3.

38. Obtenga un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros y ceros $3i$ y 4, siendo 4 un cero doble.

39. ¿Existe un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros que tenga ceros i, $2i$, $3i$ y $4i$?; de ser así encuéntrelo. De lo contrario explique por qué.

40. Pruebe que la ecuación $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

41-50 ■ Determine todas las raíces racionales, irracionales e imaginarias (y diga cuáles son sus multiplicidades). Utilice la regla de los signos de Descartes, el teorema de las cotas superior e inferior, la fórmula cuadrática y otras técnicas de factorización para ayudarse siempre que sea posible.

41. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

42. $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9 = 0$

43. $x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 28x + 20 = 0$

44. $x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 17x - 20 = 0$

45. $x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4 = 0$

46. $x^4 = 81$

47. $x^6 = 64$

48. $18x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$

49. $6x^4 - 18x^3 + 6x^2 - 30x + 36 = 0$

50. $x^4 + 15x^2 + 54 = 0$

51-54 ■ Utilice un dispositivo de graficación para determinar todas las soluciones reales de la ecuación.

51. $2x^2 = 5x + 3$

52. $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

53. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 9x - 2 = 0$

54. $x^5 = x + 3$

55-60 ■ Grafique la función racional. Muestre claramente todas las intersecciones en x y en y y todas las asíntotas.

55. $y = \dfrac{3x - 12}{x + 1}$

56. $y = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

57. $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x-8}$

58. $y = \dfrac{2x^2-6x-7}{x-4}$

59. $y = \dfrac{x^2-9}{2x^2+1}$

60. $y = \dfrac{x^3+27}{x+4}$

61-64 ■ Utilice un dispositivo de graficación para analizar la gráfica de la función racional. Obtenga todas las intersecciones en x y en y, las asíntotas verticales, horizontal e inclinada y las coordenadas de los extremos locales. Si la función no tiene asíntota horizontal o inclinada, obtenga un polinomio que tenga el mismo comportamiento final que la función racional.

61. $y = \dfrac{x-3}{2x+6}$

62. $y = \dfrac{2x-7}{x^2+9}$

63. $y = \dfrac{x^3+8}{x^2-x-2}$

64. $y = \dfrac{2x^3-x^2}{x+1}$

65. (a) Demuestre que -1 es una raíz de la ecuación

$$2x^4 + 5x^3 + x + 4 = 0$$

(b) Utilice la información del inciso (a) para demostrar que $2x^3 + 3x^2 - 3x + 4 = 0$ no tiene una raíz positiva real. [*Sugerencia:* compare los coeficientes de este polinomio con su tabla de división sintética del inciso (a)].

66. Determine las coordenadas de todos los puntos de intersección de las gráficas de

$$y = x^4 + x^2 + 24x \quad \text{y} \quad y = 6x^3 + 20$$

EXAMEN

1. Grafique la función $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, mostrando claramente todas las intersecciones en x y en y.

2. Utilice la división sintética para determinar el cociente y el residuo cuando $x^4 - 4x^2 + 2x + 5$ se divide por $x - 2$.

3. Suponga que $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$.
   (a) Liste todos los posibles ceros racionales de P.
   (b) Determine la factorización completa de P.
   (c) ¿Cuáles son los ceros de P?

4. Evalúe y escriba su respuesta en la forma $a + bi$

   (a) $\dfrac{6 - 2i}{2 + 3i}$ (b) $(2 - i)^3$ (c) i^{13}

5. Determine todas las raíces reales y complejas de la ecuación $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = 0$.

6. Suponga que

$$P(x) = x^{23} - 5x^{12} + 8x - 1 \qquad Q(x) = 3x^4 + x^2 - x - 15$$

$$R(x) = 4x^6 + x^4 + 2x^2 + 16$$

   (a) Explique por qué un entero par no puede ser un posible un cero de ninguno de estos tres polinomios.
   (b) ¿Tiene R algún cero real? ¿Por qué sí o por qué no?
   (c) ¿Cuántos ceros reales tiene Q? ¿Por qué?
   (d) Demuestre que P no tiene un cero racional.

7. Obtenga un polinomio de cuarto grado con coeficientes enteros que tenga ceros $1 + 2i$ y -1, siendo -1 de multiplicidad 2.

8. Suponga que $P(x) = 2x^4 - 17x^3 + 53x^2 - 72x + 36$
   (a) Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántas raíces reales positivas y negativas pudiera tener la ecuación $P(x) = 0$.
   (b) Demuestre que 9 es una cota superior para las raíces reales de $P(x) = 0$ pero por sí misma no es una raíz.

9. Considere las cuatro funciones racionales siguientes:

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \qquad s(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4} \qquad t(x) = \frac{x^3 - 9x}{x + 2} \qquad u(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 25}$$

   (a) ¿Cuál de estas cuatro funciones racionales tiene una asíntota horizontal?
   (b) ¿Cuál de estas funciones tiene asíntota inclinada?.
   (c) ¿Cuál de estas funciones no tiene asíntotas verticales?.
   (d) Grafique $y = u(x)$, mostrando claramente cualquier asíntota y las intersecciones en x y en y que pudiera tener la función.

10. Escoja un rectángulo de visualización apropiado y grafique la ecuación siguiente. Determine todas sus intersecciones en x y sus extremos locales, correctamente a dos decimales:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$$

7

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son importantes en la topografía, navegación y astronomía, donde se utilizan para encontrar las distancias a las estrellas cercanas como también para descubrir fenómenos periódicos.

La trigonometría comprende la ciencia de las magnitudes en ondulación continua...

AUGUSTUS DE MORGAN

La trigonometría es una de las ramas más versátiles de las matemáticas. Desde su invención en el viejo mundo, ha sido importante tanto en aplicaciones teóricas como prácticas. En los tiempos modernos se ha aplicado en campos tan diversos como el procesamiento de señales en la industria telefónica, la codificación de música en reproductores de discos compactos, la determinación de las distancias a las estrellas, el diseño de sistemas de navegación en el transbordador espacial, la producción de rastreos CAT para uso médico y muchos otros. Es una herramienta indispensable para los ingenieros electricistas, los físicos, los científicos de la computación y prácticamente para todas las ciencias.

El poder y la versatilidad de la trigonometría provienen del hecho de que puede considerarse de dos maneras diferentes. Una de ellas define la trigonometría como el estudio de *funciones de números reales*; la otra, como el estudio de *funciones de ángulos*. Las funciones trigonométricas definidas en estas dos formas son idénticas: asignan el mismo valor a un número real dado (en el segundo caso, el número real es la medida de un ángulo).

7.1 CÍRCULO UNITARIO

En esta sección examinamos algunas propiedades del círculo de radio 1 centrado en el origen, propiedades que también se utilizarán en la sección siguiente para definir las funciones trigonométricas.

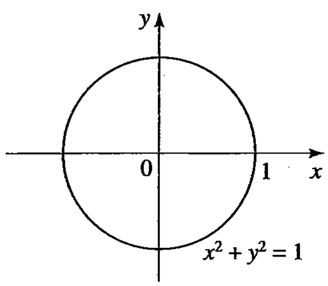


FIGURA 1
Círculo unitario

CÍRCULO UNITARIO

El **círculo unitario** es un círculo de radio 1 centrado en el origen del plano xy (veáse la figura 1). Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

EJEMPLO 1 ■ Un punto en el círculo unitario

Demuestre que el punto $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ está en el círculo unitario.

SOLUCIÓN Necesitamos demostrar que este punto satisface la ecuación del círculo unitario, esto es, $x^2 + y^2 = 1$. Puesto que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

P está en el círculo unitario. ■

EJEMPLO 2 ■ Localización de un punto en el círculo unitario

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en el círculo unitario en el cuadrante IV. Determine su coordenada y.

SOLUCIÓN Puesto que el punto está en el círculo unitario, tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \ + \frac{1}{2}$$

Dado que el punto está en el cuadrante IV, y su coordenada debe ser negativa, $y = -\frac{1}{2}$. ■

PUNTOS TERMINALES EN EL CÍRCULO UNITARIO

Suponga que t es un número real. Marquemos una distancia t a lo largo del círculo unitario. Empezando en el punto $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección opuesta a las manecillas del reloj si t es positiva, o en dirección de las manecillas si t es negativa (figura 2). De esta manera llegamos a un punto $P(x,y)$ en el círculo unitario. El punto $P(x,y)$ así obtenido se conoce como el **punto terminal** determinado por el número real t.

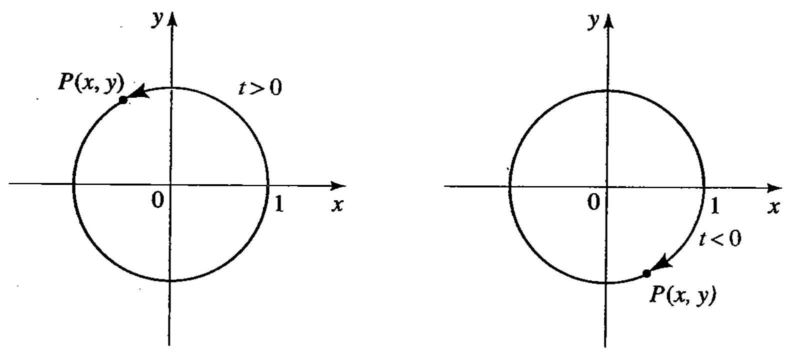


FIGURA 2

(a) Punto terminal $P(x,y)$ determinado por $t > 0$

(b) Punto terminal $P(x,y)$ determinado por $t < 0$

La circunferencia del círculo unitario es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto empieza en $(1, 0)$ y se mueve contra las manecillas del reloj alrededor de todo el círculo unitario y vuelve a $(1,0)$, recorre una distancia igual a 2π. Para moverse la mitad de la distancia alrededor del círculo, recorre una distancia $\frac{1}{2}\,(2\pi) = \pi$. Para moverse una cuarta parte de la distancia alrededor del círculo, recorre una distancia $\frac{1}{4}\,(2\pi) = \pi/2$ ¿Dónde queda el punto cuando recorre estas distancias alrededor del círculo? A partir de la figura 3 vemos, por ejemplo, que cuando se mueve una distancia π empezando desde $(1,0)$, su punto terminal es $(-1, 0)$.

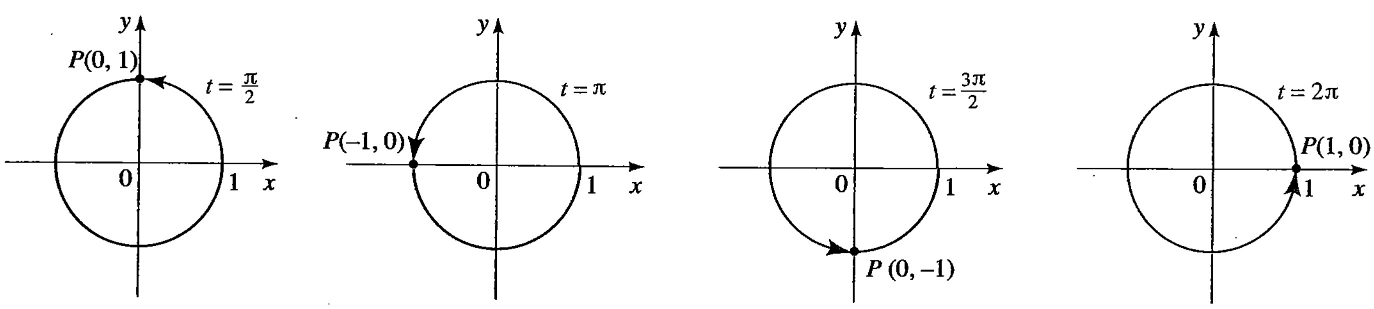


FIGURA 3

Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, y 2π

EJEMPLO 3 ■ Determinación de puntos terminales

Obtenga el punto terminal en el círculo unitario determinado por cada uno de los siguientes números reales t.

(a) $t = 3\pi$ (b) $t = \dfrac{3\pi}{4}$ (c) $t = -\dfrac{5\pi}{6}$

SOLUCIÓN De la figura 4 obtenemos lo siguiente.

(a) El punto terminal determinado por 3π es $(-1, 0)$.

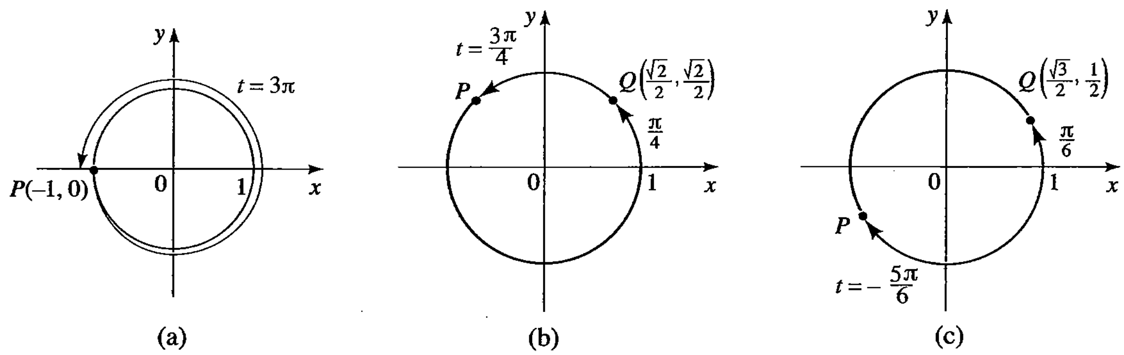


FIGURA 4

(b) Supongamos que P es el punto terminal determinado por $3\pi/4$ y que Q sea el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la figura 4(b) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Puesto que P está en el cuadrante II, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Así, el punto terminal es $P(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(c) Supongamos que P es el punto terminal determinado por $-5\pi/6$ y Q el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la figura 4(c), vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Dado que P está en el cuadrante III, sus coordenadas son ambas negativas. Así, el punto terminal es $P(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$. ■

Observe que diferentes valores de t pueden determinar el mismo punto terminal.

El punto $P(x,y)$ determinado por $t = \pi/4$ está a la misma distancia desde $(1,0)$ que desde $(0,1)$ a lo largo del círculo unitario (véase la figura 5)

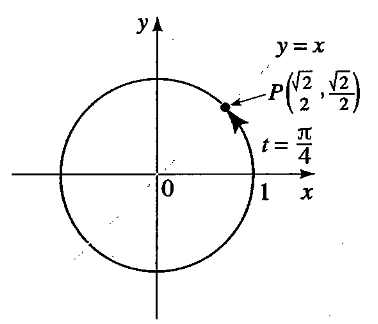
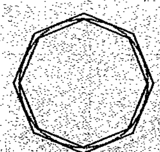


FIGURA 5

Puesto que el círculo unitario es simétrico respecto a la recta $y = x$, se deduce que P está en la recta $y = x$. Por lo tanto, P es el punto de intersección en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$ y de la recta $y = x$. Sustituyendo x por y en la ecuación del círculo obtenemos

EL VALOR DE π

El número π es la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Desde la antigüedad se sabía que esta razón es la misma para todos los círculos. El primer esfuerzo sistemático para determinar una aproximación numérica para π lo llevó a cabo Arquímedes (circa 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ al determinar los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos a un círculo.



Aproximadamente en el año 480 d. C., el físico chino Tsu Ch'ung dio la aproximación

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

que es correcta hasta seis decimales, y se conservó como la estimación más precisa de π hasta que el matemático neerlandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular a π correctamente hasta 15 decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a utilizar series infinitas así como identidades trigonométricas en la búsqueda de π. El inglés Williams Shanks pasó 15 años (1858-1873) usando esos métodos para calcular π hasta 707 decimales, pero en 1946 se descubrió que sus cálculos estaban equivocados a partir del decimal número 528. Hoy en día con la ayuda de las computadoras ha sido posible determinar π correctamente con miles e incluso millones de decimales. En 1991, David y Gregory Chudnovsky utilizaron su computadora de escritorio especialmente diseñada para determinar los primeros 2,160 millones de dígitos de π (el récord de ese momento). El récord actual es propiedad de Jonathan y Peter Borwein de Simon Fraser University, y de Yasumasa Kanada de la Universidad de Tokio, quienes en 1995 calcularon el valor de π hasta 4,294,967,286 decimales.

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Reduzca términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida por dos}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Extraiga raíces cuadradas}$$

Puesto que P está en el primer cuadrante $x = 1/\sqrt{2}$ y en vista de que $y = x$, tenemos también $y = 1/\sqrt{2}$. Por lo que el punto terminal determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para obtener los puntos terminales determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ se pueden utilizar métodos similares (véanse los ejercicios 49 y 50). La tabla 1 y la figura 6 dan los puntos terminales para algunos valores especiales de t.

Tabla 1

t	Punto terminal determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

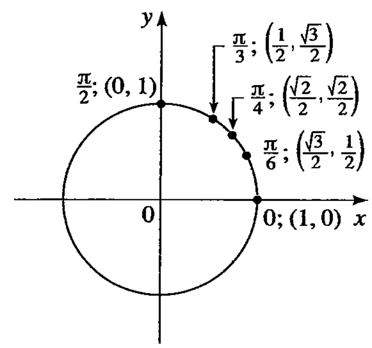


FIGURA 6

EL NÚMERO DE REFERENCIA

De los ejemplos anteriores vemos que para determinar un punto terminal en cualquier cuadrante solamente necesitamos conocer el punto terminal "correspondiente" en el primer cuadrante. Se presenta un procedimiento para determinar dichos puntos terminales utilizando la idea del *número de referencia.*

NÚMERO DE REFERENCIA

Supongamos que t es un número real. **El número de referencia $\bar{t}$** asociado con t es la distancia más corta, a lo largo del círculo unitario, entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

La figura 7 muestra que para obtener el número de referencia $\bar{t}$ es útil saber en qué cuadrante se encuentra el punto terminal determinado por t.

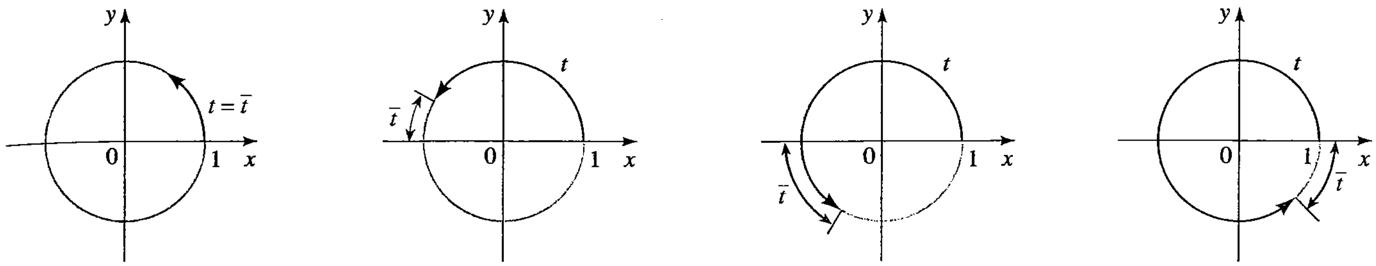


FIGURA 7
El número de referencia $\bar{t}$ para t.

EJEMPLO 4 ■ Determinación de números de referencia

Obtenga el número de referencia determinado por cada uno de los siguientes números reales t

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ (b) $t = \dfrac{7\pi}{4}$ (c) $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ (d) $t = 5.80$

SOLUCIÓN De la figura 8 obtenemos los números de referencia como sigue

(a) $\bar{t} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ (b) $\bar{t} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\bar{t} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ (d) $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$

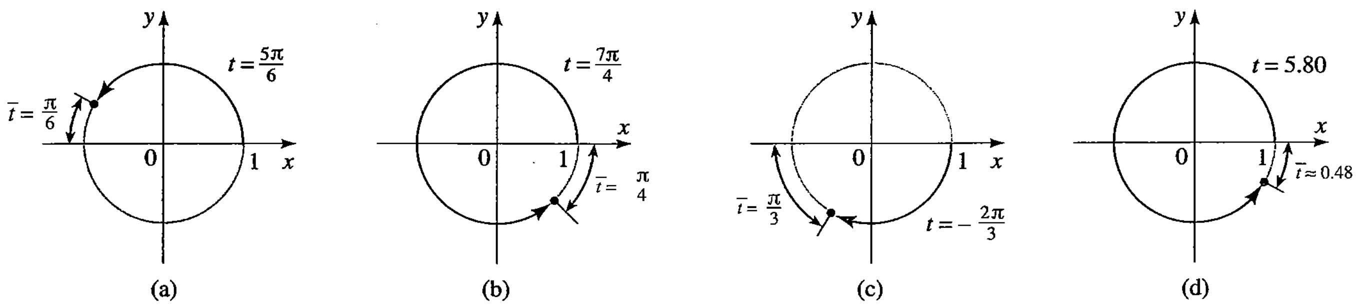


FIGURA 8

■

USO DE LOS NÚMEROS DE REFERENCIA PARA ENCONTRAR PUNTOS TERMINALES

Para obtener el punto terminal P determinado por cualquier valor de t, se realizan los pasos siguientes:

1. Obtenga el número de referencia $\bar{t}$.
2. Obtenga el punto terminal $Q(a,b)$ determinado por $\bar{t}$.
3. El punto terminal determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde se seleccionan los signos de acuerdo con el cuadrante en el cual se encuentra este punto terminal.

EJEMPLO 5 ■ Uso de los números de referencia para determinar puntos terminales

Obtenga el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes valores de t.

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ (b) $t = \dfrac{7\pi}{4}$ (c) $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

SOLUCIÓN Los números de referencia asociados con estos valores de t se determinaron en el ejemplo 4.

(a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, lo que determina el punto terminal $(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ de la tabla 1. Puesto que el punto terminal determinado por t está en el cuadrante II, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Así, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, que determina el punto terminal $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ de la tabla 1. Puesto que el punto terminal está en el cuadrante IV, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Así, el punto terminal deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) El número de referencia $\bar{t} = \pi/3$ determina el punto terminal $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ de la tabla 1. Puesto que el punto terminal determinado por t está en el cuadrante III, sus coordenadas son negativas. Así, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ ■

En vista de que la circunferencia del círculo unitario es 2π, el punto terminal determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto terminal determinado por t. En el siguiente ejemplo utilizamos esta observación para determinar puntos terminales para t grandes.

EJEMPLO 6 ■ Determinación del punto terminal para t grande

Obtenga el punto terminal determinado por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto terminal de t es el mismo que el de $5\pi/6$ (esto es, restamos 4π). Por lo tanto, según el ejemplo 5(a) el punto terminal es $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$. ■

7.1 EJERCICIOS

1-4 ■ Demuestre que el punto dado está en el círculo unitario

1. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **2.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

3. $\left(-\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}/3\right)$ **4.** $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

5-10 ■ El punto P está en el círculo unitario. A partir de la información dada, determine $P(x,y)$.

5. La coordenada x de P es $\frac{3}{5}$ y P está en el cuadrante I.

6. La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$ y P está en el cuadrante III.

7. La coordenada x de P es $\frac{2}{3}$ y la coordenada y es negativa.

8. La coordenada x de P es positiva y la coordenada y es $-\sqrt{5}/5$

9. La coordenada x de P es $\sqrt{2}/3$ y P está en el cuadrante IV.

10. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$ y P está en el cuadrante II.

11–16 ■ Señale en el círculo unitario la posición aproximada del punto terminal del arco cuya longitud es el número real t dado [como siempre, el punto inicial del arco es $(1,0)$]. Determine el cuadrante en el cual está este punto terminal.

11. $t = \frac{\pi}{8}$ **12.** $t = \frac{3\pi}{7}$

13. $t = -\frac{11\pi}{9}$ **14.** $t = 4$

15. $t = -1.7$ **16.** $t = 7$

17-26 ■ Obtenga el punto terminal $P(x,y)$ en el círculo unitario determinado por el valor de t.

17. $t = \frac{\pi}{4}$ **18.** $t = \frac{\pi}{2}$

19. $t = -\frac{\pi}{3}$ **20.** $t = \frac{7\pi}{6}$

21. $t = \pi$ **22.** $t = -\frac{5\pi}{6}$

23. $t = \frac{2\pi}{3}$ **24.** $t = -\frac{\pi}{2}$

25. $t = -\frac{3\pi}{4}$ **26.** $t = \frac{11\pi}{6}$

27. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ en el círculo unitario. Obtenga el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.
(a) $\pi - t$ (b) $-t$ (c) $\pi + t$ (d) $2\pi + t$

28. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $\left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}/3\right)$ en el círculo unitario. Obtenga el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.
(a) $-t$ (b) $4\pi + t$ (c) $\pi - t$ (d) $t - \pi$

29-32 ■ Determine el número de referencia para cada valor de t.

29. (a) $t = \frac{5\pi}{4}$ (b) $t = \frac{7\pi}{3}$
(c) $t = -\frac{4\pi}{3}$ (d) $t = \frac{\pi}{6}$

30. (a) $t = \frac{5\pi}{7}$ (b) $t = -\frac{9\pi}{8}$
(c) $t = 3.55$ (d) $t = -2.9$

31. (a) $t = -\frac{11\pi}{5}$ (b) $t = \frac{13\pi}{6}$
(c) $t = \frac{7\pi}{3}$ (d) $t = -\frac{5\pi}{6}$

32. (a) $t = 3$ (b) $t = 6$
(c) $t = -3$ (d) $t = -6$

33-44 ■ Obtenga (a) el número de referencia para cada valor de t, y (b) el punto terminal determinado por t.

33. $t = \frac{3\pi}{4}$ **34.** $t = \frac{7\pi}{3}$

35. $t = -\frac{2\pi}{3}$ **36.** $t = -\frac{7\pi}{6}$

37. $t = \frac{13\pi}{4}$ **38.** $t = \frac{13\pi}{6}$

39. $t = \frac{7\pi}{6}$ **40.** $t = \frac{17\pi}{4}$

41. $t = -\frac{11\pi}{3}$ **42.** $t = \frac{31\pi}{6}$

43. $t = \frac{16\pi}{3}$ **44.** $t = -\frac{41\pi}{4}$

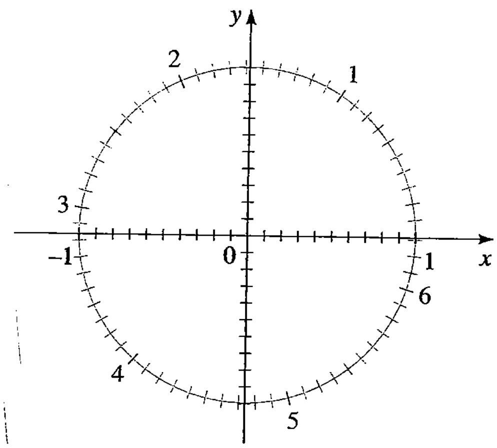
45-48 ■ Use la figura para obtener el punto terminal determinado por el número real t, con coordenadas correctas a un decimal.

45. $t = 1$

46. $t = 2.5$

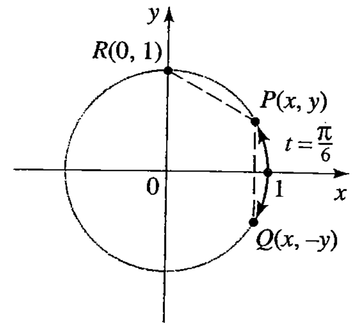
47. $t = -1.1$

48. $t = 4.2$

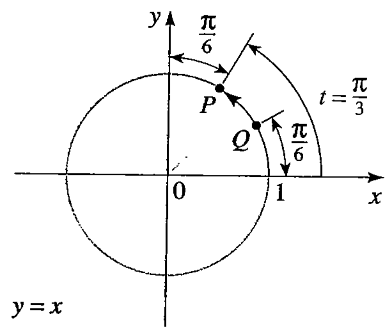


DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

49. Determinación del punto terminal para $\pi/6$ Suponga que el punto terminal determinado por $t = \pi/6$ es $P(x,y)$ y que los puntos Q y R son como se muestra en la figura. ¿Por qué son iguales las distancias PQ y PR? Use este hecho, además de la fórmula de la distancia, para demostrar que las coordenadas de P satisfacen la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Simplifique esta ecuación usando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada para determinar $P(x,y)$.



50. Determinación del punto terminal para $\pi/3$ Ahora que ya conoce el punto terminal determinado por $t = \pi/6$, use la simetría para obtener el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ (véase la figura). Explique su razonamiento.



7.2 MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Un **ángulo** AOB consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (véase la figura 1). A menudo interpretamos un ángulo como la rotación del rayo R_1 hacia el R_2. En este caso a R_1 se lo llama **lado inicial,** y a R_2 **lado terminal** del ángulo. Si el sentido de rotación es contrario a las manecillas del reloj, el ángulo se considera **positivo,** y si la rotación es en el sentido de las manecillas se lo considera **negativo.**

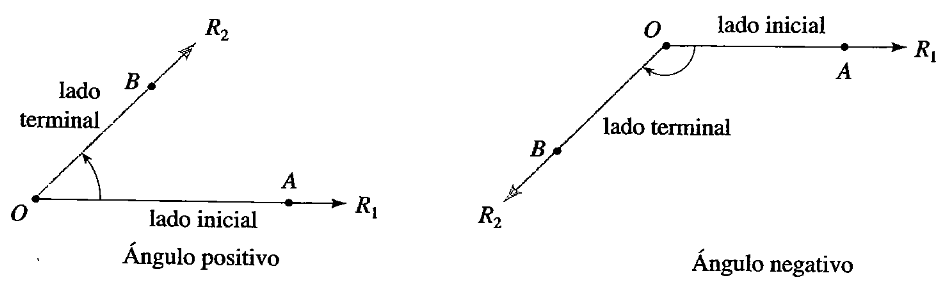


FIGURA 1

MEDIDA DE UN ÁNGULO

La **medida** de un ángulo es "cuánto" debe girar R_1 alrededor del vértice para que coincida con R_2. Intuitivamente, se trata de la "abertura" del ángulo. Una unidad de medición de ángulos es el **grado**. Para que un ángulo mida 1 grado debe hacerse girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de un giro completo. En el cálculo y en otras ramas de las matemáticas, se utiliza un método más natural de medir los ángulos: la *medida en radianes*. La abertura de un ángulo se mide a lo largo del arco de círculo unitario con centro en el vértice del ángulo.

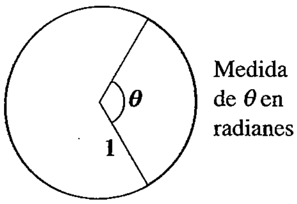


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE LA MEDICIÓN EN RADIANES

Si se traza un círculo de radio 1 con el vértice del ángulo como su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende dicho ángulo (véase la figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por tanto, un giro completo mide 2π rad, un ángulo liso* mide π rad y un ángulo recto** $\pi/2$ rad. Un ángulo subtendido por un arco de longitud 2 en un círculo unitario mide, en radianes, 2 (véase la figura 3).

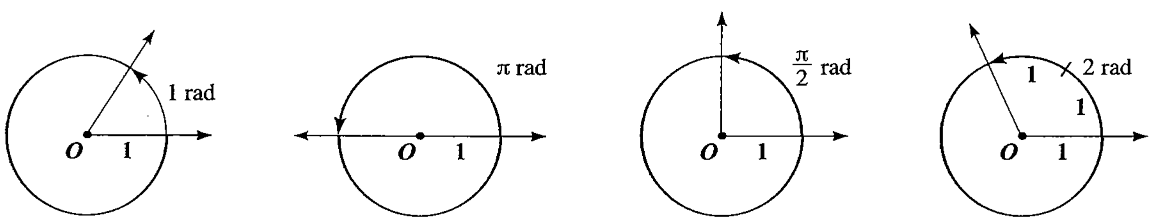


FIGURA 3
Medidas en radianes

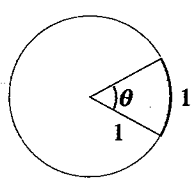
Dado que un giro completo medido en grados es 360° y medido en radianes es 2π rad, obtenemos la siguiente conversión entre estos dos métodos de medición de ángulos.

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

FIGURA 4

Para tener una idea del tamaño de un radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296° \qquad \text{y} \qquad 1° \approx 0.01745 \text{ rad}$$

* El ángulo que corresponde a medio giro (N. del R. T.)
** El ángulo que corresponde a un cuarto de giro (N. del R. T.).

ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR

Un ángulo está en **posición estándar** o **normal** si se traza en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial sobre el eje x positivo. La figura 5 da ejemplos de ángulos en posición estándar.

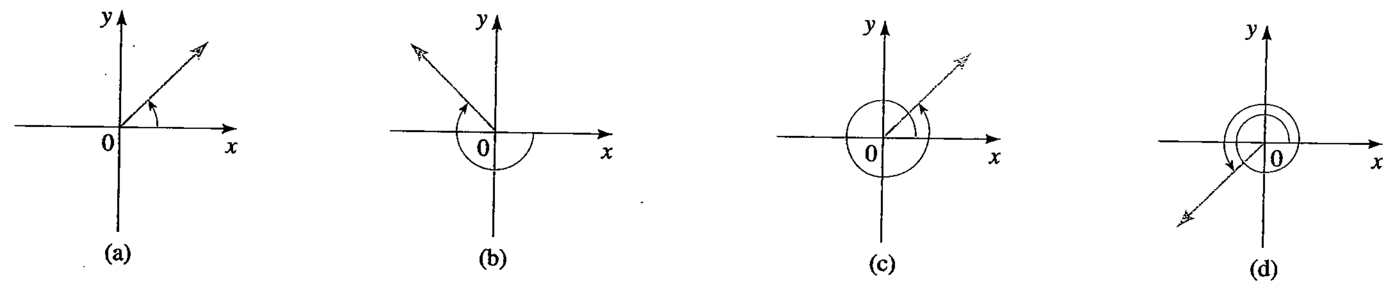


FIGURA 5
Ángulos en posición estándar

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si sus lados coinciden. En la figura 5 los ángulos en (a) y en (c) son coterminales.

EJEMPLO 1 ■ Ángulos coterminales

Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = 30°$ en posición estándar.

SOLUCIÓN

Para encontrar ángulos positivos coterminales con θ les sumamos cualquier múltiplo de 360°. Entonces

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para encontrar ángulos negativos coterminales con θ les restamos cualquier múltiplo de 360°. Por lo tanto,

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con θ. Véase la figura 6.

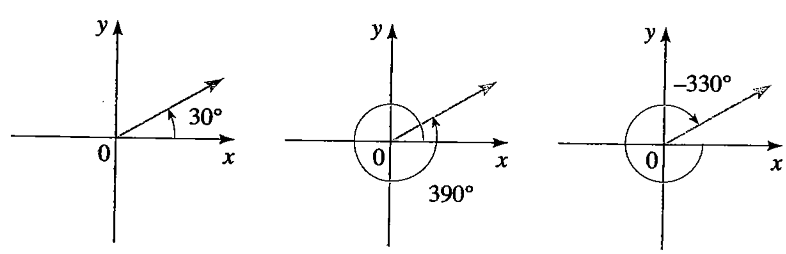


FIGURA 6

■

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

Un arco cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Por lo que, en un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende el ángulo θ (véase la figura 7) es

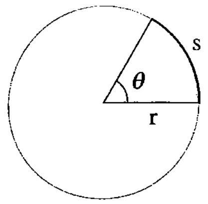


FIGURA 7
$s = \theta r$

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{(circunferencia del círculo)}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

En un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = \theta r$$

Al resolver en función de θ, obtenemos la siguiente fórmula

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$

que nos permite definir la medición en radianes usando un círculo de cualquier radio r: la medida en radianes de un ángulo θ es s/r, donde s es la longitud del arco del círculo de radio r que subtiende a θ (véase la figura 8).

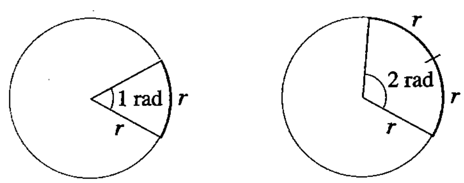


FIGURA 8
La medida en radianes de θ es el número de "radios" que contiene el arco que subtiende a θ; de ahí el término *radián*.

EJEMPLO 2 ■ Longitud del arco y medida del ángulo

(a) Encuentre la longitud del arco de un círculo con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.
(b) Un ángulo central θ en un círculo de radio igual a 4 m está subtendido por un arco de longitud igual a 6 m. Obtenga la medida de θ en radianes.

SOLUCIÓN

(a) $30° = \pi/6$ rad. Por lo que la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\,\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}$$

La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando θ está medido en radianes.

(b) Según la fórmula $\theta = s/r$, tenemos

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ rad}$$

■

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

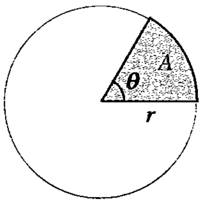


FIGURA 9
$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Un sector de este círculo con un ángulo central θ tiene un área que es la fracción $\theta/(2\pi)$ del área del círculo (véase la figura 9). Por lo que el área de este sector es

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{(área del círculo)}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2} r^2\theta$$

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

En un círculo de radio r, el área A de un sector con un ángulo central de θ radianes es

$$A = \tfrac{1}{2} r^2\theta$$

EJEMPLO 3 ■ Área de un sector

Determine el área de un sector de círculo con ángulo central de 60° si el radio del círculo es de 3 m.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula del área de un sector de círculo, debemos encontrar el valor en radianes del ángulo central del sector: $60° = 60(\pi/180)$ rad $= \pi/3$ rad. Entonces, el área del sector es

$$A = \frac{1}{2} r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} m^2$$ ■

La fórmula $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ es cierta sólo cuando θ está medido en radianes.

7.2 EJERCICIOS

1-6 ■ Determine la medida en radianes del ángulo con la medida dada en grados.

1. 40° **2.** 330° **3.** 72°

4. –30° **5.** 45° **6.** –80°

7-12 ■ Determine la medida en grados del ángulo con la medición dada en radianes.

7. $-\frac{7\pi}{2}$ **8.** $\frac{5\pi}{6}$ **9.** 2

10. 1.5 **11.** $\frac{2\pi}{9}$ **12.** $\frac{3\pi}{4}$

13-15 ■ Se da la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

13. $-\frac{\pi}{4}$ **14.** $\frac{11\pi}{6}$ **15.** 300°

16-19 ■ Se dan las medidas de dos ángulos en posición estándar. Determine si los ángulos son coterminales.

16. –30°, 330° **17.** 70°, 430°

18. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ **19.** 155°, 875°

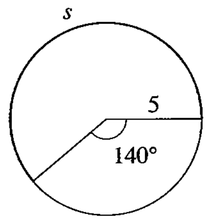
20-26 ■ Encuentre un ángulo entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo dado.

20. 361° **21.** 2223°

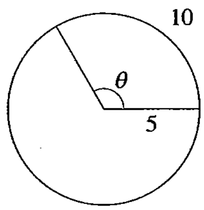
22. 1270° **23.** –800°

24. $\dfrac{12\pi}{5}$ **25.** 87π **26.** $-\dfrac{7\pi}{3}$

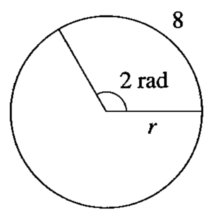
27. Determine la longitud s del arco de la figura.



28. Obtenga el ángulo θ de la figura.



29. Encuentre el radio r del círculo de la figura



30. Determine la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de 10 m de radio.

31. ¿Cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2 rad en un círculo de 2 millas?

32. Un ángulo central θ en un círculo de radio 5 m está subtendido por un arco de longitud de 6 m. Determine la medida de θ en grados y en radianes.

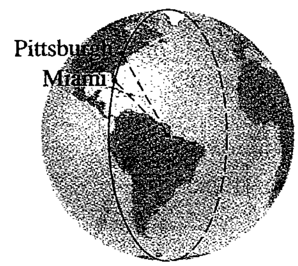
33. Un arco de 100 m de longitud subtiende un ángulo central θ en un círculo de 50 m de radio. Determine la medida de θ en grados y en radianes.

34. Un arco de círculo de longitud de 3 pies subtiende un ángulo central de 25°. Determine el radio del círculo.

35. Encuentre el radio del círculo si un arco de 6 m de longitud subtiende un ángulo central de $\pi/6$ rad.

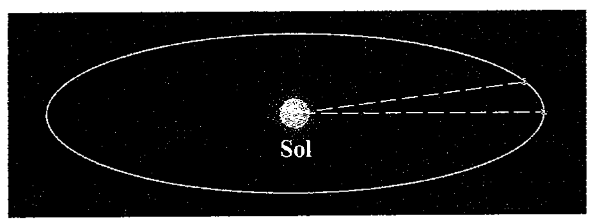
36. ¿Cuántos giros dará una rueda de automóvil de 30 pulgadas de diámetro al recorrer el vehículo una distancia de una milla?

37. Pittsburgh, Pennsylvania, y Miami, Florida, están aproximadamente sobre el mismo meridiano La latitud de Pittsburgh es 40.5°N y la de Miami es 25.5°N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3,960 millas.)

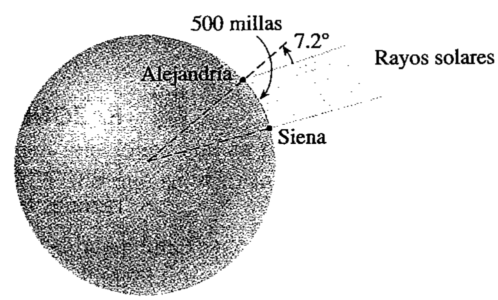


38. Memphis, Tennessee, y Nueva Orleans están aproximadamente sobre un mismo meridiano. La latitud de Memphis es 30° N y la de Nueva Orleans es 35°N. Determine la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3,960 millas.)

39. Determine la distancia que recorre la Tierra en un día en su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 días y que la órbita terrestre alrededor del Sol es un círculo con radio de 93 millones de millas. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es de hecho una *elipse* con el Sol en uno de sus focos. Sin embargo, esta elipse tiene una excentricidad muy reducida, por lo que es casi circular.]



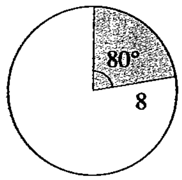
40. El matemático griego Eratóstenes (aprox. 276–195 a.C.) midió la circunferencia de la Tierra a partir de lo siguiente. Notó que cierto día que el Sol brillaba directamente hacia el interior de un pozo profundo en Siena (ahora Aswan), al mismo tiempo en Alejandría, 500 millas hacia el norte (sobre el mismo meridiano), los rayos del Sol brillaban haciendo un ángulo de 7.2° respecto al cenit. Utilice esta información y la figura para determinar el radio y la circunferencia de la Tierra. (Los datos usados en este problema tienen mayor precisión que los disponibles para Eratóstenes.)



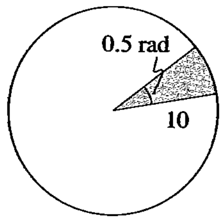
41. Determine la longitud de un arco sobre la superficie terrestre que subtiende un ángulo central de 1 minuto (1 minuto = $\frac{1}{60}$ de grado). Esta distancia se conoce como una *milla náutica*. (El radio de la Tierra es de 3,960 millas.)

42. Determine el área del sector mostrado en la figura.

(a)



(b)



43. Determine el área de un sector con un ángulo central de un rad en un círculo de radio de 10 m.

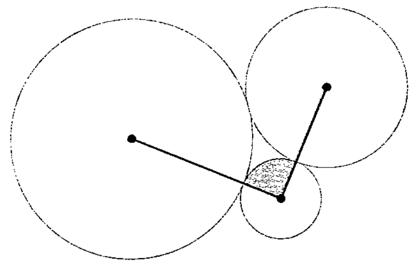
44. Un sector de círculo tiene un ángulo central de 60°. Determine el área del sector si el radio del círculo es de 3 millas.

45. El área de un sector de círculo con ángulo central de 2 rad es de 16 m^2. Determine el radio del círculo.

46. Un sector de círculo de radio 24 millas tiene un área de 288 millas^2. Determine el ángulo central del sector.

47. El área de un círculo es de 72 cm^2. Determine el área de un sector de este círculo que subtiende un ángulo central de $\pi/6$ rad.

48. Tres círculos de radios 1, 2 y 3 pies son tangentes externos entre sí, como se muestra en la figura. Determine el área del sector circular de radio 1 pie que está cortado por los segmentos de recta que unen el centro de dicho círculo con los centros de los otros dos.

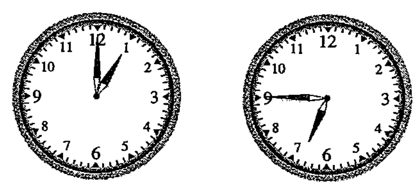


DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

49. Diferentes maneras de medir ángulos La costumbre de medir ángulos utilizando grados, 360° en un círculo, se remonta a la época de los babilonios, que usaban un sistema numérico sexagesimal. Otro sistema de medir los ángulos divide el círculo en 400 unidades, conocidas como *gradas*. En este sistema un ángulo recto tiene 100 *gradas*, por lo que se ajusta a nuestro sistema numérico de base 10.

Escriba un ensayo breve comparando las ventajas y desventajas de ambos sistemas, además del sistema de radianes para la medición de ángulos. ¿Cuál sistema prefiere?

50. Relojes y ángulos En una hora, el minutero de un reloj recorre un círculo completo, y la manecilla de las horas se habrá movido $\frac{1}{12}$ del círculo. ¿A través de cuántos radianes se habrán movido el minutero y la manecilla de las horas desde la 1:00 P.M. hasta las 6:45 P.M. (del mismo día)?



7.3 TRIGONOMETRÍA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En esta sección veremos ciertas razones entre los lados de los triángulos rectángulos, conocidas como razones trigonométricas, y daremos varias aplicaciones.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Considere un triángulo rectángulo que tiene θ como uno de sus ángulos agudos. Las razones trigonométricas se definen como sigue (véase la figura 1).

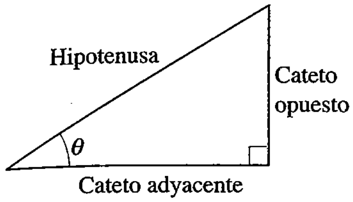


FIGURA 1

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

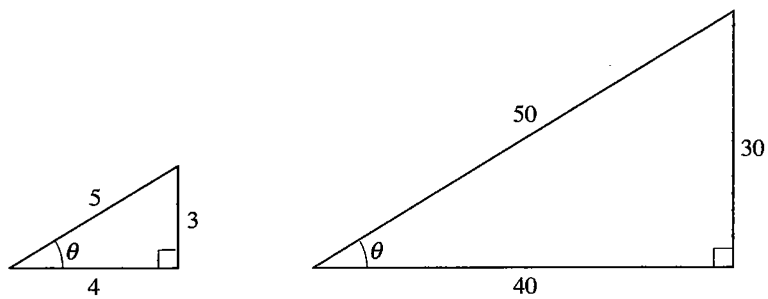
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Los símbolos que utilizamos para estas razones son abreviaturas de sus nombres completos: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cosecante**, **secante**, **cotangente**. Puesto que cualquier par de triángulos rectángulos con un ángulo θ son semejantes, estas razones son iguales, independientemente del tamaño del triángulo; sólo dependen del ángulo θ (véase la figura 2).

FIGURA 2



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

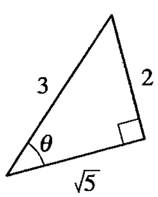


FIGURA 3

EJEMPLO 1 ■ Determinación de razones trigonométricas

Determine las seis razones trigonométricas del ángulo θ de la figura 3.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

■

TRIÁNGULOS ESPECIALES

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular con facilidad partiendo del teorema de Pitágoras. Dado que se utilizan con frecuencia, los mencionamos aquí.

El primer triángulo se obtiene al dibujar una diagonal en un cuadrado del lado 1 (véase la figura 4). Según el teorema de Pitágoras esta diagonal tiene una longitud igual

Hiparco (aprox. 140 a.C.) está considerado como el fundador de la trigonometría. Elaboró tablas para una función relacionada con la moderna función seno y la evaluó en ángulos a intervalos de medio grado. Están consideradas como las primeras tablas trigonométricas. Hiparco las utilizó principalmente para calcular las órbitas de los planetas a través del espacio.

a $\sqrt{2}$. El triángulo resultante tiene ángulos de 45°, 45° y 90° (o lo que es lo mismo, $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, partimos de un triángulo equilátero ABC de lado 2 y dibujamos la bisectriz perpendicular DB de la base, figura 5. Según el teorema de Pitágoras la longitud de DB es $\sqrt{3}$. En vista de que DB también es bisectriz del ángulo ABC, obtenemos un triángulo de ángulos 30°, 60° y 90° (o lo que es lo mismo, $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

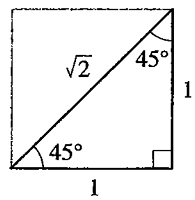


FIGURA 4

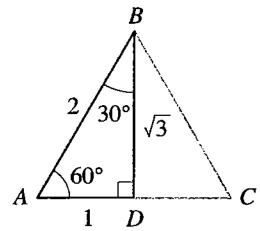


FIGURA 5

Ahora podemos utilizar los triángulos especiales de las figuras 4 y 5 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60° (o lo que es lo mismo, $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$). Estos valores se listan en la tabla 1.

Tabla 1 Valores de la relación trigonométrica para ángulos especiales.

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resulta útil recordar estas razones trigonométricas especiales, ya que se presentan a menudo. Naturalmente es fácil recordarlas si lo hacemos a partir de los triángulos de los cuales se obtienen.

Para determinar los valores de las razones trigonométricas para otros ángulos, utilizamos una calculadora. Los métodos matemáticos (conocidos como *métodos numéricos*) utilizados en la determinación de las razones trigonométricas están directamente programados en las calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se oprime la tecla $\boxed{\text{SIN}}$, la calculadora obtiene una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras dan los valores de seno, coseno y tangente; las demás relaciones se pueden calcular con facilidad a partir de éstas utilizando las *relaciones recíprocas* siguientes:

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Aristarco de Samos (310–230 a.C.) fue un famoso científico, músico, astrónomo y geómetra griego. En su libro *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna*, estimó la distancia al Sol observando que cuando la Luna está exactamente en medio creciente es el vértice del ángulo recto que forma con el Sol y la Tierra. Su método es similar al que se describe en el ejercicio 49 de esta sección. Aristarco fue el primero en sugerir la teoría de que la Tierra y los planetas giran alrededor del Sol, una idea que no tuvo plena aceptación hasta la época de Copérnico, 1,800 años después. Por esta razón, a menudo se lo conoce como "el Copérnico de la antigüedad".

Usted deberá verificar que estas relaciones se obtienen de manera inmediata a partir de las definiciones de las razones trigonométricas.

Convendremos en que el escribir sen *t significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es t*. Por ejemplo, sen 1 indica el seno del ángulo cuya medida en radianes es 1. Cuando utilice la calculadora para encontrar su valor aproximado, ponga su calculadora en modo radianes; encontrará que

$$\operatorname{sen} 1 \approx 0.841471$$

Si desea encontrar el seno del ángulo cuya medida es 1°, ponga su calculadora en el modo de grados; usted verá que

$$\operatorname{sen} 1° \approx 0.0174524$$

EJEMPLO 2 ■ Uso de calculadora para determinar razones trigonométricas

Con nuestra calculadora en el modo de grados y con los resultados correctos a cinco decimales, encontramos

$$\operatorname{sen} 17° \approx 0.29237 \qquad \sec 88° = \frac{1}{\cos 88°} \approx 28.65371$$

Con la calculadora en modo de radianes y con los resultados correctos a cinco decimales encontramos

$$\cos 1.2 \approx 0.36236 \qquad \cot 1.54 = \frac{1}{\tan 1.54} \approx 0.03081$$

■

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolverlo** significa determinar sus partes de la información conocida sobre el triángulo, esto es, encontrar la longitud de los tres lados y la medida de los tres ángulos.

La habilidad de resolver triángulos rectángulos utilizando relaciones trigonométricas es fundamental para muchos problemas de navegación, topografía, astronomía y la medición de distancias. Las aplicaciones que consideramos en esta sección siempre involucran triángulos rectángulos, pero como veremos en las siguientes secciones, la trigonometría también es útil en la resolución de triángulos que no son rectángulos.

Para analizar los siguientes ejemplos, necesitamos cierta terminología: si un observador está viendo un objeto, entonces la recta del ojo del observador hacia el objeto se conoce como **línea de visión** (véase la figura 6). Si el objeto que se está observando está por encima de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se conoce como **ángulo de elevación**. Si el objeto está por debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se conoce como **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, se darán ángulos de depresión y de elevación para un observador hipotético ubicado al nivel del piso. Si la línea de visión se refiere a un objeto físico, como un plano inclinado o la ladera de una colina, utilizamos el término **ángulo de inclinación**.

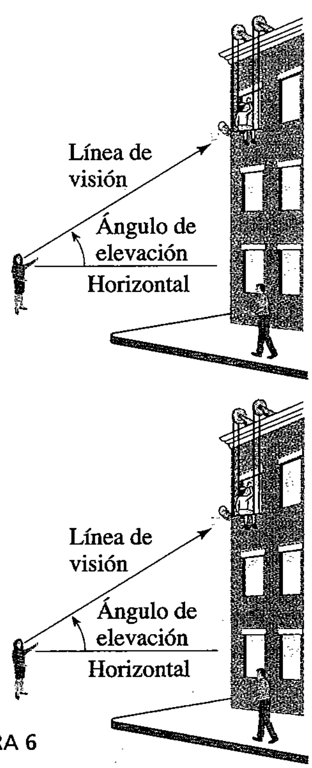


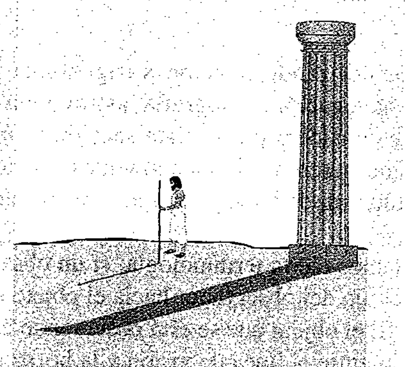
FIGURA 6

Tales de Mileto (circa 625–547 a.C.) es el legendario fundador de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega al comparar la longitud de la sombra de su bastón con la de la columna. Usando las propiedades de los triángulos semejantes, argumentó que la razón de la altura h de la columna y la altura h' de su bastón era igual a la razón de la longitud s de la sombra de la columna y la longitud s' de la sombra del bastón:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

En vista de que tres de estas cantidades son conocidas, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales usó un método similar para determinar la altura de la Gran Pirámide de Egipto, una hazaña que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aunque él (el rey de Egipto) lo admiraba (a Tales) debido a otras cosas, particularmente le agradaba la forma mediante la cual midió la altura de la pirámide sin ningún esfuerzo o instrumento". El principio utilizado por Tales, es decir, el hecho de que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, forma los fundamentos de la trigonometría.



El ejemplo que sigue da una aplicación importante de la trigonometría al problema de la medición: medimos la altura de un árbol alto ¡sin necesidad de subir a él! Aunque el ejemplo es simple, el resultado es fundamental para el método de aplicar las razones trigonométricas a ese tipo de problemas.

EJEMPLO 3 ■ Determinación de la altura de un árbol

Un pino gigante proyecta una sombra de 532 pies de largo. Determine la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es de 25.7°.

SOLUCIÓN Suponga que la altura del árbol es h. De la figura 7 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es de aproximadamente 256 pies.

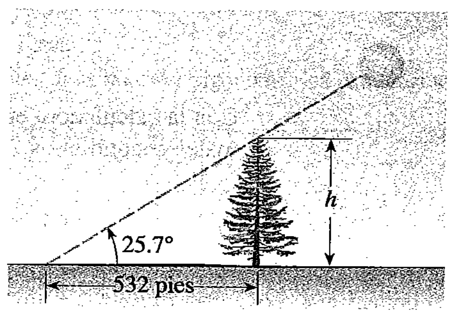


FIGURA 7 ■

EJEMPLO 4 ■ Un problema que involucra triángulos rectángulos

Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 24° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta de la bandera del edificio es de 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta de la bandera.

SOLUCIÓN La figura 8 ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra de la misma manera que se hizo para la altura del árbol del ejemplo 3.

$$\frac{h}{532} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

La altura del edificio es de aproximadamente 223 pies. Para determinar la altura del asta de la bandera, primero calculemos la altura desde el suelo hasta la parte superior del asta de la bandera

$$\frac{k}{500} = \tan 27°$$

$$k = 500 \tan 27° \approx 500(0.5095) \approx 255$$

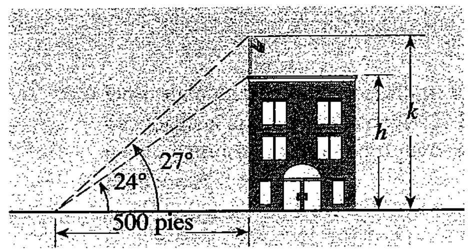


FIGURA 8

Para determinar la longitud del asta de la bandera restamos h de k. Por lo que la longitud del asta bandera es de, aproximadamente, $255 - 223 = 32$ pies. ■

En algunos problemas es necesario que determinemos un ángulo en un triángulo rectángulo cuyos lados se conocen. Para ello utilizamos la tabla 1 (página 394) "a la inversa"; esto es, encontramos el *ángulo* que tenga la razón trigonométrica especificada. Por ejemplo, si sen $\theta = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el ángulo θ? De la tabla 1 sabemos que $\theta = 30°$. Para determinar un ángulo cuyo seno no aparezca en la tabla utilizamos las teclas $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ o $\boxed{\text{ARCSIN}}$ de una calculadora. Por ejemplo, si sen $\theta = 0.8$, aplicamos la tecla $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ para obtener $\theta = 53.13°$, es decir, 0.927 rad. La calculadora también da los ángulos cuyo coseno o tangente son conocidos utilizando las teclas $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ o $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$.

Las etiquetas de teclas $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ significan "seno inverso".

EJEMPLO 5 ■ Resolución de un ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies de largo está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y el edificio?

SOLUCIÓN Primero dibujamos un diagrama como el de la figura 9. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\text{sen } \theta = \tfrac{6}{40} = 0.15$$

Por lo que θ es el ángulo cuyo seno es 0.15. Para determinar el ángulo θ utilizamos una calculadora y la tecla $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$. Con nuestra calculadora en el modo de grados obtenemos

$$\theta \approx 8.6°$$

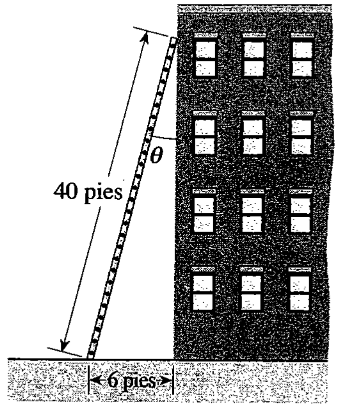
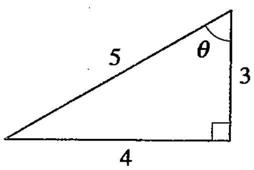


FIGURA 9

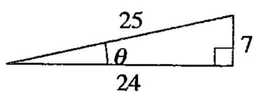
7.3 EJERCICIOS

1-4 ■ Determine los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo que se muestra.

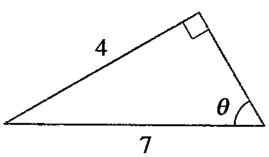
1.



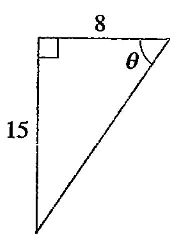
2.



3.

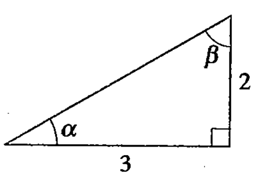


4.

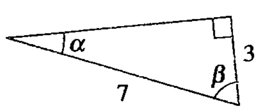


5-6 ■ Determine (a) sen α y cos β, (b) tan α y cot β y (c) sec α y csc β

5.

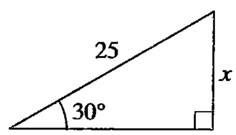


6.

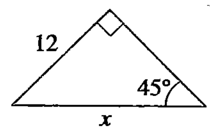


7-12 ■ Determine el lado marcado como x y dé su respuesta correcta a 5 decimales.

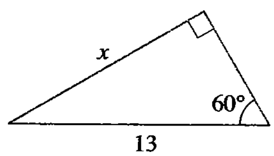
7.



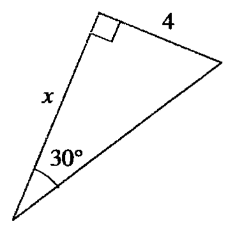
8.



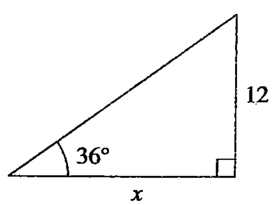
9.



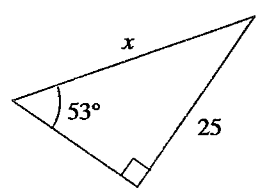
10.



11.

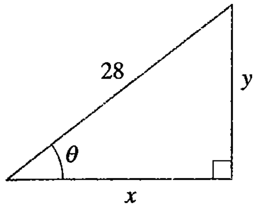


12.

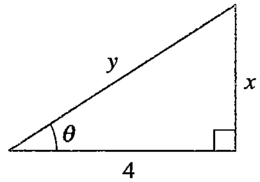


13-14 ■ Exprese a x y a y en función de las razones trigonométricas de θ.

13.



14.



15-20 ■ Dibuje un triángulo que tiene un ángulo agudo θ y encuentre las otras 5 razones trigonométricas de θ.

15. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$

16. $\cos \theta = \frac{2}{7}$

17. $\cot \theta = 1$

18. $\tan \theta = \sqrt{3}$

19. $\sec \theta = 7$

20. $\csc \theta = \frac{13}{12}$

21-26 ■ Evalúe la expresión.

21. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} + \cos \dfrac{\pi}{6}$

22. $\operatorname{sen} 30° \csc 30°$

23. $\operatorname{sen} 30° \cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cos 30°$

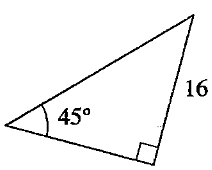
24. $(\operatorname{sen} 60°)^2 + (\cos 60°)^2$

25. $(\cos 30°)^2 - (\operatorname{sen} 30°)^2$

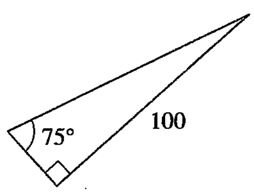
26. $\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} \cos \dfrac{\pi}{3}\right)^2$

27-30 ■ Resuelva el triángulo rectángulo.

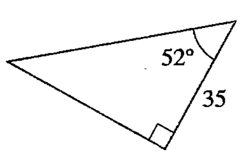
27.



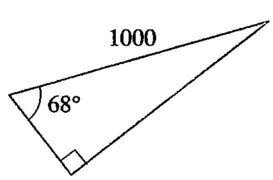
28.



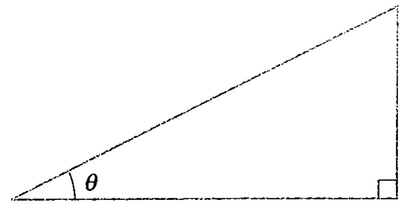
29.



30.



31. Utilice una regla para medir cuidadosamente los lados del triángulo y después utilice sus medidas para estimar las seis razones trigonométricas de θ.



32. Utilizando un transportador, dibuje un triángulo rectángulo que tenga el ángulo agudo de 40°. Mida los lados cuidadosamente y utilice sus resultados para estimar las seis razones trigonométricas de 40°.

33. El ángulo de elevación a la parte superior del Empire State de Nueva York, desde una distancia de una milla de la base del edificio, se ha determinado que es de 11° sobre el nivel del piso. Utilizando esta información determine la altura del Empire State.

34. Un aeroplano que está volando a una altura de 35,000 pies tiene a la vista el Arco Gateway, en St. Louis Missouri. El piloto desearía estimar a qué distancia está del Arco de Gateway. Encuentra que el ángulo de depresión respecto a un punto sobre la Tierra debajo del arco es de 22°.
(a) ¿Cuál es la distancia entre el aeroplano y el arco?
(b) ¿Cuál es la distancia entre un punto sobre la Tierra directamente por debajo del aeroplano y el arco?

35. Un rayo láser debe ser dirigido hacia el centro de la Luna pero el rayo se desvía 0.5 grados de su trayectoria.
(a) ¿Cuánto se ha desviado de su objetivo cuando llegue a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas.)
(b) El radio de la Luna es de aproximadamente 1,000 millas. ¿Impactará el rayo sobre la Luna?

36. Desde la parte superior de un faro de 200 pies de altura, el ángulo de depresión hasta una barco sobre el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco de la base del faro?

37. Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio, de tal manera que el ángulo entre el piso y la escalera es de 72°. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre el edificio?

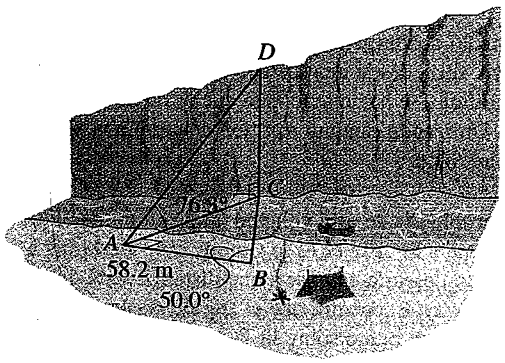
38. Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿Qué altura alcanza la escalera sobre el edificio?

39. Un árbol de 96 pies proyecta una sombra de 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

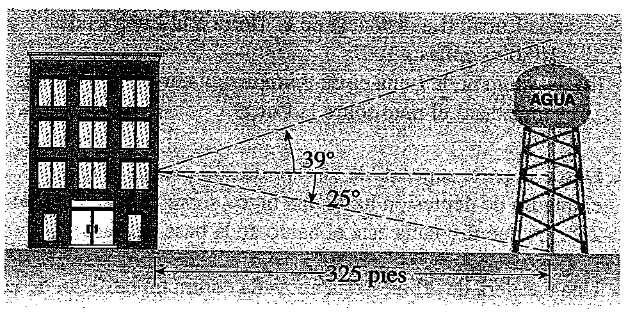
40. Un cable guía de 600 pies está sujeto a la parte superior de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con la Tierra ¿Cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

41. Un hombre está tendido sobre la playa haciendo volar una cometa. Sujeta el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del piso y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la longitud de la cuerda es de 450 pies, ¿a qué altura está volando la cometa sobre el nivel del piso?

42. Se debe medir la altura de un acantilado a partir de un punto del lado opuesto del río. Determine la altura del acantilado partiendo de la información que se da en la figura.



43. Un depósito de agua está a 325 pies de un edificio (véase la figura). Desde una ventana del edificio se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del depósito es de 39° y el ángulo de depresión a la parte inferior es de 25°. ¿Cuál es la altura del depósito? ¿A qué altura está la ventana?



44. Un aeroplano vuela a una altura de 5,150 pies directamente por encima de una carretera recta. Dos automovilistas están manejando automóviles sobre la carretera en lados opuestos del aeroplano. Si el ángulo de depresión de un automóvil es de 35° y de 52° el del otro, ¿a qué distancia están los automóviles entre sí?

45. Si ambos automóviles del ejercicio 44 están a un solo lado del aeroplano y si el ángulo de depresión a uno de ellos es de 38° y al otro de 52°, ¿a qué distancia están entre sí los automóviles?

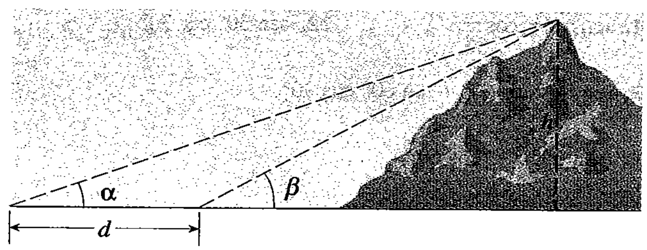
46. Un globo de aire caliente flota por encima de una carretera recta. Para calcular su altura sobre el nivel del piso, los aeronautas miden simultáneamente el ángulo de depresión a 2 postes consecutivos de marcaje de kilómetros sobre la carretera del mismo lado del globo. Los ángulos de depresión encontrados son 20° y 22°. ¿A qué altura está el globo?

47. Para estimar la altura de una montaña sobre una llanura, se encuentra que el ángulo de elevación a la cima de la montaña es de 32°. Mil pies más cerca de la montaña sobre la llanura se determina que el ángulo de elevación es de 35°. Estime la altura de la montaña.

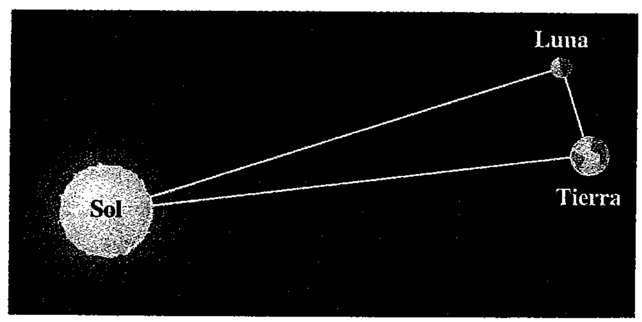
48. (a) Demuestre que la altura h de la montaña de la figura está dada por

$$h = d\,\frac{\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = \frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$$

(b) Utilice la fórmula del inciso (a) para determinar la altura h de la montaña si $\alpha \approx 25°$, $\beta \approx 29°$ y $d \approx 800$ pies.

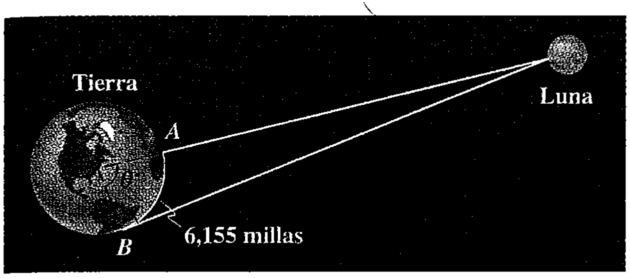


49. Cuando la Luna está exactamente en medio creciente, la Tierra, la Luna y el Sol forman un triángulo rectángulo (véase la figura). En ese momento el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna se mide y es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.

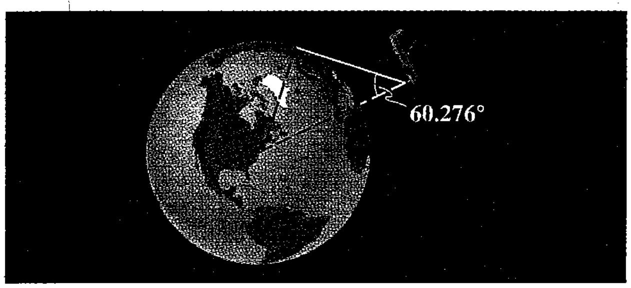


50. Para determinar la distancia al Sol como en el ejercicio 49, fue necesario saber la distancia a la Luna. Existe una forma de estimar dicha distancia. Cuando la Luna está en el cenit en un punto A de la Tierra, se la ve en el horizonte desde el punto B (véase la figura). Los puntos A y B están separados 6,155 millas y el radio de la Tierra es de 3,960 millas.

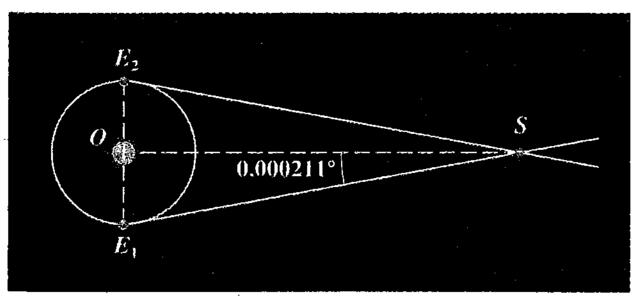
(a) Determine el ángulo θ en grados.
(b) Estime la distancia del punto A a la Luna



51. En el ejercicio 40 de la sección 7.2 se dio un método para determinar el radio de la Tierra. A continuación damos un método más moderno para ello: de un satélite que está 600 millas por encima de la Tierra se observa que el ángulo formado por la vertical y la línea de visión al horizonte es de 60.276°. Utilice esta información para determinar el radio de la Tierra.

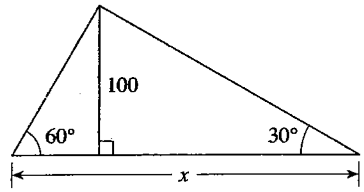


52. Para determinar la distancia a estrellas cercanas, se utiliza el método del paralaje. La idea es determinar un triángulo con la estrella en uno de los vértices y con una base lo más grande posible. Para lo anterior se observa la estrella en dos momentos diferentes exactamente a 6 meses el uno del otro, y se registra su cambio de posición aparente. De estas dos observaciones se puede calcular $\angle E_1 SE_2$ (se seleccionan los tiempos de tal manera que $\angle E_1 SE_2$ sea lo más grande posible, lo que garantiza que $\angle E_1 OS$ sea de 90°). El ángulo E_1SO se conoce como el *paralaje* de la estrella. Alfa Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211°. Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como de 9.3×10^7 millas.)

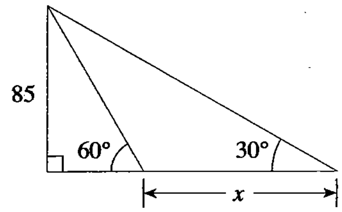


53-56 ■ Determine x correcta a 1 decimal.

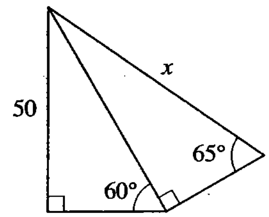
53.



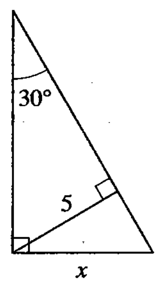
54.



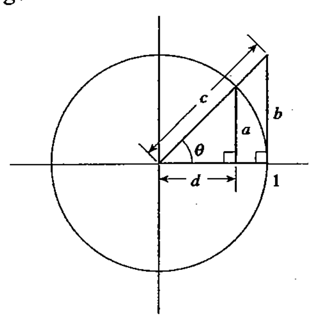
55.



56.



57. Exprese las longitudes a, b, c, y d de la figura en términos de razones trigonométricas de θ.



DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

58. Triángulos semejantes Si dos triángulos son semejantes, ¿qué propiedades comparten? Explique la forma en que estas propiedades justifican la definición de las razones trigonométricas, independientemente del tamaño del triángulo.

7.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección utilizaremos las propiedades del círculo unitario para definir ciertas funciones de números reales: las funciones trigonométricas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Recuerde que para determinar el punto terminal $P(x,y)$ para un número real dado t, nos movemos una distancia t a lo largo del círculo unitario, partiendo del punto $(1,0)$. Nos movemos en dirección contraria a las manecillas del reloj si t es positivo y en dirección de las manecillas del reloj si t es negativo (véase la figura 1). Ahora usamos las coordenadas x y y del punto $P(x,y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* asignando a cada número real t la coordenada y del punto terminal $P(x,y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen utilizando las coordenadas de $P(x,y)$.

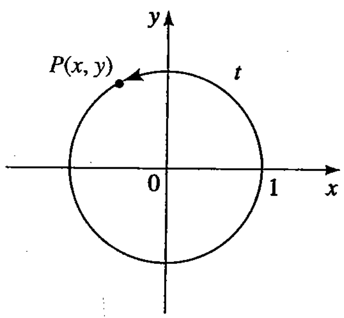


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Supongamos que t es cualquier número real y que $P(x,y)$ es el punto terminal en el círculo unitario determinado por t. Definimos

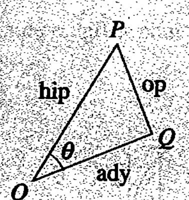
$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

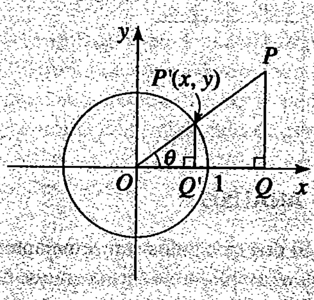
$$\csc t = \frac{1}{y}\ (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x}\ (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

Dado que las funciones trigonométricas pueden definirse en términos del círculo unitario, a veces se las llama **funciones circulares**.

Relación de los triángulos rectángulos con la trigonometría

Si en el pasado ha estudiado la trigonometría de los triángulos rectángulos, probablemente se preguntará de qué forma se relacionan el seno y coseno de un *ángulo* con lo explicado en esta sección. Las siguientes figuras muestran cómo es esta relación.





(continúa)

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de funciones trigonométricas

Determine los valores de las seis funciones trigonométricas del siguiente valor de t.

$$t = \frac{\pi}{3}$$

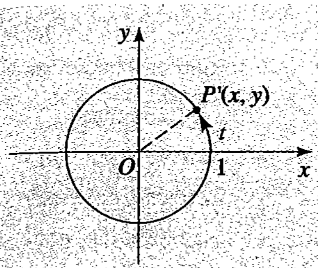
SOLUCIÓN

El punto terminal determinado por $t = \pi/3$ es $P(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. Puesto que las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, tenemos que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

En la tabla 1 se listan algunos valores especiales de las funciones trigonométricas. Esta tabla se obtiene con facilidad a partir de la tabla 1 de la sección 7.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.



Según la definición de triángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ está medido en radianes, entonces $\theta = t$ y podemos escribir

$$\operatorname{sen} t = y$$
$$\cos t = x$$

Éstas son precisamente las definiciones de esta sección, por lo que ambas dan valores idénticos.

¿Por qué entonces estudiar la trigonometría de dos formas distintas? Porque diferentes aplicaciones requieren visualizar las funciones trigonométricas de manera distinta.

Tabla 1 Valores especiales de las funciones trigonométricas

t	**sen t**	**cos t**	**tan t**	**csc t**	**sec t**	**cot t**
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

Algunas funciones trigonométricas no pueden definirse para ciertos números reales. Por esto necesitamos determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Puesto que las funciones cotangente y cosecante incluyen a y en el denominador de sus definiciones, no quedan definidas cuando la coordenada y del punto terminal $P(x,y)$ determinado por t es 0. Esto ocurre cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, por lo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante incluyen a x en el denominador de sus definiciones, por lo que no están definidas cuando $x = 0$, lo cual sucede cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

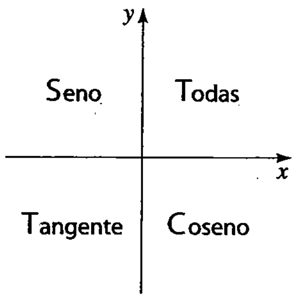
DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función	Dominio
sen, cos	Todos los números reales
tan, sec	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n.
cot, csc	Todos los números reales diferentes de $n\pi$ para cualquier entero n.

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el cual está el punto terminal de t. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x,y)$ determinado por t se encuentra en el cuadrante III, entonces sus dos coordenadas son negativas. Por lo que sen t, cos t, csc t y sec t son todas negativas, en tanto que tan t y cot t son positivas. Puede verificar los demás valores del recuadro siguiente.

El siguiente recurso puede ser de utilidad para recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante: todas, seno, tangente o coseno.



SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguno
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

EJEMPLO 2 ■ Determinación del signo de una función trigonométrica

(a) $\cos\dfrac{\pi}{3} > 0$, puesto que el punto terminal de $t = \dfrac{\pi}{3}$ está en el cuadrante I.

(b) $\tan 4 > 0$, puesto que el punto terminal de $t = 4$ está en el cuadrante III.

(c) Si $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$, entonces t debe estar en el cuadrante II. ■

En la sección 7.1 utilizamos el número de referencia para obtener el punto terminal determinado por un número real t. Puesto que las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de los puntos terminales, podemos usar el número de referencia para obtener valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia correspondiente a t. Entonces el punto terminal de $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente por el signo del punto terminal de t. Así, los valores de las funciones trigonométricas en t son los mismos, excepto posiblemente por su signo, que en $\bar{t}$. En el siguiente ejemplo ilustramos el procedimiento.

EJEMPLO 3 ■ Evaluación de funciones trigonométricas

Determine el valor de:

$$\cos\frac{2\pi}{3}$$

SOLUCIÓN

El número de referencia correspondiente a $2\pi/3$ es $\pi/3$. Puesto que $2\pi/3$ está en el cuadrante II, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Por lo tanto.

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \underbrace{-}_{\text{signo}}\cos\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\text{número de referencia}} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{de la tabla 1}}$$

■

Hasta ahora hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de t. De hecho, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas siempre que t sea un múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. Pero ¿cómo determinar, por ejemplo, sen 1.5? Una forma sería dibujar un diagrama cuidadosamente y leer el valor; sin embargo, este método no es muy preciso. Afortunadamente, en las calculadoras científicas están incluidos programas matemáticos (conocidos como *métodos numéricos*) que determinan los valores de *seno, coseno* y *tangente* correctos hasta el número de dígitos mostrados. La calculadora debe estar en *modo de radianes* para evaluar estas funciones. Para obtener los valores de cosecante, secante y cotangente

Los métodos numéricos son formas de obtener aproximaciones de los valores de las funciones. Puesto que los valores de los polinomios son fáciles de calcular, resulta útil expresar las funciones cuya aproximación deseamos conocer en función de polinomios. Por ejemplo, utilizando el cálculo se puede demostrar que

$$\text{sen } t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (por ejemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). Estas fórmulas notables fueron demostradas por el matemático inglés Brook Taylor (1685–1731). Mientras más términos de la serie usemos del lado derecho de estas fórmulas, más precisos serán los valores obtenidos para sen t y cos t. Por ejemplo, si utilizamos los primeros tres términos de la serie de Taylor para determinar sen 0.9, obtenemos

$$\text{sen } 0.9 \approx 0.9 - \frac{(0.9)^3}{3!} + \frac{(0.9)^5}{5!} \approx 0.78342075$$

(Compare lo anterior con el valor que obtiene utilizando su calculadora.) Fórmulas como las anteriores están programadas en su calculadora, que las utiliza para calcular funciones como sen t, cos t, e^t y log t. La calculadora utiliza suficientes términos para asegurar que todos los dígitos mostrados sean exactos.

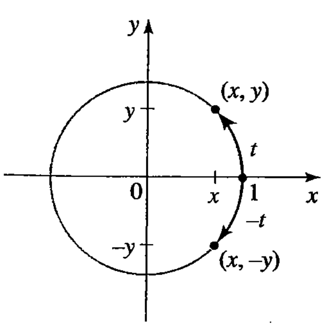


FIGURA 2

usando la calculadora, es necesario que utilicemos las siguientes *relaciones recíprocas*:

Estas identidades son consecuencia de las definiciones de las funciones trigono-

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen } t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

métricas. Por ejemplo, en vista de que sen $t = y$ y csc $t = 1/y$, tenemos que csc $t = 1/y = 1/$(sen t). Los demás se deducen de manera similar.

EJEMPLO 4 ■ Uso de la calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurándonos de que nuestra calculadora está en modo de radianes y redondeando los resultados a seis decimales, obtenemos

(a) $\text{sen } 2.2 \approx 0.808496$

(b) $\cos 1.1 \approx 0.453596$

(c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$

(d) $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\text{sen } 0.98} \approx 1.204098$ ■

Veamos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. De la figura 2 tenemos que

$$\text{sen}(-t) = -y = -\text{sen } t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas ecuaciones muestran que el seno y la tangente son funciones impares, en tanto que el coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y que la recíproca de una función impar es impar. Este hecho, junto con las relaciones recíprocas, completan nuestros conocimientos sobre las propiedades pares-impares de todas las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 5 ■ Funciones trigonométricas pares e impares

PROPIEDADES PARES E IMPARES

El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares; el coseno y la secante son funciones pares.

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen } t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

Use las propiedades par-impar de las funciones trigonométricas para determinar cada uno de los valores siguientes.

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN Según las propiedades par e impar y la tabla 1, tenemos

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

(b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ■

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Las funciones trigonométricas están relacionadas mediante ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. En el recuadro siguiente se dan las más importantes.*

■ **Demostración.** Las identidades recíprocas son consecuencia inmediata de

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

la definición de la página 402. Ahora demostraremos las identidades pitagóricas. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x e y son las coordenadas de un punto $P(x,y)$ en el círculo unitario. Dado que $P(x,y)$ está en el círculo unitario, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por lo que

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre y cuando $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

*Seguimos la regla convencional de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ en lugar de $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ en lugar de $(\operatorname{sen} t)^n$ para todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le dará otro significado. Naturalmente, esta misma regla convencional se aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

$$\left(\frac{\text{sen } t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas sen t/cos t = tan t y 1/cos t = sec t. De manera similar, dividiendo ambos lados de la primera identidad pitagórica entre sen^2 t (siempre y cuando sen $t \neq 0$), obtenemos $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.

Como su nombre indica, las identidades son fundamentales en la trigonometría. Esto se debe a que pueden utilizarse para relacionar cualquier función trigonométrica con alguna otra. Por lo tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, entonces podemos determinar los valores de todas las demás en t.

EJEMPLO 6 ■ Determinación de todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuadrante IV, determine los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN De las identidades pitagóricas tenemos

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\text{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituyendo } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\text{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{2} \qquad \text{Resuelva para sen}^2 t.$$

$$\text{sen } t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Extraiga las raíces cuadradas}$$

Dado que este punto está en el cuadrante IV, sen t es negativo y sen $t = -\frac{4}{5}$. Ahora que ya conocemos sen t y cos t, podemos determinar los valores de las demás funciones trigonométricas utilizando las identidades recíprocas:

$$\text{sen } t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\text{sen } t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen } t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

■

7.4 EJERCICIOS

1-16 ■ Determine el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

1. (a) sen 0 (b) cos 0

2. (a) sen π (b) cos π

3. (a) $\cos \frac{\pi}{6}$ (b) $\cos \frac{5\pi}{6}$

4. (a) $\text{sen } \frac{\pi}{2}$ (b) $\text{sen } \frac{3\pi}{2}$

5. (a) $\cos \frac{\pi}{2}$ (b) $\cos \frac{5\pi}{2}$

6. (a) $\text{sen } \frac{5\pi}{6}$ (b) $\sec \frac{5\pi}{6}$

7. (a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4}$ (b) $\cos \frac{3\pi}{4}$

8. (a) $\cos \frac{\pi}{3}$ (b) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

9. (a) $\tan \frac{\pi}{6}$ (b) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

10. (a) $\tan \dfrac{\pi}{3}$ (b) $\cot \dfrac{\pi}{3}$

11. (a) $\sec \dfrac{11\pi}{3}$ (b) $\csc \dfrac{11\pi}{3}$

12. (a) $\sec \dfrac{13\pi}{6}$ (b) $\sec\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)$

13. (a) $\operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{4}$ (b) $\csc \dfrac{9\pi}{4}$

14. (a) $\sec \pi$ (b) $\csc \dfrac{\pi}{2}$

15. (a) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (b) $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

16. (a) $\tan \dfrac{3\pi}{4}$ (b) $\tan \dfrac{11\pi}{4}$

17-20 ■ Determine el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas (si están definidas), en el número real dado t. Utilice sus respuestas para completar la tabla.

17. $t = 0$ **18.** $t = \dfrac{\pi}{2}$

19. $t = \pi$ **20.** $t = \dfrac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinidos		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinidos
$\frac{3\pi}{2}$						

21-28 ■ El punto terminal $P(x,y)$ determinado por t se da a continuación. Obtenga sen t, cos t y tan t.

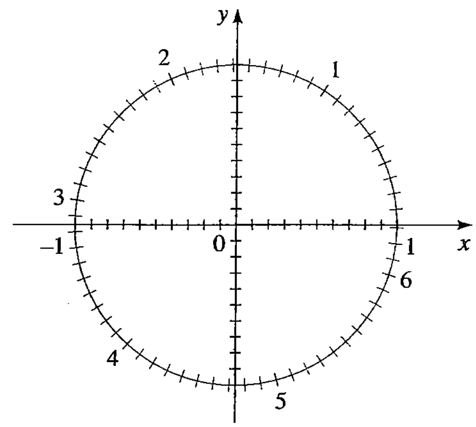
21. $t\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ **22.** $\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

23. $\left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **24.** $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

25. $\left(\dfrac{40}{41}, \dfrac{9}{41}\right)$ **26.** $\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

27. $\left(-\dfrac{5}{13}, -\dfrac{12}{13}\right)$ **28.** $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

29-36 ■ Obtenga el valor aproximado de la función trigonométrica dada utilizando (a) la figura y (b) una calculadora. Compare ambos valores.



29. sen 1 **30.** cos 0.8

31. sen 1.2 **32.** cos 5

33. tan 0.8 **34.** tan(−1.3)

35. cos 4.1 **36.** sen(−5.2)

37-40 ■ Determine el signo de la expresión si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

37. $\tan t \cos t$, t en el cuadrante II

38. $\operatorname{sen}^2 t \cos t$ t en el cuadrante IV

39. $\dfrac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$ t en el cuadrante III

40. $\cos t \sec t$, t en cualquier cuadrante

41-44 ■ De la información que se le da, especifique el cuadrante en el cual está el punto terminal determinado por t.

41. $\operatorname{sen} t > 0$ y $\cos t < 0$ **42.** $\tan t > 0$ y $\operatorname{sen} t < 0$

43. $\csc t > 0$ y $\sec t < 0$ **44.** $\cos t < 0$ y $\cot t < 0$

45-49 ■ Escriba la primera expresión en función de la segunda, tomando en consideración que el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

45. sen t, cos t; t en el cuadrante II

46. cos t, sen t; t en el cuadrante IV

47. sen t, sec t; t en el cuadrante IV

48. $\tan^2 t$, sen t; t en cualquier cuadrante

49. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos t; t en cualquier cuadrante

50-57 ■ A partir de la información dada determine los valores de las funciones trigonométricas de t.

50. $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$, t en el cuadrante II

51. $\cos t = -\frac{4}{5}$, t en el cuadrante III

52. $\tan t = -\frac{3}{4}$, $\cos t > 0$

53. $\sec t = 3$, t en el cuadrante IV

54. $\sec t = 2$, $\operatorname{sen} t < 0$

55. $\tan t = \frac{1}{4}$, t en el cuadrante III

56. $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{4}$, $\sec t < 0$

57. $\tan t = -4$, t en el cuadrante II

58-65 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de ellas.

58. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$	**59.** $f(x) = x^2 \cos 2x$
60. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$	**61.** $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$
62. $f(x) = \lvert x \rvert \cos x$	**63.** $f(x) = x \operatorname{sen} x$
64. $f(x) = x^3 + \cos x$	**65.** $f(x) = \cos(\sin x)$

7.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

En la sección 7.3 definimos las razones trigonométricas para los ángulos agudos. Aquí ampliamos las razones trigonométricas para todos los ángulos al definir las funciones trigonométricas de los ángulos. Con éstas podemos resolver problemas prácticos con ángulos que no necesariamente son agudos.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

Supongamos que POQ es un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ, como se muestra en la figura 1(a). Coloque a θ en su posición estándar según se observa en la figura 1(b).

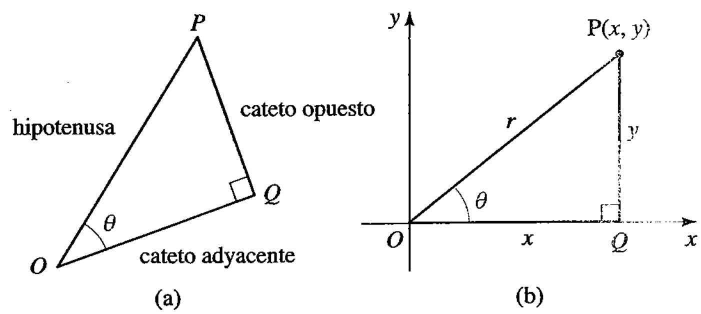


FIGURA 1

Entonces $P = P(x,y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el cateto opuesto tiene una longitud y y el adyacente x. Utilizando el teorema de Pitágoras vemos que la hipotenusa tiene una longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos \theta = \frac{x}{r},$$

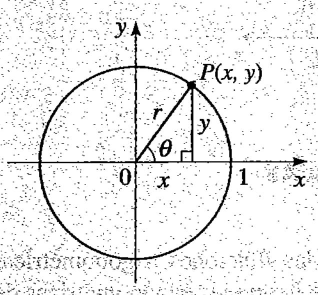
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las demás relaciones trigonométricas se determinan de la misma manera.

Relaciones con las funciones trigonométricas de números reales

Quizá ya estudió las funciones trigonométricas definidas utilizando el círculo unitario. A continuación mostramos cómo se relacionan con las funciones trigonométricas de ángulos.

Supongamos que θ es un ángulo en posición estándar y que seleccionamos el punto $P(x,y)$ del lado terminal de tal manera que su distancia r al origen sea 1, tal como se muestra

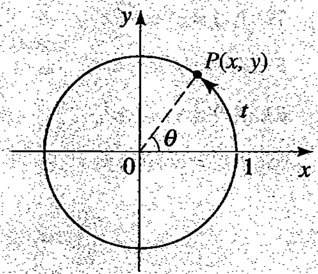


Según la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ, tenemos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{1} = y \qquad \cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

(continúa)

Por otra parte $P(x, y)$ es también el punto terminal de un arco de longitud t.



De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \quad \text{y} \quad \cos t = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. Comparando las dos maneras de definir las funciones trigonométricas, vemos que dan valores idénticos. En otras palabras, consideradas como funciones asignan valores idénticos a un número real dado (el número real es la medición en radianes de θ en un caso o la longitud t de un arco de círculo en el otro).

Estas observaciones nos permiten ampliar la definición de las razones trigonométricas a cualquier tipo de ángulo. Empezamos definiendo las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (véase la figura 2).

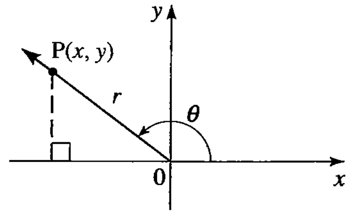


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

Suponga que θ es un ángulo en posición estándar y que $P(x,y)$ es un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x,y)$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Es un hecho vital que los valores de las funciones trigonométricas *no* dependen de la elección del punto $P(x,y)$. Esto se debe a que si $P'(x',y')$ es cualquier otro punto del lado terminal, como se ve en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son triángulos semejantes.

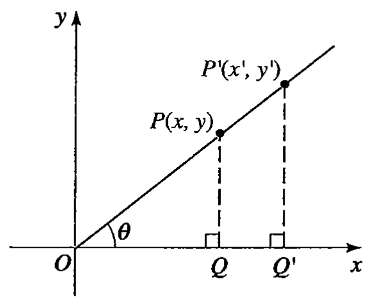
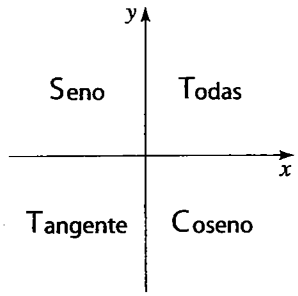


FIGURA 3

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

Del mismo modo que se definieron los signos de las funciones trigonométricas de números reales, este cuadro muestra los signos de las funciones trigonométricas de los distintos ángulos.

Se puede utilizar el siguiente recurso mnemónico para recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante: **t**odas, **s**eno, **t**angente o **c**oseno.



SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	Todas	Ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec,	sen, csc, tan, cot

Dado que la división entre 0 es una operación indefinida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, tan $90° = y/x$ es indefinida porque $x = 0$. Los ángulos donde las funciones trigonométricas pueden estar indefinidas son aquellos ángulos cuya coordenada x o y de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Éstos son los **ángulos cuadrantales** —ángulos que son coterminales con los ejes de coordenadas—.

Ahora ponemos nuestra atención en obtener los valores de funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

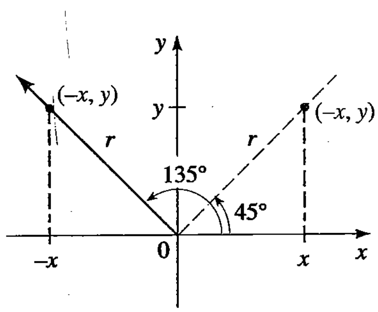


FIGURA 4

EJEMPLO 1 ■ Determinación de las funciones trigonométricas de ángulos

Determine (a) cos 135° y (b) tan 390°.

SOLUCIÓN

(a) De la figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$ y puesto que $\cos 45° = \sqrt{2}/2$, tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

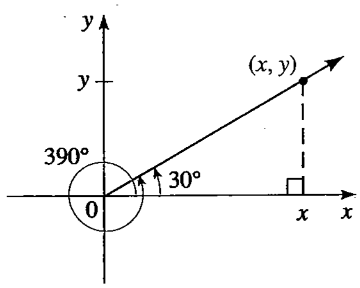


FIGURA 5

(b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la figura 5 está claro que $\tan 390° = \tan 30°$ y en vista de que $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ ■

Del ejemplo 1 vemos que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor a excepción quizá del signo a las funciones trigonométricas correspondientes de un ángulo agudo. Dicho ángulo agudo se conocerá como *ángulo de referencia*.

ÁNGULO DE REFERENCIA

Suponga que θ es un ángulo en posición estándar, el **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ asociado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La figura 6 muestra que para determinar un ángulo de referencia es útil conocer el cuadrante donde se presenta el lado terminal del ángulo.

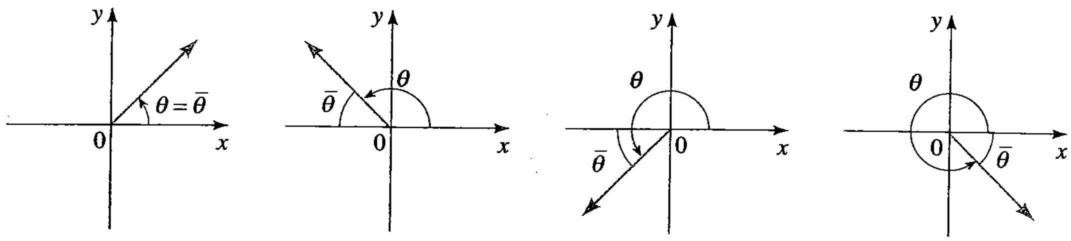


FIGURA 6
Ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo θ

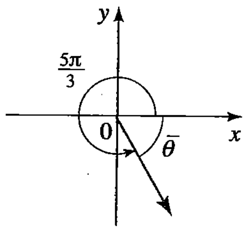


FIGURA 7

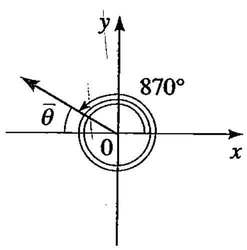


FIGURA 8

EJEMPLO 2 ■ Determinación de ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para (a) $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y (b) $\theta = 870°$.

SOLUCIÓN

(a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (véase la figura 7). Puesto que el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante IV, el ángulo de referencia es

$$2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

(b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Así, el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante II (véase la figura 8). De este modo el ángulo de referencia es

$$180° - 150° = 30°$$ ■

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

Para determinar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo θ, efectuamos los pasos siguientes:

1. Determinamos el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ asociado con el ángulo θ.

2. Determinamos el signo de la función trigonométrica de θ.

3. El valor de la función trigonométrica de θ es la misma, a excepción quizá del signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

EJEMPLO 3 ■ Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Determine (a) sen 240° y (b) cot 495°

SOLUCIÓN

(a) Este ángulo tiene su lado terminal en el cuadrante III, como se observa en la figura 9. El ángulo de referencia es, por tanto, $240° - 180° = 60°$, y el valor de sen 240° es negativo. Entonces,

$$\operatorname{sen} 240° = \underset{\text{signo}}{-} \underset{\text{ángulo de referencia}}{\operatorname{sen} 60°} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

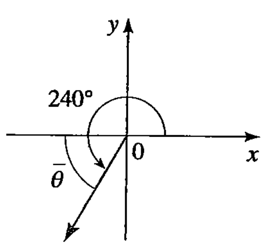


FIGURA 9
S|A T|C sen 240° *es negativo*

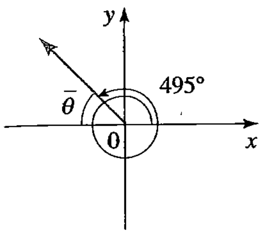


FIGURA 10

S|A T|C tan 495° *es negativa, por lo que* cot 495° *es negativa*

(b) El ángulo de 495° es coterminal con el ángulo de 135°, y el lado terminal de este ángulo aparece en el cuadrante II, como se observa en la figura 10. Por lo que el ángulo de referencia es 180° – 135° = 45° y el valor de cot 495° es negativo. Tenemos

$$\underbrace{\cot 495° = \cot 135°}_{\text{ángulos coterminales}} \underbrace{=-}_{\text{signo}} \underbrace{\cot 45°}_{\text{ángulo de referencia}} = -1$$

■

EJEMPLO 4 ■ Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Determine $\operatorname{sen} \dfrac{16\pi}{3}$.

SOLUCIÓN

El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$ y estos ángulos están en el cuadrante III (véase la figura 11). Así, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Dado que el valor del seno es negativo en el cuadrante III, tenemos

$$\underbrace{\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{14\pi}{3}}_{\text{ángulos coterminales}} \underbrace{= -}_{\text{signo}} \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}_{\text{ángulo de referencia}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

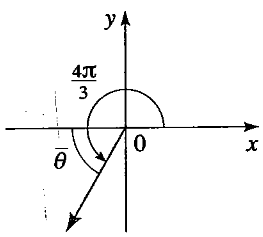


FIGURA 11

S|A T|C sen $\frac{16\pi}{3}$ *es negativo*

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí a través de varias ecuaciones importantes conocidas como **identidades trigonométricas**. Ya hemos visto las identidades recíprocas. Éstas siguen siendo válidas para cualquier ángulo θ, siempre y cuando ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades pitagóricas son consecuencia del teorema de Pitágoras*.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

*Seguimos la regla convencional usual de escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ en lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n\theta$ en lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^n$ para todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado. Naturalmente, la misma regla se aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

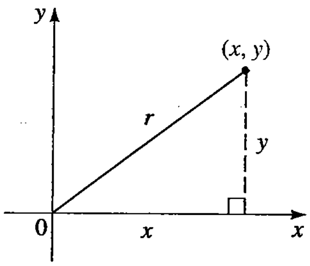


FIGURA 12

■ **Demostración** Comprobemos la primera identidad pitagórica. Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura 12, nos da

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. (Aunque la figura indica un ángulo agudo, deberá verificar que esta prueba es válida para todos los ángulos θ.)

EJEMPLO 5 ■ Expresión de una función trigonométrica en función de otra

Exprese $\tan \theta$ en función de $\operatorname{sen} \theta$, cuando θ esté en el cuadrante II.

SOLUCIÓN

Puesto que $\tan \theta = \operatorname{sen} \theta / \cos \theta$, es necesario que escribamos $\cos \theta$ en función de $\operatorname{sen} \theta$.

$$\cos \theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

y en vista de que $\cos \theta$ es negativo en el cuadrante II, aquí se aplica el signo negativo. Por lo que

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}$$ ■

EJEMPLO 6 ■ Evaluación de una función trigonométrica

Si $\tan \theta = \frac{2}{3}$ y θ está en el cuadrante III, determine $\cos \theta$.

SOLUCIÓN 1 Es necesario que expresemos $\cos \theta$ en términos de $\tan \theta$. De la identidad $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, obtenemos $\sec \theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el cuadrante III, $\sec \theta$ es negativo, por lo que

$$\sec \theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Entonces

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

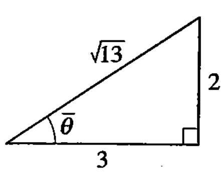


FIGURA 13

SOLUCIÓN 2 Este problema se puede resolver recordando que a excepción del signo los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo son los mismos que los correspondientes a un ángulo agudo (el ángulo de referencia). Por lo que ignorando por el momento el signo, dibujemos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\bar{\theta}$ que satisfaga el valor $\tan \bar{\theta} = \frac{2}{3}$ (véase la figura 13), según el teorema de Pitágoras la hipotenusa de este triángulo tiene una longitud de $\sqrt{13}$. Del triángulo de la figura 13 vemos de inmediato que $\bar{\theta} = 3/\sqrt{13}$. Puesto que θ está en el cuadrante III, el $\cos \theta$ es negativo y por lo tanto

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

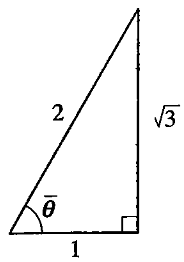


FIGURA 14

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de funciones trigonométricas

Si $\sec\theta = 2$ y θ está en el cuadrante IV, determine las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Dibujamos un triángulo como el de la figura 14, de tal manera que $\sec\bar{\theta} = 2$. Tomando en consideración el hecho de que θ está en el cuadrante IV, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ÁREAS DE TRIÁNGULOS

Terminamos esta sección dando una aplicación de las funciones trigonométricas que involucran ángulos que no son necesariamente agudos. En las siguientes dos secciones aparecen aplicaciones más amplias.

El área de un triángulo es $\mathscr{A} = \frac{1}{2}$ (base) × (altura). Si en un triángulo conocemos dos lados y el ángulo formado por ellos, entonces podemos determinar la altura utilizando funciones trigonométricas, y de ahí podemos determinar el área.

Si θ es un ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la figura 15(a) está dada por $h = b \operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto, el área es

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$$

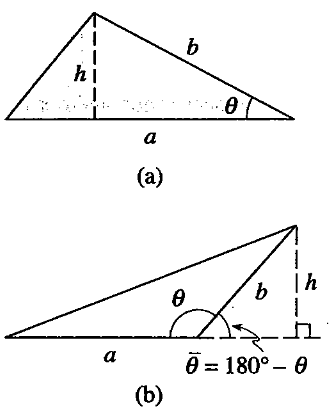


FIGURA 15

Si el ángulo θ no es agudo, entonces de la figura 15(b) vemos que la altura del triángulo es

$$h = b \operatorname{sen}(180° - \theta) = b \operatorname{sen}\theta$$

Esto es así debido a que el ángulo de referencia de θ es el ángulo $180° - \theta$. Por lo tanto, también en este caso, el área del triángulo es

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b que forman el ángulo θ, está dada por

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$$

EJEMPLO 8 ■ Determinación del área de un triángulo

Determine el área del triángulo ABC que se muestra en la figura 16.

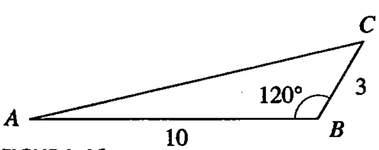


FIGURA 16

SOLUCIÓN El triángulo tiene lados de longitudes 10 y 3, y forman un ángulo de 120°. Por lo tanto

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}(10)(3) \operatorname{sen}(120°)$$

$$\mathscr{A} = 15 \operatorname{sen}(60°) \qquad \text{Ángulo de referencia}$$

$$\mathscr{A} = 15\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

7.5 EJERCICIOS

1-6 ■ Determine el ángulo de referencia del ángulo dado.

1. (a) 225° (b) −35° (c) 181°

2. (a) 290° (b) 750° (c) 570°

3. (a) 335° (b) −95° (c) 165°

4. (a) $\frac{3\pi}{5}$ (b) $\frac{7\pi}{6}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$

5. (a) $\frac{17\pi}{3}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) 3

6. (a) $\frac{23\pi}{11}$ (b) $\frac{23}{11}$ (c) $\frac{17\pi}{7}$

7-30 ■ Determine el valor exacto de la función trigonométrica.

7. sen 150° **8.** cos 225° **9.** sen 135°

10. tan 330° **11.** sen(−60°) **12.** sec(−60°)

13. csc(−630°) **14.** cot 210° **15.** cos 570°

16. sec 120° **17.** tan 750° **18.** cos 660°

19. $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **20.** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$ **21.** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

22. $\cos\frac{7\pi}{3}$ **23.** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **24.** $\tan\frac{5\pi}{6}$

25. $\sec\frac{17\pi}{3}$ **26.** $\csc\frac{5\pi}{4}$ **27.** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

28. $\cos\frac{7\pi}{4}$ **29.** $\tan\frac{5\pi}{2}$ **30.** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

31-34 ■ Determine el cuadrante en donde está θ partiendo de la información dada.

31. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

32. $\tan\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

33. $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

34. $\csc\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

35-40 ■ Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

35. $\tan\theta$, $\cos\theta$; θ en el cuadrante III

36. $\cot\theta$, $\operatorname{sen}\theta$; θ en el cuadrante II

37. $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$; θ en el cuadrante IV

38. $\sec\theta$, $\operatorname{sen}\theta$; θ en el cuadrante I

39. $\sec\theta$, $\tan\theta$; θ en el cuadrante II

40. $\csc\theta$, $\cot\theta$; θ en el cuadrante III

41-48 ■ Determine los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

41. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante II

42. $\cos\theta = -\frac{7}{12}$, θ en el cuadrante III

43. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\cos\theta > 0$

44. $\sec\theta = 5$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

45. $\csc\theta = 2$, θ en el cuadrante I

46. $\cot\theta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

47. $\cos\theta = -\frac{2}{7}$, $\tan\theta < 0$

48. $\tan\theta = -4$, $\operatorname{sen}\theta > 0$

49. Si $\theta = \pi/3$, determine el valor de cada una de las siguientes expresiones.
(a) $\operatorname{sen} 2\theta$, $2\operatorname{sen}\theta$
(b) $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$
(c) $\operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen}(\theta^2)$

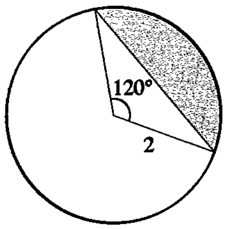
50. Determine el área de un triángulo de lados de longitud 7 y 9 y que forman un ángulo de 72°.

51. Determine el área de un triángulo con lados de longitud 10 y 22 y que forman un ángulo de 10°.

52. Determine el área de un triángulo equilátero con lado de longitud 10.

53. Un triángulo tiene un área de 16 pulgadas^2 y 2 de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 pulgadas y de 7 pulgadas. Determine el ángulo que forman estos dos lados.

54. Determine el área de la región sombreada de la figura.



55. Utilice la primera identidad pitagórica para probar la segunda. [*Sugerencia*: divida entre $\cos^2 \theta$].

56. Utilice la primera identidad pitagórica para probar la tercera.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

57. Uso de calculadora Para resolver cierto problema es necesario que determine el seno de 4 rad. Su compañero de estudios utiliza su calculadora y le dice que sen 4 es 0.0697564737. En su calculadora usted obtiene −0.7568024953. ¿Qué es lo que está mal? ¿Qué error cometió su compañero?

7.6 LEY DE LOS SENOS

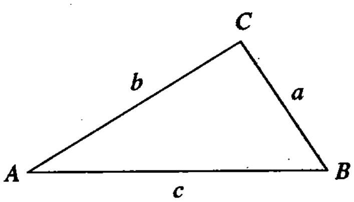


FIGURA 1

En la sección 7.3 utilizamos las razones trigonométricas para resolver los triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas también pueden ser utilizadas para resolver *triángulos oblicuos*, esto es, triángulos que no tengan ningún ángulo recto. Para ello primero estudiamos la Ley de los senos y después la Ley de los cosenos en la sección siguiente. Para enunciar estas leyes (o fórmulas) con mayor facilidad, seguimos la regla de identificar los ángulos de un triángulo como A, B, C y las longitudes de los lados opuestos correspondientes como a, b, c, tal como se muestra en la figura 1.

La **Ley de los senos** dice que en cualquier triángulo la razón de las longitudes de cualquier par de lados es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

LEY DE LOS SENOS

En el triángulo ABC, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

■ **Demostración** Para ver por qué es cierta la Ley de los senos, véase la figura 2. Según la fórmula de la sección 7.5 el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} C$. Según la misma fórmula el área de este triángulo también es $\frac{1}{2}\, ac \operatorname{sen} B$ y $\frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A$. Por lo que

$$\tfrac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2}\, ac \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} C$$

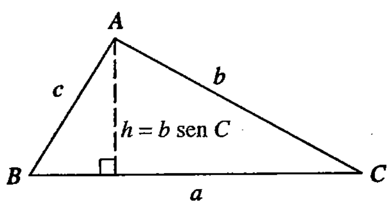


FIGURA 2

Multiplicando por $2/(abc)$ obtenemos la Ley de los senos.

EJEMPLO 1 ■ Rastreo de un satélite

Un satélite en órbita terrestre pasa directamente por encima de estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, a 340 millas de distancia. En un instante cuando el satélite está entre esas dos estaciones, simultáneamente se observa que el ángulo de elevación es de 60° en Phoenix y de 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles? En otras palabras, encuentre la distancia AC de la figura 3.

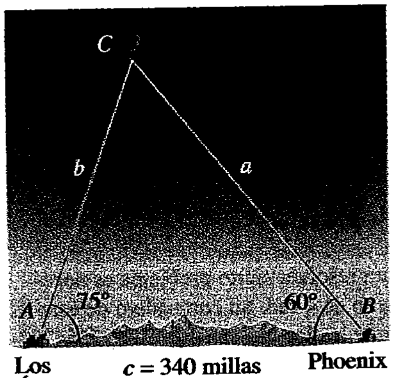


FIGURA 3

SOLUCIÓN Siempre que se conocen dos ángulos de un triángulo, el tercer ángulo se puede determinar de inmediato porque la suma de los ángulos de un triángulo es de 180°. En este caso, $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (véase la figura 3), por lo que tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Resuelva en función de } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es de aproximadamente 416 millas. ■

EL CASO AMBIGUO

Para resolver un triángulo necesitamos conocer cierta información sobre sus lados y ángulos, para identificar esta información, a menudo resulta útil hacer un diagrama. Por ejemplo, si se nos dan dos ángulos y el lado adyacente a ambos, entonces resulta claro que sólo se puede formar un triángulo y sólo uno [véase la figura 4(a)]. De manera similar, si se conocen dos lados y el ángulo que forman, entonces queda determinado un solo triángulo único [figura 4(b)]. Pero si conocemos los tres ángulos pero ningún lado, no podemos determinar de manera única el triángulo, ya que muchos triángulos pueden tener los mismos ángulos. (Todos estos triángulos naturalmente serían semejantes.) Así, este último caso no se verá.

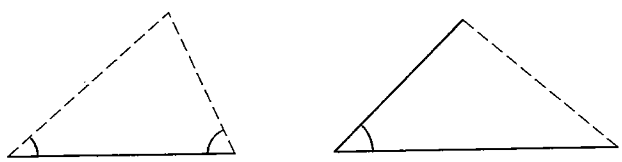


FIGURA 4 (a) (b)

En general, un triángulo queda determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) siempre y cuando una de estas partes sea un lado. Por lo que se tienen las posibilidades siguientes:

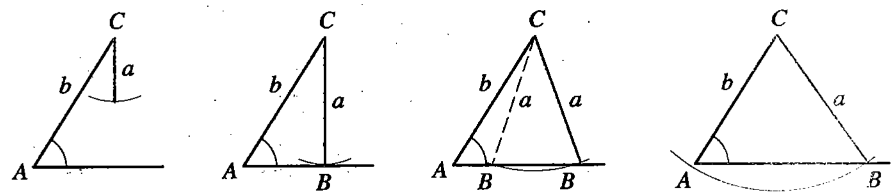
Caso 1 LAA Un lado y dos ángulos

Caso 2 LLA Dos lados y el ángulo opuesto a uno de estos lados

Caso 3 LAL Dos lados y el ángulo que forman

Caso 4 LLL Tres lados

En cada uno de estos casos, excepto en el caso 2, queda determinado un triángulo único con base en la información dada. El caso 2 presenta una situación donde pudieran existir dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo con las propiedades dadas. Por esta razón el caso 2 se conoce, a veces, como el **caso ambiguo**. Para comprender por qué es así en la figura 5 mostramos las posibilidades cuando se dan el ángulo A y los lados a y b. En la parte (a) no hay solución posible, ya que el lado a es demasiado corto para completar el triángulo. En la parte (b) la solución es un triángulo rectángulo. En la parte (c) hay dos soluciones posibles y en la parte (d) existe un solo triángulo con las propiedades dadas. En los siguientes ejemplos ilustramos las posibilidades del caso 2.



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 5
El caso ambiguo

EJEMPLO 2 ■ LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

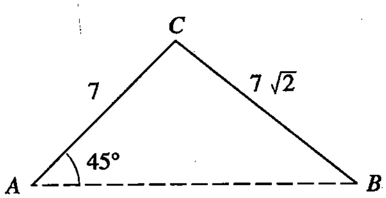


FIGURA 6

SOLUCIÓN Primero dibujamos el triángulo con la información que tenemos (véase la figura 6). Obligatoriamente nuestro dibujo es tentativo, ya que todavía no conocemos los demás ángulos. Sin embargo, ahora podemos ver las posibilidades

Primero determinamos $\angle B$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Resuelva en función de sen } B$$

Sólo consideramos ángulos inferiores a 180°, ya que no existe ningún triángulo que pueda contener un ángulo de 180° o superior.

¿Qué ángulos B tienen sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección anterior sabemos que existen dos de estos ángulos menores de 180° (son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que sabemos sobre el triángulo ABC? Puesto que $\angle A = 45°$, no podemos tener $\angle B = 150°$ porque $45° + 150° > 180°$. Por lo que $\angle B = 30°$ y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Ahora podemos determinar el lado c

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Resuelva en función de } c$$ ■

⊘ En el ejemplo 2 existían 2 posibilidades para el ángulo B y una de ellas no era compatible con la demás información. En general, si sen $A < 1$ debemos verificar el ángulo y su suplemento como posibilidades, porque cualquier ángulo inferior a 180° puede corresponder al triángulo. Para decidir si alguna de las posibilidades funciona, verificamos para ver si la suma resultante de los ángulos excede 180°. Puede ocurrir lo anterior, como en la figura 5(c), en que ambas posibilidades son compatibles con la información dada. En este caso hay dos triángulos diferentes que son soluciones del problema.

EJEMPLO 3 ■ LLA el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo ABC si $\angle A = 43.1°$ $a = 186.2$, y $b = 248.6$.

SOLUCIÓN Con la información dibujamos el triángulo que se muestra en la figura 7. Observe que el lado a puede dibujarse en dos posiciones para completar el triángulo. De la ley de los senos

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{248.6 \operatorname{sen} 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

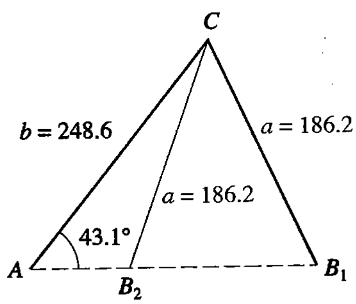


FIGURA 7

Existen dos ángulos posibles B entre 0° y 180° tales que sen $B = 0.91225$. Utilizando la tecla $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ de una calculadora (o bien $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ o bien $\boxed{\text{ARCSIN}}$) encontramos que uno de estos ángulos es de aproximadamente 65.8°. El otro es aproximadamente 180° − 65.8° = 114.2°. Identificamos estos dos ángulos como B_1 y B_2 de manera que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

Por lo tanto, dos triángulo satisfacen las condiciones dadas: el triángulo $A_1\, B_1\, C_1$ y el triángulo $A_2\, B_2\, C_2$.

Resuelva el triángulo $A_1\, B_1\, C_1$:

$$\angle C_1 \approx 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Determine } \angle C_1$$

Por lo tanto $$c_1 = \frac{a_1 \operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A_1} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.1°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de los senos}$$

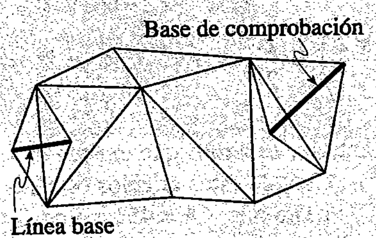
Resuelva el triángulo $A_2\, B_2\, C_2$:

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 22.7° \qquad \text{Determine } \angle C_2$$

Por lo tanto $$c_2 = \frac{a_2 \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A_2} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.7°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de los senos}$$

Los triángulos $A_1\, B_1\, C_1$ y $A_2\, B_2\, C_2$ aparecen en la figura 8.

La **planimetría** es un método para medir terrenos utilizado para la cartografía. Los topógrafos utilizan un proceso llamado *triangulación*, en el cual se crea una red de miles de triángulos entrelazados en el área que se desea medir. El proceso se inicia midiendo la longitud de una línea base entre dos estaciones topográficas. Después, utilizando un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera. A continuación se utiliza la Ley de los senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Entonces se utilizan los lados calculados como líneas base y se repite el proceso una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método la única distancia medida es la línea base inicial; las demás distancias se calculan a partir de la Ley de los senos. Este método es práctico porque resulta mucho más fácil medir ángulos que distancias.



Uno de los emprendimientos de cartografía más ambiciosos de todos los tiempos fue el gran censo trigonométrico de la India*, formado por varias expediciones y que tomó más de un siglo en terminarse. La famosa expedición de 1823, encabezada por **sir George Everest**, duró 20 años. Extendiéndose sobre terreno traicionero y enfrentándose a los temidos mosquitos de la malaria, esta expedición llegó a las estribaciones de los Himalayas. Una expedición posterior, utilizando la triangulación, calculó la altura del pico más alto

(continúa)

* En el lenguaje de la topografía, esta tarea se conoce como "levantamiento topográfico". (N. del R. T.)

de los Himalayas como 29,002 pies. Este pico fue bautizado en honor de sir George Everest. Hoy en día, utilizando satélites se ha estimado la altura del Everest en 29,028 pies. La concordancia tan cercana entre estas dos estimaciones demuestra la gran precisión del método trigonométrico.

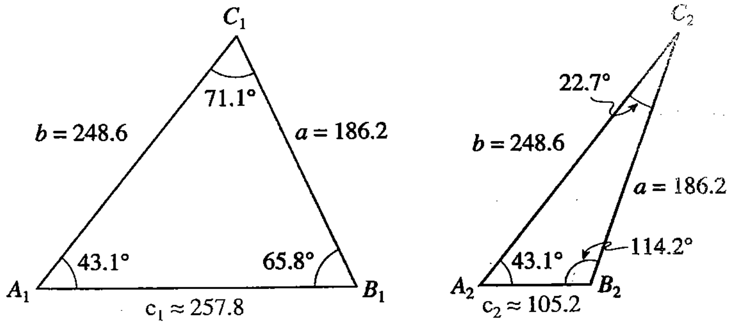


FIGURA 8

El siguiente ejemplo presenta una situación en la cual no hay ningún triángulo compatible con los datos dados.

EJEMPLO 4 ■ LLA, el caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC donde $\angle A = 42°$, $a = 70$, y $b = 122$.

SOLUCIÓN Primero, intentemos determinar $\angle B$. Tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de los senos}$$

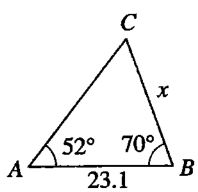
$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen} 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Resuelva en función de sen } B$$

Dado que el seno de un ángulo nunca es superior a 1, concluimos que ningún triángulo satisface las condiciones establecidas en este problema. ■

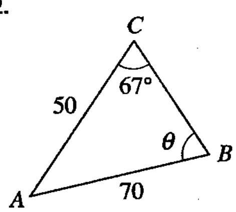
7.6 EJERCICIOS

1-4 ■ Utilice la Ley de los senos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ.

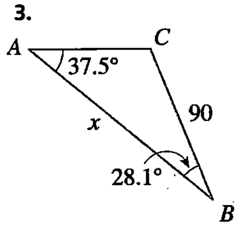
1.



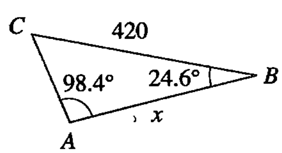
2.



3.



4.



5-12 ■ Utilice la Ley de los senos para encontrar todos los triángulos posibles que satisfagan las condiciones dadas.

5. $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110°$

6. $a = 30$, $c = 40$, $\angle A = 37°$

7. $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125°$

8. $b = 45$, $c = 42$, $\angle C = 38°$

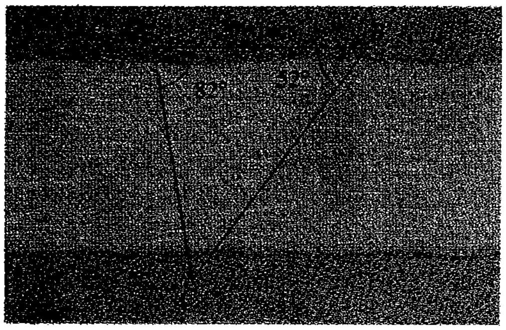
9. $b = 25$, $c = 30$, $\angle B = 25°$

10. $a = 75$, $b = 100$, $\angle A = 30°$

11. $a = 50$, $b = 100$, $\angle A = 50°$

12. $a = 100$, $b = 80$, $\angle A = 135°$

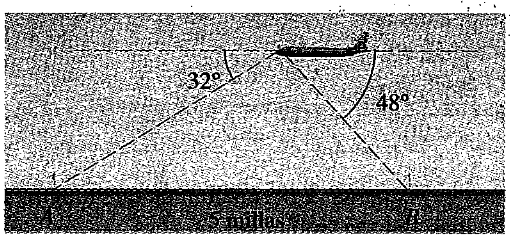
13. Para encontrar la distancia de un lado al otro de un río, una topógrafa selecciona los puntos A y B que están separados 200 pies en un lado del río (véase la figura). Entonces ella escoge un punto de referencia C del lado opuesto del río y determina que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Calcule aproximadamente la distancia de A a C.



14. Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a dos postes indicadores de millas, a 5 millas de distancia entre sí, tienen los valores de 32° y 48°, según se observa en la figura.

(a) Determine la distancia del aeroplano al punto A.

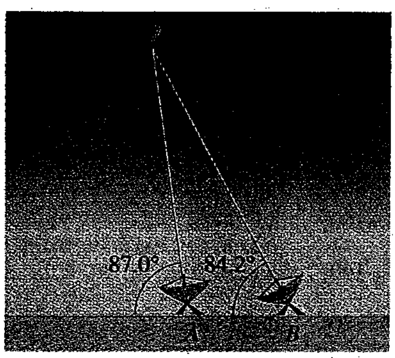
(b) Determine la altitud del aeroplano.



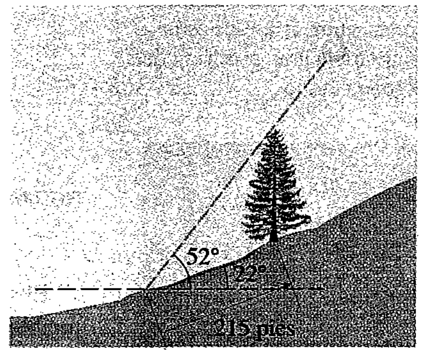
15. La órbita de un satélite alrededor de la Tierra hace que pase directamente por encima de dos estaciones de rastreo que están separadas 50 millas. Cuando el satélite está entre las dos estaciones, se miden los ángulos de elevación desde A y desde B, y éstos son de 87.0° y 84.2°, respectivamente.

(a) ¿A qué distancia está el satélite de la estación A?

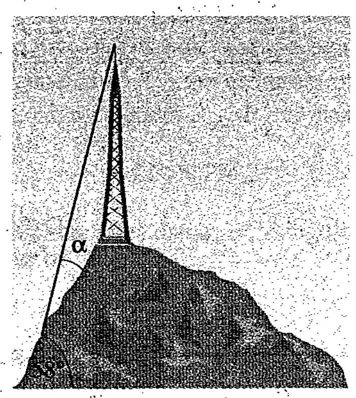
(b) ¿A qué altitud sobre el nivel del suelo está el satélite?



16. Un árbol en una ladera proyecta una sombra 215 pies colina abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es de 22° con la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es de 52°, ¿cuál es la altura del árbol?



17. Una torre de comunicaciones está en la cima de una colina como se muestra en la figura. El ángulo de inclinación de la colina es de 58°. Debe instalarse un cable guía desde la parte superior de la torre hasta el piso. El ángulo α en la figura resulta ser de 12°. Determine la longitud del cable guía.



18. Los puntos A y B están separados por un lago. Para determinar la distancia que los separa, un topógrafo localiza un punto C en tierra de manera que $\angle CAB = 48.6°$. También mide la distancia CA como de 312 pies y CB de 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

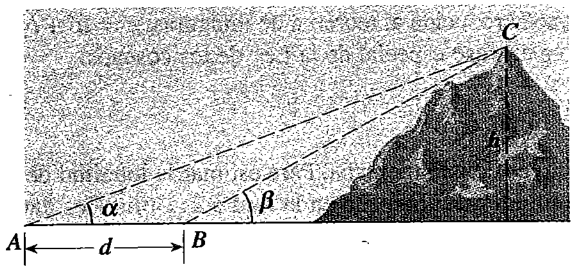
19. Para calcular la altura de una montaña se determinan los ángulos α, β y la distancia d, según se muestra en la figura.

(a) Determine la longitud de BC en función de α, β y d.

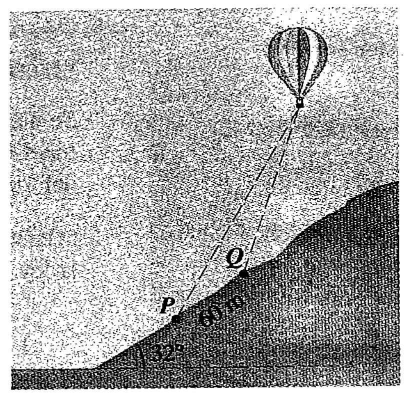
(b) Demuestre que la altura h de la montaña está dada por la fórmula

$$h = d\,\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

(c) Utilice la fórmula del inciso (b) para encontrar la altura de una montaña si a ≈ 25°, $\beta \approx 29°$ y $d \approx 800$ pies.



20. Los observadores P y Q están en la ladera de una colina que forma un ángulo con la horizontal de 32°. El observador en P determina que su ángulo de elevación a un globo aerostático es de 62°; en el mismo momento, el observador en Q mide su ángulo de elevación al globo y es de 71°. Si P está ubicado 60 m colina debajo de Q, determine la distancia de Q al globo.



7.7 LEY DE LOS COSENOS

La Ley de los senos no se utiliza directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo formado entre ellos, o si conocemos los tres lados (se trata de los casos 2 y 3 de la sección anterior). En estos dos casos, es aplicable la **Ley de los cosenos**.

LEY DE LOS COSENOS

En cualquier triángulo ABC, tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

■ **Demostración** Para demostrar la Ley de los cosenos, coloque el triángulo ABC de forma que $\angle A$ esté en el origen, como se muestra en la figura 1. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c,0)$ $(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$, respectivamente. (Deberá verificar que las coordenadas de estos puntos serían las mismas si hubiéramos dibujado el ángulo A como un ángulo agudo.) Utilizando la fórmula de la distancia, obtenemos

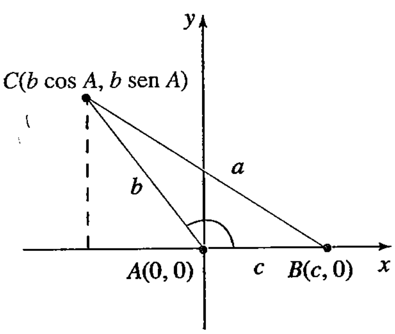


FIGURA 1

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc\cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{Puesto que } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

Esto prueba la primera fórmula. Las otras dos fórmulas se obtienen de la misma forma; se coloca cada uno de los demás vértices del triángulo en el origen y se repite el anterior argumento.

En otras palabras, la Ley de los cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces el producto de esos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo que forman.

Si uno de los ángulos de un triángulo, digamos $\angle C$, es un ángulo recto, entonces $\cos C = 0$ y la Ley de los cosenos queda reducida al teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Por lo que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la Ley de los cosenos.

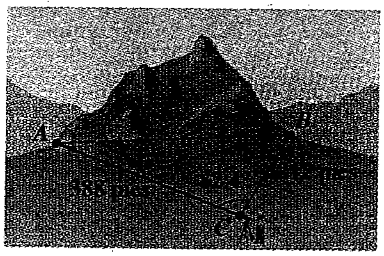


FIGURA 2

EJEMPLO 1 ■ Longitud de un túnel

Se piensa construir un túnel a través de una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo toma las medidas que aparecen en la figura 2. Utilice los datos del topógrafo para hacer un cálculo aproximado de la longitud del túnel.

SOLUCIÓN Para efectuar una aproximación de la longitud c del túnel, utilizaremos la ley de los cosenos:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C && \text{Ley de los cosenos}\\
&= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212)\cos 82.4° && \text{Sustituya}\\
&\approx 173730.2367 && \text{Use una calculadora}\\
c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Saque la raíz cuadrada}
\end{aligned}
$$

Por lo que el túnel tendrá una longitud aproximada de 417 pies. ■

ÁREA DE LOS TRIÁNGULOS

Una aplicación interesante de la Ley de los cosenos es la obtención de una fórmula para determinar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (véase la figura 3).

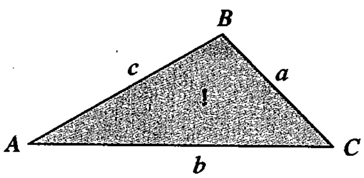


FIGURA 3

FÓRMULA DE HERÓN

El área $\mathcal{A}$ del triángulo ABC está dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; esto es, s es la mitad del perímetro.

■ **Demostración** Partimos de la fórmula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$ de la sección 7.5. Por lo tanto.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C\\
&= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C) && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos C)(1 + \cos C) && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

A continuación, escribimos las expresiones $1 - \cos C$ y $1 + \cos C$ en función de a, b y c. Según la ley de los cosenos tenemos

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{Ley de los cosenos}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos C &= 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Sume 1} \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Común denominador} \\ &= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} && \text{Factorice} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} && \text{Diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

De manera similar

$$1 - \cos C = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$$

Reemplazando estas expresiones en la fórmula que obtuvimos para $\mathscr{A}^2$ nos da

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab} \\ &= \frac{(a+b+c)}{2} \frac{(a+b-c)}{2} \frac{(c+a-b)}{2} \frac{(c-a+b)}{2} \\ &= s(s-c)(s-b)(s-a) \end{aligned}$$

Se deja como un ejercicio la demostración de que cada factor en la última expresión es igual al factor correspondiente de la expresión anterior. La fórmula de Herón se sigue ahora al extraer la raíz cuadrada de cada lado.

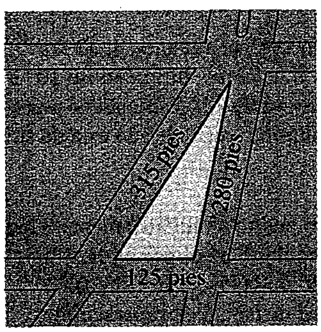


FIGURA 4

EJEMPLO 2 ■ Área de un predio

Un empresario desea adquirir un predio triangular en una ubicación muy concurrida del centro de la ciudad (véase la figura 4). Los frentes del predio en las tres calles adyacentes son de 125, 280 y 315 pies. Determine el área del predio.

SOLUCIÓN El semiperímetro del predio es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Según la fórmula de Herón el área es

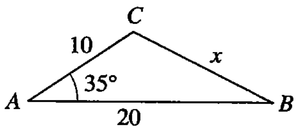
$$\mathscr{A} = \sqrt{360(360-125)(360-280)(360-315)} \approx 17.451.6$$

Por lo tanto, el área es de aproximadamente 17,452 pies^2. ■

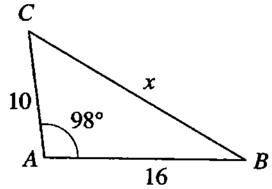
7.7 EJERCICIOS

1-4 ▪ Utilice la ley de los cosenos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ.

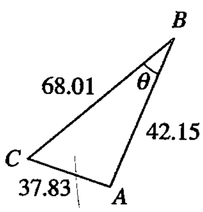
1.



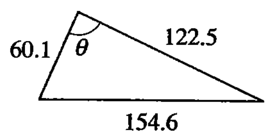
2.



3.

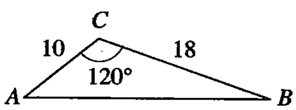


4.



5-9. Resuelva el triángulo ABC.

5.



6. $a = 3.0, \quad b = 4.0, \quad \angle C = 53°$

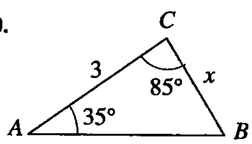
7. $b = 60, \quad c = 30, \quad \angle A = 70°$

8. $a = 20, \quad b = 25, \quad c = 22$

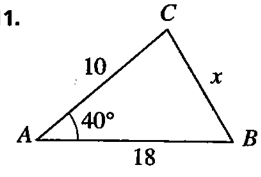
9. $a = 10, \quad b = 12, \quad c = 16$

10-13 ▪ Determine el lado indicado x, o bien el ángulo θ (utilice la Ley de los senos o la Ley de los cosenos según resulte apropiado).

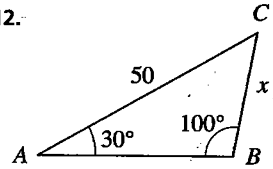
10.



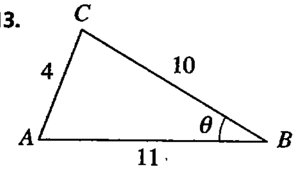
11.



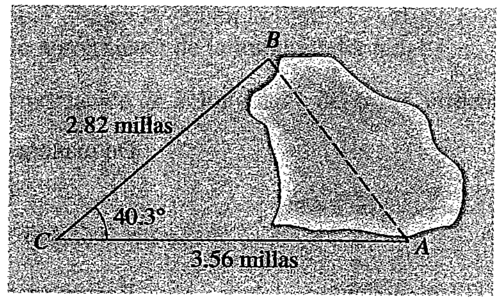
12.



13.



14. Para determinar la distancia a través de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las medidas que se muestran. Encuentre la distancia a través del lago basándose en esta información.



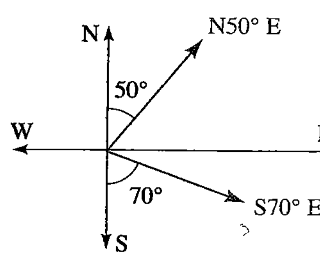
15. Un paralelogramo tiene lados de longitud 3 y 5 y un ángulo de 50°. Determine la longitud de las diagonales.

16. Dos carreteras rectas divergen formando un ángulo de 65°. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 PM, uno viaja a 50 millas/h y el otro a 30 millas/h. ¿Qué distancia los separa a las 2:30 PM?

17. Un automóvil viaja a lo largo de una carretera recta en dirección al este durante 1 hora y después viaja durante 30 minutos sobre otra carretera que se dirige al noreste. Si el conductor mantuvo una velocidad uniforme de 40 millas/h, ¿a qué distancia está de su punto de partida?

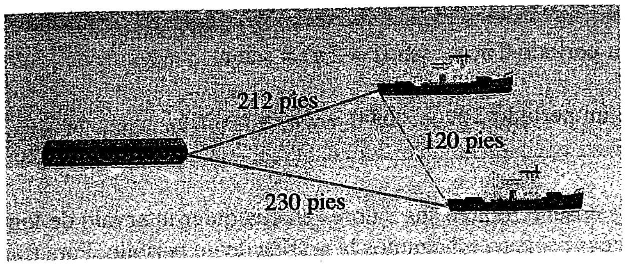
18. Un piloto vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 min. Después efectúa una corrección de curso, dirigiéndose 10° a la derecha de su curso original y vuela 2 h. Si mantiene una velocidad constante de 625 millas/h, ¿cuán alejado está de su posición inicial?

19. Dos barcos salen de un mismo puerto simultáneamente. Uno avanza a una velocidad de 30 millas/h en dirección N 50° E y el otro a una velocidad de 26 millas/h en una dirección S 70° E (véase la figura). ¿Qué distancia de separación tendrán después de 1 hora?

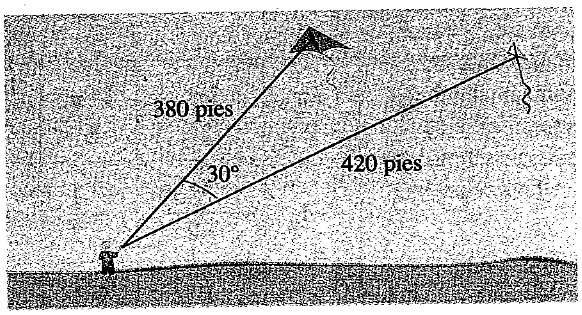


20. Un campo triangular tiene lados de longitudes de 22, 36 y 44 yardas. Determine cuál es el ángulo más grande.

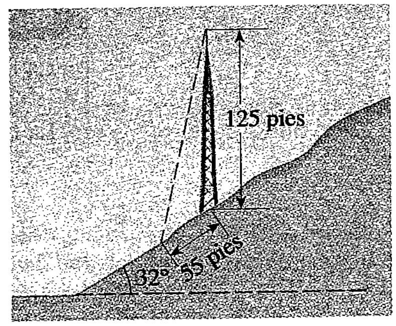
21. Dos remolcadores que están separados 120 pies tiran de una barcaza, como se muestra en la figura. Si la longitud de un cable es de 212 pies y la del otro es de 230 pies, determine cuál es el ángulo que forman los cables.



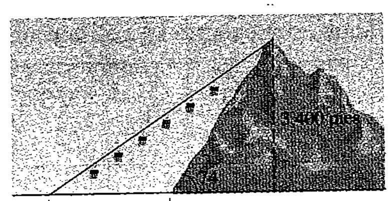
22. Un niño está haciendo volar dos cometas simultáneamente. Una de ellas tiene 380 pies de cordón y la otra, 420 pies. Se supone que el ángulo entre los dos cables es de 30°. Estime la distancia entre las cometas.



23. Una torre de 125 pies está instalada en la ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° con la horizontal. Debe colocarse un cable guía desde la parte superior de la torre y anclarse en un punto a 55 pies ladera abajo de la base de la torre. Determine cuál es la longitud más corta de cable que se necesita.



24. Una montaña de laderas muy abruptas tiene una inclinación de 74° con la horizontal y se eleva 3,400 pies por encima del terreno circundante. Se debe instalar un funicular desde un punto a 800 pies de la base hasta la cima de la montaña tal como se muestra en la figura. Determine cuál es la longitud más corta de cable necesario.



7.8 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

La gráfica de una función nos ayuda a tener una mejor comprensión de su comportamiento. En esta sección obtenemos las gráficas de las funciones seno y coseno y de ciertas transformaciones de estas funciones. La gráfica de las demás funciones trigonométricas se obtendrán en la sección siguiente.

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Para ayudarnos a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, primero notamos que estas funciones toman sus valores de manera periódica. Para ver exactamente cómo ocurre lo anterior, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. De ahí se deduce que el punto terminal $P(x,y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Puesto que las funciones seno y coseno están definidas en términos de las coordenadas de $P(x,y)$, se deduce que sus valores no cambian al sumar cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Por lo tanto, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: una función f es **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. El número positivo más pequeño correspondiente (si existe) es el **periodo** de f. Si f tiene un período p, entonces la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p se conoce como **un periodo completo** de f.

PROPIEDADES DE PERIODICIDAD DEL SENO Y EL COSENO

La función seno tiene un periodo 2π: $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$.

La función coseno tiene un periodo 2π: $\cos(t + 2\pi) = \cos t$.

Así, las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas primero esbozamos la gráfica de un periodo. Para trazar las gráficas en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, intentamos elaborar una tabla de valores y utilizar estos puntos para obtener la gráfica. Puesto que la tabla no está completa, veamos con mayor detalle las definiciones de estas funciones.

Para trazar las gráficas con mayor precisión, en la tabla 1 se encuentran otros valores de sen t y cos t. Con la ayuda de una calculadora podríamos obtener aún más valores.

Tabla 1

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ahora utilizamos esta información para trazar las gráficas de las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π, como se muestra en las figuras 1 y 2. Éstas son las gráficas correspondientes a un periodo. Utilizando el hecho de que estas funciones son periódicas con periodo 2π, obtenemos las gráficas completas continuando el mismo patrón tanto a la derecha como la izquierda para todo intervalo sucesivo de longitud 2π.

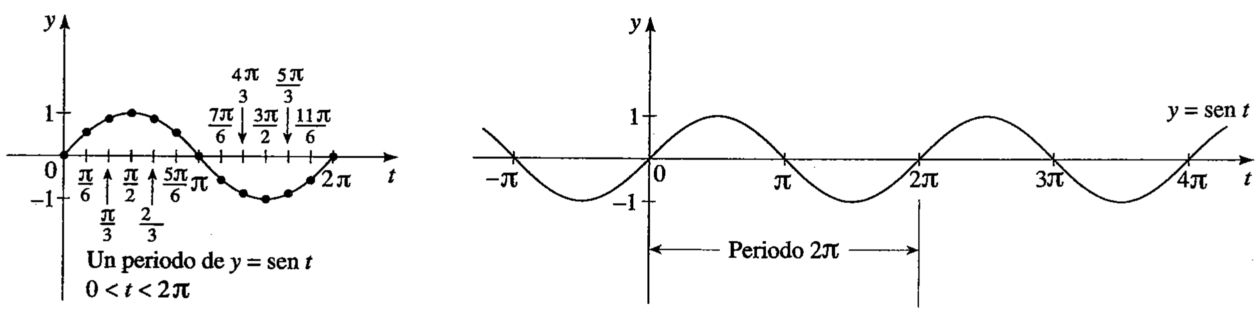


FIGURA 1 Gráfica de sen t

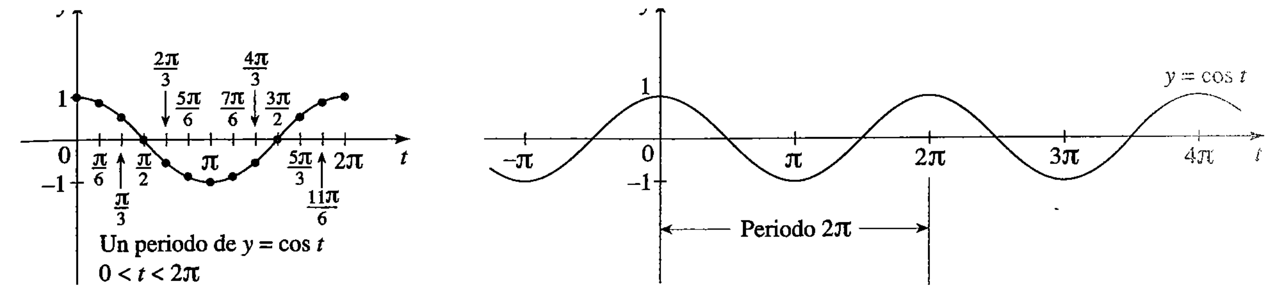


FIGURA 2 Gráfica de cos t

La gráfica de la función seno es simétrica respecto al origen, lo cual era de esperarse, ya que se trata de una función impar. Puesto que la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y.

GRÁFICAS DE TRANSFORMACIONES DEL SENO Y EL COSENO

Ahora consideraremos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Estas gráficas son importantes para comprender las aplicaciones a situaciones físicas, como el movimiento armónico, pero algunas son tan bellas que son interesantes por derecho propio.

Es tradicional utilizar la letra x para identificar la variable en el dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante escribiremos $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 ■ Curvas tipo coseno

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes

(a) $f(x) = 2 + \cos x$ (b) $g(x) = -\cos x$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la de $y = \cos x$, pero trasladada 2 unidades hacia arriba [véase la figura 3(a)].
(b) La gráfica de $y = -\cos x$ de la figura 3(b) es el reflejo sobre el eje x de $y = \cos x$.

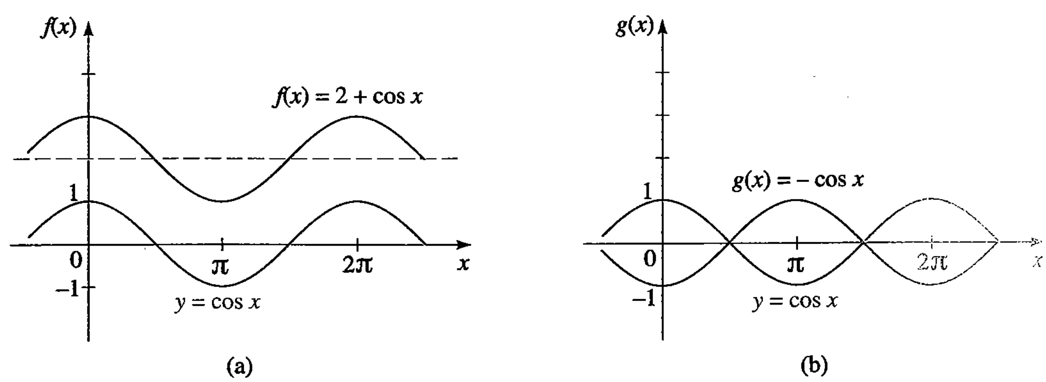


FIGURA 3

Ahora tracemos la gráfica de $y = 2$ sen x. Empezamos con la gráfica de $y =$ sen x y multiplicamos la coordenada y de cada punto por 2. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica por un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2}$ sen x, empezamos con la gráfica de $y =$ sen x y multiplicamos la coordenada y de cada punto por $\frac{1}{2}$. Esto tiene el efecto de contraer la gráfica verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$ (véase la figura 4).

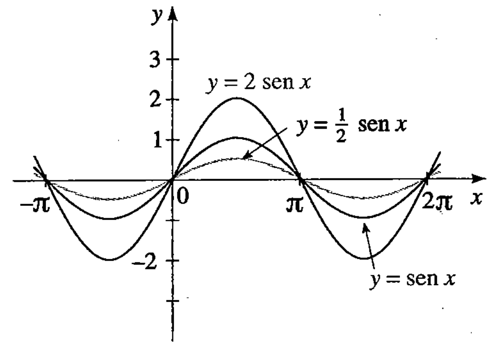


FIGURA 4

En general para las funciones

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se conoce como la amplitud y es el valor más grande que toman estas funciones. En la figura 5 se muestran las gráficas de $y = a$ sen x para varios valores de a.

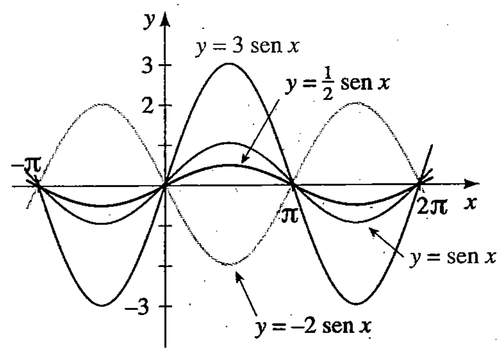


FIGURA 5

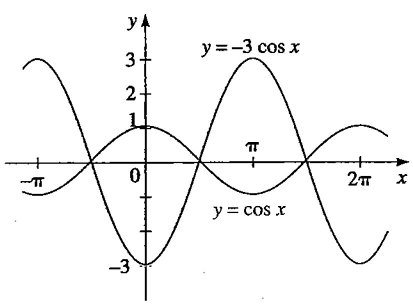


FIGURA 6

EJEMPLO 2 ■ Alargamiento de una curva coseno

Obtenga la amplitud de $y = -3 \cos x$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN La amplitud es $|-3| = 3$, por lo que el valor más grande que alcanza la gráfica es 3 y el valor más pequeño, -3. Para trazar la gráfica empezamos con la de $y = \cos x$, alargamos verticalmente la misma en un factor de 3 y la reflejamos sobre el eje x, obteniendo la gráfica de la figura 6.

En vista de que las funciones de seno y coseno tienen un periodo 2π, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo conforme kx varía de 0 a 2π; esto es, para $0 \leq kx \leq 2\pi$, o para $0 \leq x \leq 2\pi/k$. Por lo tanto, estas funciones completan un periodo conforme x varía entre 0 y $2\pi/k$, y por lo tanto tienen un periodo $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se conocen como **curvas tipo seno** y **curvas tipo coseno**, respectivamente.

CURVAS TIPO SENO Y COSENO

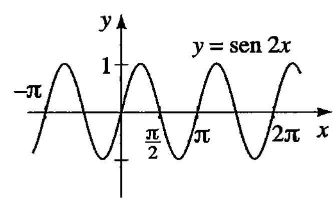
Las curvas tipo seno y tipo coseno

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

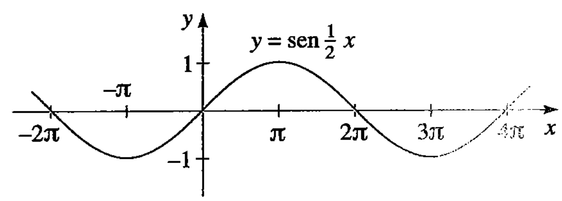
tienen una amplitud $|a|$ y un periodo $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado donde se puede trazar un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

Para ver cómo el valor de k afecta la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, tracemos la curva de $y = \operatorname{sen} 2x$. Puesto que el periodo es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ [véase la figura 7(a)]. Para la curva de $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$, el periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, por lo que la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \leq x \leq 4\pi$ [véase la figura 7(b)]. Vemos que el efecto es contraer la gráfica si $k > 1$ o expandirla si $k < 1$.



(a)



(b)

FIGURA 7

Para efectos de comparación trazamos en la figura 8 las gráficas de un periodo de la curva $y = a \operatorname{sen} kx$ para varios valores de k.

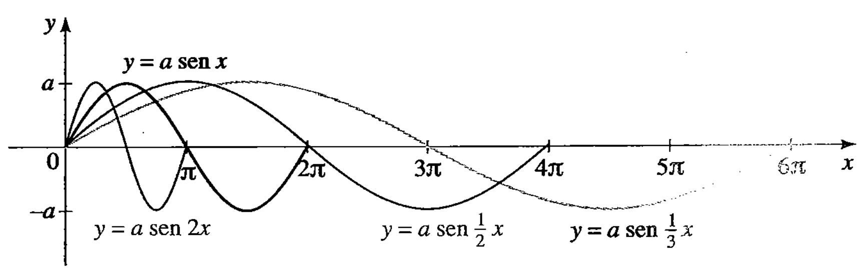


FIGURA 8

EJEMPLO 3 ■ Amplitud y periodo

Determine la amplitud y el periodo de cada una de las funciones siguientes, y trace su gráfica.

(a) $y = 4 \cos 3x$ (b) $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$

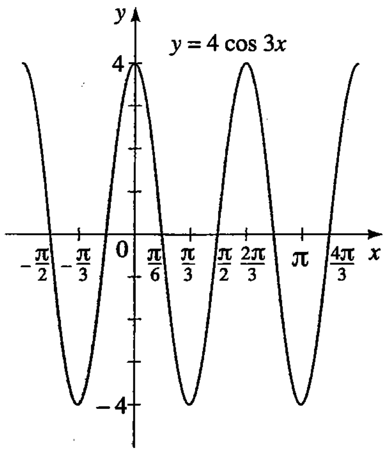


FIGURA 9

SOLUCIÓN

(a) Para $y = 4\cos 3x$,

$$\text{amplitud} = |a| = 4$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{3}$$

La gráfica se muestra en la figura 9.

(b) Para $y = -2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

La gráfica se muestra en la figura 10.

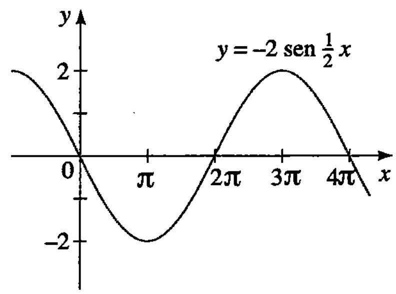


FIGURA 10

■

Las gráficas de funciones de la forma $y = a\,\text{sen}\,k(x - b)$ y $y = a\cos k(x - b)$ son curvas de tipo seno y tipo coseno trasladadas horizontalmente por una cantidad $|b|$. Estarán trasladadas hacia la derecha si $b > 0$ o hacia la izquierda si $b < 0$. El número b es el **corrimiento de fase.** Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

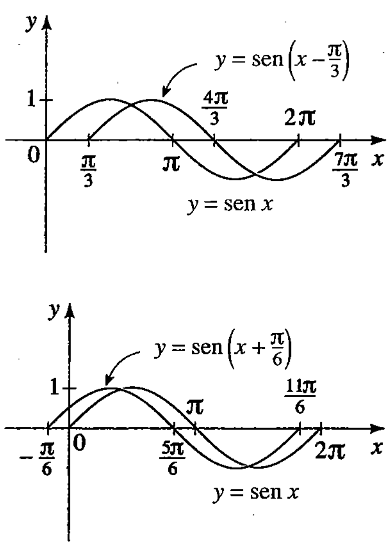


FIGURA 11

CURVAS TIPO SENO Y COSENO TRASLADADAS

Las curvas tipo seno y tipo coseno

$$y = a\,\text{sen}\,k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a\cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen una amplitud $|a|$, un periodo $2\pi/k$, y un corrimiento de fase b.

Un intervalo apropiado en el cual se puede trazar un periodo completo sería $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de

$$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{y} \qquad y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

se muestran en la figura 11.

EJEMPLO 4 ■ Una curva tipo seno trasladada

Determine la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, y trace la gráfica de un periodo completo.

SOLUCIÓN Tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = 3$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{corrimiento de fase} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{Corrimiento de } \tfrac{\pi}{4} \text{ hacia la derecha}$$

Dado que el corrimiento de fase es de $\pi/4$ y el periodo es π, un periodo completo ocurre en el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como ayuda para obtener la gráfica dividimos este intervalo en cuatro partes iguales, y después trazamos una curva tipo seno de amplitud 3 como en la figura 12.

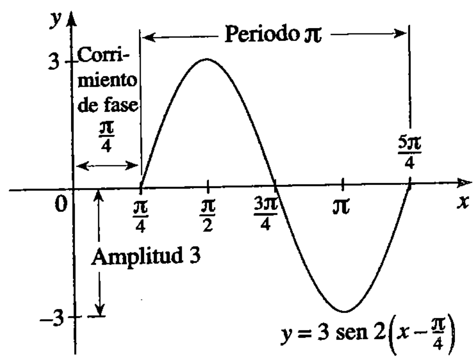


FIGURA 12 ■

EJEMPLO 5 ■ Una curva tipo coseno trasladada

Determine la amplitud, periodo y corrimiento de fase de

$$y = \frac{3}{4}\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y trace la gráfica de un periodo completo.

SOLUCIÓN Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$. Para ello factorizamos 2 de la expresión $2x + \dfrac{2\pi}{3}$ para obtener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Entonces tenemos

$$\text{Amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{Corrimiento de fase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Corrimiento de } \tfrac{\pi}{3} \text{ hacia la } \textit{izquierda}$$

De esta información se desprende que un periodo de esta curva tipo coseno empieza en $-\pi/3$ y termina en $-\pi/3 + \pi = 2\pi/3$. Para trazar la gráfica en el intervalo $[-\pi/3, 2\pi/3]$, dividimos este intervalo en 4 partes iguales y trazamos una curva tipo coseno de amplitud $\frac{3}{4}$ como se muestra en la figura 13.

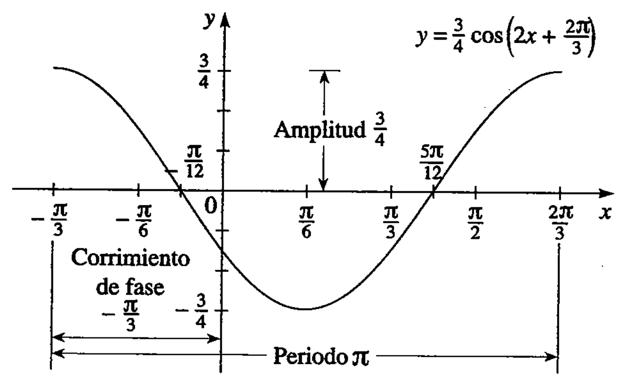


FIGURA 13

7.8 EJERCICIOS

1-10 ■ Trace la gráfica de la función

1. $y = 2 + \operatorname{sen} x$
2. $y = -\operatorname{sen} x$
3. $y = 1 - \cos x$
4. $y = -1 + \cos x$
5. $y = 2\cos x$
6. $y = -3\operatorname{sen} x$
7. $y = 3 + 3\cos x$
8. $y = 4 - 2\operatorname{sen} x$
9. $y = |\operatorname{sen} x|$
10. $y = |\cos x|$

11-18 ■ Determine la amplitud y el periodo de la función, y trace su gráfica.

11. $y = 3\operatorname{sen} x$
12. $y = -2\operatorname{sen} 2\pi x$
13. $y = 10\operatorname{sen} \frac{1}{2}x$
14. $y = \cos 10\pi x$
15. $y = -\cos \frac{1}{3}x$
16. $y = \operatorname{sen}(-2x)$
17. $y = 3\cos 3\pi x$
18. $y = 5 - 2\operatorname{sen} 2x$

19-32 ■ Determine la amplitud, periodo y corrimiento de fase de la función y trace la gráfica de un periodo completo.

19. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
20. $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
21. $y = -2\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
22. $y = 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
23. $y = 5\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
24. $y = -4\operatorname{sen} 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
25. $y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
26. $y = \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
27. $y = 3\cos \pi(x + \frac{1}{2})$
28. $y = 1 + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

29. $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

30. $y = 3 + 2\ \text{sen}\ 3(x+1)$

31. $y = \text{sen}\ (3x + \pi)$

32. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

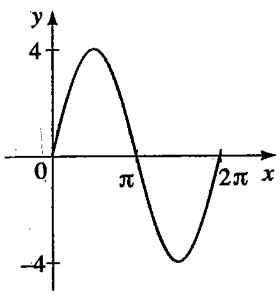
33-38 ▪ A continuación se da la gráfica de un periodo completo de una curva tipo seno o coseno

(a) Determine la amplitud, periodo y corrimiento de fase.

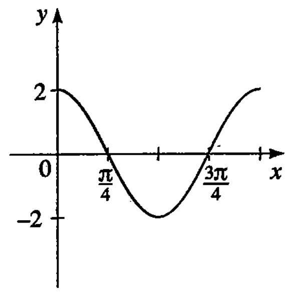
(b) Escriba una ecuación que represente a la curva en la forma

$$y = a\ \text{sen}\ k(x-b) \quad \text{o} \quad y = a\cos k(x-b)$$

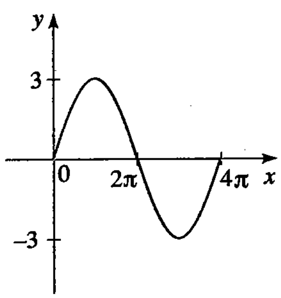
33.



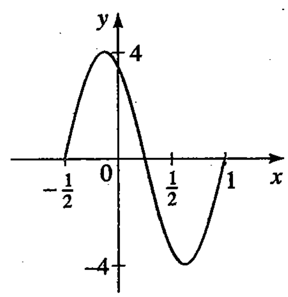
34.



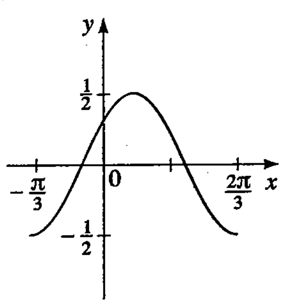
35.



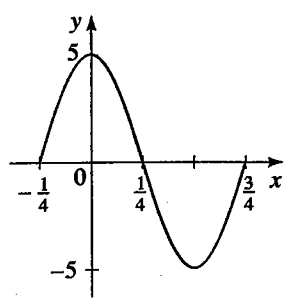
36.



37.



38.



39-46 ▪ Determine un rectángulo de visión apropiado para cada función y utilícelo para obtener la gráfica

39. $f(x) = \cos 100x$

40. $f(x) = 3\ \text{sen}\ 120x$

41. $f(x) = \text{sen}(x/40)$

42. $f(x) = \cos(x/80)$

43. $y = \tan 25x$

44. $y = \csc 40x$

45. $y = e^{\text{sen}\ 20x}$

46. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$

47-48 ▪ Obtenga las gráficas de f, g y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la suma gráfica.

47. $f(x) = x, \quad g(x) = \text{sen}\ x$

48. $f(x) = \text{sen}\ x, \quad g(x) = \text{sen}\ 2x$

49-54 ▪ Grafique las tres funciones en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

49. $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2\ \text{sen}\ x$

50. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x\cos x$

51. $y = e^x, \quad y = -e^x, \quad y = e^x\ \text{sen}\ 5\pi x$

52. $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1+x^2}$

53. $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

54. $y = \text{sen}\ 2\pi x, \quad y = -\text{sen}\ 2\pi x, \quad y = \text{sen}\ 2\pi x\ \text{sen}\ 10\pi x$

55-60 ▪ (a) Utilice un dispositivo graficador para graficar la función.
(b) Determine de la gráfica si la función es periódica, y de serlo determine el periodo.
(c) Determine de la gráfica si la función es impar, par o ninguna de ellas.

55. $y = |\text{sen}\ x|$

56. $y = \text{sen}\ |x|$

57. $y = e^{\text{sen}\ x}$

58. $y = 2^{\cos x}$

59. $y = \text{sen}^2 x$

60. $y = \text{sen}(x^2)$

61-64 ▪ Determine los valores máximo y mínimo de la función.

61. $y = \text{sen}\ x + \text{sen}\ 2x$

62. $y = x - 2\ \text{sen}\ x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

63. $y = 2\ \text{sen}\ x + \text{sen}^2 x$

64. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \text{sen}\ x}$

65-68 ▪ Determine todas las soluciones de la ecuación que ocurren en el intervalo $[0, \pi]$. Exprese cada respuesta correcta a 2 decimales.

65. $\cos x = 0.4$

66. $\tan x = 2$

67. $\cos x = 3$

68. $\cos x = x$

69. Suponga que $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$
   (a) ¿La función f es par, impar o ni una ni otra?
   (b) Determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de f.
   (c) Obtenga la gráfica de f en un rectángulo de visión apropiado.
   (d) Describa el comportamiento de la función conforme $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.
   (e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué ocurre cuando $x \to 0$?

7.9 MÁS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección dibujamos las gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, así como las transformaciones de estas funciones.

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

Empezamos enunciando las propiedades periódicas de estas funciones. Recuerde que el seno y el coseno tienen un periodo de 2π. Dado que la cosecante y la secante son, respectivamente, las recíprocas del seno y del coseno, también tienen un periodo de 2π. La tangente y la cotangente, sin embargo, tienen un periodo π

PROPIEDADES PERIÓDICAS

Las funciones tangente y cotangente tienen un periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen un periodo 2π

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	0.58
$\frac{\pi}{4}$	1.00
$\frac{\pi}{3}$	1.73
1.4	5.80
1.5	14.10
1.55	48.08
1.57	1,255.77
1.5707	10,381.33

Primero dibujamos la gráfica de la tangente. Como tiene un periodo π, solamente necesitamos trazar la gráfica en cualquier intervalo de longitud π y después repetir el patrón hacia la izquierda y hacia la derecha. Trazamos la gráfica en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Puesto que $\tan \pi/2$ y $\tan(-\pi/2)$ no están definidos, es necesario que tengamos cuidado al esbozar la gráfica en los puntos cercanos a $\pi/2$ y a $-\pi/2$. Conforme x se acerca a $\pi/2$ desde valores inferiores a $\pi/2$, el valor de $\tan x$ se hace grande. Para ver lo anterior, note que conforme x se acerca a $\pi/2$, $\cos x$ se acerca a 0 y $\operatorname{sen} x$ se acerca a 1 y por lo tanto $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ se agranda. En el margen se presenta una tabla de valores de $\tan x$ para x cercano a $\pi/2$ (≈ 1.570796).

Por lo tanto, escogiendo x lo suficientemente cercana a $\pi/2$ desde valores inferiores a $\pi/2$, podemos hacer el valor de $\tan x$ más grande que cualquier número positivo dado. De una manera similar, al escoger a x cercano a $-\pi/2$ desde valores mayores que $-\pi/2$, podemos hacer $\tan x$ más pequeño que cualquier número negativo dado. Utilizando la notación tenemos

$$\tan x \to \infty \quad \text{conforme} \quad x \to \frac{\pi}{2}^{-}$$

$$\tan x \to -\infty \quad \text{conforme} \quad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$$

Así, $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$ son asíntotas verticales (véase la sección 3.5). Con la información que tenemos hasta ahora, trazamos en la figura 1 la gráfica de $\tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$. La gráfica completa de la tangente se obtiene ahora utilizando el hecho de que la tangente es periódica con periodo π.

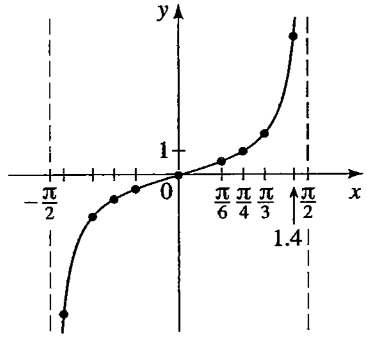


FIGURA 1
Un periodo de $y = \tan x$

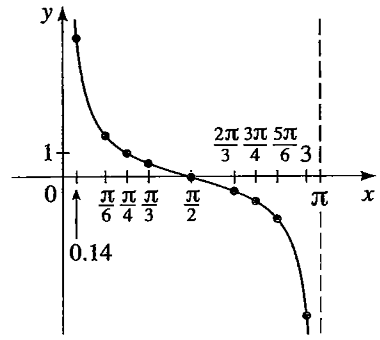


FIGURA 2
Un periodo de $y = \cot x$

La gráfica de $y = \cot x$ se traza en el intervalo $(0, \pi)$ utilizando un análisis similar (véase la figura 2). Dado que $\cot x$ no está definida para $x = n\pi$, siendo n un entero, su gráfica completa [en la figura 5(b)] tiene para estos valores asíntotas verticales.

Para trazar las gráficas para las funciones cosecante y secante, utilizamos las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por lo tanto, para graficar $y = \csc x$ obtenemos las recíprocas de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (véase la figura 3). De manera similar, para graficar $y = \sec x$ tomamos las recíprocas de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \cos x$ (véase la figura 4).

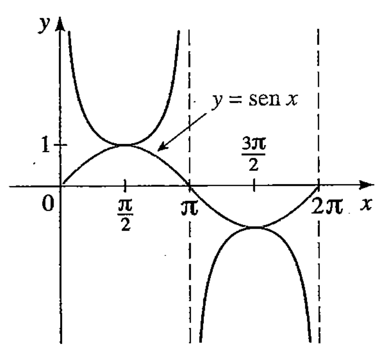


FIGURA 3
Un periodo de $y = \csc x$

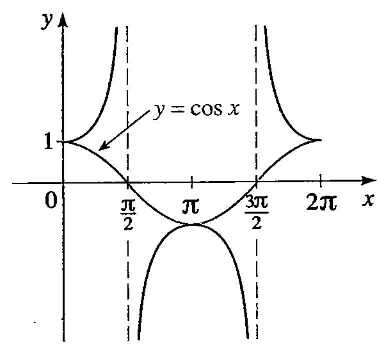


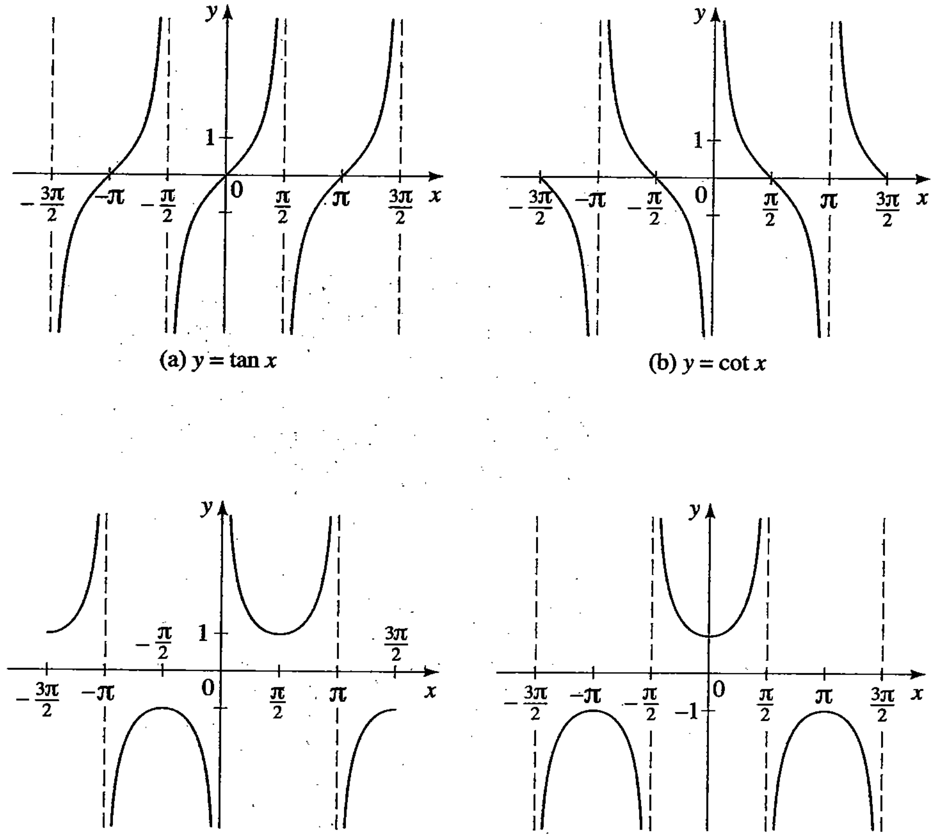
FIGURA 4
Un periodo de $y = \sec x$

Veamos más de cerca la gráfica de la función $y = \csc x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Necesitamos examinar los valores de la función cerca de 0 y de π, puesto que en estos valores $\operatorname{sen} x = 0$, y por tanto $\csc x$ no está definida. Vemos que

$$\csc x \to \infty \quad \text{conforme} \quad x \to 0^+$$

$$\csc x \to \infty \quad \text{conforme} \quad x \to \pi^-$$

Así, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales. En el intervalo $\pi < x < 2\pi$ la gráfica se traza de la misma manera. Los valores de $\csc x$ en este intervalo son los mismos a los correspondientes al intervalo $0 < x < \pi$, excepto por el signo (véase la figura 3). Ahora se obtiene la gráfica completa en la figura 5(c) partiendo del hecho de que la función cosecante es periódica con periodo 2π. Note que la gráfica tiene asíntotas verticales en los puntos donde sen $x = 0$, esto es, en $x = n\pi$, para n un entero.



(a) $y = \tan x$

(b) $y = \cot x$

(c) $y = \csc x$

(d) $y = \sec x$

FIGURA 5

La gráfica de $y = \sec x$ se obtiene de una manera similar. Observe que el dominio de $\sec x$ es el conjunto de todos los números reales diferentes de $x = (\pi/2) + n\pi$, siendo n un entero, por lo que la gráfica tiene asíntotas verticales en dichos puntos. La gráfica completa se muestra en la figura 5(d).

Resulta evidente que las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$ e $y = \csc x$ son simétricas respecto al origen, en tanto que $y = \sec x$ es simétrica respecto al eje y. Esto se debe a que la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares, en tanto que la secante es una función par.

GRÁFICAS CON FUNCIONES TANGENTE Y COTANGENTE

Veremos ahora gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente.

EJEMPLO 1 ■ Gráficas de curvas tipo tangente

Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones

(a) $y = 2\tan x$ (b) $y = -\tan x$

SOLUCIÓN Primero trazamos la gráfica de $y = \tan x$ y después la transformaremos según se requiera.

(a) Para graficar $y = 2\tan x$, multiplicamos por 2 la coordenada en y de cada punto de la gráfica de $y = \tan x$. La gráfica resultante se muestra en la figura 6(a).
(b) La gráfica de $y = -\tan x$ en la figura 6(b) se obtiene a partir de la de $y = \tan x$ reflejándola respecto al eje x.

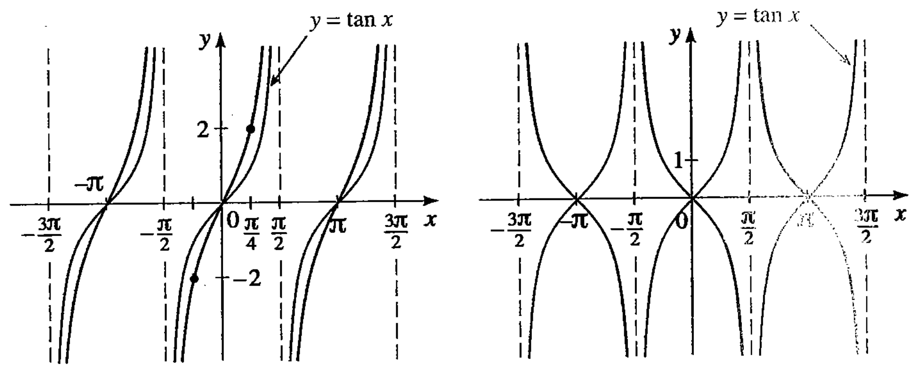


FIGURA 6

Puesto que las funciones tangente y cotangente tienen un periodo π, las funciones

$$y = a\tan kx \qquad y \qquad y = a\cot kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo conforme kx varía de 0 a π, esto es, para $0 \leqslant kx \leqslant \pi$ o para $0 \leqslant x \leqslant \pi/k$. Por lo tanto, cada una tiene un periodo π/k.

CURVAS TIPO TANGENTE Y COTANGENTE

Las funciones

$$y = a\tan kx \qquad y \qquad y = a\cot kx \qquad (k > 0)$$

tienen un periodo π/k.

Entonces, un periodo completo de las gráficas de estas funciones ocurre en cualquier intervalo de longitud π/k. Para trazar un periodo completo de estas gráficas, es conveniente seleccionar un intervalo entre asíntotas verticales:

Para graficar un periodo de $y = a\tan kx$, un intervalo apropiado sería $\left(-\dfrac{\pi}{2k}, \dfrac{\pi}{2k}\right)$.

Para graficar un periodo de $y = a \cot kx$, un intervalo apropiado sería $\left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$.

EJEMPLO 2 ■ Gráficas de curvas tipo tangente

Obtenga la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

(a) El periodo es $\pi/2$ y un intervalo apropiado sería $(-\pi/4, \pi/4)$. Los puntos extremos $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ son asíntotas verticales. Por lo tanto, en $(-\pi/4, \pi/4)$ trazamos un periodo completo de la función. La gráfica tiene la misma forma que la de la función tangente, pero está contraída horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$. Después repetimos dicha parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. Véase la figura 7(a).

(b) La gráfica es la misma que la del inciso (a), pero trasladada $\pi/4$ hacia la derecha, como se muestra en la figura 7(b).

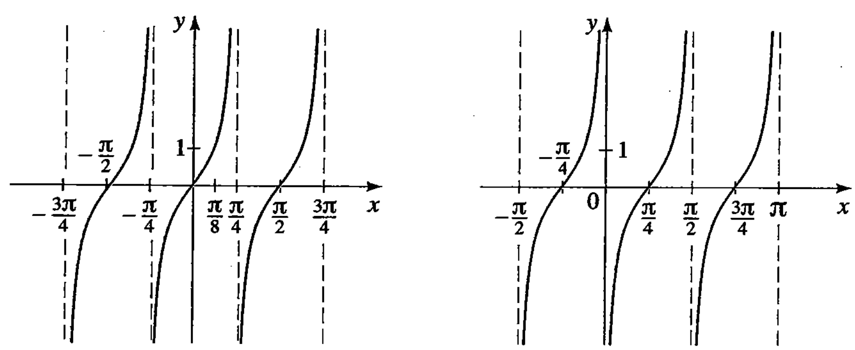


FIGURA 7 (a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan 2\left(x - \frac{p}{4}\right)$ ■

EJEMPLO 3 ■ Una curva tipo cotangente trasladada

Trace la gráfica de $y = 2 \cot\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

SOLUCIÓN Primero ponemos esta ecuación en la forma $y = a \cot k(x - b)$ al factorizar 3 de la expresión $3x - \dfrac{\pi}{2}$:

$$y = 2 \cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cot 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Por lo tanto, la gráfica es la misma que la de $y = 2 \cot 3x$, pero trasladada $\pi/6$ a la derecha. El periodo de $y = 2 \cot 3x$ es $\pi/3$, y un intervalo apropiado sería $(0, \pi/3)$. Para obtener el intervalo correspondiente de la gráfica deseada, trasladamos $\pi/6$ este intervalo hacia la derecha. Eso nos da

$$\left(0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Finalmente graficamos un periodo en la forma de cotangente en el intervalo ($\pi/6$, $\pi/2$) y repetimos dicha parte de la gráfica hacia la izquierda y hacia la derecha. Véase la figura 8.

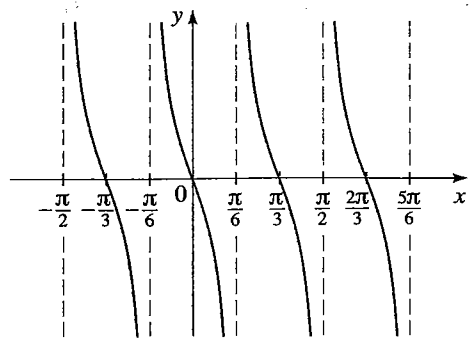


FIGURA 8
$y = 2\cot(3x - \frac{\pi}{2})$

GRÁFICAS CON FUNCIONES COSECANTE Y SECANTE

Ya hemos observado que las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno. Por lo que el resultado que sigue es la contraparte del resultado de las curvas tipo seno y coseno.

CURVAS TIPO COSECANTE Y SECANTE

Las funciones

$$y = a\csc kx \quad \text{y} \quad y = a\sec kx \qquad (k > 0)$$

tienen como periodo $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado en el cual se puede trazar un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

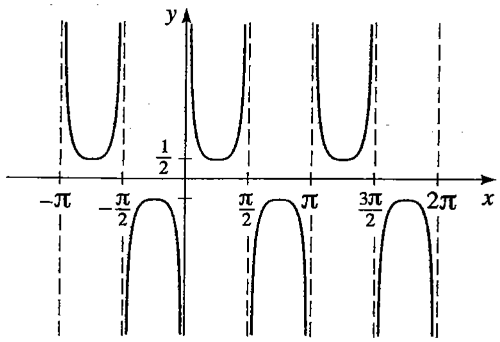
EJEMPLO 4 ■ **Gráficas de curvas cosecantes**

Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes

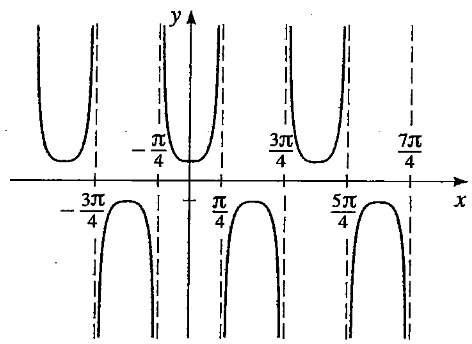
(a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ (b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

SOLUCIÓN

(a) El periodo es $2\pi/2 = \pi$. Un intervalo apropiado sería $[0, \pi]$ y las asíntotas se presentan en este intervalo siempre que sen $2x = 0$. Por lo que las asíntotas en este intervalo son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. Con esta información en el intervalo $[0, \pi]$ trazamos una gráfica con la misma forma general que la de un periodo de la función cosecante. La gráfica completa de la figura 9(a) se obtiene repitiendo esta parte de la gráfica hacia la izquierda y hacia la derecha.



(a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$



(b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

FIGURA 9

(b) Primero escribimos

$$y = \tfrac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\csc 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

De lo anterior vemos que la gráfica es la misma que en el inciso (a) pero trasladada $\pi/4$ hacia la izquierda. La gráfica se muestra en la figura 9(b). ■

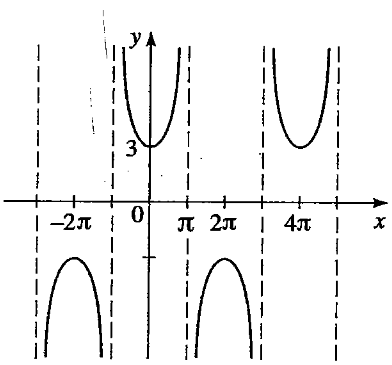


FIGURA 10
$y = 3\sec\frac{1}{2}x$

EJEMPLO 5 ■ Gráfica de una curva tipo secante

Trace la gráfica de $y = 3\sec\frac{1}{2}x$.

SOLUCIÓN El periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$. Un intervalo apropiado es $[0, 4\pi]$ y las asíntotas se encuentran en este intervalo siempre que $\cos\frac{1}{2}x = 0$. Por lo tanto, las asíntotas en este intervalo son $x = \pi, x = 3\pi$. Con esta información en el intervalo $[0, 4\pi]$ trazamos una gráfica con la misma forma general de un periodo de la función secante. La gráfica completa de la figura 10 se obtiene repitiendo esta parte de la gráfica hacia la derecha y hacia la izquierda. ■

7.9 EJERCICIOS

1-46 ■ Determine el periodo y trace la gráfica de la función

1. $y = 3\tan x$

2. $y = -3\tan x$

3. $y = \frac{1}{2}\tan x$

4. $y = -\frac{1}{2}\tan x$

5. $y = 4\cot x$

6. $y = \frac{1}{4}\cot x$

7. $y = 2\csc x$

8. $y = \frac{1}{2}\csc x$

9. $y = 4\sec x$

10. $y = \frac{1}{4}\sec x$

11. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

12. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

13. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

14. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

15. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

16. $y = 2\csc\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

17. $y = \frac{1}{2}\sec\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

18. $y = 3\csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

19. $y = \tan 2x$

20. $y = \tan\frac{1}{2}x$

21. $y = \tan \pi x$

22. $y = \cot \dfrac{\pi}{2} x$

23. $y = \sec 2x$

24. $y = 5 \csc 3x$

25. $y = \csc 2x$

26. $y = \csc \frac{1}{2} x$

27. $y = 2 \tan 3x$

28. $y = 2 \tan \dfrac{\pi}{2} x$

29. $y = 5 \csc 3x$

30. $y = 5 \sec 2\pi x$

31. $y = \tan 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

32. $y = \csc 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

33. $y = \tan 2(x - \pi)$

34. $y = \sec 2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

35. $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

36. $y = \frac{1}{2} \tan (\pi x - \pi)$

37. $y = 2 \csc\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

38. $y = 2 \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

39. $y = 5 \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

40. $y = \frac{1}{2} \sec(2\pi x - \pi)$

41. $y = \tan\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

42. $y = \tan \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

43. $y = 3 \sec \pi\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

44. $y = \sec\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

45. $y = -2 \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

46. $y = 2 \csc(3x + 3)$

47. (a) Pruebe que si f es periódica con un periodo p, entonces $1/f$ también es periódica con un periodo p.
(b) Pruebe que tanto la cosecante como la secante tienen un periodo 2π.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

48. Fórmulas de reducción Use las gráficas de la figura 5 para explicar por qué son ciertas las siguientes fórmulas

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \csc x$$

7 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es el círculo unitario?
(b) Utilice un diagrama para explicar lo que significa el punto terminal determinado por un número real t.
(c) ¿Cuál es el número de referencia $\bar{t}$ asociado con t?
(d) ¿Qué funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes I, II, III y IV?

2. (a) ¿Qué es una función periódica?
(b) ¿Cuáles son los periodos de las 6 funciones trigonométricas?

3. (a) Explique la diferencia entre un ángulo positivo y uno negativo.
(b) ¿Cómo se forma un ángulo que mide 1 grado?
(c) ¿Cómo se forma un ángulo que mide 1 radián?
(d) ¿Cómo se define una medida en radianes de un ángulo θ?
(e) ¿Cómo se convierten grados a radianes?
(f) ¿Cómo se convierten radianes a grados?

4. (a) ¿Cuándo está un ángulo en posición estándar?
(b) ¿Cuándo son coterminales 2 ángulos?

5. ¿Qué significa resolver un triángulo?

6. Si θ es un ángulo en posición estándar, $P(x,y)$ es un punto en el lado terminal y r la distancia del origen a P, escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de θ.

EJERCICIOS

1. Se da un punto $P(x,y)$
(a) Demuestre que P está sobre el círculo unitario.
(b) Suponga que P es el punto terminal determinado por t. Obtenga sen t, cos t y tan t.

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2-3 ■ Se da un número real t.
(a) Determine el número de referencia para t.
(b) Determine el punto terminal $P(x, y)$ en el círculo unitario determinado por t.
(c) Calcule las 6 funciones trigonométricas de t.

2. $t = \dfrac{5\pi}{3}$ **3.** $t = \dfrac{\pi}{3}$

4-6 ■ Determine el valor de la función trigonométrica. De ser posible dé el valor exacto; de lo contrario use una calculadora para dar un valor aproximado correcto a 5 decimales.

4. (a) $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$ (b) $\cos\dfrac{3\pi}{4}$

5. (a) sen 1.1 (b) cos 1.1

6. (a) $\tan\dfrac{\pi}{3}$ (b) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7-8 ■ Use las identidades fundamentales para escribir la primera expresión en función de la segunda.

7. $\tan t$, $\operatorname{sen} t$; t en el cuadrante IV

8. $\sec t$, $\operatorname{sen} t$; t en el cuadrante II

9-12 ■ Determine los valores de las funciones trigonométricas restantes en t partiendo de la información dada.

9. $\operatorname{sen} t = \frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$

10. $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$, $\cos t > 0$

11. Si $\tan t = \frac{1}{4}$ y t está en el cuadrante III, determine $\sec t + \cot t$.

12. Si $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$ y t está en el cuadrante IV, determine $\csc t + \sec t$.

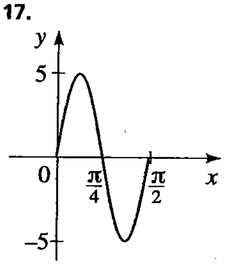
13-16 ■ (a) Determine la amplitud del periodo y corrimiento de fase de la función y (b) trace la gráfica.

13. $y = 10\cos\frac{1}{2}x$ **14.** $y = 4\operatorname{sen} 2\pi x$

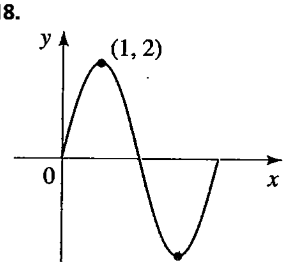
15. $y = -\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ **16.** $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

17-18 ■ Se muestra la gráfica de un periodo de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ o bien $y = a\cos k(x - b)$. Determine la función

17.



18.



19. Determine la medida en radianes que corresponda a la medida que se da en grados.

(a) 70° (b) 420° (c) −240° (d) −40°

20. Determine la medida en grados que corresponda a la medida que se da en radianes.

(a) $\dfrac{7\pi}{2}$ (b) $-\dfrac{\pi}{3}$

(c) $\dfrac{7\pi}{4}$ (d) 2.1

21. Encuentre la longitud de un arco de círculo de radio 8 m si el arco subtiende un ángulo central de 1 radián.

22. Determine la medida de un ángulo central θ en un círculo con radio de 5 pies si el ángulo es subtendido por un arco de longitud de 7 pies.

23. Un arco circular de longitud 100 pies subtiende un ángulo central de 70°. Determine el radio del círculo.

24. ¿Cuántas revoluciones efectuará una rueda de automóvil de 28 pulgadas de diámetro en un lapso de media hora si el automóvil está viajando a 60 millas/h?

25. Nueva York y Los Angeles están a 2,450 millas de distancia. Encuentre el ángulo que subtiende el arco entre estas dos ciudades y el centro de la Tierra. (El radio de la Tierra es de 3,960 millas.)

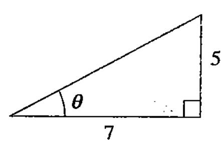
26. Determine el área de un sector con un ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio de 5 m.

27. Determine el área de un sector con un ángulo central de 52° en un círculo de radio de 200 pies.

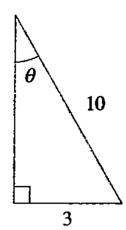
28. Un sector de círculo de radio de 25 pies tiene un área de 125 pies^2. Determine el ángulo central del sector.

29-30 ■ Determine los valores de las 6 relaciones trigonométricas de θ.

29.

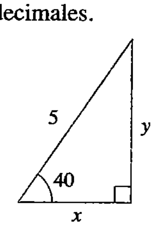


30.

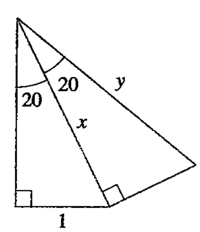


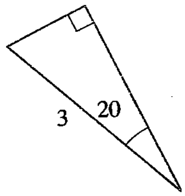
31-32 ■ Determine los lados indicados como x y y, correctos a dos decimales.

31.



32.

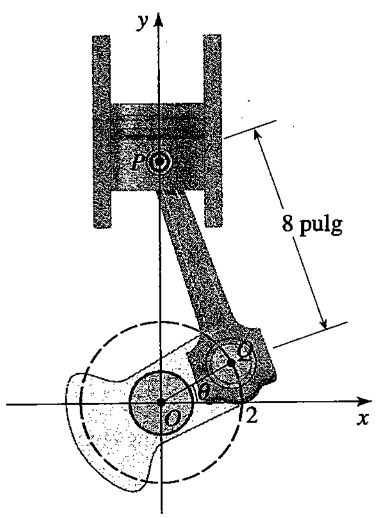


33. 

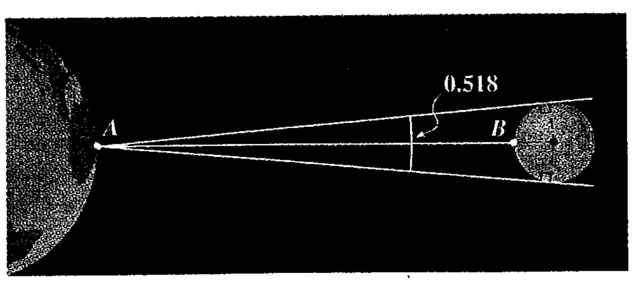
34. La torre más alta del mundo es la torre CN en Toronto, Canadá. Desde 1 km de distancia de su base, el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es de 28.81°. Encuentre la altura de la torre.

35. Encuentre el perímetro de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio de 8 m.

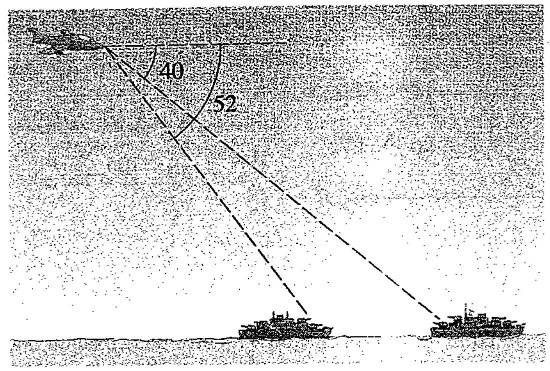
36. Los pistones en el motor de un automóvil se mueven hacia arriba y hacia debajo de manera repetida para hacer girar el cigüeñal, tal y como se muestra. Determine la altura del punto P por encima del centro O del cigüeñal en función del ángulo θ.



37. Visto desde la Tierra, el ángulo subtendido por la Luna llena es de 0.518°. Utilice esta información y el hecho que la distancia AB de la Tierra a la Luna es de 236,900 millas para determinar el radio de la Luna.



38. Un piloto mide los ángulos de depresión de dos barcos como 40° y 52° (véase la figura). Si el piloto está volando a una elevación de 35,000 pies, determine la distancia entre ambos barcos.



39-44 ■ Encuentre el valor exacto.

39. sen 315°

40. $\csc \dfrac{9\pi}{4}$

41. tan(−135°)

42. $\cos \dfrac{5\pi}{6}$

43. $\cot\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$

44. sen 405°

45. Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en la posición estándar si el punto $(-5,12)$ está en el lado terminal de θ.

46. Encuentre sen θ si θ está en posición estándar y su lado terminal cruza el círculo de radio 1 centrado en el origen en el punto $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$.

47. Determine el ángulo agudo formado por la recta $y - \sqrt{3}\,x + 1 = 0$ y el eje x.

48. Determine las seis razones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar si su lado terminal está en el cuadrante III y es paralelo a la recta $4y - 2x - 1 = 0$.

49-50 ■ Escriba la primera expresión en función de la segunda para θ en el cuadrante que se da.

49. $\tan\theta$, $\cos\theta$; θ en el cuadrante II

50. $\sec\theta$, sen θ; θ en el cuadrante III

51-52 ■ Determine las 6 funciones trigonométricas de θ a partir de la información que se da.

51. $\tan\theta = \sqrt{7}/3$, $\sec\theta = \frac{4}{3}$

52. $\sec\theta = \frac{41}{40}$, $\csc\theta = -\frac{41}{9}$

53. Si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ para θ en el cuadrante II, determine sen $\theta + \cos\theta$.

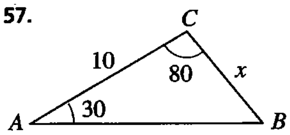
54. Si sen $\theta = \frac{1}{2}$ para θ en el cuadrante I, determine $\tan\theta + \sec\theta$.

55. Si $\tan\theta = -1$, determine $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

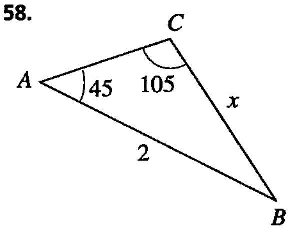
56. Si $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$, y $\pi/2 < \theta < \pi$, determine sen 2θ.

57-58 ■ Encuentre el lado identificado como x.

57.

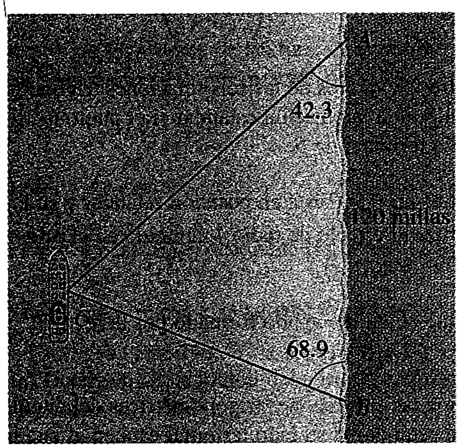


58.

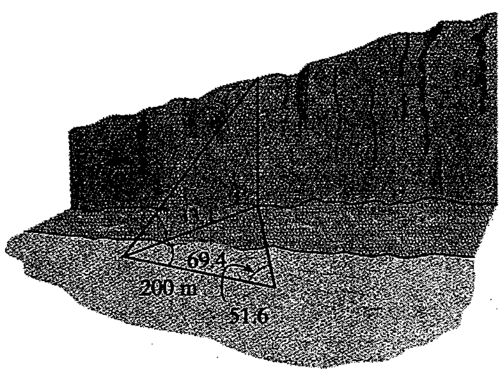


59. Un barco navega en el océano y recorre una costa en línea recta. Los puntos A y B están separados 120 millas en la costa. Se determina que $\angle A = 42.3°$ y $\angle B = 68.9°$. Calcule cuál es la distancia más corta del barco a la costa.

60. Para medir la altura de un acantilado inaccesible del lado opuesto de un río, un topógrafo toma las medidas que se muestran. Determine cuál es la altura del acantilado.



61. Determine el área de un triángulo de lados de longitud 8 y 14 m



y el ángulo formado por ellos de 35°.

62. Determine el área de un triángulo con lados de longitud 5, 6 y 8.

63-66 ■ Determine el periodo y trace la gráfica.

63. $y = 3\tan x$

64. $y = \tan \pi x$

65. $y = 2\cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

66. $y = \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

67-72 ■
(a) Utilice un dispositivo graficador para graficar la función.
(b) Determine a partir de la gráfica si la función es periódica y, de ser así, determine el periodo.
(c) Determine a partir de la gráfica si la función es impar, par o ninguna de las dos.

67. $y = |\cos x|$

68. $y = \operatorname{sen}(\cos x)$

69. $y = \cos(2^{0.1x})$

70. $y = 1 + 2^{\cos x}$

71. $y = e^{-|x|}\cos 3x$

72. $y = \ln x \operatorname{sen} 3x \quad (x > 0)$

73-76 ■ Grafique las 3 funciones en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

73. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \operatorname{sen} x$

74. $y = 2^{-x}, \quad y = -2^{-x}, \quad y = 2^{-x}\cos 4\pi x$

75. $y = x, \quad y = \operatorname{sen} 4x, \quad y = x + \operatorname{sen} 4x$

76. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

77-81 ■ Determine los valores máximo y mínimo de la función

77. $y = \cos x + \operatorname{sen} 2x$

78. $y = \cos x + \operatorname{sen}^2 x$

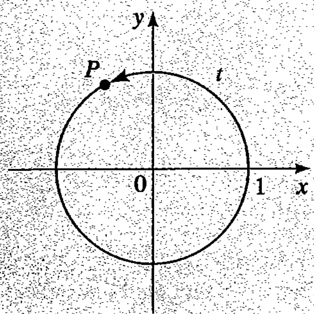
79. Obtenga las soluciones de sen $x = 0.3$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

80. Determine las soluciones de $\cos 3x = x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

81. Suponga que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

(a) ¿La función f es par, impar o ninguna de las dos?
(b) Obtenga las intersecciones con el eje x de la gráfica de f.
(c) Trace la gráfica de f en un rectángulo de visión apropiado.
(d) Describa el comportamiento de la función conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$.
(e) Note que $f(x)$ no está definido cuando $x = 0$. ¿Qué pasa conforme $x \to 0$?

7 EXAMEN



1. El punto $P(x,y)$ está en el círculo unitario en el cuadrante IV. Si $x = \frac{12}{13}$, determine y.

2. El punto P en la figura a la izquierda tiene coordenada y de valor $\frac{4}{5}$. Determine lo siguiente.
   (a) $\operatorname{sen} t$ (b) $\cos(-t)$
   (c) $\tan(\pi - t)$ (d) $\sec(\pi + t)$

3. Exprese $\tan t$ en términos de $\operatorname{sen} t$ para t en el cuadrante II.

4. Si $\cos t = -\frac{8}{17}$ y t está en el cuadrante III, determine $\tan t \cot t + \csc t$.

5-6 ■ **(a)** Determine la amplitud, periodo y corrimiento de fase de la función, **(b)** trace la gráfica.

5. $y = 2\cos 3x$

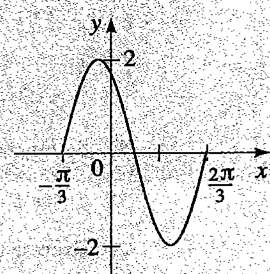
6. $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

7-8 ■ Determine el periodo y trace la gráfica de la función.

7. $y = -\cos 2x$

8. $y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

9. La gráfica que se muestra es un periodo de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$. Determine la función.



10-11 ■
(a) Use un dispositivo de graficación para graficar la función en un rectángulo de visión apropiado.
(b) A partir de la gráfica determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.
(c) Determine los valores máximo y mínimo de la función.

10. $y = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$

11. $y = e^{-\operatorname{sen} 3x}$

12. Suponga que $y_1 = \cos(\operatorname{sen} x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(\cos x)$.
   (a) Trace las gráficas de y_1 y y_2 en el mismo rectángulo de visión.
   (b) Determine el periodo de cada una de estas funciones partiendo de su gráfica.
   (c) Encuentre una desigualdad entre sen (cos x) y cos (sen x) que sea válida para toda x.

13. Encuentre las medidas en radianes que corresponden a las medidas en grados de 300° y −18°.

14. Determine las medidas en grados que corresponden a las medidas en radianes $\frac{5\pi}{6}$ y 2.4.

15. Encuentre el valor exacto de cada uno.

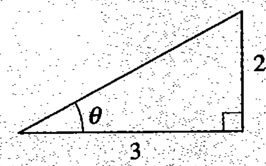
(a) sen 405°

(b) tan(−150°)

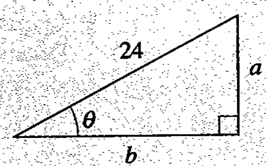
(c) $\sec \frac{5\pi}{3}$

(d) $\csc \frac{5\pi}{2}$

16. Determine $\tan \theta + \text{sen}\ \theta$ para el ángulo θ mostrado.



17. Determine las longitudes a y b que se muestran en la figura en función de θ.

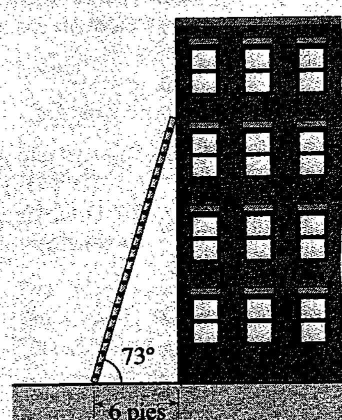


18. Si $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante III, determine $\tan \theta \cot \theta + \csc \theta$.

19. Si sen $\theta = \frac{5}{13}$ y $\tan \theta = -\frac{5}{12}$, determine sen θ.

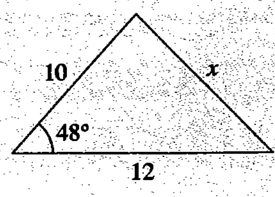
20. Exprese $\tan \theta$ en términos de $\sec \theta$ para θ en el cuadrante II.

21. La base de la escalera de la figura está a 6 pies del edificio y el ángulo formado por la escalera y el piso es de 73°. ¿Hasta qué altura del edificio alcanza la escalera?

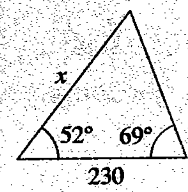


22-25 ■ Determine el lado identificado como x.

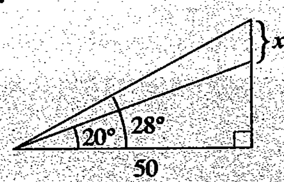
22.



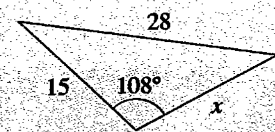
23.

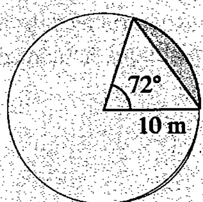


24.



25.



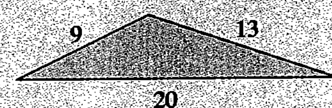


26-27 ■ Se refieren a la figura de la izquierda.

26. Determine el área de la región sombreada.

27. Determine el perímetro de la región sombreada.

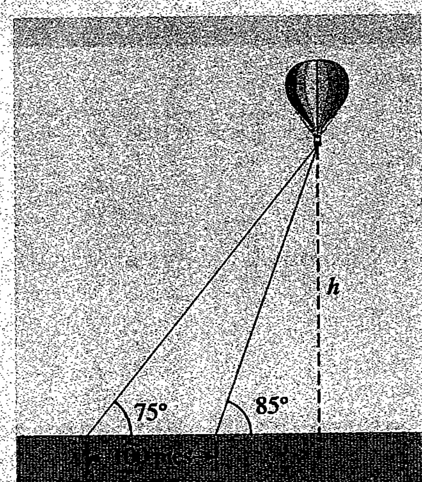
28-29 ■ Se refieren a la figura a la derecha.



28. Determine el ángulo opuesto al lado más largo.

29. Encuentre el área del triángulo.

30. Dos cables sujetan un globo al piso como se muestra. ¿Cuál es la altura del globo sobre el suelo?



8

TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

Las identidades trigonométricas se usan para analizar cantidades dirigidas, o vectores. La trayectoria de este bote de vela se determina descomponiendo las fuerzas vectoriales del viento y la corriente que actúan sobre él.

La función de las matemáticas para determinar respuestas suele ser menos importante que su función para comprender.

BEN NOBLE

En el capítulo anterior estudiamos las propiedades gráficas y geométricas de las funciones trigonométricas, y en éste estudiaremos los aspectos algebraicos de la trigonometría, esto es, expresiones de simplificación y factorización, y la solución de ecuaciones donde intervienen funciones trigonométricas. Las herramientas básicas del álgebra y la trigonometría son las identidades trigonométricas. Presentaremos identidades para funciones trigonométricas de sumas y diferencias de números reales, fórmulas para ángulos múltiples y otras identidades relacionadas, que se usan para estudiar números complejos, vectores y geometría analítica.

8.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Comenzaremos esta sección repasando algunas de las identidades trigonométricas básicas que ya estudiamos.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades de paridad

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades nos permiten escribir la misma expresión en distintas formas. Con frecuencia es posible reformular una expresión de apariencia complicada en una forma mucho más simple, como demuestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 ■ Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $(1 + \operatorname{sen} x)(\sec x - \tan x)$.

SOLUCIÓN Aplicaremos las identidades fundamentales.

$$\begin{aligned}
(1 + \operatorname{sen} x)(\sec x - \tan x) &= (1 + \operatorname{sen} x)\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) && \text{Identidades recíprocas}\\
&= (1 + \operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) && \text{Denominador común}\\
&= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} && \text{Diferencia de cuadrados}\\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos x} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 ■ Simplificación por combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

SOLUCIÓN Combinaremos las fracciones usando un denominador común.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}\theta(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Denominador común}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Desarrolle}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta && \text{Simplifique y aplique la identidad recíproca}
\end{aligned}$$

■

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Muchas identidades son consecuencia de las identidades fundamentales. En los ejemplos que siguen aprenderemos cómo demostrar que una ecuación trigonométrica es una identidad, y en el proceso veremos cómo descubrir nuevas identidades.

Primero debemos decir que es fácil decidir cuándo una ecuación dada *no es* una identidad. Todo lo que necesitamos es demostrar que la ecuación no es válida para algún valor de la o las variables. Así, la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, se transforma un lado de esa ecuación para llegar a obtener el otro, en una serie de pasos, cada uno de los cuales en sí mismo es una identidad.

LINEAMIENTOS PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. Se elige un lado de la ecuación y la escribe. El objetivo es transformarlo y obtener el otro. Por lo general, es más fácil comenzar con el lado más complicado.

2. Se usa el álgebra y las identidades conocidos para transformar el lado con el que se comenzó. Se ponen las expresiones fraccionarias con un denominador común, se factorizan y aplican las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.

3. Algunas veces se aconseja reformular todas las funciones en términos de senos y cosenos.

EJEMPLO 3 ■ Demostración de una identidad trigonométrica

Verifique la identidad $\cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

SOLUCIÓN El lado izquierdo parece más complicado, por lo que comenzaremos con él y trataremos de transformarlo en el lado derecho.

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\ &= 1 - \cos^2\theta && \text{Desarrolle} \\ &= \operatorname{sen}^2\theta = \text{LD} && \text{Identidad pitagórica} \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 3, no es fácil ver cómo cambiar el lado derecho para llegar al lado izquierdo, pero definitivamente sí es posible. Tan sólo hay que observar que cada uno de los pasos es reversible. En otras palabras, si partimos de la última expresión de la demostración y avanzamos hacia atrás, por los pasos, el lado derecho se transforma en el izquierdo. Sin embargo, es probable que el lector concuerde en que es más difícil demostrar la identidad de esta manera. Es por ello que lo mejor es cambiar el lado más complicado de la identidad para llegar al más sencillo.

EJEMPLO 4 ■ Demostración de una identidad combinando fracciones

Comprobar la identidad

$$2\tan x\sec x = \frac{1}{1-\operatorname{sen}x} - \frac{1}{1+\operatorname{sen}x}$$

SOLUCIÓN Al encontrar un denominador común y combinar las fracciones del lado derecho de esta ecuación, llegamos a

$$\begin{aligned}
\text{LD} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Denominador común} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplifique} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorice} \\
&= 2 \tan x \sec x = \text{LI} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

■

En el ejemplo 5 introduciremos "algo adicional" en el problema, multiplicaremos numerador y denominador por una expresión trigonométrica elegida de tal manera que se simplifique el resultado.

EJEMPLO 5 ■ Demostración de una identidad introduciendo algo adicional

Demuestre que la siguiente ecuación es una identidad:

$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen} z} = \sec^2 z + \tan z \sec z$$

SOLUCIÓN Comenzaremos con el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
\text{LI} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} z} \\
&= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} z} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} z}{1 + \operatorname{sen} z} && \text{Multiplique numerador y denominador por } 1 + \operatorname{sen} z \\
&= \frac{1 + \operatorname{sen} z}{1 - \operatorname{sen}^2 z} && \text{Desarrolle} \\
&= \frac{1 + \operatorname{sen} z}{\cos^2 z} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \frac{1}{\cos^2 z} + \frac{\operatorname{sen} z}{\cos^2 z} && \text{Separe en dos fracciones} \\
&= \frac{1}{\cos^2 z} + \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\,\frac{1}{\cos z} && \text{Factorice} \\
&= \sec^2 z + \tan z \sec z = \text{LD} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

■

A continuación describiremos otro método para demostrar que una ecuación es una identidad. Si se puede transformar cada lado de la ecuación por separado, mediante identidades, y llegar al mismo resultado, la ecuación es una identidad. El ejemplo 6 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 6 ■ Demostrar una identidad transformando ambos lados

Compruebe la identidad $\dfrac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1}$.

SOLUCIÓN Demostraremos la identidad cambiando cada lado por separado para llegar a la misma expresión. ¿Puede usted describir la razón de cada uno de los pasos siguientes?

$$\text{LI} = \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\text{LD} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

En consecuencia, LI = LD, por lo que la ecuación es una identidad. ■

Advertencia: Para demostrar una identidad *no sólo* se llevan a cabo las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, si comenzamos con una ecuación que no sea una identidad, como por ejemplo

(1) $$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y elevamos al cuadrado ambos lados, llegamos a

(2) $$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

que es una identidad. ¿Esto quiere decir que la ecuación original es una identidad? Naturalmente que no. En este caso, la operación de elevar al cuadrado no es **reversible**, en el sentido de que no podemos regresar a (1) a partir de (2) sacando raíces cuadradas (invirtiendo el procedimiento. Sólo las operaciones que son reversibles transforman, por necesidad, una identidad en una identidad.

Terminaremos esta sección describiendo la técnica de la *sustitución trigonométrica,* que aplicaremos para convertir expresiones algebraicas en expresiones trigonométricas. Esto suele ser útil en cálculo, por ejemplo, para determinar el área de un círculo o de una elipse.

EJEMPLO 7 ■ Sustitución trigonométrica

Sustituya sen θ en lugar de x en la expresión $\sqrt{1-x^2}$ y simplifique. Supondremos que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

SOLUCIÓN Al igualar $x = \operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Sustituya } x = \operatorname{sen}\theta \\
&= \sqrt{\cos^2\theta} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \cos\theta && \text{Saque raíz cuadrada}
\end{aligned}$$

La última igualdad es cierta, porque $\cos\theta \geq 0$, para los valores de θ que se manejan. ■

8.1 EJERCICIOS

1-6 ■ Escriba la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno, y simplifique.

1. $\cos x \tan x$
2. $\operatorname{sen} \theta \cos \theta \csc \theta$
3. $\sec^2 x - \tan^2 x$
4. $\dfrac{\tan x + \cot x}{\sec x \csc x}$
5. $\cos u + \tan u \operatorname{sen} u$
6. $\cos^2 x(1 + \tan^2 x)$

7-20 ■ Simplifique la expresión trigonométrica.

7. $\dfrac{\cos x \sec x}{\cot x}$
8. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$
9. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} y}{1 + \csc y}$
10. $\dfrac{\tan x}{\sec(-x)}$
11. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$
12. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$
13. $\dfrac{1 + \csc x}{\cos x + \cot x}$
14. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
15. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1 + \operatorname{sen} u}$
16. $\tan x \cos x \csc x$
17. $\dfrac{2 + \tan^2 x}{\sec^2 x} - 1$
18. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$
19. $\tan \theta + \cos(-\theta) + \tan(-\theta)$
20. $\dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x}$

21-82 ■ Compruebe la identidad.

21. $\operatorname{sen} \theta \cot \theta = \cos \theta$
22. $\dfrac{\tan x}{\sec x} = \operatorname{sen} x$
23. $\dfrac{\cos u \sec u}{\tan u} = \cot u$
24. $\dfrac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1$
25. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \sec y - \cos y$
26. $\dfrac{\cos v}{\sec v \operatorname{sen} v} = \csc v - \operatorname{sen} v$
27. $\operatorname{sen} B + \cos B \cot B = \csc B$
28. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos x + \operatorname{sen} x$
29. $\cot(-\alpha) \cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) = -\csc \alpha$
30. $\csc x[\csc x + \operatorname{sen}(-x)] = \cot^2 x$
31. $(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) = \cos^2 x$
32. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$
33. $(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta) = \dfrac{1}{\csc^2 \beta}$
34. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} = 1$
35. $\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$
36. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^4 = (1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x)^2$
37. $\dfrac{\sec t - \cos t}{\sec t} = \operatorname{sen}^2 t$
38. $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = (\sec x - \tan x)^2$
39. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 + \tan^2 y$
40. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$
41. $(\cot x - \csc x)(\cos x + 1) = -\operatorname{sen} x$
42. $\operatorname{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta$
43. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$
44. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1$
45. $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$
46. $\tan y + \cot y = \sec y \csc y$
47. $\dfrac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$
48. $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$
49. $\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} = \dfrac{-\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}$
50. $\dfrac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{sen} w + \cos w} = \dfrac{\tan w}{1 + \tan w}$
51. $\dfrac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t \cos t} = 2 + \sec t \csc t$
52. $\sec t \csc t(\tan t + \cot t) = \sec^2 t + \csc^2 t$
53. $\dfrac{1 + \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}$

54. $\dfrac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$

55. $\dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} = \sec x\,(\sec x + \tan x)$

56. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

57. $\sec v - \tan v = \dfrac{1}{\sec v + \tan v}$

58. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \cot A = \csc A$

59. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sec x + \csc x} = \operatorname{sen} x \cos x$

60. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2 \csc x$

61. $\dfrac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$ **62.** $\dfrac{\csc^2 x - \cot^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x$

63. $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u$

64. $\dfrac{\tan v \operatorname{sen} v}{\tan v + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan v - \operatorname{sen} v}{\tan v \operatorname{sen} v}$

65. $\sec^4 x - \tan^4 x = \sec^2 x + \tan^2 x$

66. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} = \sec \theta + \tan \theta$

67. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} = \dfrac{\operatorname{sen} \theta - \csc \theta}{\cos \theta - \cot \theta}$

68. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

69. $\dfrac{\cos^2 t + \tan^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \tan^2 t$

70. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \sec x \tan x$

71. $\dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \dfrac{1}{\sec x - \tan x} = 2 \sec x$

72. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4 \tan x \sec x$

73. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

74. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

75. $\dfrac{\sec u - 1}{\sec u + 1} = \dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$

76. $\dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

77. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$

78. $\dfrac{\tan v - \cot v}{\tan^2 v - \cot^2 v} = \operatorname{sen} v \cos v$

79. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = (\tan x + \sec x)^2$

80. $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$

81. $(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x$

82. $(\operatorname{sen} \alpha - \tan \alpha)(\cos \alpha - \cot \alpha) = (\cos \alpha - 1)(\operatorname{sen} \alpha - 1)$

83-88 ■ Haga la sustitución trigonométrica indicada en la ecuación algebraica correspondiente, y simplificar (véase el ejemplo 7). Suponga que $0 \leq \theta < \pi/2$.

83. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \operatorname{sen} \theta$

84. $\sqrt{1 + x^2}$, $x = \tan \theta$

85. $\sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sec \theta$

86. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$, $x = 2 \tan \theta$

87. $\sqrt{9 - x^2}$, $x = 3 \operatorname{sen} \theta$

88. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$, $x = 5 \sec \theta$

89-92 ■ Demuestre que la ecuación no es una identidad.

89. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$

90. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

91. $\sec^2 x + \csc^2 x = 1$

92. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \csc x + \sec x$

93-96 ■ Grafique f y g en el mismo rectángulo de visión. ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

93. $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $g(x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

94. $f(x) = \tan x(1 + \operatorname{sen} x)$, $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

95. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$, $g(x) = 1$

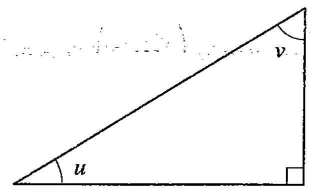
96. $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$, $g(x) = 2\cos^2 x - 1$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

97. **Identidades de cofunción** En el triángulo rectángulo de abajo, explique por qué

$$v = \frac{\pi}{2} - u$$

Explique cómo se pueden obtener las seis identidades de cofunción a partir de este triángulo, para $0 < u < \pi/2$.



98. **Gráficas e identidades** Suponga que traza dos funciones, f y g, en una calculadora gráfica, y que sus gráficas parecen idénticas en el rectángulo de visión. ¿Demuestra lo anterior que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Explique por qué.

8.2 FÓRMULAS PARA SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

A continuación deduciremos identidades para funciones trigonométricas de sumas y diferencias de argumentos.

FÓRMULAS PARA SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$ $\qquad$ $\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$

$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$ $\qquad$ $\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

$\tan(s + t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$ $\qquad$ $\tan(s - t) = \dfrac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$

■ **Demostración** Para demostrar la fórmula $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$ recurriremos a la figura 1. En ella se han marcado las distancias t, $s + t$ y $-s$ en el círculo unitario, comenzando en $P_0(1, 0)$ y terminando en Q_1, P_1 y Q_0, respectivamente. Las coordenadas de esos puntos son

$P_0(1, 0)$ $\qquad$ $Q_0(\cos(-s), \operatorname{sen}(-s))$

$P_1(\cos(s + t), \operatorname{sen}(s + t))$ $\qquad$ $Q_1(\cos t, \operatorname{sen} t)$

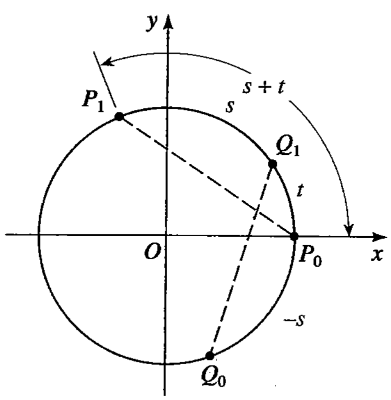


FIGURA 1

Ya que $\cos(-s) = \cos s$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen} s$, entonces el punto Q_0 tiene las coordenadas $Q_0(\cos s, -\operatorname{sen} s)$. Observe que las distancias entre P_0 y P_1 y entre Q_0 y Q_1, son iguales, medidas a lo largo del arco del círculo. Como arcos iguales subtienden cuerdas iguales, entonces $d(P_0, P_1) = d(Q_0, Q_1)$. Al aplicar la fórmula de la distancia obtenemos

$$\sqrt{[\cos(s+t)-1]^2+[\operatorname{sen}(s+t)-0]^2}=\sqrt{(\cos t-\cos s)^2+(\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} s)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados y desarrollamos:

suman 1

$$\cos^2(s+t)-2\cos(s+t)+1+\operatorname{sen}^2(s+t)$$

$$=\cos^2 t-2\cos s\cos t+\cos^2 s+\operatorname{sen}^2 t+2\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t+\operatorname{sen}^2 s$$

suman 1

suman 1

Aplicamos tres veces la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1$, para obtener

$$2-2\cos(s+t)=2-2\cos s\cos t+2\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t$$

Por último, restando 2 de ambos lados y dividiéndolos entre –2, llegamos a

$$\cos(s+t)=\cos s\cos t-\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t$$

que demuestra la fórmula de una suma (o adición) para el coseno.

La fórmula para el coseno de una resta (o sustracción) de ángulos se obtiene reemplazando a t por $-t$ en la fórmula de una suma como sigue:

$$\cos(s-t)=\cos(s+(-t))$$

$$=\cos s\cos(-t)-\operatorname{sen} s\operatorname{sen}(-t) \qquad \text{Fórmula de suma para el coseno}$$

$$=\cos s\cos t+\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t \qquad \text{Identidades de paridad}$$

Esto demuestra la fórmula del coseno de una resta. Véase los ejercicios 46 y 47 para la demostración de las demás fórmulas de adición. □

EJEMPLO 1 ■ Aplicación de las fórmulas de suma y resta de ángulos

Determine el valor exacto de cada expresión: (a) $\cos 75°$ (b) $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

SOLUCIÓN

(a) Observamos que $75° = 45° + 30°$. Como se conocen los valores exactos del seno y el coseno de 45° y 30°, aplicamos la fórmula del coseno de suma de ángulos para obtener

$$\cos 75°=\cos(45°+30°)$$

$$=\cos 45°\cos 30°-\operatorname{sen} 45°\operatorname{sen} 30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(b) En vista de que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ la fórmula del coseno de una resta da como resultado

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 ■ Aplicación de la fórmula de seno de una suma

Calcule el valor exacto de la expresión sen 20° cos 40° + cos 20° sen 40°.

SOLUCIÓN En esta expresión reconocemos al lado derecho de la fórmula del seno de una suma, con $s = 20°$ y $t = 40°$. Por tanto,

$$\operatorname{sen} 20° \cos 40° + \cos 20° \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen}(20° + 40°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

EJEMPLO 3 ■ Demostrar una identidad

Demuestre la identidad de cofunción: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

SOLUCIÓN Según la fórmula del coseno de una resta,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u\\ &= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 ■ Demostrar una identidad

Verifique la identidad: $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$.

SOLUCIÓN Comenzamos con el lado derecho, y al aplicar la fórmula de la tangente de una suma, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{LD} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}\\ &= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \text{LI}\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo es una aplicación característica en cálculo de las fórmulas de suma y resta.

EJEMPLO 5 ■ Una identidad del cálculo

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)
\end{aligned}$$ ■

EXPRESIONES DE LA FORMA $A \operatorname{sen} x + B \cos x$

Escribir expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$ en términos de una sola función trigonométrica, aplicando la fórmula del seno de una suma. Por ejemplo, examinemos la expresión

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

Si definimos $\phi = \pi/3$, entonces $\cos \phi = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} \phi = \sqrt{3}/2$, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x &= \cos \phi \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \phi \cos x \\
&= \operatorname{sen}(x + \phi) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Lo anterior es posible porque los coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{3}/2$ son el coseno y el seno de un mismo número, en este caso $\pi/3$. Esta idea la podemos aplicar en general para expresar $A \operatorname{sen} x + B \cos x$ en la forma $k \operatorname{sen}(x + \phi)$. Comenzamos multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{A^2 + B^2}$ para obtener

$$A \operatorname{sen} x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x\right)$$

Necesitamos un número ϕ que tenga las siguientes propiedades:

$$\cos \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

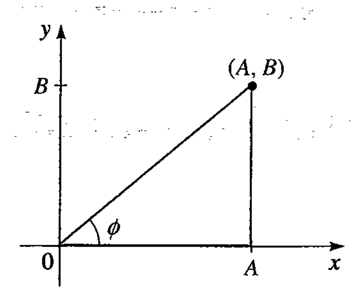


FIGURA 2

En la figura 2 se ve que el punto (A, B) en el plano determina un número ϕ que tiene precisamente esa propiedad. Con esta ϕ:

$$A \operatorname{sen} x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\,(\cos\phi \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi \cos x)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(x + \phi)$$

Hemos demostrado el teorema siguiente:

SUMAS DE SENOS Y COSENOS

Si A y B son números reales,

$$A \operatorname{sen} x + B \cos x = k \operatorname{sen}(x + \phi)$$

en donde $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ y ϕ satisface lo siguiente:

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLO 6 ■ Suma de términos seno y coseno

Exprese $3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$ en la forma $k \operatorname{sen}(x + \phi)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el teorema anterior, $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. El ángulo ϕ tiene la propiedad que $\operatorname{sen}\phi = \frac{4}{5}$ y $\cos\phi = \frac{3}{5}$. Con una calculadora se ve que $\phi \approx 53.1°$. Entonces

$$3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x \approx 5 \operatorname{sen}(x + 53.1°)$$ ■

EJEMPLO 7 ■ Gráfica de una función trigonométrica

Exprese la función $f(x) = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$ en la forma $k \operatorname{sen}(x + \phi)$ y use la nueva forma para trazar una gráfica de la función.

SOLUCIÓN Como $A = -\sqrt{3}$ y $B = 1$, entonces $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$. El ángulo ϕ cumple con $\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}$ y $\cos\phi = -\sqrt{3}/2$. De acuerdo con los signos de esas cantidades concluimos que ϕ está en el cuadrante II. Por consiguiente, $\phi = 2\pi/3$. Según el teorema anterior:

$$f(x) = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 2 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Usando la forma

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

vemos que la gráfica es una curva senoide, con amplitud 2, periodo $2\pi/2 = \pi$ y desplazamiento de fase $-\pi/3$. Esa gráfica se ve en la figura 3. ■

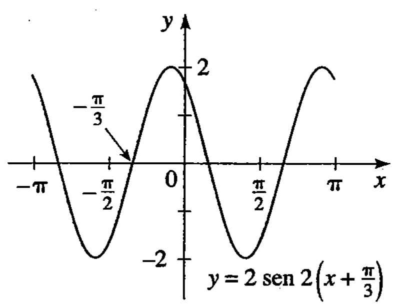


FIGURA 3

8.2 EJERCICIOS

1-6 ■ Use la fórmula de suma o resta para calcular el valor exacto de la expresión, como se hizo en el ejemplo 1.

1. sen 15° **2.** cos 165° **3.** tan 105°

4. $\cos\dfrac{\pi}{12}$ **5.** $\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}$ **6.** sen 75°

7-10 ■ Use la fórmula de suma o resta para escribir la expresión en forma de función trigonométrica de un número, y calcule su valor exacto.

7. sen 18° cos 27° + cos 18° sen 27°

8. $\cos\dfrac{3\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{21} + \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{7}\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{21}$

9. $\dfrac{\tan 73° - \tan 13°}{1 + \tan 73° \tan 13°}$

10. $\cos\dfrac{13\pi}{15}\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{15}\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$

11-14 ■ Demuestre la identidad de cofunción aplicando las fórmulas para suma y resta de ángulos.

11. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$ **12.** $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$

13. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$ **14.** $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

15-32 ■ Demuestre la identidad.

15. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ **16.** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

17. $\operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x$ **18.** $\cos(x - \pi) = -\cos x$

19. $\tan(x - \pi) = \tan x$

20. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

21. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

22. $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

23. $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2\cos x \operatorname{sen} y$

24. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y$

25. $\cot(x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

26. $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

27. $\tan x - \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$

28. $1 - \tan x \tan y = \dfrac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y}$

29. $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan y$

30. $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

31. $\operatorname{sen}(x + y + z) = \operatorname{sen} x \cos y \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \cos z + \cos x \cos y \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

32. $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

33-36 ■ Escriba la expresión sólo en términos de seno.

33. $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x$ **34.** $\operatorname{sen} x + \cos x$

35. $5(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$ **36.** $3\operatorname{sen}\pi x + 3\sqrt{3}\cos\pi x$

37-38 ■ Exprese la función sólo en términos de seno, y trace una gráfica de la función.

37. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

38. $g(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$

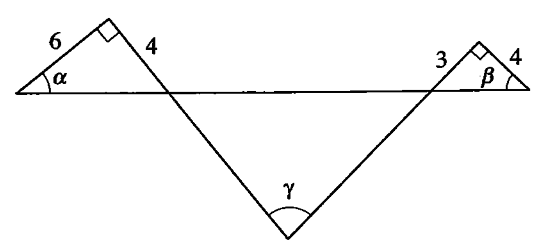
39. Demuestre que si $\beta - \alpha = \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) + \cos(x + \beta) = 0.$$

40. Sea $g(x) = \cos x$. Demuestre que

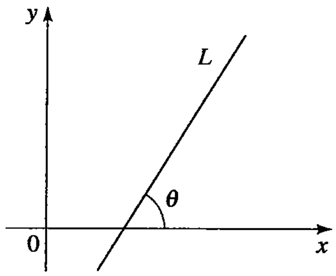
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

41. De acuerdo con la figura siguiente, demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$, y determine $\tan\gamma$.



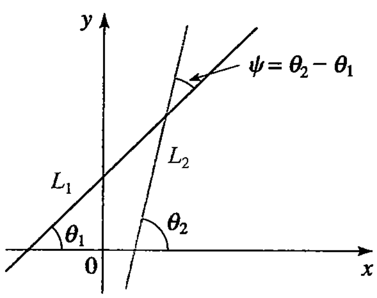
42. (a) Si L es una recta en el plano y θ es el ángulo que forma con el eje x, como se ve en la figura siguiente, demuestre que la pendiente de la recta se determina con:

$$m = \tan\theta$$



(b) Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas en el plano cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente. Sea ψ el ángulo agudo que forman esas dos rectas (véase la figura). Demuestre que

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



(c) Determine el ángulo agudo que forman las dos rectas $y = \frac{1}{3}x + 1$ y $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

(d) Demuestre que si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de una es el negativo del recíproco de la pendiente de la otra. [*Sugerencia:* primero deduzca una ecuación para $\cot\psi$.]

43-44 ■ (a) Grafique la función y suponga que se cumple lo especificado, y (b) demuestre que la suposición es cierta.

43. $y = \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

44. $y = -\frac{1}{2}[\cos(x + \pi) + \cos(x - \pi)]$

45. Un dispositivo de demora digital, reproduce una señal de entrada repitiéndola determinado tiempo después de recibirla. Si ese aparato recibe la nota pura $f_1(t) = 5 \operatorname{sen} t$ y repite la nota pura $f_2(t) = 5\cos t$, el sonido combinado será $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

(a) Grafique $y = f(t)$ y observe que la gráfica tiene la forma de una curva senoide $y = k \operatorname{sen}(t + \phi)$.

(b) Determine k y ϕ.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

46. Fórmula del seno de una suma En el texto sólo demostramos las fórmulas del coseno de una suma o resta. Partir de esas fórmulas, y de las identidades de cofunción

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para demostrar la fórmula del seno de una suma. [*Sugerencia:* para comenzar, aplique la primera identidad de cofunción para escribir

$$\operatorname{sen}(s + t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s + t)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)$$

y aplique la fórmula del coseno de una resta.]

47. Fórmula de la tangente de una suma Aplique las fórmulas del coseno y de seno de una suma para demostrar la fórmula de la tangente de una suma. [*Sugerencia:* use

$$\tan(s + t) = \frac{\operatorname{sen}(s + t)}{\cos(s + t)}$$

y divida el numerador y el denominador entre $\cos s \cos t$.]

8.3 FÓRMULAS PARA ÁNGULO DOBLE, MITAD DE ÁNGULO Y PRODUCTO-SUMA

Las identidades que describiremos en esta sección son consecuencia de las fórmulas de una suma. Las **fórmulas de ángulo doble** nos permiten determinar los valores de las funciones trigonométricas de $2x$ a partir de sus valores para x. Las **fórmulas de mitad de ángulo** relacionan los valores de las funciones trigonométricas de $\frac{1}{2}x$ con sus valores para x. Las **fórmulas de producto-suma** relacionan los productos de senos y cosenos con sumas de senos y cosenos.

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

En el siguiente cuadro se encuentran fórmulas que son consecuencia de las fórmulas de una suma de ángulos, demostradas en la sección anterior.

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

■ **Demostración** En la fórmula del seno de una suma, al hacer $x = y$, se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen}(x + x) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \end{aligned}$$

También, si $x = y$ en la fórmula del coseno de una suma,

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

La segunda y tercera fórmulas del cos $2x$ se obtienen a partir de la que acabamos de demostrar, y de la identidad pitagórica. Sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ se obtiene

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

La tercera fórmula se obtiene de la misma manera, al sustituir $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Por último, la fórmula de la tangente de un ángulo doble se obtiene al hacer $x = y$ en la fórmula de la tangente de una suma. □

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) A él se debe la aplicación más poderosa de las funciones trigonométricas (véase la nota al margen en la página 378). Mediante sumas de esas funciones describió fenómenos físicos como la transmisión del sonido y el flujo del calor.

Fourier quedó huérfano siendo joven, y fue educado en una escuela militar, donde llegó a ser profesor de matemáticas a los 20 años. Después fue profesor en la Escuela Politécnica, pero renunció a este empleo para acompañar a Napoleón en su expedición a Egipto, donde se desempeñó como gobernador. De regreso a Francia, comenzó a experimentar con el calor. La Academia Francesa se rehusó a publicar sus primeros trabajos sobre este tema, por falta de rigor. Al final, Fourier llegó a ser secretario de la Academia, y con este puesto hizo publicar sus trabajos en su forma original. Debido posiblemente a su estudio del calor, y sus años en los desiertos de Egipto, se obsesionó en mantenerse caliente; usaba varias prendas superpuestas, aun en verano, y mantenía sus habitaciones a temperaturas insoportablemente altas. Es evidente que esos hábitos sobrecargaron su corazón y contribuyeron a su muerte, a los 63 años.

EJEMPLO 1 ■ Uso de las fórmulas de ángulo doble

Si $\cos x = -\frac{2}{3}$ y x está en el cuadrante II, determine sen $2x$ y $\cos 2x$.

SOLUCIÓN Al aplicar una de las fórmulas de ángulo doble se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Para aplicar la fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ necesitamos determinar primero sen x. Así,

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - (-\tfrac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

para lo cual hemos usado la raíz cuadrada positiva, porque sen x es positivo en el cuadrante II. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 ■ Una fórmula para ángulo triple

Escriba $\cos 3x$ en función de $\cos x$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x)\\ &= \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x && \text{Fórmula de una suma}\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2 \operatorname{sen} x \cos x) \operatorname{sen} x && \text{Fórmulas de ángulo doble}\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x && \text{Desarrolle}\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\,(1 - \cos^2 x) && \text{Identidad pitagórica}\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x && \text{Desarrolle}\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x && \text{Simplifique}\end{aligned}$$ ■

En el ejemplo 2 vemos que $\cos 3x$ se expresa como un polinomio en $\cos x$ de grado 3. La identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ muestra que $\cos 2x$ es un polinomio en $\cos x$ de grado 2. De hecho, para cualquier número natural n se puede escribir $\cos nx$ en forma de polinomio en $\cos x$ de grado n (véase el ejercicio 75). En general, no es cierto el resultado análogo para sen nx.

EJEMPLO 3 ■ Demostración de una identidad

Demuestre la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 4\cos x - \sec x$.

SOLUCIÓN Comenzaremos con el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}(x + 2x)}{\operatorname{sen} x \cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmula de una suma} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1) + \cos x(2 \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmulas de ángulo doble} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos x(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Separe fracciones} \\
&= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Simplifique} \\
&= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Separe fracciones} \\
&= 4\cos x - \sec x && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

■

FÓRMULAS DE MITAD DE ÁNGULO

Las siguientes fórmulas nos permiten escribir cualquier expresión trigonométrica donde intervengan potencias pares de seno y coseno sólo en función del coseno a la primera potencia. Esta técnica es importante en cálculo. Las fórmulas de mitad de ángulo son consecuencia inmediata de las siguientes fórmulas.

FÓRMULAS PARA DISMINUIR POTENCIAS

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

■ **Demostración** La primera fórmula se obtiene despejando a $\operatorname{sen}^2 x$ de la fórmula de ángulo doble $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. De igual manera, la segunda fórmula se obtiene despejando a $\cos^2 x$ de la fórmula de ángulo doble con $2x = 2\cos^2 x - 1$.

La última fórmula es consecuencia de las dos primeras y de las identidades recíprocas, como se ve a continuación:

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}{\dfrac{1+\cos 2x}{2}} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

□

EJEMPLO 4 ■ Disminución de potencias en una expresión trigonométrica

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en función del coseno a la primera potencia.

SOLUCIÓN Se aplican en forma repetida las fórmulas para disminuir potencias.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1-\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\
&= \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\cos 4x = \tfrac{1}{8}(1-\cos 4x)
\end{aligned}$$

Otra forma de llegar a esta identidad es aplicar la fórmula de ángulo doble, para el seno, en la forma $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Así

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

■

FÓRMULAS DE MITAD DE ÁNGULO

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$

La elección del signo + o − depende del cuadrante donde está $u/2$.

■ **Demostración** Se sustituye $x = u/2$ en las fórmulas para disminuir potencias, y se saca raíz cuadrada de ambos lados. Con esto se obtienen las primeras dos fórmulas de mitad de ángulo. En el caso de la tangente de la mitad de un ángulo

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{u}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \\
&= \pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)\left(\frac{1-\cos u}{1-\cos u}\right)} && \text{Multiplique el numerador y denominador por } 1-\cos u \\
&= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos u)^2}{1-\cos^2 u}} && \text{Simplifique} \\
&= \pm\frac{|1-\cos u|}{|\operatorname{sen} u|} && \sqrt{A^2} = |A|
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $1 - \cos u$ es no negativo para todos los valores de u. También sucede que $\operatorname{sen} u$ y $\tan(u/2)$ siempre tienen el mismo signo. (Compruébelo.) En consecuencia,

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

La otra fórmula de la tangente de mitad de ángulo se deduce de la anterior multiplicando su numerador y su denominador por $1 + \cos u$. □

EJEMPLO 5 ■ Uso de una fórmula de mitad de ángulo

Calcule el valor exacto de sen 22.5°.

SOLUCIÓN Como 22.5° es la mitad de 45°, aplicaremos la fórmula del seno de mitad de ángulo, con $u = 45°$. Se escoge el signo + porque 22.5° está en el primer cuadrante.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{45°}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} && \text{Fórmula de mitad de ángulo} \\
&= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} && \cos 45° = \sqrt{2}/2 \\
&= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} && \text{Denominador común} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} && \text{Simplifique}
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 6 ■ Aplicación de una fórmula de mitad de ángulo

Determine $\tan(u/2)$ si $\operatorname{sen} u = \frac{2}{5}$ y u está en el cuadrante II.

SOLUCIÓN Para aplicar fórmulas de la tangente de mitad de ángulo se necesita determinar primero $\cos u$. Ya que el coseno es negativo en el cuadrante II, entonces

$$
\begin{aligned}
\cos u &= -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} \\
&= -\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}
\end{aligned}
$$

Así $$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$= \frac{1+\sqrt{21}/5}{\frac{2}{5}} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$ ■

FÓRMULAS DE PRODUCTO-SUMA

Es posible expresar el producto sen u cos v en forma de suma de funciones trigonométricas. Para comprobarlo veamos las fórmulas de la función seno de una suma y resta:

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

Al sumar los lados derecho e izquierdo de estas fórmulas se obtiene

$$\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$$

Dividimos entre 2 para llegar a la fórmula

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$

De igual manera, las otras 3 **fórmulas de producto a suma** son consecuencia de las fórmulas de una suma.

FÓRMULAS DE PRODUCTO-SUMA

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

EJEMPLO 7 ■ Expresar un producto de funciones trigonométricas como una suma

Exprese sen $3x$ sen $5x$ en forma de una suma de funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN Al aplicar la cuarta fórmula de producto a suma, con $u = 3x$ y $v = 5x$, y aprovechado que el coseno es una función par, llegamos a

$$\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x = \tfrac{1}{2}[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)]$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos(-2x) - \tfrac{1}{2}\cos 8x$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 8x$$ ■

También se aplican las fórmulas de producto a suma en su forma de suma a producto, ya que el lado derecho de cada una de las fórmulas de producto a suma es una suma, y el lado izquierdo es un producto. Por ejemplo, si definimos

$$u = \frac{x+y}{2} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{x-y}{2}$$

en la primera fórmula de producto a suma, obtendremos

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y]$$

por tanto

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Las 3 **fórmulas de suma a producto** restantes se deducen en forma parecida.

FÓRMULAS DE SUMA-PRODUCTO

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

EJEMPLO 8 ■ Expresar una suma de funciones trigonométricas como un producto

Escriba sen $7x$ + sen $3x$ como un producto de funciones.

SOLUCIÓN De acuerdo con la primera fórmula de suma a producto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x &= 2\operatorname{sen}\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2}\\ &= 2\operatorname{sen} 5x\cos 2x\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 ■ Demostrar una identidad

Compruebe la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$.

SOLUCIÓN Aplicamos al numerador la segunda fórmula de suma a producto, y la tercera fórmula al denominador.

$$\text{LI} = \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2\cos\dfrac{3x+x}{2}\operatorname{sen}\dfrac{3x-x}{2}}{2\cos\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2}} \qquad \text{Fórmulas de suma a producto}$$

$$= \frac{2\cos 2x \operatorname{sen} x}{2\cos 2x \cos x} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x = \text{LD} \qquad \text{Simplifique}$$

8.3 EJERCICIOS

1-6 ■ Determine sen $2x$, cos $2x$ y tan $2x$ a partir de la información respectiva.

1. $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I

2. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\csc x < 0$

3. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x en el cuadrante II

4. $\csc x = 4$, $\tan x < 0$

5. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, x en el cuadrante III

6. $\cot x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x > 0$.

7-12 ■ Aplique las fórmulas para disminuir potencias y escriba la expresión en términos de la primera potencia del coseno, como en el ejemplo 4.

7. $\operatorname{sen}^4 x$ **8.** $\cos^4 x$

9. $\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$ **10.** $\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x$

11. $\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x$ **12.** $\cos^6 x$

13-18 ■ Aplique una fórmula de medio ángulo, adecuada para calcular el valor exacto de la expresión.

13. sen 15° **14.** tan 15°

15. cos 22.5° **16.** $\tan \dfrac{\pi}{8}$

17. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}$ **18.** $\cos \dfrac{5\pi}{12}$

19-24 ■ Simplifique la expresión mediante una fórmula de ángulo doble o mitad de ángulo.

19. (a) $2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$ (b) $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$

20. (a) $\dfrac{2\tan 7°}{1 - \tan^2 7°}$ (b) $\dfrac{2\tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta}$

21. (a) $\cos^2 34° - \operatorname{sen}^2 34°$ (b) $\cos^2 5\theta - \operatorname{sen}^2 5\theta$

22. (a) $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$ (b) $2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

23. (a) $\dfrac{\operatorname{sen} 8°}{1 + \cos 8°}$ (b) $\dfrac{1 - \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 4\theta}$

24. (a) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

25-30 ■ Determine $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2}$ y $\tan\dfrac{x}{2}$ a partir de la información respectiva.

25. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $0° < x < 90°$

26. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $180° < x < 270°$

27. $\csc x = 3$, $90° < x < 180°$

28. $\tan x = 1$, $0° < x < 90°$

29. $\sec x = \frac{3}{2}$, $270° < x < 360°$

30. $\cot x = 5$, $180° < x < 270°$

31-34 ■ Escriba el producto en forma de suma de funciones.

31. $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$ **32.** $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x$

33. $3 \cos 4x \cos 7x$ **34.** $11 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{4}$

35-40 ■ Escriba la suma en forma de producto de funciones.

35. $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

36. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x$

37. $\cos 4x - \cos 6x$

38. $\cos 9x + \cos 2x$

39. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 7x$

40. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$

41-46 ■ Calcule el valor del producto o la suma.

41. $2 \operatorname{sen} 52.5° \operatorname{sen} 97.5°$

42. $3 \cos 37.5° \cos 7.5°$

43. $\cos 37.5° \operatorname{sen} 7.5°$

44. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

45. $\cos 255° - \cos 195°$

46. $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

47-64 ■ Demuestre la identidad.

47. $\cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x = \cos 10x$

48. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

49. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

50. $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

51. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} = 4 \cos x \cos 2x$

52. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \frac{1}{2} \sec x \csc x$

53. $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

54. $\cot 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

55. $\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

56. $4(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3 \operatorname{sen}^2 2x$

57. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

58. $\tan^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

59. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$

60. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{\cos 3x - \cos 7x} = \cot 2x$

61. $\dfrac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$

62. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

63. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$

64. $\tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$

65. Demuestre que $\operatorname{sen} 45° + \operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen} 75°$.

66. Demuestre que $\cos 87° + \cos 33° = \operatorname{sen} 63°$.

67. Demuestre la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x} = \tan 3x$$

68. Aplique n veces la identidad

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

para demostrar que

$$\operatorname{sen}(2^n x) = 2^n \operatorname{sen} x \cos x \cos 2x \cos 4x \cdots \cos 2^{n-1} x$$

69. (a) Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ y haga una conjetura.
(b) Demuestre la conjetura que hizo en la parte (a).

70. (a) Trace la gráfica de $f(x) = \cos 2x + 2 \operatorname{sen}^2 x$ y haga una hipótesis.
(b) Demuestre la conjetura que hizo en la parte (a).

71. Sea $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 7x$.
(a) Grafique $y = f(x)$.
(b) Compruebe que $f(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x \operatorname{sen} \frac{13}{2}x$.
(c) Grafique $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$ y $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$ junto con la gráfica de la parte (a), en el mismo rectángulo de visión. ¿Cómo se relacionen esas gráficas con la de f?

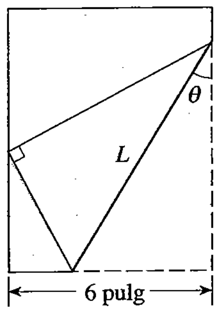
72. Cuando se tocan en forma simultánea dos notas puras con frecuencias cercanas, sus sonidos se interfieren produciendo *pulsaciones*, o *trémolos*; esto es, el volumen o la amplitud del sonido aumenta y disminuye en forma alternada. Si las dos notas se representan por

$$f_1(t) = \cos 11t \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = \cos 13t$$

el sonido que resulta es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
(a) Grafique la función $y = f(t)$.
(b) Compruebe que $f(t) = 2 \cos t \cos 12t$.
(c) Grafique $y = 2 \cos t$ y $y = -2 \cos t$, juntas con la gráfica de la parte (a), en el mismo rectángulo de visión. ¿Cómo describen esas gráficas la variación en la intensidad del sonido?

73. Doble la esquina inferior derecha de un rectángulo de papel de 6 pulgadas de ancho, hasta llegar a la orilla izquierda, como se ve en la figura siguiente. La longitud L del doblez depende del ángulo θ. Demuestre que

$$L = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}$$



74. Sean $3x = \pi/3$ y $y = \cos x$. Aplique el resultado del ejemplo 2 para demostrar que y satisface la ecuación

$$8y^3 - 6y - 1 = 0$$

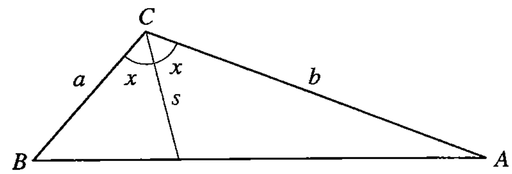
NOTA: Esta ecuación tiene raíces de cierta clase, usadas para demostrar que no se puede trisecar el ángulo $\pi/3$ sólo con regla y compás.

75. (a) Demuestre que hay un polinomio $P(t)$ de grado 4 tal que $\cos 4x = P(\cos x)$ (véase el ejemplo 2).
(b) Demuestre que hay un polinomio $Q(t)$ de grado 5 tal que $\cos 5x = Q(\cos x)$.

NOTA: En general, hay un polinomio $P_n(t)$ de grado n tal que $\cos nx = P_n(\cos x)$. Son los llamados polinomios de Tchebycheff, en honor a P. L. Tchebycheff, matemático ruso (1821–1894).

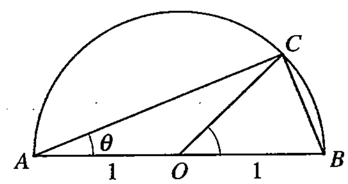
76. En el triángulo ABC (véase la figura) el segmento de recta s biseca al ángulo C. Demuestre que la longitud de s se determina con

$$s = \frac{2ab\cos x}{a + b}$$



DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

77. Demostración geométrica de una fórmula de ángulo doble
Use la figura para demostrar que $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$.



Sugerencia: Determine el área del triángulo ABC en dos formas distintas. Necesitará los siguientes resultados geométricos:

Un ángulo inscrito en un semicírculo es recto, por lo que $\angle ACB$ es ángulo recto.

El ángulo central subtendido por la cuerda de un círculo es el doble del ángulo extremo, subtendido por la misma cuerda en el círculo, por lo que $\angle BOC$ es 2θ.

8.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si f es una función biunívoca con dominio A y rango B, su inversa f^{-1} es la función cuyo dominio es B y rango A, definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

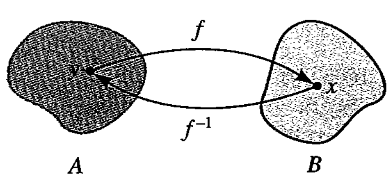


FIGURA 1
$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

En otras palabras, f^{-1} es la regla que invierte la acción de f. La figura 1 representa en forma gráfica las acciones de f y f^{-1}.

Para que una función tenga inversa, debe ser biunívoca. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, no tienen inversas. Sin embargo, es posible restringir los dominios de las funciones trigonométricas de tal manera que las funciones que resulten sean biunívocas.

FUNCIÓN SENO INVERSO

Primero veamos la función seno. Hay muchas formas de restringir el dominio del seno para que la nueva función sea biunívoca. Una forma natural de hacerlo es restringir el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La razón de esta elección es que el seno toma cada uno de sus valores exactamente una vez en este intervalo. Escribiremos Sen x (con S mayúscula) para representar a la nueva función, cuyo dominio es $[-\pi/2, \pi/2]$ y toma los mismos valores que los de sen x en este intervalo. En la figura 2 se ven las gráficas de sen x y de Sen x. La función Sen x es biunívoca (de acuerdo con la prueba de la recta horizontal) y, en consecuencia, tiene una inversa.

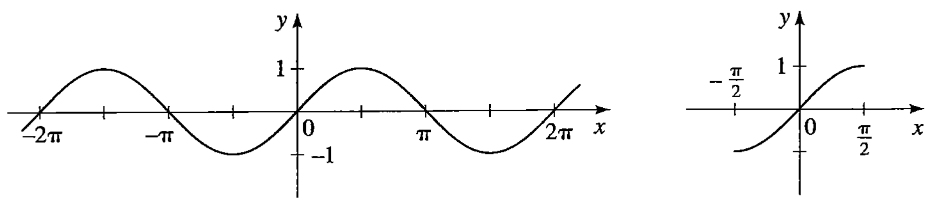


FIGURA 2 $y = \text{sen}\, x$ $y = \text{Sen}\, x$

La inversa de la función Sen x es la función $\text{Sen}^{-1}x$, definida por

$$\text{Sen}^{-1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{Sen}\, y = x$$

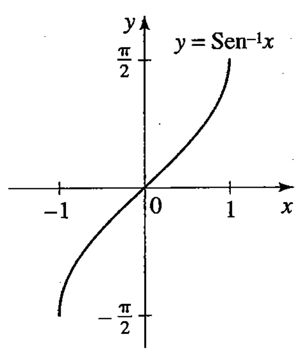


FIGURA 3

para $-1 \leqslant x \leqslant 1$, y $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. En la figura 3 se ve la gráfica de $y = \text{Sen}^{-1}x$; se obtiene reflejando la de $y = \text{Sen}\, x$ en la recta $y = x$. Se acostumbra escribir $\text{Sen}^{-1}x$ sencillamente como $\text{sen}^{-1}x$.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN SENO INVERSO

La **función seno inverso** es la función $\textbf{sen}^{-1}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, definida por

$$\text{sen}^{-1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}\, y = x.$$

También, a la función seno inverso se le llama **arco seno** o **arcoseno** y se representa por **arc sen** o por **arcsen**.

Así, $\text{sen}^{-1}x$ *es el número, en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *cuyo seno es* x. En otras palabras, $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$. De hecho, de acuerdo con las propiedades generales de las funciones inversas de la sección 2.7, se obtienen las siguientes relaciones.

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x \qquad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 1 ■ Evaluación de la función seno inverso

Determine (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$ y (c) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{2}$.

SOLUCIÓN

(a) El número, en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, cuyo sen es $\frac{1}{2}$, es $\pi/6$. Por consiguiente, $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \pi/6$.

(b) De nuevo, $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$ es el número, en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, cuyo seno es $-\frac{1}{2}$. Ya que $\operatorname{sen}(-\pi/6) = -\frac{1}{2}$, entonces $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$.

(c) Como $\frac{3}{2} > 1$ no está en el dominio de $\operatorname{sen}^{-1}x$, $\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{2}$ no está definido. ■

EJEMPLO 2 ■ Evaluación del seno inverso con una calculadora

Determine los valores aproximados de (a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.82)$ y (b) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}$.

SOLUCIÓN Ya que no hay múltiplo racional de π cuyo seno sea 0.82 o $\frac{1}{3}$, usaremos una calculadora para aproximar esos valores. Al oprimir las teclas $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$, o $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$, o $\boxed{\text{ARCSIN}}$ de la calculadora (estando en modo de radianes), se obtiene

(a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.82) \approx 0.96141$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.33984$ ■

EJEMPLO 3 ■ Composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Determine $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$.

SOLUCIÓN 1 Es fácil determinar $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$. De hecho, según las propiedades de las funciones inversas, su valor exacto es $\frac{3}{5}$. Para determinar $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$ lo reduciremos a un problema más fácil, expresando la función coseno en términos de la función seno. Sea $u = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$). Como $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$, el cos u es positivo, así escribimos

$$\cos u = +\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}$$

Por consiguiente,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5})}$$

$$= \sqrt{1 - (\tfrac{3}{5})^2} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}$$

SOLUCIÓN 2 Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Entonces, θ es el número, en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, cuyo seno es $\frac{3}{5}$. Imaginemos que θ es un ángulo, y trazamos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos, con cateto opuesto de longitud 3 e hipotenusa de longitud 5 (véase la figura 4). El cateto restante del triángulo se calcula con el teorema de Pitágoras, donde resulta 4. De acuerdo con la figura, vemos que

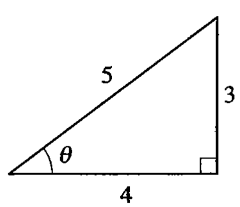


FIGURA 4

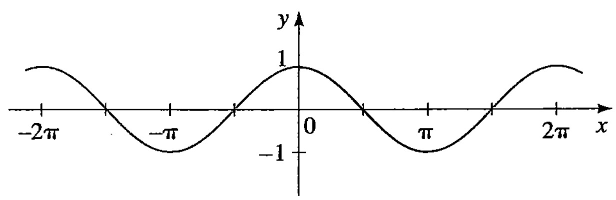
$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) = \cos\theta = \tfrac{4}{5}$$ ■

De la solución 2 del ejemplo 3 determinamos de inmediato, los valores de las demás funciones trigonométricas de $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$, con ayuda del triángulo. Así,

$$\tan(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) = \tfrac{3}{4} \qquad \sec(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) = \tfrac{5}{4} \qquad \csc(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) = \tfrac{5}{3}$$

FUNCIÓN COSENO INVERSO

Si se restringe el dominio de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$, la función que resulta es biunívoca y, en consecuencia, tiene una inversa. Elegimos este intervalo porque sobre éste el coseno toma exactamente una vez cada uno de sus valores (véase figura 5.)



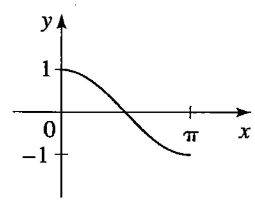


FIGURA 5 $y = \cos x$ $y = \cos x, 0 \leq x < \pi$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN COSENO INVERSO

La **función coseno inverso es la función** $\cos^{-1}$ que tiene como dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$ y está definida como sigue:

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x.$$

La función coseno inverso también se llama **arco coseno** o **arcocoseno** y se representa por **arccos** o **arc cos.**

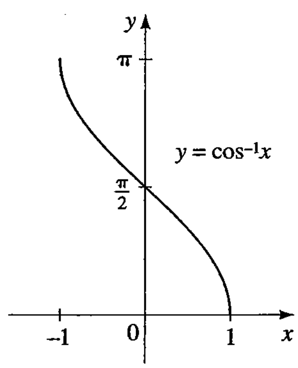


FIGURA 6

Así, $y = \cos^{-1} x$ *es el número, en el intervalo* $[0, \pi]$, *cuyo coseno es* x. Las siguientes relaciones son consecuencia de las propiedades de la función inversa.

$\cos(\cos^{-1} x) = x$	para $-1 \leq x \leq 1$
$\cos^{-1}(\cos x) = x$	para $0 \leq x \leq \pi$

En la figura 6 se ve la gráfica de $y = \cos^{-1} x$; se obtiene reflejando la de $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$, en la recta $y = x$.

EJEMPLO 4 ■ Evaluación de la función coseno inverso

Determine (a) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$, (b) $\cos^{-1} 0$ y (c) $\cos^{-1}\frac{5}{7}$.

SOLUCIÓN

(a) El número, en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/6$. Así, $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$.

(b) Como $\cos(\pi/2) = 0$, entonces $\cos^{-1} 0 = \pi/2$.

(c) Ya que no hay un múltiplo racional de π cuyo coseno sea $\frac{5}{7}$, con una calculadora se determina este valor aproximado: $\cos^{-1}\frac{5}{7} \approx 0.77519$. ■

EJEMPLO 5 ■ Composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)$ y $\tan(\cos^{-1}x)$ como expresiones algebraicas en x, para $-1 \leq x \leq 1$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = \cos^{-1}x$. Necesitamos expresar sen u y tan u en función de x. Como en el ejemplo 3, expresarmos el seno y la tangente en términos de coseno. Entonces

$$\operatorname{sen} u = \pm\sqrt{1-\cos^2 u} \qquad \text{y} \qquad \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u}$$

Para escoger los signos correctos, observamos que u está en el intervalo $[0, \pi]$ porque $u = \cos^{-1}x$. Como sen u es positivo en este intervalo, la elección correcta es el signo +. Ahora, al sustituir $u = \cos^{-1}x$ en las ecuaciones anteriores, y aplicando la relación $\cos(\cos^{-1}x) = x$ se obtiene

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1}x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

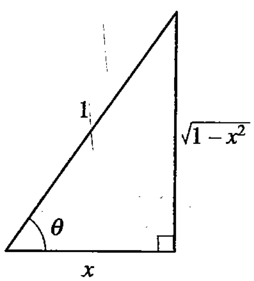


FIGURA 7
$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

SOLUCIÓN 2 Sea $\theta = \cos^{-1}x$, así que $\cos\theta = x$. En la figura 7 se trazó un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ, cateto adyacente x e hipotenusa 1. Según el teorema de Pitágoras, el cateto restante tiene longitud $\sqrt{1-x^2}$. De acuerdo con la figura,

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

■

NOTA En la solución 2 del ejemplo 5 parece que, por el triángulo que se trazó, el ángulo $\theta = \cos^{-1}x$ debe ser agudo. Pero el método del triángulo funciona para toda θ y toda x. Los dominios y rangos de las 6 funciones trigonométricas inversas se eligieron en tal forma que siempre se usa un triángulo para determinar $S(T^{-1}(x))$, siendo S y T cualquiera de las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 6 ■ Composición de una función trigonométrica y una inversa

Escriba $\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x para $-1 \leq x \leq 1$.

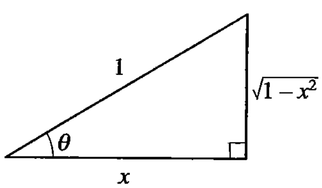


FIGURA 8
$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

SOLUCIÓN Sea $\theta = \cos^{-1}x$; se traza un triángulo como el de la figura 8. Se necesita determinar sen 2θ, pero de acuerdo con el triángulo sólo se puede determinar la función para θ y no para 2θ. En este caso se recurre a la identidad de ángulo doble. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x) &= \operatorname{sen} 2\theta \\
&= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta && \text{Fórmula de ángulo doble} \\
&= 2\sqrt{1-x^2}\,x && \text{De acuerdo con el triángulo de la figura} \\
&= 2x\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

■

FUNCIÓN TANGENTE INVERSA

Restringiremos el dominio de la función tangente al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para obtener una función biunívoca.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN TANGENTE INVERSA

La **función tangente inversa** es la función $\tan^{-1}$, con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$, definida por

$$\tan^{-1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x.$$

A la función tangente inversa se le llama **arco tangente**, y se le representa por **arc tan**, o por **arctan**.

Así, $\tan^{-1}x$ *es el número, en el intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$, *cuya tangente es* x. Las siguientes relaciones son consecuencia de las propiedades de las funciones inversas

$$\tan(\tan^{-1}x) = x \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

$$\tan^{-1}(\tan x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

La figura 9 muestra la gráfica de $y = \tan x$, en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, y la gráfica de su función inversa, $y = \tan^{-1}x$.

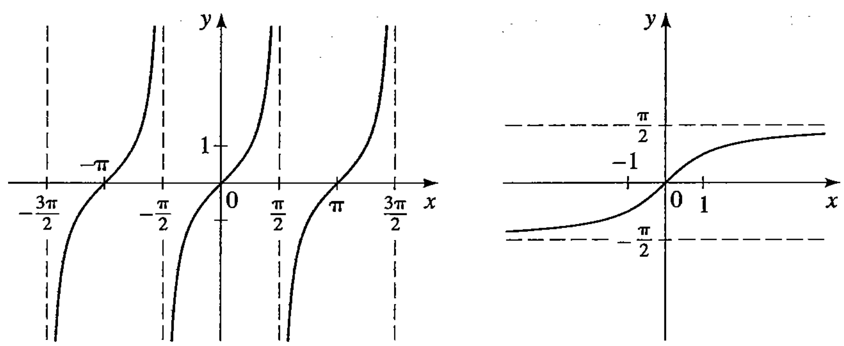


FIGURA 9 $y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad y = \tan^{-1}x$

EJEMPLO 7 ■ Evaluación de la función tangente inversa

Determine (a) $\tan^{-1}1$, (b) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ y (c) $\tan^{-1}(-20)$.

SOLUCIÓN

(a) El número, en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, cuya tangente es 1 es $\pi/4$. Así, $\tan^{-1}1 = \pi/4$.

(b) Como $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, entonces $\tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$.

(c) Con una calculadora se determina que $\tan^{-1}(-20) \approx -1.52084$. ■

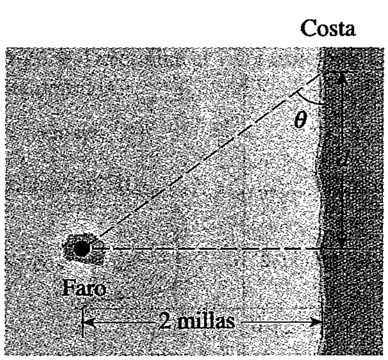


FIGURA 10

EJEMPLO 8 ■ El ángulo de un rayo de luz

Un faro está en un islote a 2 millas de una costa recta (véase la figura 10). Exprese el ángulo que forman el rayo de luz y la costa, en función de la distancia d, definida en la figura.

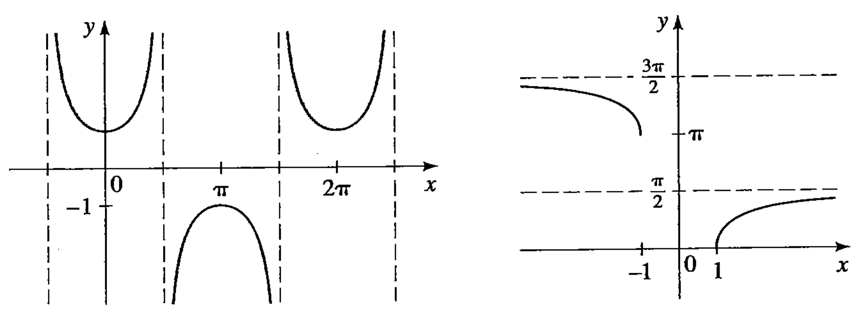
SOLUCIÓN De acuerdo con la figura, $\tan\theta = 2/d$. Sacando tangente inversa en ambos lados se obtiene

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Propiedad de simplificación.}$$

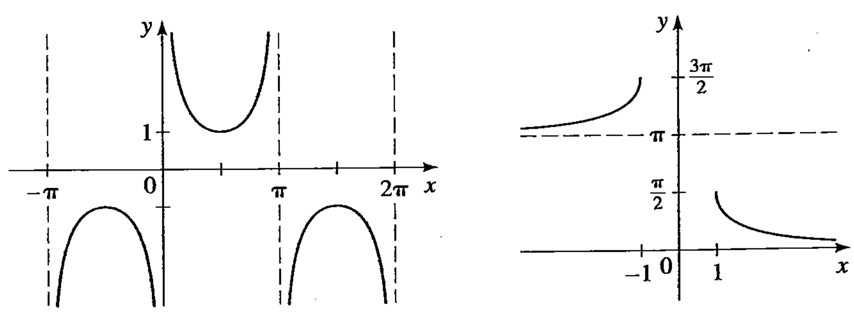
FUNCIONES SECANTE INVERSA, COSECANTE INVERSA Y COTANGENTE INVERSA

Para definir las funciones inversas de las funciones secante, cosecante y cotangente, se restringe el dominio de cada una a un conjunto en el cual sea biunívoca, y en el que tome todos sus valores. Aunque es adecuado cualquier intervalo que satisfaga esos criterios, se elige restringir los dominios de forma que se simplifique la elección del signo en cálculos donde intervengan funciones trigonométricas inversas. Estas elecciones también deben ser adecuadas para el cálculo. Lo anterior explica la restricción, aparentemente extraña, de los dominios de las funciones secante y cosecante. Terminaremos esta sección mostrando las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente, con sus dominios restringidos, y las gráficas de sus funciones inversas (figuras 11 a 13).



$y = \sec x,\ 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2},\ \pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \sec^{-1} x$

FIGURA 11
Función secante inversa



$y = \csc x,\ 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\ \pi < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \csc^{-1} x$

FIGURA 12
Función cosecante inversa

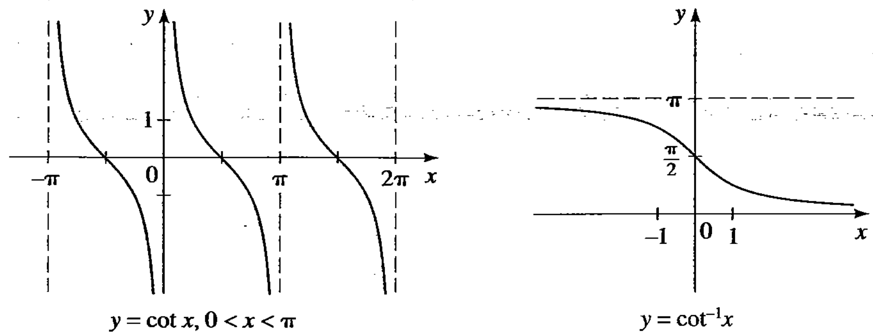


FIGURA 13
Función cotangente inversa

8.4 EJERCICIOS

1-8 ■ Determine el valor exacto de cada expresión, si es que está definida.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$ (b) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ (c) $\cos^{-1}2$

2. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (c) $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{3}$

5. (a) $\operatorname{sen}^{-1}1$ (b) $\cos^{-1}1$ (c) $\cos^{-1}(-1)$

6. (a) $\tan^{-1}1$ (b) $\tan^{-1}(-1)$ (c) $\tan^{-1}0$

7. (a) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\tan^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (c) $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

8. (a) $\operatorname{sen}^{-1}0$ (b) $\cos^{-1}0$ (c) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

9-10 ■ Con una calculadora, determine un valor aproximado de cada expresión, con 5 decimales de exactitud.

9. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.7688)$ (b) $\cos^{-1}(-0.5014)$

10. (a) $\cos^{-1}(0.3388)$ (b) $\tan^{-1}(15.2000)$

11-26 ■ Determine el valor exacto de la expresión, si es que está definida.

11. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3})$

12. $\cos(\cos^{-1}\frac{2}{3})$

13. $\tan(\tan^{-1}10)$

14. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}10)$

15. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

16. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right)$

17. $\operatorname{sen}^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

18. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$

19. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right)$

20. $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

21. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2})$

22. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}0)$

23. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

24. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

25. $\tan^{-1}\left(2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

26. $\cos^{-1}\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

27-38 ■ Evalúe la expresión trazando un triángulo, como en la solución 2 del ejemplo 3.

27. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{3}{5})$

28. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5})$

29. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}\frac{12}{5})$

30. $\cos(\tan^{-1}5)$

31. $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{13})$

32. $\csc(\cos^{-1}\frac{7}{25})$

33. $\cos(\tan^{-1}2)$

34. $\cot(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3})$

35. $\operatorname{sen}(2\cos^{-1}\frac{3}{5})$

36. $\tan(2\tan^{-1}\frac{5}{13})$

37. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$

38. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{3}{5})$

39-46 ■ Transforme la expresión en una expresión algebraica en x.

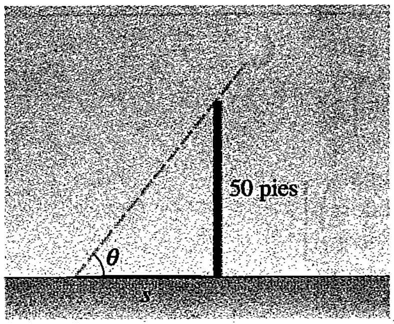
39. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **40.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

41. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **42.** $\cos(\tan^{-1}x)$

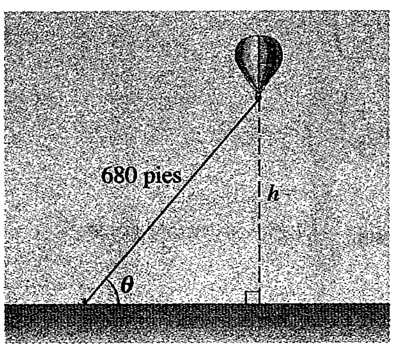
43. $\cos(2\tan^{-1}x)$ **44.** $\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1}x)$

45. $\cos(\cos^{-1}x + \operatorname{sen}^{-1}x)$ **46.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x - \operatorname{sen}^{-1}x)$

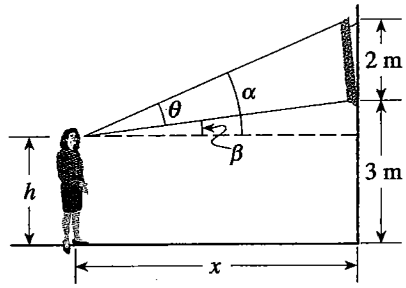
47. Un poste de 50 pies de altura produce una sombra de longitud s, como se ve en la figura. Exprese el ángulo de elevación, θ, del sol, en función de la longitud s de la sombra.



48. Una cuerda de 680 pies sujeta un globo de aire caliente. Exprese el ángulo θ de la figura en función de la altura h.



49. Una pintura de 2 m de alto cuelga en un museo, y su borde inferior está a 3 m sobre el piso. La altura a los ojos de una persona es h metros sobre el piso, parada a x metros de distancia, directamente frente al cuadro; el tamaño de éste, como lo ve la persona, está determinado por el ángulo θ que abarca la pintura en los ojos del espectador (véase la figura). Cuanto mayor es θ, el tamaño aparente de la pintura es mayor. El ángulo θ depende de la distancia x. En otras palabras, el ángulo θ es función de x.



(a) Demuestre que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 + (3-h)(5-h)}\right)$$

[*Sugerencia:* aplique la fórmula de la tangente de una resta de ángulos, y el hecho de que $\theta = \alpha - \beta$.]

(b) Suponga que la altura a los ojos del espectador es $h = 2$ m. Calcule el ángulo θ (en grados) que subtiende la pintura para $x = 0.5, 2$ y 5 m.

50-51 ■ (a) Grafique la función y haga una conjetura, y (b) demuestre que su conjetura es válida.

50. $y = \tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ **51.** $y = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$

52-53 ■ (a) Con una graficadora determine todas las soluciones de la ecuación, con dos decimales de exactitud, y (b) determine la solución exacta.

52. $\operatorname{sen}^{-1}x - \cos^{-1}x = 0$ **53.** $\tan^{-1}x + \tan^{-1}2x = \dfrac{\pi}{4}$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

54. Dos composiciones distintas Las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x) \quad \text{y} \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$$

se simplifican a x para valores determinados de x. Pero no son iguales para toda x. Trace las gráficas de f y de g para demostrar que las funciones son distintas. (Imagine con cuidado el dominio y el rango de sen^{-1}.)

8.5 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una *ecuación trigonométrica* es aquella que contiene funciones trigonométricas. Por ejemplo,

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{y} \qquad 2 \text{ sen } x - 1 = 0$$

son ecuaciones trigonométricas. La primera es una identidad; esto quiere decir que es cierta para todo valor de la variable x. La segunda ecuación sólo es válida para ciertos valores de x. En esta sección describiremos la solución de ecuaciones trigonométricas, esto es, la determinación de todos los valores de la variable para los cuales la ecuación es válida.

EJEMPLO 1 ■ Solución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $2 \text{ sen } x - 1 = 0$.

SOLUCIÓN Primero despejaremos sen x de la ecuación.

$$2 \text{ sen } x - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

$$2 \text{ sen } x = 1 \qquad \text{Sume 1}$$

$$\text{sen } x = \tfrac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$, los valores de x para los cuales la ecuación es cierta son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Pero como la función seno es periódica, y su periodo es 2π, si se suma cualquier múltiplo entero de 2π a esos valores se obtiene otra solución. Por lo anterior, todas las soluciones tienen la forma

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

para cualquier entero k. La figura 1 muestra una representación gráfica de las soluciones.

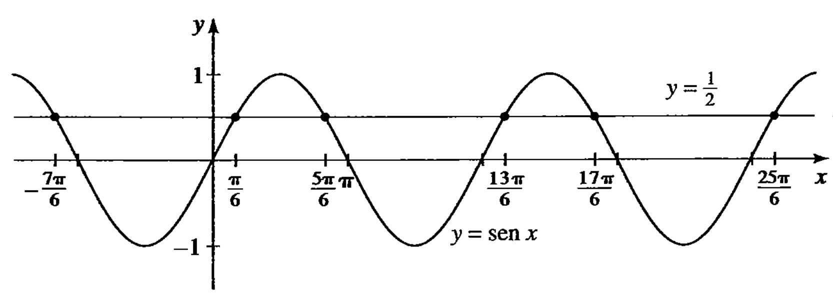


FIGURA 1

■

En general, como en el ejemplo 1, si una ecuación trigonométrica tiene una solución, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones. Para determinar todas las soluciones de esa ecuación sólo se necesitan determinar las soluciones en el intervalo adecuado, para después aprovechar que las funciones trigonométricas son periódicas.

EJEMPLO 2 ■ Solución por factorización

Resuelva la ecuación $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Se factoriza el lado derecho de la ecuación.

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

$2C^2 - 7C + 3 = 0$

$(2C - 1)(C - 3) = 0$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \qquad\qquad \cos x = 3$$

En vista de que cos x nunca es mayor que 1, se ve que $\cos x = 3$ no tiene solución. En el intervalo $[0, 2\pi)$, la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$ tiene las soluciones $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. Como la función coseno es periódica, y su periodo es 2π, todas las soluciones tienen la forma

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

para cualquier entero k ■

EJEMPLO 3 ■ Ecuación donde interviene un argumento doble

Resuelva la ecuación trigonométrica $\tan^4 2x - 9 = 0$.

SOLUCIÓN

$$\tan^4 2x - 9 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

$$\tan^4 2x = 9 \qquad \text{Sume 9}$$

$$\tan 2x = \sqrt{3} \qquad \text{o} \qquad \tan 2x = -\sqrt{3} \qquad \text{Saque raíces cuartas}$$

El intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ contiene un periodo completo de la función tangente. En este intervalo se cumple

$$2x = \frac{\pi}{3} \qquad \text{o} \qquad 2x = -\frac{\pi}{3}$$

Como la función tangente es periódica y su periodo es π, todas las soluciones se expresan con

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad \text{o} \qquad 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad\qquad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

para cualquier entero k. ■

Las identidades trigonométricas, son medios adecuados para resolver ecuaciones trigonométricas. Se pueden usar para transformar una ecuación en otra equivalente que sea más fácil de resolver.

EJEMPLO 4 ■ Uso de una identidad trigonométrica para resolver una ecuación

Resuelva la ecuación $3 \text{ sen } x = 2 \cos^2 x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Al aplicar la identidad $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ se obtiene una ecuación equivalente, donde sólo interviene la función seno.

$$3 \text{ sen } x = 2 \cos^2 x \qquad \text{Ecuación original}$$

$$3 \text{ sen } x = 2(1 - \text{sen}^2 x) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2 \text{ sen}^2 x + 3 \text{ sen } x - 2 = 0 \qquad \text{Simplifique}$$

$$(2 \text{ sen } x - 1)(\text{sen } x + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2 \text{ sen } x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen } x + 2 = 0$$

$$\text{sen } x = \tfrac{1}{2} \qquad \text{sen } x = -2$$

Como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, la ecuación $\text{sen } x = -2$ no tiene solución. Las soluciones de la ecuación original son, en consecuencia, las soluciones de $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, esto es, $x = \pi/6, 5\pi/6$. ■

EJEMPLO 5 ■ Determinación de puntos de intersección

Determine los puntos de intersección de las gráficas de $f(x) = \text{sen } x$, y de $g(x) = \cos x$.

SOLUCIÓN En la figura 2 se ven las gráficas de f y de g.

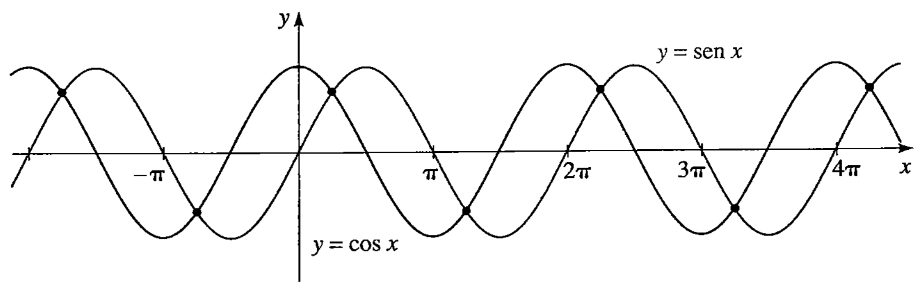


FIGURA 2

Esas gráficas se intersecan en los puntos en los que $f(x) = g(x)$. Por tanto, se necesita determinar las soluciones de la ecuación

$$\text{sen } x = \cos x \qquad \text{Iguale funciones}$$

Observe que los números x en donde $\cos x = 0$ no son soluciones. Cuando $\cos x \neq 0$, se pueden dividir ambos lados de la ecuación entre $\cos x$ para llegar a

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \qquad \text{Divida entre } \cos x$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{Identidad recíproca}$$

La solución de la última ecuación, en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, es $x = \pi/4$. Ya que la función tangente es periódica, y su periodo es π, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

para cualquier entero k. ■

EJEMPLO 6 ■ Determinación de soluciones en un intervalo

Determine las soluciones de $\cos 3x \sec x = 2 \cos 3x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

$\cos 3x \sec x = 2\cos 3x$	Ecuación original
$\cos 3x \sec x - 2\cos 3x = 0$	Reste $2 \cos 3x$
$\cos 3x(\sec x - 2) = 0$	Factorice
$\cos 3x = 0 \qquad \text{o} \qquad \sec x = 2$	

Comenzaremos resolviendo $\cos 3x = 0$. Como las soluciones que se buscan están en el intervalo $o \leqslant x \leqslant 2\pi$, entonces $0 \leqslant 3x \leqslant 6\pi$. En este intervalo, $\cos 3x = 0$ tiene las soluciones

$$3x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{2}$$

así que

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{6}$$

A continuación resolveremos $\sec x = 2$. Sus soluciones, en el intervalo $[0. 2\pi]$ son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. Por lo anterior, todas las soluciones de la ecuación original son

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{3}, \quad \frac{11\pi}{6}$$ ■

Observe que en el ejemplo 6 no dividimos ambos lados entre $\cos 3x$. Hubiera sido un error, porque estaríamos dividiendo entre 0. En realidad, si dividimos ambos lados entre $\cos 3x$ se pierden todas las soluciones de la ecuación original que también son soluciones de $\cos 3x = 0$.

EJEMPLO 7 ■ Manejo de soluciones extrañas

Resuelva la ecuación $\cos x + 1 = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Para obtener una ecuación donde intervengan sólo seno o coseno, se elevan al cuadrado ambos lados y se aplican las identidades pitagóricas.

$\cos x + 1 = \operatorname{sen} x$	Ecuación original
$(\cos x + 1)^2 = \operatorname{sen}^2 x$	Eleve ambos lados al cuadrado
$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x$	Desarrolle
$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$	Identidad pitagórica

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \qquad \text{Simplifique}$$

$$2\cos x\,(\cos x + 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$\cos x = 0 \qquad \text{o} \qquad \cos x + 1 = 0$$

De acuerdo con estas ecuaciones, las soluciones posibles son

$$x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \pi \qquad \text{Soluciones posibles}$$

Como se pudieron introducir raíces extrañas al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, se debe comprobar que cada uno de estos valores de x satisface la ecuación original. En el párrafo *COMPRUEBE SUS RESPUESTAS* vemos que las soluciones de la ecuación dada, en el intervalo $[0, 2\pi)$, son $\pi/2$ y π.

COMPRUEBE SUS RESPUESTAS

$x = \dfrac{\pi}{2}$:	$x = \dfrac{3\pi}{2}$:	$x = \pi$:
$\cos\dfrac{\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$	$\cos\dfrac{3\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$	$\cos\pi + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\pi$
$0 + 1 = 1$ ✓	$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$ ✗	$-1 + 1 = 0$ ✓

■

Si en una ecuación se efectúa una operación que pueda introducir nuevas raíces, habrá que revisar que las soluciones obtenidas no sean extrañas; esto es, que satisfagan la ecuación original, como en el ejemplo 7.

EJEMPLO 8 ■ Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación: $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$.

SOLUCIÓN Como los argumentos en los dos términos son distintos, primero aplicaremos la fórmula del seno de ángulo doble.

$$\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

$$2\operatorname{sen} x\cos x - \cos x = 0 \qquad \text{Fórmula de ángulo doble}$$

$$\cos x\,(2\operatorname{sen} x - 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$\cos x = 0 \qquad \text{o} \qquad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}$$

Cuando x está en el intervalo $[0, 2\pi)$, las soluciones de la primera de las ecuaciones son $x = \pi/2$, $3\pi/2$, y la segunda ecuación tiene las soluciones $x = \pi/6$ y $5\pi/6$. En resumen, las soluciones de la ecuación original son

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

para cualquier entero k. ■

SOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS CON UNA CALCULADORA

Hasta ahora, todas las ecuaciones que hemos resuelto han tenido soluciones de la forma $\pi/4$, $\pi/3$, $5\pi/6$, $3\pi/2$, etcétera. Pudimos llegar a ellas a partir de los valores especiales de las funciones trigonométricas que ya memorizamos. Ahora presentaremos ejemplos cuyas soluciones requieren el uso de funciones trigonométricas inversas en una calculadora.

EJEMPLO 9 ■ Manejo de las funciones trigonométricas inversas en una calculadora

Resuelva la ecuación sen $x = \frac{2}{3}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN Las soluciones de esta ecuación son los números x cuyo seno es igual a $\frac{2}{3}$. En la figura 3 vemos, que hay dos números con esta propiedad, x_1 y x_2, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Con una calculadora en modo de radianes se determina x_1:

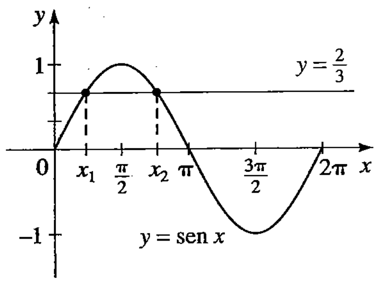


FIGURA 3

$\text{sen}\, x = \frac{2}{3}$	Ecuación original
$x_1 = \text{sen}^{-1}\frac{2}{3}$	Extraiga sen^{-1} de cada lado
≈ 0.72973	Use la calculadora

Observe que, como el rango de sen^{-1} está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la calculadora da como resultado un número dentro de éste. En la figura 3 vemos que la otra solución está entre $\pi/2$ y π. (De hecho, si imaginamos que x es un ángulo en radianes, entonces x_2 es un ángulo en el segundo cuadrante, cuyo ángulo de referencia es x_1.) Por lo anterior,

$$x_2 = \pi - \text{sen}^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 2.41186$$

Las soluciones, con 5 decimales de precisión, son $x \approx 0.72973$ y $x \approx 2.41186$. ■

Si se usan funciones trigonométricas inversas para resolver una ecuación, hay que tener en cuenta que sen^{-1} y $\tan^{-1}$ producen valores en los cuadrantes I y IV, y que $\cos^{-1}$ produce valores en los cuadrantes I y II. Para determinar otras soluciones habrá que buscar el cuadrante en el que la función trigonométrica puede tomar el valor que se necesita.

EJEMPLO 10 ■ Determinación de todas las soluciones

Determine todas las soluciones de la ecuación $4\cos^2 x - 9\cos x + 2 = 0$.

SOLUCIÓN Primero se determinan las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$, que es un periodo completo de la función coseno.

$$4\cos^2 x - 9\cos x + 2 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$

$$(\cos x - 2)(4\cos x - 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$\cos x - 2 = 0 \qquad \text{o} \qquad 4\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 2 \qquad\qquad \cos x = \tfrac{1}{4}$$

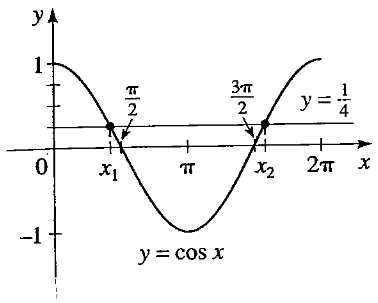


FIGURA 4

Ya que el cos x no puede ser mayor que 1, la ecuación $\cos x = 2$ no tiene solución. En la figura 4 vemos que la ecuación $\cos x = \frac{1}{4}$ tiene dos soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Una de ellas es $x_1 = \cos^{-1}\frac{1}{4} \approx 1.31812$. Observe que, como el rango de $\cos^{-1}$ es el intervalo $[0, \pi]$, la calculadora da un número en ese intervalo. La otra solución está entre $3\pi/2$ y 2π (el cuarto cuadrante), por lo que su valor es $x_2 = 2\pi - \cos^{-1}\frac{1}{4} \approx 4.96507$. Entonces se ve que todas las soluciones de la ecuación tienen la forma

$$x \approx 1.31812 + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad x \approx 4.96507 + 2k\pi$$

para cualquier entero k. ■

8.5 EJERCICIOS

1-30 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación respectiva

1. $2\cos x - 1 = 0$

2. $\sqrt{2}\ \mathrm{sen}\, x - 1 = 0$

3. $2\,\mathrm{sen}\, x - \sqrt{3} = 0$

4. $\tan x + 1 = 0$

5. $4\cos^2 x - 1 = 0$

6. $2\cos^2 x - 1 = 0$

7. $\sec^2 x - 2 = 0$

8. $\csc^2 x - 4 = 0$

9. $\cos x\,(2\,\mathrm{sen}\, x + 1) = 0$

10. $\sec x\,(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

11. $(\tan x + \sqrt{3})(\cos x + 2) = 0$

12. $(2\cos x + \sqrt{3})(2\,\mathrm{sen}\, x - 1) = 0$

13. $\cos x\,\mathrm{sen}\, x - 2\cos x = 0$

14. $\tan x\,\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, x = 0$

15. $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

16. $2\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x - 1 = 0$

17. $\mathrm{sen}^2 x = 2\,\mathrm{sen}\, x + 3$

18. $3\tan^3 x = \tan x$

19. $\mathrm{sen}^2 x = 4 - 2\cos^2 x$

20. $2\cos^2 x + \mathrm{sen}\, x = 1$

21. $2\,\mathrm{sen}\, 3x - 1 = 0$

22. $\sqrt{3}\ \mathrm{sen}\, 2x = \cos 2x$

23. $\cos \dfrac{x}{2} - 1 = 0$

24. $\csc 3x = \mathrm{sen}\, 3x$

25. $\tan^5 x - 9\tan x = 0$

26. $3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

27. $4\,\mathrm{sen}\, x\cos x + 2\,\mathrm{sen}\, x - 2\cos x - 1 = 0$

28. $\mathrm{sen}\, 2x = 2\tan 2x$

29. $\cos^2 2x - \mathrm{sen}^2 2x = 0$

30. $\sec x - \tan x = \cos x$

31-38 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

31. $2\cos 3x = 1$

32. $3\csc^2 x = 4$

33. $2\,\mathrm{sen}\, x\tan x - \tan x = 1 - 2\,\mathrm{sen}\, x$

34. $\sec x\tan x - \cos x\cot x = \mathrm{sen}\, x$

35. $\tan x - 3\cot x = 0$

36. $2\,\mathrm{sen}^2 x - \cos x = 1$

37. $\tan 3x + 1 = \sec 3x$

38. $3\sec^2 x + 4\cos^2 x = 7$

39-46 ■ (a) Con una calculadora, resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$, con cinco decimales de precisión.
(b) Determine todas las soluciones de la ecuación.

39. $\cos x = 0.4$

40. $2\tan x = 13$

41. $\sec x - 5 = 0$

42. $3 \operatorname{sen} x = 7 \cos x$

43. $5 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

44. $2 \operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

45. $3 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 2 = 0$

46. $\tan^4 x - 13 \tan^2 x + 36 = 0$

47-50 ■ Trace las gráficas de f y g sobre el mismo conjunto de ejes y determine sus puntos de intersección.

47. $f(x) = 3 \cos x + 1, \quad g(x) = \cos x - 1$

48. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad g(x) = 2 \operatorname{sen} 2x + 1$

49. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \sqrt{3}$

50. $f(x) = \operatorname{sen} x - 1, \quad g(x) = \cos x$

51-54 ■ Aplique una fórmula de suma o resta para simplificar la ecuación. A continuación determine todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

51. $\cos x \cos 3x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = 0$

52. $\cos x \cos 2x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

53. $\operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$

54. $\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x = 0$

55-58 ■ Aplique una fórmula de ángulo doble o de mitad de ángulo para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

55. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$

56. $\tan \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$

57. $\cos 2x + \cos x = 2$

58. $\tan x + \cot x = 4 \operatorname{sen} 2x$.

59-62 ■ Resuelva la ecuación aplicando primero una fórmula de suma a producto.

59. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 0$

60. $\cos 5x - \cos 7x = 0$

61. $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$.

62. $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = \cos 4x$.

63-68 ■ Con una graficadora determine las soluciones de la ecuación, con 2 decimales de precisión.

63. $\operatorname{sen} 2x = x$

64. $\cos x = \dfrac{x}{3}$

65. $2^{\operatorname{sen} x} = x$

66. $\operatorname{sen} x = x^3$

67. $\dfrac{\cos x}{1 + x^2} = x^2$

68. $\cos x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

69. Ecuaciones e identidades ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. Toda identidad es una ecuación.

B. Toda ecuación es una identidad.

Describa ejemplos que ilustren su respuesta. Escriba un párrafo donde explique la diferencia entre una ecuación y una identidad.

70. Ecuación trigonométrica especial ¿Qué es lo que hace que la ecuación $\operatorname{sen}(\cos x) = 0$ sea distinta de todas las demás ecuaciones que hemos estudiado en esta sección? Determine todas las soluciones de esta ecuación.

8.6 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS TEOREMA DE DeMOIVRE

Los números complejos se presentaron, para resolver ciertas ecuaciones algebraicas. Sin embargo, sus aplicaciones van mucho más allá de este uso preliminar. Hoy, esos números se usan en forma rutinaria en física, ingeniería eléctrica y en la aeroespacial y en muchos otros campos. En esta sección representaremos números complejos mediante las funciones seno y coseno. Esto nos permitirá determinar las raíces n–ésimas de los números complejos.

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

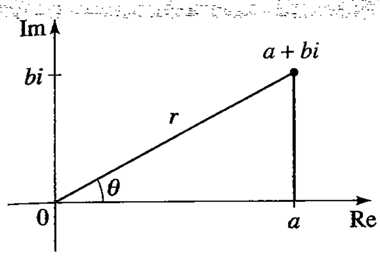


FIGURA 1

Sea $z = a + bi$ un número complejo; entonces tracemos en el plano complejo el segmento de recta que une al origen con el punto $a + bi$ (véase la figura 1). La longitud de este segmento se representa por $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Recuerde que $|z|$ es el módulo de z.) Si θ es un ángulo, en posición normal, cuyo lado terminal coincide con este segmento, entonces, según las definiciones de seno y coseno:

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta,$$

así que $z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Acabamos de demostrar lo siguiente.

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El número complejo $z = a + bi$ tiene la **forma trigonométrica** siguiente:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta),$$

en la que $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z, y θ es un **argumento** de z.

El argumento de z no es único, pero dos argumentos cualesquiera de z difieren entre sí por un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 1 ■ Expresión de números complejos en su forma trigonométrica

Escriba cada uno de los números complejos siguientes en forma trigonométrica.

(a) $1 + i$ (b) $-1 + \sqrt{3}\,i$ (c) $-4\sqrt{3} - 4i$ (d) $3 + 4i$

SOLUCIÓN Esos números complejos se grafican en la figura 2, que nos ayuda a determinar sus argumentos.

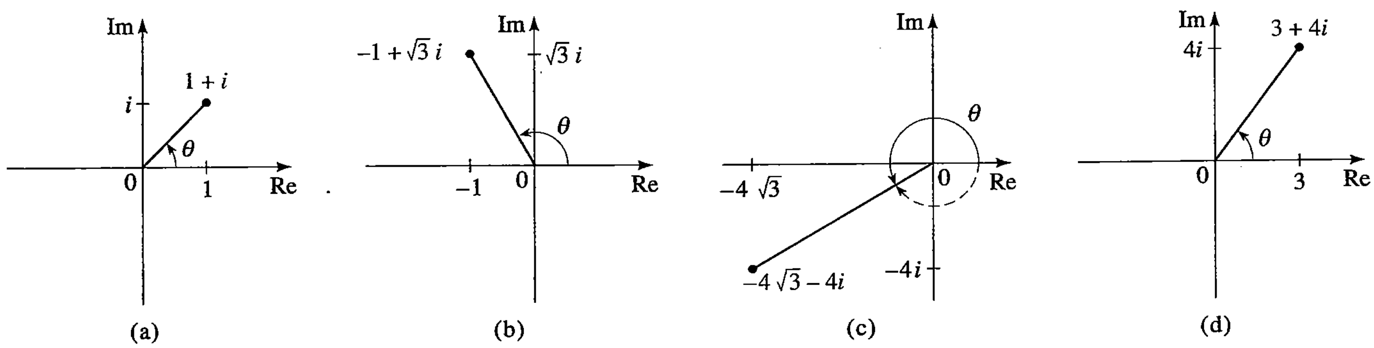


FIGURA 2

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

(a) Un argumento es $\theta = \pi/4$, y $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Por consiguiente,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$

(b) Un argumento es $\theta = 2\pi/3$ y $r = \sqrt{1+3} = 2$. Entonces

$$-1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{-4}{-4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$

(c) Un argumento es $\theta = 7\pi/6$ (o podría ser $\theta = -5\pi/6$), y $r = \sqrt{48+16} = 8$. Así,

$$-4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

(d) Un argumento es $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$, y $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Así,

$$3 + 4i = 5[\cos(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\tan^{-1}\tfrac{4}{3})]$$ ■

Las fórmulas de seno y coseno de sumas de argumentos, descritas en la sección 7.2, simplifican mucho la multiplicación y la división de números complejos en forma trigonométrica. El siguiente teorema indica cómo.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si las formas trigonométricas de los dos números complejos z_1 y z_2 son

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Multiplicación}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad (z_2 \neq 0) \qquad \text{División}$$

Este teorema dice así: *Para multiplicar dos números complejos, se multiplican los módulos y se suman los argumentos, y para dividir dos números complejos, se dividen los módulos y se restan los argumentos.*

■ **Demostración** Para demostrar la fórmula de la multiplicación tan solo se multiplican los dos números complejos.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

En el último paso aplicamos las fórmulas para seno y coseno de una suma.

Se deja como ejercicio demostrar la fórmula de la división. □

EJEMPLO 2 ■ Multiplicación y división de números complejos

Sean

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Determine (a) z_1z_2, y (b) z_1/z_2.

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con la fórmula de la multiplicación,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2)(5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 10\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Para determinar la respuesta aproximada se usa una calculadora en modo de radianes, y así se obtiene

$$z_1z_2 \approx 10(-0.2588 + 0.9659i) = -2.588 + 9.659i$$

(b) Según la fórmula de la división,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Con una calculadora en modo de radianes, se obtiene la respuesta aproximada

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \tfrac{2}{5}(0.9659 - 0.2588i) = 0.3864 - 0.1035i$$

■

TEOREMA DE DeMOIVRE

La aplicación repetida de la fórmula de multiplicación da como resultado una fórmula útil para elevar un número complejo a una potencia n, para cualquier entero positivo n. Sea z un número complejo, expresado en forma trigonométrica.

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Entonces, de acuerdo con la fórmula de multiplicación,

$$\begin{aligned} z^2 = zz &= r^2[\cos(\theta + \theta) + i\,\text{sen}(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) \end{aligned}$$

A continuación multiplicamos z^2 por z, para obtener

$$\begin{aligned} z^3 = z^2z &= r^3[\cos(2\theta + \theta) + i\,\text{sen}(2\theta + \theta) \\ &= r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta) \end{aligned}$$

Al repetir lo anterior veremos que, para cualquier entero positivo n,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Con un desarrollo parecido donde se aplique la fórmula de división se demuestra que lo anterior también es válido para enteros negativos. Hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA DE DeMOIVRE

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces para cualquier entero n

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Esto equivale a decir que *para elevar un número complejo a la n–ésima potencia, se eleva el módulo a la n–ésima potencia y se multiplica el argumento por n.*

EJEMPLO 3 ■ Determinación de una potencia aplicando el teorema de DeMoivre

Determine $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

SOLUCIÓN Ya que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, se deduce el ejemplo 1(a)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Así, de acuerdo con el teorema de DeMoivre,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i \quad ■$$

RAÍCES n–ÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para determinar las raíces n–ésimas del número complejo z se necesita determinar un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Expresamos z en su forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Una raíz n–ésima de z es

$$w = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$$

ya que, según el teorema de DeMoivre, $w^n = z$. El argumento θ de z se sustituye por $\theta + 2k\pi$ de cualquier entero k. Por consiguiente, otras raíces de n-ésima de z son

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

En vista de que esta expresión da como resultado un valor distinto de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, acabamos de demostrar el siguiente teorema.

RAÍCES n-ÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces z tiene las n raíces n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Las observaciones siguientes ayudan a aplicar la fórmula anterior.

1. El módulo de cada raíz n-ésima es $r^{1/n}$.
2. El argumento de la primera raíz es θ/n.
3. Se suma 2π en forma repetida para obtener el argumento de cada raíz sucesiva.

Esas observaciones demuestran que, cuando se grafican, las raíces n-ésimas de z están igualmente repartidas en el círculo de radio $r^{1/n}$.

EJEMPLO 4 ■ Determinación de las raíces de un número complejo

Determine las seis raíces de $z = -64$, y grafique en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma trigonométrica, $z = 64(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Al aplicar la fórmula de las raíces n-ésimas, con $n = 6$, obtenemos

$$w_k = 64^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. Así, las 6 raíces sextas de -64 son

Se suma $2\pi/6 = \pi/3$ a cada argumento, para calcular el argumento de la siguiente raíz.

$$w_0 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$w_2 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_3 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$w_4 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

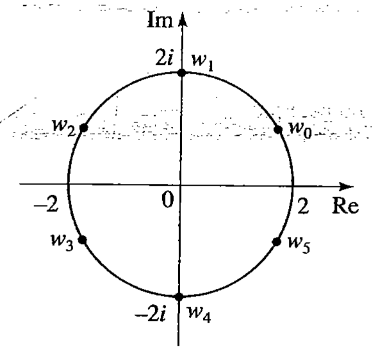


FIGURA 3
Las 6 raíces sextas de $z = -64$

y
$$w_5 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

Estos puntos están en el círculo de radio 2, como se ve en la figura 3. ■

Al determinar raíces de números complejos, a veces se expresa el argumento θ del número complejo en grados. En este caso, las raíces n–ésimas se obtienen con la fórmula

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

EJEMPLO 5 ■ Determinación de las raíces cúbicas de un número complejo

Determine las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$, y grafique en el plano complejo.

SOLUCIÓN Primero expresaremos z en forma trigonométrica, con grados. En ese caso, $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, y $\theta = 45°$. Por consiguiente,

$$z = 2\sqrt{2}\,(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$$

Se aplica la fórmula para las raíces n–ésimas (en grados) con $n = 3$, y se ve que las raíces cúbicas de z son de la forma

$(2\sqrt{2})^{1/3} = (2^{3/2})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

$$w_k = (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{45° + 360°k}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{45° + 360°k}{3}\right)\right]$$

para $k = 0$, 1 y 2. Así, las tres raíces cúbicas de z son

A cada argumento se suma $360°/3 = 120°$, para obtener el argumento de la siguiente raíz.

$$w_0 = \sqrt{2}\,(\cos 15° + i\,\text{sen}\,15°) \approx 1.366 + 0.366i$$
$$w_1 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°) = -1 + i$$
$$w_2 = \sqrt{2}\,(\cos 255° + i\,\text{sen}\,255°) \approx -0.366 + 1.366i$$

En la figura 4 se ven las gráficas de las tres raíces cúbicas de z, los cuales están igualmente espaciadas en el círculo de radio $\sqrt{2}$.

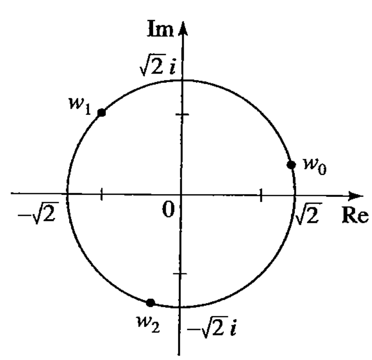


FIGURA 4
Las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$

■

EJEMPLO 6 ■ Solución de una ecuación con la fórmula de las raíces n-ésimas

Resuelva la ecuación $z^6 + 64 = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación se puede expresar en la forma $z^6 = -64$. Así, las soluciones son las raíces sextas de -64, que se determinaron en el ejemplo 4. ■

8.6 EJERCICIOS

1-24 ■ Escriba el número complejo en forma trigonométrica, con argumento θ entre 0 y 2π.

1. $1 + i$ **2.** $1 - \sqrt{3}i$ **3.** $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

4. $1 - i$ **5.** $2\sqrt{3} - 2i$ **6.** $-1 + i$

7. $-\sqrt{2}i$ **8.** $-3 - 3\sqrt{3}i$ **9.** $5 + 5i$

10. 4 **11.** $4\sqrt{3} - 4i$ **12.** $8i$

13. -20 **14.** $\sqrt{3} + i$ **15.** $3 + 4i$

16. $i(2 - 2i)$ **17.** $3i(1 + i)$ **18.** $2(1 - i)$

19. $4(\sqrt{3} + i)$ **20.** $-3 - 3i$ **21.** $2 + i$

22. $3 + \sqrt{3}i$ **23.** $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ **24.** $-\pi i$

25-30 ■ Determine el producto z_1z_2 y el cociente z_1/z_2. Exprese su respuesta en forma trigonométrica.

25. $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}$, $\quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}$

26. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$,

$z_2 = 5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

27. $z_1 = 7\left(\cos\frac{9\pi}{7} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{7}\right)$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{7}\right)$

28. $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75° + i\,\text{sen}\ 75°)$,
$z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60° + i\,\text{sen}\ 60°)$

29. $z_1 = 4(\cos 200° + i\,\text{sen}\ 200°)$,
$z_2 = 25(\cos 150° + i\,\text{sen}\ 150°)$

30. $z_1 = \frac{4}{5}(\cos 25° + i\,\text{sen}\ 25°)$,
$z_2 = \frac{1}{5}(\cos 155° + i\,\text{sen}\ 155°)$

31-38 ■ Exprese z_1 y z_2 en forma trigonométrica, y a continuación determine el producto z_1z_2 y los cocientes z_1/z_2 y $1/z_1$.

31. $z_1 = \sqrt{3} + i$, $\quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

32. $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\quad z_2 = 1 - i$

33. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $\quad z_2 = -1 + i$

34. $z_1 = -\sqrt{2}i$, $\quad z_2 = -3 - 3\sqrt{3}i$

35. $z_1 = 5 + 5i$, $\quad z_2 = 4$

36. $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$, $\quad z_2 = 8i$

37. $z_1 = -20$, $\quad z_2 = \sqrt{3} + i$

38. $z_1 = 3 + 4i$, $\quad z_2 = 2 - 2i$

39-50 ■ Determine la potencia indicada aplicando el teorema de DeMoivre.

39. $(1 + i)^{20}$ **40.** $(1 - \sqrt{3}i)^5$

41. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ **42.** $(1 - i)^8$

43. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{12}$ **44.** $(\sqrt{3} - i)^{-10}$

45. $(2 - 2i)^8$ **46.** $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$

47. $(-1 - i)^7$ **48.** $(3 + \sqrt{3}i)^4$

49. $(2\sqrt{3} + 2i)^{-5}$ **50.** $(1 - i)^{-8}$

51-60 ■ Determine las raíces indicadas y grafíquelas en el plano complejo.

51. Las raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$.

52. Las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$.

53. Las raíces cuartas de $-81i$.

54. Las raíces quintas de 32.

55. Las raíces octavas de 1.

56. Las raíces cúbicas de $1 + i$.

57. Las raíces cúbicas de i. **58.** Las raíces quintas de i.

59. Las raíces cuartas de -1.

60. Las raíces quintas de $-16-16\sqrt{3}\,i$.

61-66 ■ Resuelva las ecuaciones siguientes.

61. $z^4+1=0$ **62.** $z^8-i=0$

63. $z^3-4\sqrt{3}-4i=0$ **64.** $z^6-1=0$

65. $z^3+1=-i$ **66.** $z^3-1=0$

67. (a) Sea $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$, donde n es un entero positivo. Demuestre que $1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$ son las n raíces n–ésimas distintas de 1.

(b) Si $z \neq 0$ es cualquier número complejo, y $s^n=z$, demuestre que las n raíces n–ésimas distintas de z son s, sw, $sw^2, sw^3, \ldots, sw^{n-1}$.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

68. Sumas de raíces de la unidad Calcule los valores exactos de las tres raíces cúbicas de 1 (véase el ejercicio 67) y a continuación súmelas. Haga lo mismo con las raíces cuartas, quintas, sextas y séptimas de 1. ¿Cuál cree que es la suma de las raíces n–ésimas de 1, para toda n?

69. Productos de raíces de la unidad Calcule el producto de las tres raíces cúbicas de 1 (véase el ejercicio 68). Haga lo mismo con las raíces cuartas, quintas, sextas y octavas de 1. ¿Cuál cree que sea el producto de las raíces n–ésimas de 1, para toda n?

8.7 VECTORES

En aplicaciones de las matemáticas hay ciertas cantidades que se determinan por completo mediante su magnitud; por ejemplo, longitud, masa, área, temperatura y energía. Se habla de una longitud de 5 m o de una masa de 3 kg; sólo se necesita un número para describir cada una de esas cantidades. Esas cantidades se llaman **escalares**.

Por otro lado, para describir el desplazamiento de un objeto se requieren dos números: la *magnitud* y la *dirección* del desplazamiento. Para describir la velocidad de un objeto en movimiento se deben especificar tanto la *rapidez* como la *dirección* del recorrido. Las cantidades como desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza, que implican magnitud y también dirección, se llaman *cantidades dirigidas*. Una forma de representarlas, matemáticamente, es utilizando *vectores*.

DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LOS VECTORES

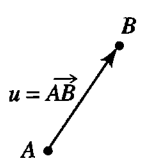


FIGURA 1

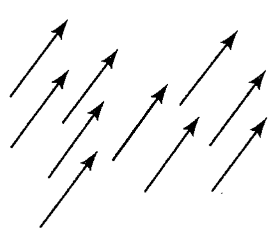


FIGURA 2

Un **vector** en el plano es un segmento de recta que tiene una dirección asignada. Un vector se representa, como se ve en la figura 1, con una flecha que especifica la dirección. Ese vector se escribe $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el **punto inicial**, y B es el **punto terminal** del vector $\overrightarrow{AB}$. La longitud del segmento de recta se llama **magnitud**, o **longitud** del vector, y se representa por $|\overrightarrow{AB}|$. Para representar los vectores también usaremos letras negritas; por ejemplo, escribiremos $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$.

Dos vectores se consideran **iguales** si tienen igual magnitud y la misma dirección. Así, todos los vectores de la figura 2 son iguales. Esta definición de igualdad tiene sentido si imaginamos que un vector representa un desplazamiento. Dos desplazamientos son iguales si tienen igual magnitud y la misma dirección. Así, los vectores de la figura 2 se pueden imaginar como son el *mismo* desplazamiento aplicado a objetos en lugares distintos en el plano.

Si al desplazamiento $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$ sigue el desplazamiento $\mathbf{v}=\overrightarrow{BC}$, entonces el desplazamiento resultante es $\overrightarrow{AC}$, como se ve en la figura 3. En otras palabras, el desplazamiento

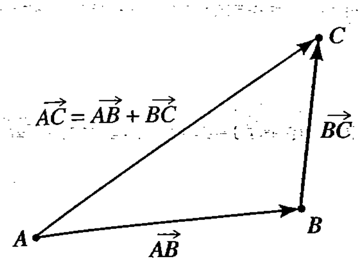


FIGURA 3

único representado por el vector $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo efecto que los otros dos desplazamientos juntos. Al vector $\overrightarrow{AC}$ se le llama **suma** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, lo cual se expresa en la forma $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (El **vector cero**, que se representa con $\mathbf{0}$, no indica desplazamiento alguno.) Así, para determinar la suma de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cualesquiera, se trazan vectores iguales a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{V}$ con el punto inicial de uno en el punto terminal del otro [véase la figura 4(a).] Si se traza a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$ comenzando en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que forma la diagonal del paralelogramo definido por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como se ve en la figura 4(b).

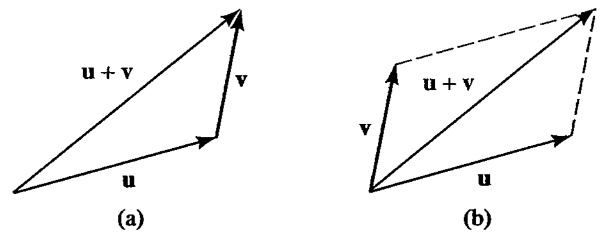


FIGURA 4
Suma de vectores

Si a es un número real y $\mathbf{v}$ es un vector, se define un nuevo vector $a\mathbf{v}$ como sigue: El vector $a\mathbf{v}$ tiene la magnitud $|a||\mathbf{v}|$, y tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $a > 0$, o tiene la dirección opuesta a $\mathbf{v}$ si $a < 0$. Si $a = 0$, entonces $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector cero. A este proceso se le llama **multiplicación de un vector por un escalar**, y su efecto es alargar o encoger al vector. La figura 5 muestra gráficas del vector $a\mathbf{v}$ para distintos valores de a. El vector $(-1)\mathbf{v}$ se representará por $-\mathbf{v}$. Así, $-\mathbf{v}$ es el vector que tiene la misma longitud que $\mathbf{v}$, pero con dirección opuesta.

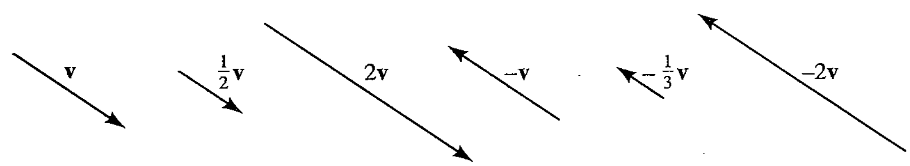


FIGURA 5
Multiplicación de un vector por un escalar

La **diferencia** o **resta** de dos vectores, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, se define por medio de $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. La figura 6 muestra que el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es la otra diagonal del paralelogramo definido por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

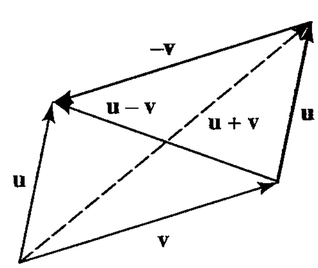


FIGURA 6
Resta o sustracción de vectores

DESCRIPCIÓN ANALÍTICA DE VECTORES

Ya hemos descrito los vectores en forma geométrica. Ahora presentaremos un método para describirlos usando coordenadas (esto es, analíticamente). Consideremos un vector **v** en el plano coordenado, como el de la figura 7(a). Para ir del punto inicial de **v** a su punto terminal, hay que desplazarse a unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba. Representaremos al vector **v** en forma de un par ordenado de números reales

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$$

en donde a es el **componente horizontal** de **v**, y b es **componente vertical** de **v**. Se debe recordar que un vector representa una magnitud y una dirección, y no determinada flecha en el plano. Por consiguiente y de nuevo: el vector $\langle a, b\rangle$ tiene muchas representaciones distintas, que dependen de su punto inicial [véase la figura 7(b)].

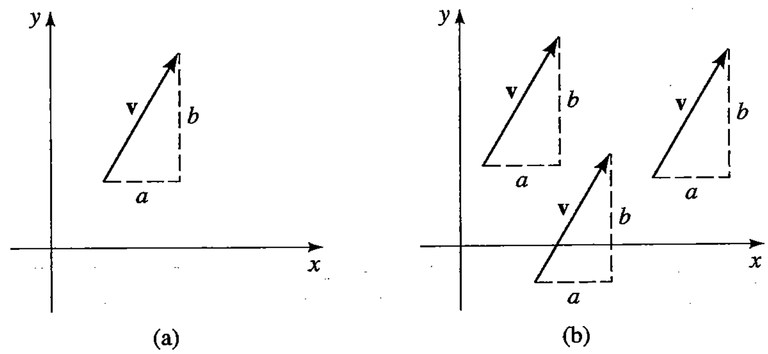


FIGURA 7

En la figura 8 se puede establecer la relación entre una representación geométrica de un vector y su representación analítica.

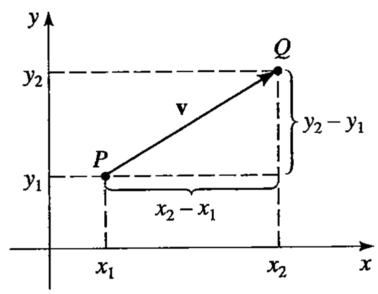


FIGURA 8

FORMA ANALÍTICA DE UN VECTOR

Si un vector **v** se representa en el plano, con un punto inicial $P(x_1, y_1)$ y un punto terminal $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

EJEMPLO 1 ■ Descripción de vectores en forma analítica

(a) Determine el vector **u** cuyo punto inicial es $(-2, 5)$ y su punto terminal es $(3, 7)$.

(b) Si se traza el vector $\mathbf{v} = \langle 3, 7 \rangle$ con punto inicial en $(2, 4)$, ¿cuál es su punto terminal?

(c) Trace las representaciones del vector $\mathbf{w} = \langle 2, 3 \rangle$ con puntos iniciales en $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, -1)$ y $(1, 4)$.

SOLUCIÓN

(a) El vector que se busca es

$$\mathbf{u} = \langle 3 - (-2), 7 - 5 \rangle = \langle 5, 2 \rangle$$

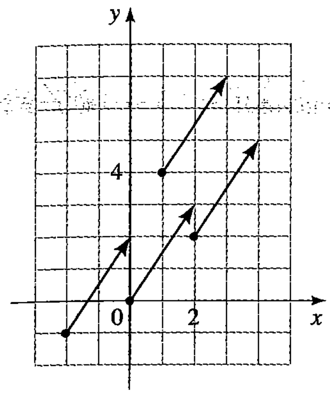


FIGURA 9

(b) Sea (x, y) el punto terminal de $\mathbf{v}$. Entonces

$$\langle x-2, y-4\rangle = \langle 3, 7\rangle$$

Por tanto, $x - 2 = 3$ y $y - 4 = 7$, es decir, $x = 5$ y $y = 11$. El punto terminal es $\langle 5, 11\rangle$.

(c) En la figura 9 se trazaron las representaciones del vector $\mathbf{w}$. ■

Ahora presentaremos definiciones analíticas de las diversas operaciones que hemos descrito geométricamente para los vectores. Comencemos con la igualdad de vectores. Dijimos que dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y la misma dirección. Para los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$, esto quiere decir que $a_1 = a_2$ y que $b_1 = b_2$. En otras palabras, dos vectores son **iguales** si y sólo si son iguales sus componentes respectivas. Así, todas las flechas de la figura 7(b) representan al mismo vector, al igual que todas las flechas de la figura 9.

La longitud de un vector tiene el siguiente significado, en términos de componentes.

MAGNITUD DE UN VECTOR

La **magnitud**, o **longitud** de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 2 ■ Magnitudes de vectores

Determine la magnitud de cada uno de los siguientes vectores.

(a) $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$ (b) $\mathbf{v} = \langle 5, 0\rangle$ (c) $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$

SOLUCIÓN

(a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

(b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

(c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ ■

Las siguientes definiciones de suma, resta y multiplicación por escalar para los vectores, corresponden a las descripciones geométricas que se mencionaron antes. La figura 10 indica cómo la definición analítica de suma de vectores corresponde a la definición geométrica.

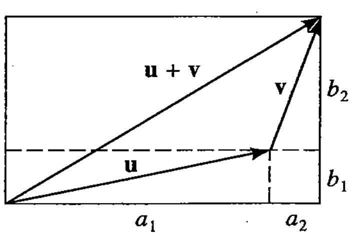


FIGURA 10

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2\rangle$$

$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, cb_1\rangle, \quad c \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO 3 ■ Operaciones con vectores

Si $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$, determine $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$ y $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con las definiciones de las operaciones vectoriales,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle + \langle -1, 2 \rangle = \langle 1, -1 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle - \langle -1, 2 \rangle = \langle 3, -5 \rangle$$

$$2\mathbf{u} = 2\langle 2, -3 \rangle = \langle 4, -6 \rangle$$

$$-3\mathbf{v} = -3\langle -1, 2 \rangle = \langle 3, -6 \rangle$$

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\langle 2, -3 \rangle + 3\langle -1, 2 \rangle = \langle 4, -6 \rangle + \langle -3, 6 \rangle = \langle 1, 0 \rangle$$

■

Las siguientes propiedades de las operaciones vectoriales se deducen con facilidad a partir de las definiciones. El **vector cero** es el vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$. En la suma vectorial desempeña el mismo papel que el número 0 en la suma de números reales.

PROPIEDADES DE LOS VECTORES

Suma vectorial	Multiplicación por un escalar
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	$(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u}) = d(c\mathbf{u})$
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
Longitud de un vector	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
$\lvert c\mathbf{u} \rvert = \lvert c \rvert \lvert \mathbf{u} \rvert$	$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

A un vector de longitud 1 se le llama **vector unitario.** En el ejemplo 2(c), el vector $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ es un vector unitario. Hay dos vectores unitarios muy útiles, $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, definidos por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Esos vectores son especiales, porque en términos de ellos se puede expresar cualquier otro vector.

VECTORES EN TÉRMINOS DE i Y j

El vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ se expresa en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ como sigue:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}.$$

EJEMPLO 4 ■ Vectores en términos de i y j

(a) Exprese el vector $\mathbf{u} = \langle 5, -8 \rangle$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

(b) Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, escriba $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN

(a) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-8)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$.

(b) Con las propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar de vectores se demuestra que los vectores utilizan de la misma forma como las expresiones algebraicas. Así

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} &= 2(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 5(-\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \\ &= (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i} + 34\mathbf{j} \end{aligned}$$

■

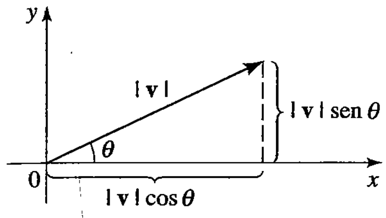


FIGURA 11

Sea $\mathbf{v}$ un vector en el plano, con su punto inicial en el origen. La **dirección** de $\mathbf{v}$ es θ, el ángulo positivo mínimo, en posición normal, que forma la parte positiva del eje x y $\mathbf{v}$ (véase la figura 11). Si se conoce la magnitud y la dirección de un vector, entonces, de acuerdo con la figura 11, se determinan los componentes vertical y horizontal del vector.

COMPONENTES HORIZONTAL Y VERTICAL DE UN VECTOR

Sea $\mathbf{v}$ un vector de magnitud $|\mathbf{v}|$ y dirección θ.
Entonces, $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, donde

$$a = |\mathbf{v}| \cos\theta \quad \text{y} \quad b = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta.$$

EJEMPLO 5 ■ **Componentes y dirección de un vector**

(a) Un vector $\mathbf{v}$ tiene longitud 8, y dirección $\pi/3$. Determine las componentes horizontal y vertical, y exprese $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.
(b) Determine la dirección del vector $\mathbf{u} = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

SOLUCIÓN

(a) Como $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, donde las componentes se definen por

$$a = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4 \qquad \text{y} \qquad b = 8\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

Por lo anterior, $\mathbf{v} = \langle 4, 4\sqrt{3}\rangle = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\,\mathbf{j}$.

(b) De acuerdo con la figura 12, la dirección θ tiene la propiedad

$$\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Así, el ángulo de referencia para θ es $\pi/6$. Como el punto terminal del vector $\mathbf{u}$ está en el cuadrante II, entonces $\theta = 5\pi/6$. ■

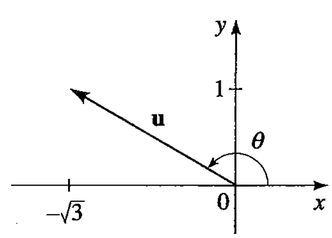


FIGURA 12

APLICACIONES A VELOCIDADES Y FUERZAS

Al aplicar los vectores en la navegación, se suele expresar la dirección de un vector en forma de **rumbo**, esto es, un ángulo agudo medido a partir del norte o del sur. Por ejemplo, el rumbo N 30° E, indica una dirección que apunta a 30° al este del norte (véase la figura 13).

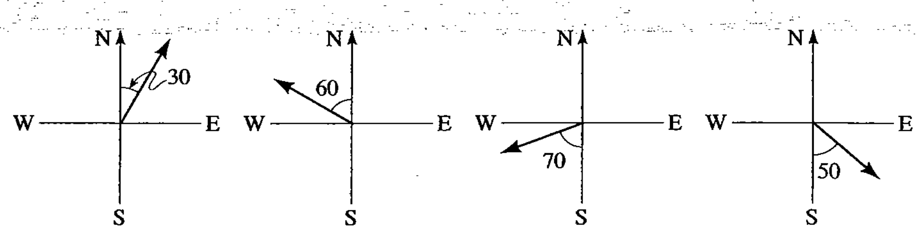


FIGURA 13

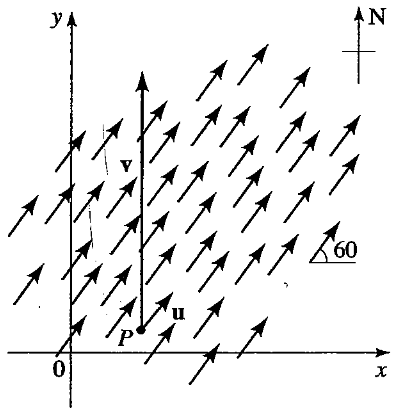


FIGURA 14

La **velocidad** de un objeto en movimiento se describe mediante un vector cuya dirección es la dirección del movimiento y cuya magnitud es la rapidez. La figura 14 muestra algunos vectores **u** que representan la velocidad del viento en la dirección N 30° E y un vector **v**, que representa la velocidad de un avión que atraviesa este viento en el punto P. De acuerdo con la experiencia, es obvio que el viento afecta tanto la rapidez como la dirección de un avión. La figura 15 indica que la ruta real del avión, en relación con el suelo, se determina con el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

EJEMPLO 6 ■ Rapidez y dirección reales de un avión

Un aeroplano va rumbo al norte a 300 mi/h. Atraviesa un viento cruzado de 40 mi/h, en dirección N 30° E, como se ve en la figura 14.

(a) Determine la velocidad real del avión, en forma de un vector.
(b) Determine la rapidez y dirección reales del avión.

SOLUCIÓN La velocidad del avión en aire inmóvil es $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 300\mathbf{j} = 300\mathbf{j}$. También se debe expresar la velocidad **u** del viento como un vector. Según las fórmulas de las componentes de un vector,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (40 \cos 60°)\mathbf{i} + (40 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j}\\ &= 20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\,\mathbf{j}\\ &= 20\mathbf{i} + 34.64\mathbf{j}\end{aligned}$$

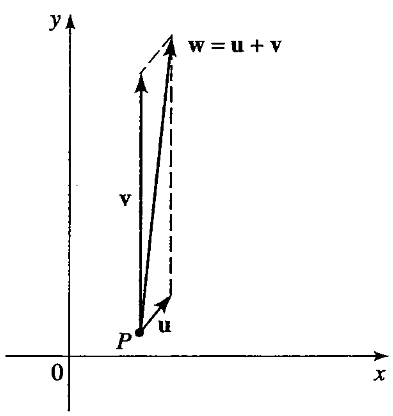


FIGURA 15

(a) La velocidad real del avión se representa por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\,\mathbf{j}) + (300\mathbf{j})\\ &= 20\mathbf{i} + (20\sqrt{3} + 300)\mathbf{j}\\ &\approx 20\mathbf{i} + 334.64\mathbf{j}\end{aligned}$$

(b) La rapidez real del avión se calcula con la magnitud de **w**.

$$|\mathbf{w}| \approx \sqrt{(20)^2 + (334.64)^2} \approx 335.2 \text{ mi/h}$$

La dirección del avión es θ, la del vector **w**. El ángulo θ tiene la propiedad de que $\tan \theta \approx 334.64/20 = 16.732$, por lo que $\theta \approx 86.6°$. Por lo anterior, el avión sigue la dirección N 3.4° E. ■

EJEMPLO 7 ■ Cálculo del rumbo

Una mujer navega en un bote, desde una orilla de un río recto, y desea desembarcar en un punto directamente frente a ella, en la margen opuesta. Si la rapidez del bote en agua inmóvil es 10 mi/h y el río corre hacia el este, a 5 mi/h, ¿en qué dirección debe dirigir su bote para llegar al punto deseado?

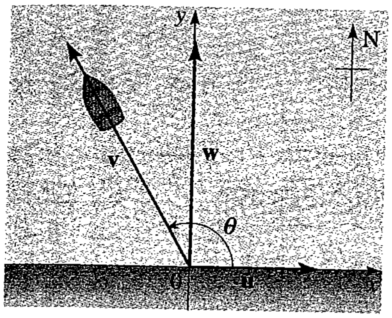


FIGURA 16

SOLUCIÓN Se escoge un sistema de coordenadas cuyo origen esté en la posición inicial del bote, como se ve en la figura 16. Sean **u** y **v** las velocidades del río y del bote, respectivamente. Es claro que $\mathbf{u} = 5\mathbf{i}$ y, como la rapidez del bote es 10 mi/h, entonces $|\mathbf{v}| = 10$; así

$$\mathbf{v} = (10 \cos \theta)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$$

siendo θ el ángulo que se ve en la figura 16. El rumbo real del bote está definido por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. entonces

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + (10 \cos \theta)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$$

$$= (5 + 10 \cos \theta)\mathbf{i} + (10 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$$

Como la mujer desea desembarcar en un punto directamente opuesto al otro lado del río, su dirección debe tener componente "horizontal" (longitudinal al río) de 0. En otras palabras, debe elegir θ de tal manera que

$$5 + 10 \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = -\tfrac{1}{2}$$

$$\theta = 120°$$

Por consiguiente, debe dirigir el bote hacia $\theta = 120°$, es decir, al N 30° W. ■

La **fuerza** también se representa con un vector. En forma intuitiva podemos imaginar que una fuerza describe un empujón o un tirón sobre un objeto, por ejemplo, un empuje horizontal sobre un libro para hacerlo cruzar una mesa, o un tirón de la gravedad terrestre sobre una pelota. La fuerza se mide en libras, en el sistema inglés (en newtons en el sistema métrico). Por ejemplo, un hombre que pesa 200 lb ejerce una fuerza de 200 lb hacia abajo, sobre el piso. Si sobre un objeto actúan varias fuerzas, la **fuerza resultante** que obra sobre el objeto es la suma vectorial de esas fuerzas.

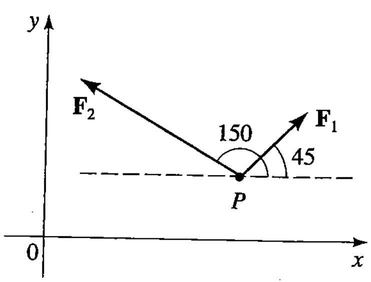


FIGURA 17

EJEMPLO 8 ■ Fuerza resultante

Sobre un objeto en un punto P actúan dos fuerzas, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, cuyas magnitudes respectivas son 10 y 20 lb, como se ve en la figura 17. Calcule la fuerza resultante que actúa en P.

SOLUCIÓN Expresaremos a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en términos de sus componentes:

$$\mathbf{F}_1 = (10\cos 45°)\mathbf{i} + (10\,\mathrm{sen}\,45°)\mathbf{j} = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} = 5\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_2 = (20\cos 150°)\mathbf{i} + (20\,\mathrm{sen}\,150°)\mathbf{j} = -20\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + 20\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$= -10\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

Por lo que la fuerza resultante $\mathbf{F}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ &= (5\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\,\mathbf{j}) + (-10\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 10\mathbf{j})\\ &= (5\sqrt{2} - 10\sqrt{3})\mathbf{i} + (5\sqrt{2} + 10)\mathbf{j}\\ &\approx -10\mathbf{i} + 17\mathbf{j}\end{aligned}$$

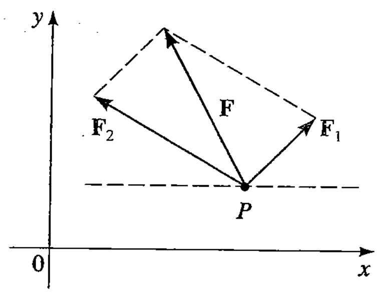


FIGURA 18

La fuerza resultante $\mathbf{F}$ se ve en la figura 18. ■

8.7 EJERCICIOS

1-6 ■ Trace el vector indicado. (Los vectores **u** y **v** son los que muestra la figura.)

1. 2**u**

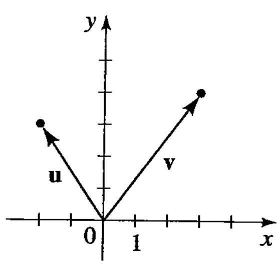
2. −**v**

3. **u** + **v**

4. **u** − **v**

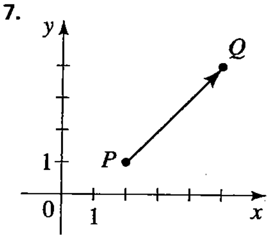
5. **v** − 2**u**

6. 2**u** + **v**

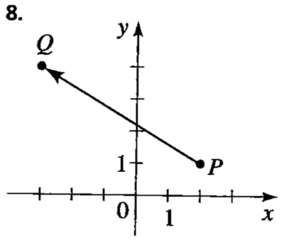


7-16 ■ Determine el vector cuyo punto inicial es P y punto terminal es Q.

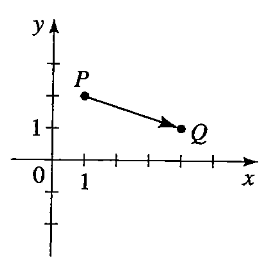
7.



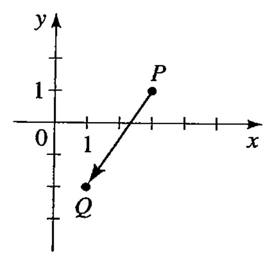
8.



9.



10.



11. $P(3, 2)$, $Q(8, 9)$

12. $P(1, 1)$, $Q(9, 9)$

13. $P(5, 3)$, $Q(1, 0)$

14. $P(-1, 3)$, $Q(-6, -1)$

15. $P(-1, -1)$, $Q(-1, 1)$

16. $P(-8, -6)$, $Q(-1, -1)$

17-22 ■ Determine $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $3\mathbf{u}-4\mathbf{v}$ para los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dados.

17. $\mathbf{u} = \langle 2, 7 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1 \rangle$

18. $\mathbf{u} = \langle -2, 5 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, -8 \rangle$

19. $\mathbf{u} = \langle 0, -1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 0 \rangle$

20. $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{j}$

21. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

22. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

23-26 ■ Determine $|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|, |2\mathbf{u}|, |\frac{1}{2}\mathbf{v}|, |\mathbf{u}+\mathbf{v}|, |\mathbf{u}-\mathbf{v}|$, y $|\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|$.

23. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

24. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

25. $\mathbf{u} = \langle 10, -1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, -2 \rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle -6, 6 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, -1 \rangle$

27-32 ■ Determine los componentes vertical y horizontal del vector cuya longitud y dirección se especifica, y escriba el vector en forma de una combinación lineal de los vectores **i** y **j**.

27. $|\mathbf{v}| = 40, \quad \theta = 30°$

28. $|\mathbf{v}| = 50, \quad \theta = 120°$

29. $|\mathbf{v}| = 1, \quad \theta = 225°$

30. $|\mathbf{v}| = 800, \quad \theta = 125°$

31. $|\mathbf{v}| = 4, \quad \theta = 10°$

32. $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}, \quad \theta = 300°$

33. Un hombre empuja una podadora de césped, con 30 lb de fuerza, ejercida en un ángulo de 30° respecto del piso. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

34. Un avión vuela con dirección N 20° E, con una rapidez de 500 mi/h. Calcule las componentes de la velocidad hacia el norte y hacia el este.

35-40 ■ Calcule la magnitud y la dirección (en grados) de cada vector.

35. $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$

36. $\mathbf{v} = \left\langle -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

37. $\mathbf{v} = \langle -12, 5 \rangle$

38. $\mathbf{v} = \langle 40, 9 \rangle$

39. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$

40. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

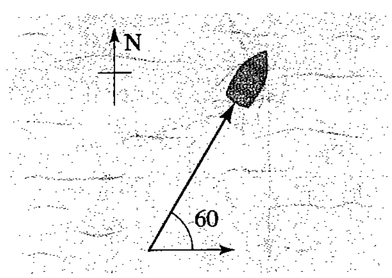
41. Un piloto dirige su avión hacia el este. El reactor tiene una rapidez de 425 mi/h en aire inmóvil. Hay un viento hacia el norte, de 40 mi/h.
(a) Calcule la velocidad real del avión, en forma de un vector.
(b) Calcule la rapidez y dirección reales del avión.

42. Un avión vuela a través del viento que sopla hacia el N 30° E con una rapidez de 55 mi/h. Su velocidad en aire inmóvil es 765 mi/h, y el piloto dirige su avión hacia el N 45° E.
(a) Calcule la velocidad real del reactor, en forma de un vector.
(b) Calcule la rapidez y la dirección reales del reactor.

43. Calcule la rapidez y dirección reales del reactor del ejercicio 42, si el piloto pone proa hacia el N 30° W.

44. ¿Hacia qué dirección debe dirigir el piloto del ejercicio 42 su avión, para que el rumbo real sea hacia el norte?

45. Un río recto corre hacia el este, a 10 mi/h. Un lanchero comienza en la margen sur y pone proa en una dirección de 60° respecto a la orilla (véase la figura). La lancha de motor tiene una rapidez de 20 mi/h en agua inmóvil.
(a) Calcule la velocidad real de la lancha de motor, como un vector.
(b) Calcule la rapidez y la dirección reales de la lancha.



46. El lanchero del ejercicio 45 desea llegar a un punto de la margen norte del río que está directamente frente al punto de partida. ¿En qué dirección debe poner la proa?

47. Un bote pone proa en dirección N 72° E. La rapidez del bote en agua inmóvil es 24 mi/h. El agua corre directamente hacia el sur. Se ve que la dirección real del bote es directa hacia el este. Calcule la rapidez del agua y la rapidez real del bote.

48. Una mujer camina hacia el oeste, a 2 mi/h, sobre la cubierta de un trasatlántico. El barco se dirige hacia el norte, a 25 mi/h. Calcule la rapidez y la dirección de la mujer en relación con la superficie del agua.

49-54 ■ Las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ que actúan en el mismo punto P están en equilibrio si la fuerza resultante es cero, esto es, si $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \mathbf{0}$. Calcule (a) Las fuerzas resultantes que actúan sobre P y (b) la fuerza adicional que se requiere (si es que se requiere) para que las fuerzas estén en equilibrio.

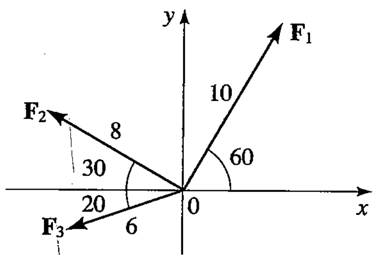
49. $\mathbf{F}_1 = \langle 2, 5 \rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 3, -8 \rangle$

50. $\mathbf{F}_1 = \langle 3, -7 \rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 4, -2 \rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle -7, 9 \rangle$

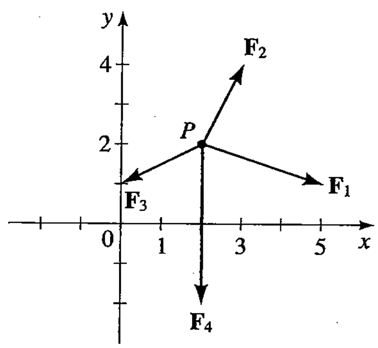
51. $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$,
$\mathbf{F}_3 = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_4 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

52. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{F}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

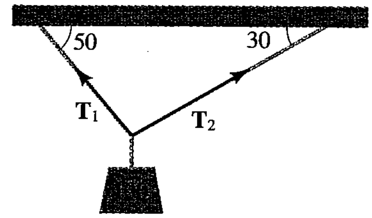
53.



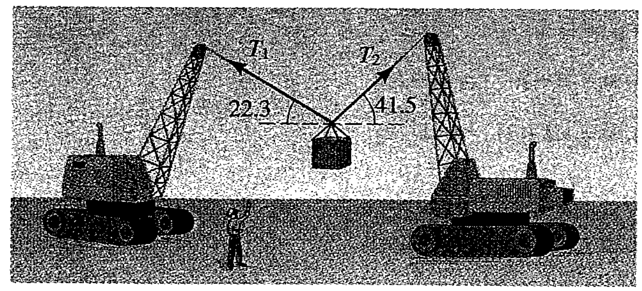
54.



55. Un peso de 100 lb cuelga de una cuerda, como se ve en la figura. Calcule las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en la cuerda.

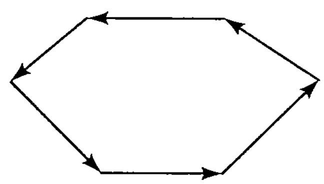


56. Las grúas de la figura están izando un objeto que pesa 18,278 lb. Calcule las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.



DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

57. Vectores que forman un polígono Suponga que n vectores se pueden colocar punta inicial con punto terminal en el plano, de manera que formen un polígono. (La figura muestra el caso de un hexágono.) Explique por qué la suma de esos vectores es $\mathbf{0}$.



8 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Defina las identidades recíprocas.
(b) Defina las identidades pitagóricas.
(c) Defina las identidades de paridad.
(d) Defina las identidades de cofunción.

2. Explique la diferencia entre una ecuación y una identidad.

3. ¿Cómo se inicia la demostración de una identidad trigonométrica?

4. (a) Escriba las fórmulas para seno, coseno y tangente de una suma.
(b) Escriba las fórmulas para seno, coseno y tangente de una resta.

5. (a) Escriba las fórmulas para seno, coseno y tangente de un ángulo doble.
   (b) Escriba las fórmulas para disminuir potencias.
   (c) Escriba las fórmulas de mitad de ángulo.

6. (a) Escriba las fórmulas de producto a suma.
   (b) Escriba las fórmulas de suma a producto.

7. (a) Defina la función sen^{-1}, seno inverso. ¿Cuáles son su dominio y rango?
   (b) ¿Para qué valores de x la ecuación $\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x$ es válida?
   (c) ¿Para qué valores de x es válida la ecuación $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x$?

8. (a) Defina la función $\cos^{-1}$, coseno inverso. ¿Cuáles son su dominio y rango?
   (b) ¿Para qué valores de x la ecuación $\cos(\cos^{-1}x) = x$ es válida?
   (c) ¿Para qué valores de x es válida la ecuación $\cos^{-1}(\cos x) = x$?

9. (a) Defina la función $\tan^{-1}$, tangente inversa. ¿Cuáles son su dominio y rango?
   (b) ¿Para qué valores de x es válida la ecuación $\tan(\tan^{-1}x) = x$?
   (c) ¿Para qué valores de x es válida la ecuación $\tan^{-1}(\tan x) = x$?

10. ¿Cuál es la forma trigonométrica de un número complejo z? ¿Cuál es el módulo de z? ¿Cuál es el argumento de z?

11. (a) ¿Cómo se multiplican dos números complejos, si se expresan en forma trigonométrica?
    (b) ¿Cómo se dividen dos números como los anteriores?

12. (a) Enuncie el teorema de DeMoivre.
    (b) ¿Cómo se determinan las raíces n–ésimas de un número complejo?

13. (a) ¿Cuál es la diferencia entre un escalar y un vector?
    (b) Trace un diagrama que indique cómo sumar dos vectores.
    (c) Trace un diagrama que indique cómo restar dos vectores.
    (d) Trace un diagrama que indique cómo multiplicar un vector por los escalares $2, \frac{1}{2}, -2$ y $-\frac{1}{2}$.

14. Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$ y c es un escalar, escriba expresiones para $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$ y $|\mathbf{u}|$.

15. (a) Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, exprese a $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y de $\mathbf{j}$.
    (b) Escriba las componentes de $\mathbf{v}$ en términos de la magnitud y la dirección de $\mathbf{v}$.

EJERCICIOS

1-22 ■ Compruebe cada identidad.

1. $\cos^2x \csc x - \csc x = -\text{sen}\, x$

2. $\dfrac{1}{1 - \text{sen}^2x} = 1 + \tan^2x$

3. $\dfrac{\cos^2x - \tan^2x}{\text{sen}^2x} = \cot^2x - \sec^2x$

4. $\dfrac{1 + \sec x}{\sec x} = \dfrac{\text{sen}^2x}{1 - \cos x}$

5. $\dfrac{\cos^2x}{1 - \text{sen}\, x} = \dfrac{\cos x}{\sec x - \tan x}$

6. $(1 - \tan x)(1 - \cot x) = 2 - \sec x \csc x$

7. $\text{sen}^2x \cot^2x + \cos^2x \tan^2x = 1$

8. $(\tan x + \cot x)^2 = \csc^2x \sec^2x$

9. $\dfrac{\text{sen}\, 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$

10. $\dfrac{\cos(x + y)}{\cos x\, \text{sen}\, y} = \cot y - \tan x$

11. $\tan \dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x$

12. $\dfrac{\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan x$

13. $\text{sen}(x + y)\, \text{sen}(x - y) = \text{sen}^2x - \text{sen}^2y$

14. $\csc x - \tan \dfrac{x}{2} = \cot x$

15. $1 + \tan x \tan \dfrac{x}{2} = \sec x$

16. $\dfrac{\text{sen}\, 3x + \cos 3x}{\cos x - \text{sen}\, x} = 1 + 2\, \text{sen}\, 2x$

17. $\left(\cos \dfrac{x}{2} - \text{sen}\, \dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \text{sen}\, x$

18. $\dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x} = \tan 2x$

19. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \sec x$

20. $(\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2 = 2 + 2\cos(x + y)$

21. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

22. $\dfrac{\sec x - 1}{\operatorname{sen} x \sec x} = \tan \dfrac{x}{2}$

23-26 ■ (a) Grafique f y g. (b) ¿Sugieren las gráficas que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

23. $f(x) = 1 - \left(\cos \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}\right)^2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

24. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$

25. $f(x) = \tan x \tan \dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

26. $f(x) = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 x, \quad g(x) = \cos 4x$

27-28 ■ (a) Grafique la o las funciones y haga una conjetura acerca de ellas. (b) Demuestre esa conjetura.

27. $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 3x + \cos 6x$

28. $f(x) = \operatorname{sen} x \cot \dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \cos x$

29-44 ■ Resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

29. $\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$

30. $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

31. $2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$

32. $\operatorname{sen} x - \cos x - \tan x = -1$

33. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

34. $4\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 3$

35. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 3$

36. $\operatorname{sen} x = \cos 2x$

37. $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$

38. $\cos 2x \csc^2 x = 2\cos 2x$

39. $\tan \frac{1}{2}x + 2\operatorname{sen} 2x = \csc x$

40. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$

41. $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$

42. $2\cos x - 3\tan x = 0$

43. $\cos x = x^2 - 1$

44. $e^{\operatorname{sen} x} = x$

45-54 ■ Determine el valor exacto de la expresión.

45. $\cos 15°$

46. $\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{12}$

47. $\tan \dfrac{\pi}{8}$

48. $2\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{\pi}{12}$

49. $\operatorname{sen} 5° \cos 40° + \cos 5° \operatorname{sen} 40°$

50. $\dfrac{\tan 66° - \tan 6°}{1 + \tan 66° \tan 6°}$

51. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{8}$

52. $\dfrac{1}{2}\cos \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}$

53. $\cos 37.5° \cos 7.5°$

54. $\cos 67.5° + \cos 22.5°$

55-60 ■ Determine el valor exacto de la ecuación, si $\sec x = \frac{3}{2}$, $\csc y = 3$, y x y y están en el cuadrante I.

55. $\operatorname{sen}(x + y)$

56. $\cos(x - y)$

57. $\tan(x + y)$

58. $\operatorname{sen} 2x$

59. $\cos \dfrac{y}{2}$

60. $\tan \dfrac{y}{2}$

61-68 ■ Determine el valor exacto de la expresión.

61. $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$

62. $\tan^{-1}(\sqrt{3}/3)$

63. $\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$

64. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2))$

65. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{5})$

66. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{3}{8})$

67. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3})$

68. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{13} - \cos^{-1}\frac{4}{5})$

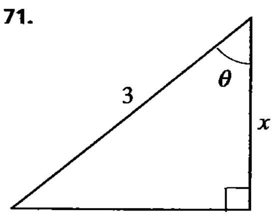
69-70 ■ Transforme la expresión a una función algebraica de x.

69. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

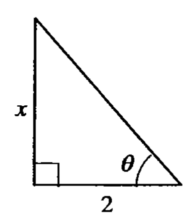
70. $\sec(\operatorname{sen}^{-1} x)$.

71-72 ■ Exprese a θ en función de x.

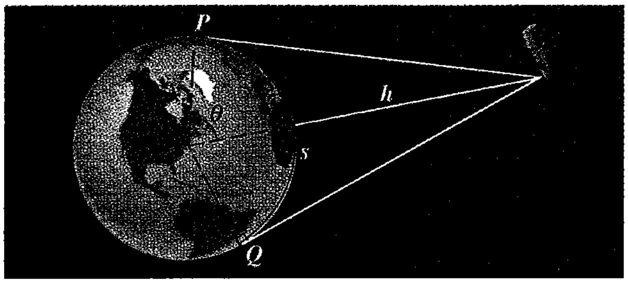
71.



72.



73. Un satélite está en órbita a una altura h sobre la superficie terrestre. Calcule la longitud del arco s entre los puntos P y Q, que representan los puntos más alejados que puede "ver" el satélite. Exprese a s en función de h. El radio de la Tierra es 3,960 mi. [*Sugerencia:* primero exprese a s en función de θ.]



74. ¿A qué altura debe estar el satélite en el ejercicio 73 para ver Los Ángeles y Nueva York al mismo tiempo? Esas ciudades están a 2,450 mi de distancia.

75-80 ■ Escriba el número complejo en forma trigonométrica, con un argumento entre 0 y 2π.

75. $4 + 4i$

76. $-10i$

77. $5 + 3i$

78. $1 + \sqrt{3}\,i$

79. $-1 + i$

80. -20

81-84 ■ Determine la potencia indicada.

81. $(1 - \sqrt{3}\,i)^4$

82. $(1 + i)^8$

83. $(\sqrt{3} + i)^{-4}$

84. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$

85-88 ■ Calcule las raíces indicadas.

85. Las raíces cuadradas de $-16i$.

86. Las raíces cúbicas de $4 + 4\sqrt{3}\,i$.

87. Las raíces sextas de 1.

88. Las raíces octavas de i.

89-90 ■ Determine $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$, y $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

89. $\mathbf{u} = \langle -2, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 1 \rangle$

90. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

91. Determine el vector $\mathbf{u}$ cuyo punto inicial es $P(0, 3)$ y punto terminal es $Q(3, -1)$.

92. Determine el vector $\mathbf{u}$ cuya longitud es $|\mathbf{u}| = 20$ y dirección $\theta = 60°$.

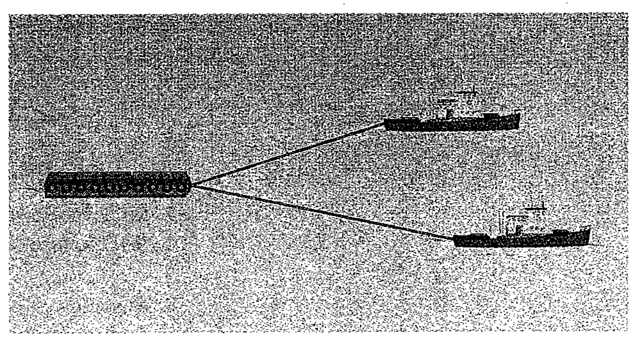
93. Si el vector $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ se coloca en el plano con su punto inicial en $P(5, 6)$, determine su punto terminal.

94. Determine la dirección del vector $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

95. Dos remolcadores tiran de un lanchón, como se ve en la figura de abajo. Uno tira con una fuerza de 2.0×10^4 lb, en dirección N 50° E y el otro, con fuerza de 3.4×10^4 lb en dirección S 75° E.

(a) Calcule la fuerza resultante, como vector, sobre el lanchón.

(b) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



96. Un avión pone proa al N 60° E, a 600 mi/h en aire inmóvil. En ese vuelo, comienza a soplar un viento de cola en dirección N 30° E a 50 mi/h.

(a) Determine la velocidad del avión, como vector.

(b) Calcule la rapidez y dirección reales del avión.

8 EXAMEN

1. Compruebe cada identidad

(a) $\dfrac{\tan x}{1 - \cos x} = \csc x(1 + \sec x)$ (b) $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

2. Resuelva cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$.

(a) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$ (b) $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

3. Calcule todas las soluciones de esta ecuación, en el intervalo $[0, 2\pi)$, con 5 decimales de precisión.

$$5 \cos 2x = 2$$

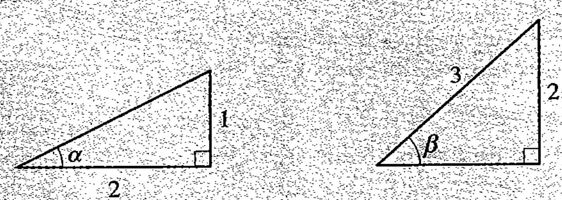
4. Sea $x = 2 \operatorname{sen} \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

5. Determine el valor exacto de cada expresión.

(a) $\operatorname{sen} 8° \cos 22° + \cos 8° \operatorname{sen} 22°$ (b) $\operatorname{sen} 75°$ (c) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}$

6. Determine $\cos(\alpha + \beta)$, con los ángulos α y β definidos en las figuras siguientes.



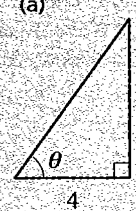
7. (a) Exprese $\operatorname{sen} 3x \cos 5x$ como una suma de funciones trigonométricas.
(b) Exprese $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x$ en forma de un producto de funciones trigonométricas.

8. Si $\operatorname{sen} \theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante III, determine $\tan(\theta/2)$.

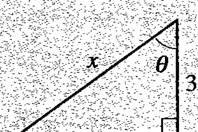
9. Trace las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ y describa el dominio de cada función.

10. Exprese a θ, en cada figura, en función de x.

(a)



(b)



11. Calcule el valor exacto de $\cos\left(\tan^{-1} \frac{9}{40}\right)$.

12. Sea $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.
(a) Escriba z en forma trigonométrica.
(b) Determine el número complejo z^9.

13. Sean

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$$

Determine $z_1 z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

14. Determine las raíces cúbicas de $27i$ y grafíquelas en el plano complejo.

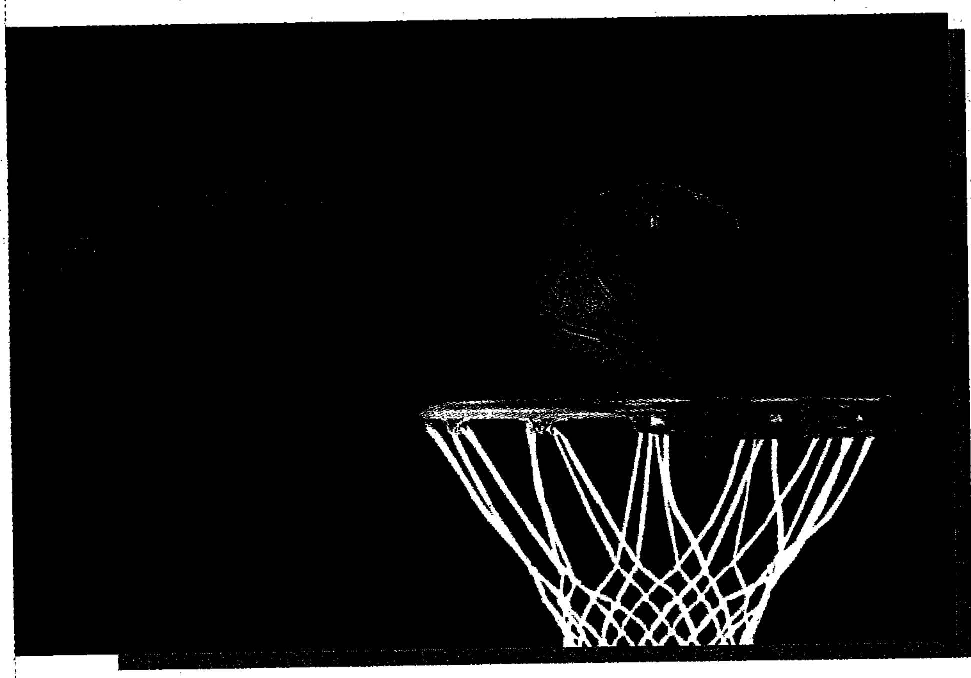
15. Sea $\mathbf{u}$ el vector cuyo punto inicial es $P(3, -1)$ y punto terminal $Q(-3, 9)$.
   (a) Exprese a $\mathbf{u}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.
   (b) Calcule la longitud de $\mathbf{u}$.

16. Sean $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -6, 2\rangle$.
   (a) Determine $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
   (b) Calcule $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

17. Un río corre hacia el este a 8 mi/h. Una persona pone la proa de su lancha de motor hacia el N 30° E. La rapidez de esa lancha en agua inmóvil es 12 mi/h.
   (a) Exprese en forma de un vector la velocidad real de la lancha.
   (b) Calcule la rapidez y la dirección reales de la lancha.

9

TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

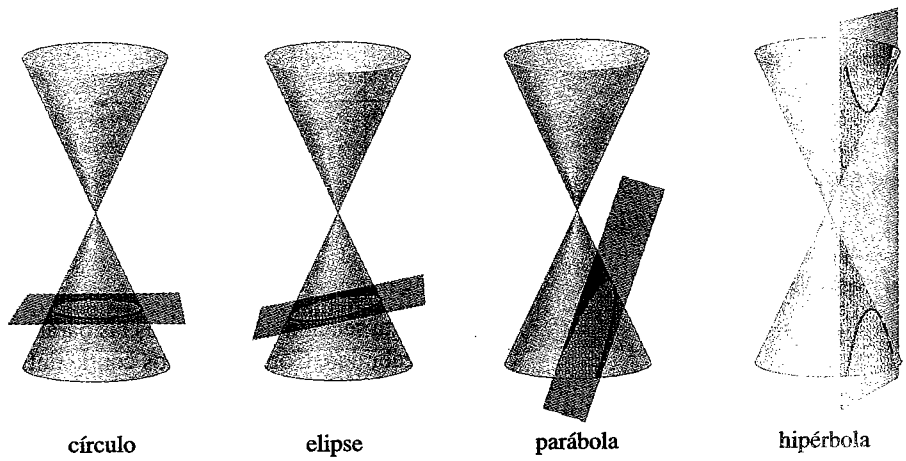


La trayectoria de un proyectil, como la de un balón de basquetbol, un misil o un cometa, es una sección cónica.

Estudiar los procedimientos del pensamiento geométrico nos permite alcanzar lo más esencial de la mente humana.

HENRI POINCARÉ

En este capítulo estudiaremos la geometría de las **secciones cónicas** (o simplemente **cónicas**), que son las curvas que se forman por intersecar un plano con un par de conos circulares. Esas curvas tienen cuatro formas básicas, llamadas **círculo, elipse, parábola** e **hipérbola**, los cuales se ven en la figura siguiente.



Los griegos antiguos los estudiaron porque consideraban que la geometría de las secciones cónicas es muy bella. El matemático Apolonio (262-190 a. C.) escribió una obra decisiva, en 8 volúmenes, sobre el tema. En épocas más recientes, las cónicas han demostrado su utilidad, a la vez que su belleza. Galileo descubrió, en 1590, que la trayectoria de un proyectil disparado hacia arriba, formando un ángulo con la horizontal, es una parábola. En 1609, Kepler encontró que los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Newton, en 1668, fue el primero en construir un telescopio reflector, cuyo principio se basa en las propiedades de parábolas e hipérbolas. En el siglo XX se han ideado muchas aplicaciones más de las secciones cónicas. Una de gran importancia es el sistema de radionavegación LORAN, donde se aplican los puntos de intersección de hipérbolas para determinar la ubicación de barcos y aviones. Otra aplicación es la litotripsia, método médico para eliminar cálculos renales sin cirugía; en él se usa una propiedad de las elipses. Éstas y otras aplicaciones de las secciones cónicas se explicarán en este capítulo.

Además de estudiar las cónicas examinaremos otras formas para describir puntos y curvas en el plano cartesiano: las coordenadas polares y las ecuaciones paramétricas. En ambos temas se requiere un conocimiento detallado de la trigonometría.

9.1 PARÁBOLAS

Anteriormente vimos que la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es una curva en forma de U llamada *parábola*, que se abre hacia arriba o hacia abajo, según si el signo de a es positivo o negativo (véase la figura 1). El punto más bajo o más alto de la parábola se llama *vértice*, y la parábola es simétrica respecto a su *eje*.

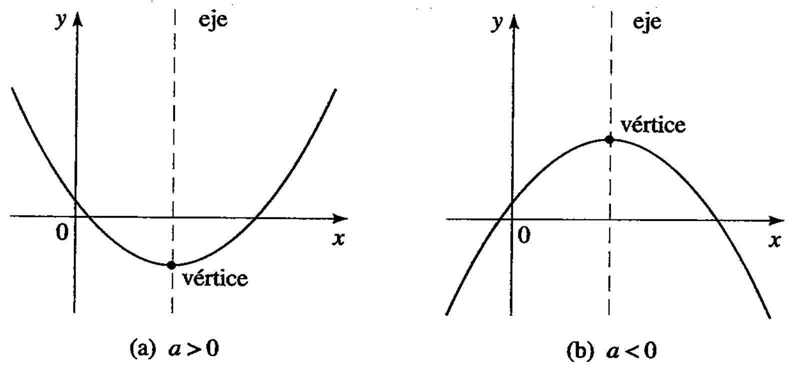


FIGURA 1
$y = ax^2 + bx + c$

En esta sección estudiaremos las parábolas desde un punto de vista geométrico, más que algebraico. Comenzaremos con la definición geométrica de una parábola e indicaremos cómo a partir de ella se llega a la fórmula algebraica que conocemos.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA PARÁBOLA

Una **parábola** es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo F, llamado **foco**, y una recta fija l, llamada **directriz.**

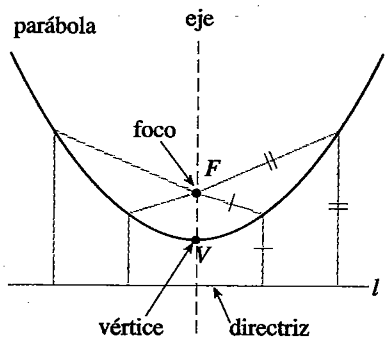


FIGURA 2

Esta definición de ilustra en la figura 2. Observe que el vértice V de la parábola está a la mitad entre el foco y la directriz, y que el eje de simetría es la recta que pasa por el foco, perpendicular a la directriz.

En esta sección restringiremos nuestra atención a parábolas cuyo vértice está en el origen, y que tengan eje de simetría horizontal o vertical. (En las secciones 9.4 y 9.5 estudiaremos parábolas con posiciones más generales.) Si el foco de una parábola de esas es el punto $F(0, p)$, entonces el eje de simetría debe ser vertical, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. La figura 3 ilustra el caso en que $p > 0$.

Si $P(x, y)$ es cualquier punto de la parábola, la distancia de P al foco F, de acuerdo con la fórmula de la distancia, es

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

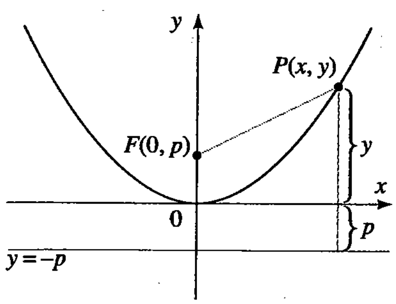


FIGURA 3

y la distancia de P a la directriz es

$$|y - (-p)| = |y + p|$$

Según la definición de una parábola, esas dos distancias deben ser iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$x^2 - 2py = 2py \qquad \text{Simplifique}$$

$$x^2 = 4py$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$, abre hacia abajo. Cuando se sustituye x por $-x$, la ecuación no cambia, por lo que la gráfica es simétrica respecto al eje y. En el siguiente cuadro resumimos lo que hemos encontrado:

PARÁBOLA CON EJE VERTICAL

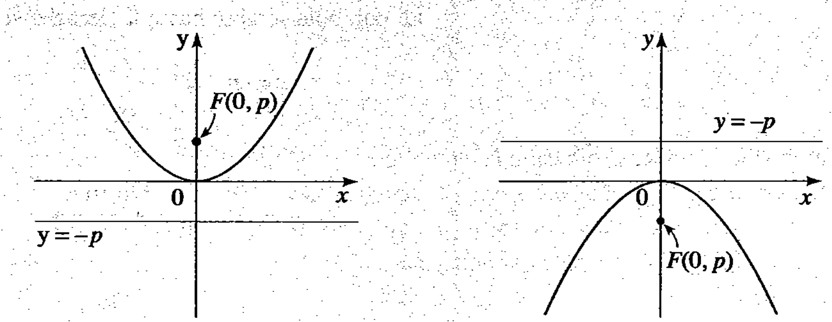
La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 4py$$

es una parábola con las siguientes propiedades

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(0, p)$
DIRECTRIZ	$y = -p$

La parábola se abre hacia arriba si $p > 0$, o abre hacia abajo si $p < 0$.



(a) $x^2 = 4\,py$ con $p > y$ (b) $x^2 = 4py$ con $p < 0$

EJEMPLO 1 ■ Determinación de la ecuación de una parábola

Deduzca la ecuación de la parábola con vértice $V(0, 0)$ y foco $F(0, 2)$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Como el foco es $F(0, 2)$, se deduce que $p = 2$ (y entonces la ecuación de la directriz es $y = -2$). Por lo anterior, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(2)y \qquad x^2 = 4py \text{ con } p = 2$$

$$x^2 = 8y$$

Ya que $p = 2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba. Véase la figura 4. ■

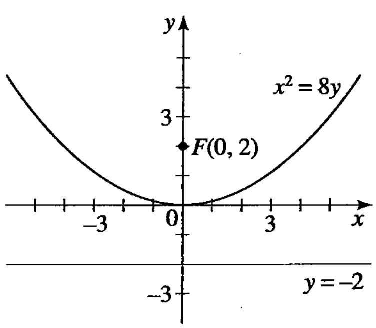


FIGURA 4

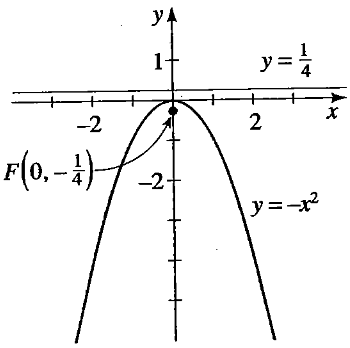


FIGURA 5

EJEMPLO 2 ■ Determine el foco y la directriz de una parábola a partir de su ecuación

Determine el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Al comparar la ecuación $y = -x^2$ con la ecuación general $x^2 = 4py$, se ve que $4p = -1$, así que $p = -\frac{1}{4}$. El foco, es $F(0, -\frac{1}{4})$ y la ecuación de la directriz es $y = \frac{1}{4}$. La gráfica se muestra en la figura 5. ■

Al reflejar la gráfica de la figura 3 en la recta diagonal $y = x$ obtenemos el intercambio de los papeles de x y y. Esto produce una parábola con eje horizontal. Con el mismo método que arriba se pueden demostrar las propiedades siguientes.

PARÁBOLA CON EJE HORIZONTAL

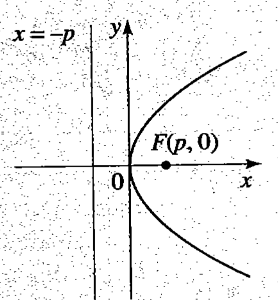
La gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4px$$

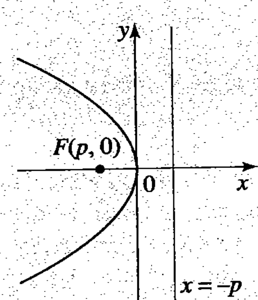
es una parábola con las siguientes propiedades:

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(p, 0)$
DIRECTRIZ	$x = -p$

La parábola se abre hacia la derecha si $p > 0$, o hacia la izquierda si $p < 0$.



(a) $y^2 = 4px$ con $p > 0$



(b) $y^2 = 4px$ con $p < 0$

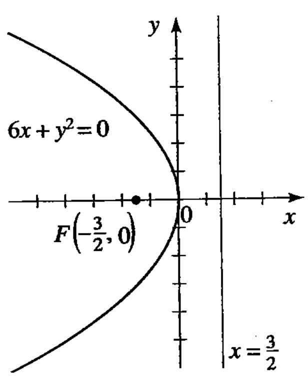


FIGURA 6

EJEMPLO 3 ■ Parábola con eje horizontal

Determine el foco y la directriz de la parábola $6x + y^2 = 0$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación en la forma $y^2 = -6x$. Al comparar lo anterior con la ecuación general $y^2 = 4px$, vemos que $-6 = 4p$, así que $p = -\frac{3}{2}$. Por consiguiente, el foco está en $(-\frac{3}{2}, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = \frac{3}{2}$.

Ya que $p = -\frac{3}{2} < 0$, la parábola abre hacia la izquierda, lo que se ve en la figura 6. ■

Se pueden usar las coordenadas del foco para estimar el “ancho” de una parábola, al trazar su gráfica. El segmento de recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje, con sus extremos en la parábola, se llama **lado recto**, y su longitud es el **diámetro**

Arquímedes (287–212 a. C.) fue el matemático más grande del mundo antiguo. Nació en Siracusa, colonia griega en Sicilia, una generación después de Euclides. Adquirió renombre como genio de la mecánica, por sus muchos inventos técnicos: diseñó poleas para levantar pesadas naves, y el tornillo para transportar agua a niveles más altos. Se dice que usó espejos parabólicos para concentrar los rayos del Sol e incendiar la flota romana que atacaba Siracusa. Una vez, el rey Herón II de Siracusa sospechó que un orfebre guardaba parte del oro destinado a su corona, y que lo reemplazaba con cantidades iguales de plata. Pidió consejo a Arquímedes. Al sumergirse en un baño público, Arquímedes descubrió la solución de ese problema, al observar que el volumen de su cuerpo era igual al volumen del agua derramada de la tina. Dice la leyenda que de inmediato corrió a casa, gritando "¡Eureka! ¡Eureka!" ("¡lo encontré! ¡lo encontré!"). Este incidente atestigua sus enormes poderes de concentración. A pesar de su destreza técnica, lo que más enorgulleció a Arquímedes fueron sus descubrimientos matemáticos. Entre ellos están las fórmulas del volumen de una esfera, $V = (\frac{4}{3})\pi r^3$; la superficie de una esfera, $S = 4\pi r^2$ y un cuidadoso análisis de las propiedades de las parábolas y otras cónicas.

focal de la parábola. En la figura 7 vemos que la distancia de un extremo Q del lado recto a la directriz es $|2p|$. Así, la distancia de Q al foco también debe ser $|2p|$, por la definición de la parábola; por consiguiente el diámetro es $|4p|$. En el siguiente ejemplo emplearemos el diámetro focal para determinar el "ancho" de una parábola, al graficarla.

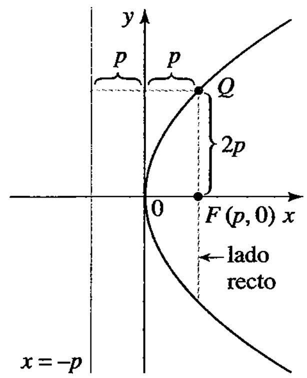


FIGURA 7

EJEMPLO 4 ■ Trazo de una parábola con ayuda del diámetro focal

Determine el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero se pone la ecuación en forma $x^2 = 4py$.

$$y = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 2y \qquad \text{Multiplique ambos lados por 2}$$

En esta ecuación vemos que $4p = 2$, por lo que el diámetro focal es 2. Al despejar p se obtiene $p = \frac{1}{2}$, por lo que el foco está en $(0, \frac{1}{2})$ y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{1}{2}$. Como el diámetro focal es 2, el lado recto se extiende una unidad hacia la izquierda y una hacia la derecha del foco. Con los datos anteriores trazamos la gráfica de la figura 8.

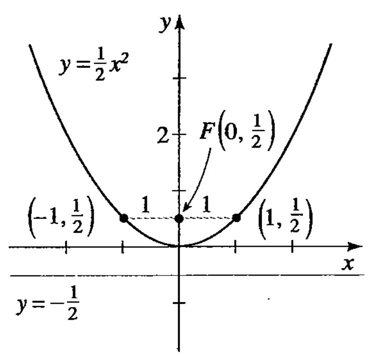


FIGURA 8 ■

Las parábolas tienen una propiedad que las hace útiles en el diseño de reflectores para lámparas y telescopios. La luz de una fuente que se coloca en el foco de una superficie con sección transversal parabólica se refleja de tal manera que es paralela al eje de la parábola (véase la figura 9). Así, un reflector parabólico refleja la luz y forma un haz de rayos paralelos. Al revés, la luz que llega al reflector parabólico en forma de rayos paralelos al eje de simetría, se concentra en el foco. Esta *propiedad de reflexión*, que se puede demostrar mediante el cálculo, se aplica para construir telescopios reflectores.

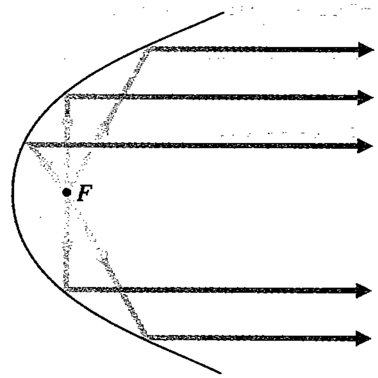


FIGURA 9
Reflector parabólico

EJEMPLO 5 ■ Determinación del foco de un reflector de faro

Un faro buscador tiene un reflector parabólico que forma un "cuenco" de 12 pulgadas de orilla a orilla, y 8 pulgadas de profundidad, como se ve en la figura 10. Si el filamento del bulbo está en el foco, ¿a qué distancia del vértice del reflector se encuentra?

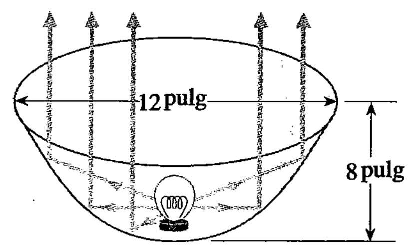


FIGURA 10
Un reflector parabólico

SOLUCIÓN Definimos un sistema coordenado en el corte transversal del reflector, de tal manera que su vértice esté en el origen y su eje sea vertical (véase la figura 11). En esas condiciones, la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. En la figura 11 vemos que el punto (6, 8) está en la parábola. Aprovechamos esto para calcular p.

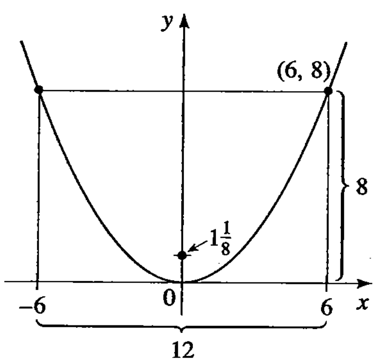


FIGURA 11

$$6^2 = 4p(8) \qquad \text{El punto (6, 8) satisface la ecuación } x^2 = 4py$$

$$36 = 32p$$

$$p = \tfrac{9}{8}$$

El foco es $F(0, \frac{9}{8})$, así que la distancia entre el vértice y el foco es $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ pulg. Como el filamento está en el foco, está a $1\frac{1}{8}$ pulg del vértice del reflector. ■

En el ejemplo siguiente graficaremos una familia de parábolas, para demostrar cómo afecta el cambio de la distancia del foco al vértice al "ancho" de la parábola.

EJEMPLO 6 ■ Familia de parábolas

(a) Deduzca las ecuaciones de las parábolas que tienen vértice en el origen, y focos $F_1(0, \frac{1}{8})$, $F_2(0, \frac{1}{2})$, $F_3(0, 1)$ y $F_4(0, 4)$.
(b) Trace las gráficas de las parábolas de la parte (a). ¿A qué conclusión se puede llegar?

SOLUCIÓN

(a) Como los focos están en la parte positiva del eje y, las parábolas abren hacia arriba y sus ecuaciones son de la forma $x^2 = 4py$, deducimos las siguientes ecuaciones:

Foco	p	Ecuación $x^2 = 4py$	Forma de la ecuación para la calculadora gráfica
$F_1(0, \frac{1}{8})$	$p = \frac{1}{8}$	$x^2 = \frac{1}{2}y$	$y = 2x^2$
$F_2(0, \frac{1}{2})$	$p = \frac{1}{2}$	$x^2 = 2y$	$y = 0.5x^2$
$F_3(0, 1)$	$p = 1$	$x^2 = 4y$	$y = 0.25x^2$
$F_4(0, 4)$	$p = 4$	$x^2 = 16y$	$y = 0.0625x^2$

(b) Las gráficas se muestran en la figura 12. Se nota que cuanto más cerca está el foco del vértice, la parábola es más angosta.

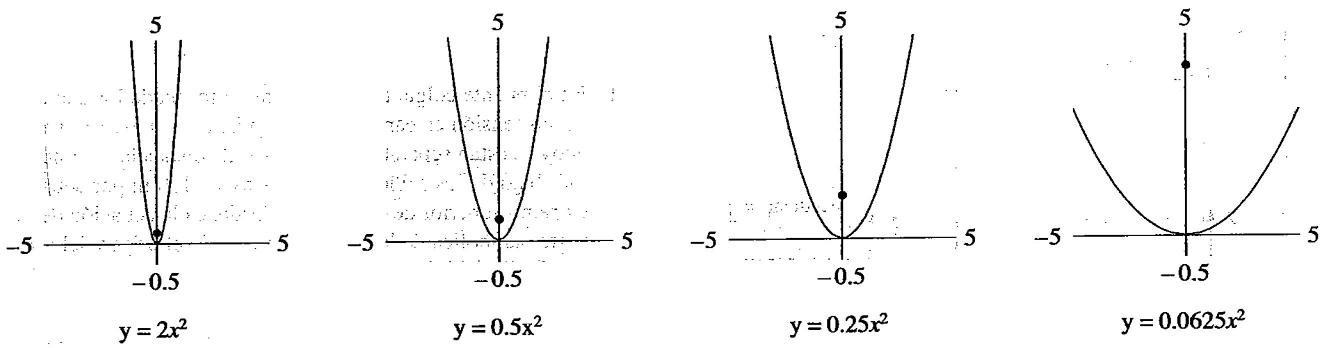


FIGURA 12 Familia de parábolas

■

9.1 EJERCICIOS

1-12 ■ Determine el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola, y trace su gráfica.

1. $y^2 = 4x$

2. $x^2 = y$

3. $x^2 = 9y$

4. $y^2 = 3x$

5. $y = 5x^2$

6. $y = -2x^2$

7. $x = -8y^2$

8. $x = \frac{1}{2}y^2$

9. $x^2 + 6y = 0$

10. $x - 7y^2 = 0$

11. $5x + 3y^2 = 0$

12. $8x^2 + 12y = 0$

13-24 ■ Deduzca una ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen y que cumple con la o las condiciones dadas.

13. Foco $F(0, 2)$

14. Foco $F(0, -\frac{1}{2})$

15. Foco $F(-8, 0)$

16. Foco $F(5, 0)$

17. Directriz $x = 2$

18. Directriz $y = 6$

19. Directriz $y = -10$

20. Directriz $x = -\frac{1}{8}$

21. Foco en el eje de las x positivas, a 2 unidades de la directriz

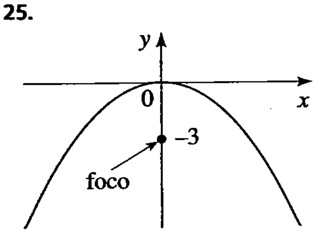
22. La ordenada al origen de la directriz es 6

23. Se abre hacia arriba, y su foco está a 5 unidades del vértice

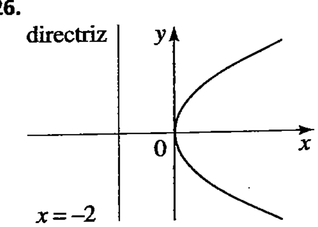
24. Diámetro focal 8 y el foco en la parte negativa del eje y

25-32 ■ A partir de la gráfica deduzca una ecuación de cada parábola.

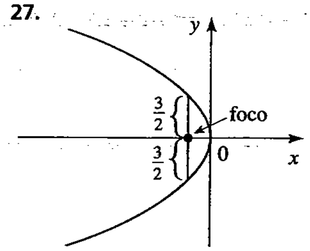
25.



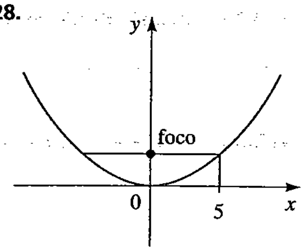
26.



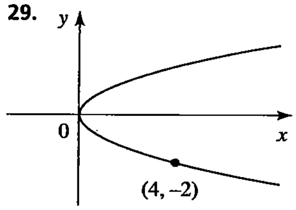
27.



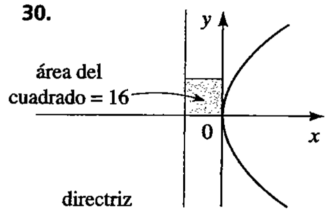
28.



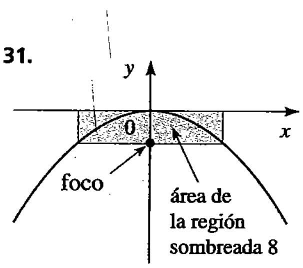
29.



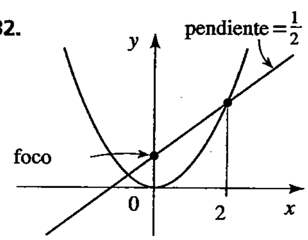
30.



31.



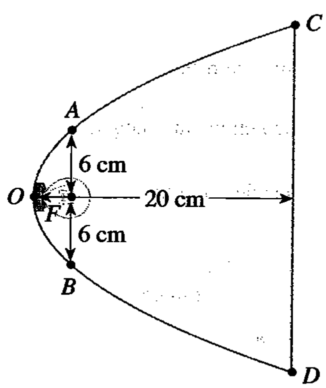
32.



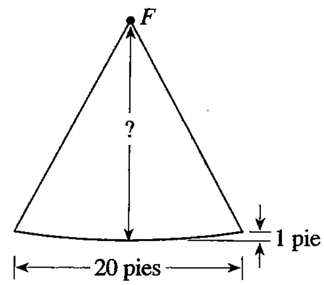
33. Una lámpara tiene un reflector parabólico, como se ve en la figura de abajo. El bulbo se coloca en el foco, y el diámetro focal es 12 cm.

(a) Deduzca una ecuación de la parábola.

(b) Calcule el diámetro $d(C, D)$ de la abertura a 20 cm del vértice.

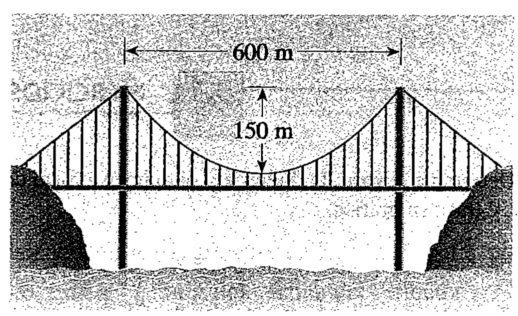


34. El reflector de una antena de satélite tiene corte transversal parabólico, y el receptor está en el foco F. El reflector tiene 1 pie de profundidad y 20 de diámetro, de orilla a orilla (véase la figura). ¿A qué distancia del vértice está el receptor de la antena parabólica?

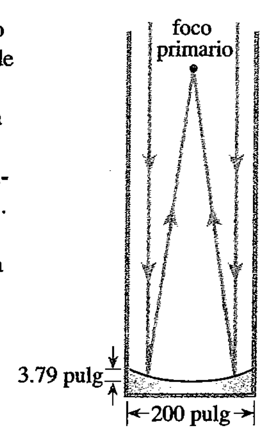


35. En el puente colgante de la figura, la forma de los cables de suspensión es parabólica. Los *pilones,* u *horcas* (torres de apoyo), están separados 600 metros de distancia, y el punto más bajo de los cables portadores está a 150 m por debajo del extremo superior de los pilones. Deduzca la ecuación de la parte parabólica de los cables, colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice.

NOTA: Esta ecuación se usará para determinar la longitud del cable necesario para construir el puente.



36. El telescopio Hale, del Observatorio de Monte Palomar, tiene un espejo de 200 pulgadas de diámetro, como se ve en la figura. Ese espejo tiene una forma parabólica que concentra la luz de las estrellas en el **foco primario**, el cual es el foco de la parábola. El espejo tiene 3.79 pulgadas de profundidad en su centro. Calcule la **distancia focal** del espejo parabólico, que es la distancia del vértice al foco.

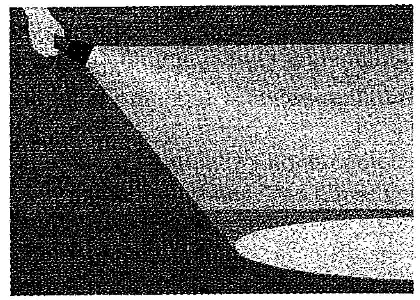


37. (a) Deduzca ecuaciones de la familia de parábolas con vértice en el origen, cuyas directrices tienen ecuaciones $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$ y $y = 8$.
(b) Trace las gráficas. ¿A qué conclusión llega?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

38. **Las parábolas en la realidad** En el texto se describieron varios ejemplos de las aplicaciones de las parábolas. Describa otros casos de la vida real donde intervengan parábolas. Consulte una enciclopedia científica en una biblioteca, o busque en Internet.

39. **Cono de luz de una linterna sorda** Cuando se sujeta una linterna sorda en posición horizontal, se forma un área iluminada en el piso, como se ve en la figura de abajo. ¿Es posible dirigir la linterna en cierto ángulo de tal manera que el contorno del área iluminada sea una parábola? Explique su respuesta.



9.2 ELIPSES

Una elipse es una curva ovalada que parece un círculo alargado; para que quede más claro, presentamos la siguiente definición.

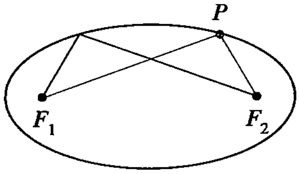


FIGURA 1

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ELIPSE

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. (véase la figura 1.) Esos dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.

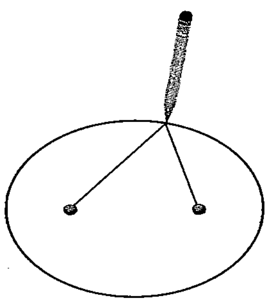


FIGURA 2

La definición geométrica sugiere un método sencillo para dibujar una elipse. Se coloca una hoja de papel sobre una cartulina y se clavan *chinches* en los dos puntos que deban ser los focos de la elipse. Se amarran los extremos de un hilo a las chinches, como se ve en la figura 2. Con la punta de un lápiz se mantiene tenso el hilo. A continuación se mueve con cuidado el lápiz, en torno a los focos, manteniendo siempre tenso el hilo. El lápiz describirá una elipse, porque la suma de las distancias de la punta del lápiz a los focos siempre será igual a la longitud del hilo, que es constante.

Si el hilo es un poco más largo que la distancia entre los focos, la elipse que se describe tendrá una forma alargada, como en la figura 3(a), pero si los focos están cer-

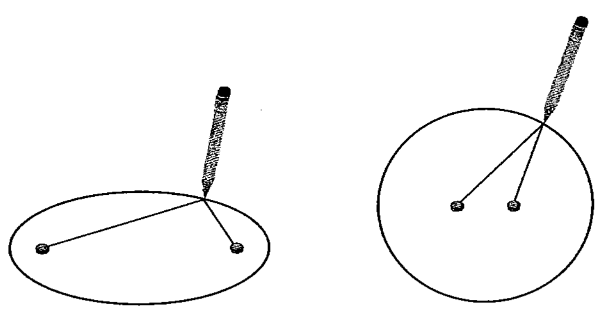


FIGURA 3 (a) (b)

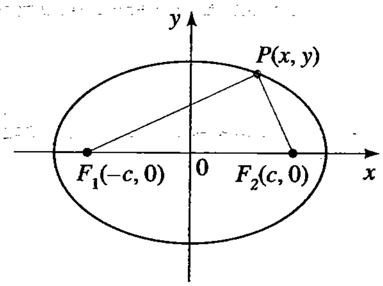


FIGURA 4

canos en relación con la longitud del hilo, la elipse será casi circular, como en la figura 3(b).

Para obtener la ecuación más sencilla de una elipse, se colocan los focos en el eje x en $F_1(-c, 0)$ y en $F_2(c, 0)$, de tal manera que el origen quede a la mitad entre ellos (véase la figura 4). Por comodidad, describimos la suma de las distancias de un punto de la elipse a los dos focos como $2a$. Entonces, si $P(x, y)$ es cualquier punto de la elipse:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

y entonces, de acuerdo con la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados y multiplicamos, obtendremos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

que se simplifica a

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Dividimos por 4 ambos lados, y de nuevo elevamos al cuadrado:

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como la suma de las distancias de P a los focos debe ser mayor que la distancia entre los focos, $2a > 2c$, es decir, $a > c$. Por consiguiente, $a^2 - c^2 > 0$, y se puede dividir cada lado de la ecuación anterior por $a^2(a^2 - c^2)$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por conveniencia, hacemos $b^2 = a^2 - c^2$ (siendo $b > 0$). Como $b^2 < a^2$, se tiene que $b < a$. Entonces, la ecuación de arriba se transforma en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$

Ésta es la ecuación de la elipse. Para graficarla se necesita conocer las intersecciones con los ejes x y y. Al hacer $y = 0$ se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

por lo que $x^2 = a^2$ o $x = \pm a$. Por tanto, la elipse cruza el eje x en $(a, 0)$ y en $(-a, 0)$. A estos puntos se les llama **vértices** de la elipse, y el segmento que los une se llama **eje mayor**. Su longitud es $2a$.

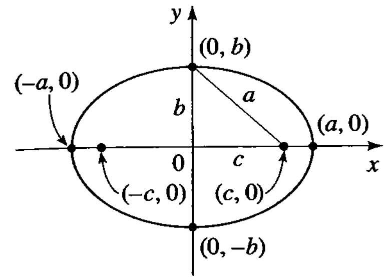


FIGURA 5

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$

Igualmente, si hacemos $x = 0$, obtendremos $y = \pm b$, por lo que la elipse cruza al eje y en $(0, b)$ y en $(0, -b)$. El segmento que une esos puntos se llama **eje menor** de la elipse, y su longitud es $2b$. Observe que $2a > 2b$, por lo que el eje mayor es más largo que el menor.

En la sección 1.8 describimos varias pruebas para detectar la simetría en una gráfica. Si reemplazamos x por $-x$, o y por $-y$ en la ecuación de la elipse, esa ecuación no cambia. Por tanto, la elipse es simétrica respecto a los ejes x y y, y en consecuencia, también respecto al origen. Por esta razón, al origen se le llama **centro** de esa elipse. La gráfica completa se muestra en la figura 5.

Si se colocan los focos de la elipse en el eje y, en $(0, \pm c)$ y no en el eje x, se invierten los papeles de x y de y en la explicación anterior, y se obtiene una elipse vertical. Con lo anterior llegamos a la siguiente descripción de las elipses.

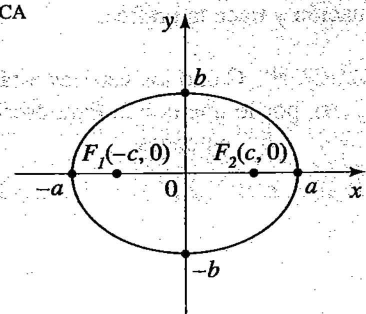
ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

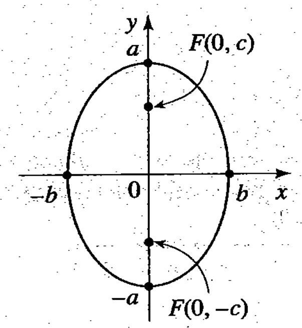
La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{con} \quad a > b > 0$$

es una **elipse** con centro en el origen, que tiene las siguientes propiedades:

GRÁFICA





ECUACIÓN	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE MAYOR	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
EJE MENOR	Vertical, longitud $2b$	Horizontal, longitud $2b$
FOCOS	$(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$

En la ecuación estándar de una elipse, a^2 es el denominador más grande, y b^2 el *menor*. Para calcular c^2 se resta el denominador menor del denominador más grande.

EJEMPLO 1 ■ Trazo de una elipse

Determine los focos, vértices y longitudes de los ejes mayor y menor de la siguiente elipse, y trace su gráfica.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN Como el denominador de x^2 es más grande, la elipse tiene eje mayor horizontal. De acuerdo con lo anterior, $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo que $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. Entonces, $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$.

FOCOS $(\pm\sqrt{5}, 0)$

VÉRTICES $(\pm 3, 0)$

LONGITUD DEL EJE MAYOR 6

LONGITUD DEL EJE MENOR 4

La gráfica se ve en la figura 6. ■

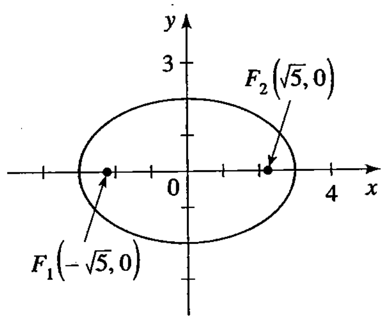


FIGURA 6
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

EJEMPLO 2 ■ Obtenga la ecuación de una elipse

Los vértices de una elipse están en $(\pm 4, 0)$ y los focos están en $(\pm 2, 0)$. Determine su ecuación y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Como los vértices están en $(\pm 4, 0)$, entonces $a = 4$. Los focos están en $(\pm 2, 0)$, por lo que $c = 2$. Para escribir la ecuación se necesita conocer b. Como $c^2 = a^2 - b^2$, entonces

$$2^2 = 4^2 - b^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

La gráfica de esta ecuación se ve en la figura 7. ■

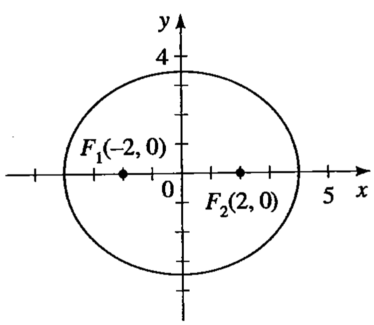


FIGURA 7
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

EJEMPLO 3 ■ Determinar los focos de una elipse

Determine los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Al dividir por 144 obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como $16 > 9$, esta elipse tiene sus focos en el eje y, $a = 4$ y $b = 3$.

Entonces

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

$$c = \sqrt{7}$$

Así, los focos están en $(0, \pm\sqrt{7})$. La gráfica se muestra en la figura 8.

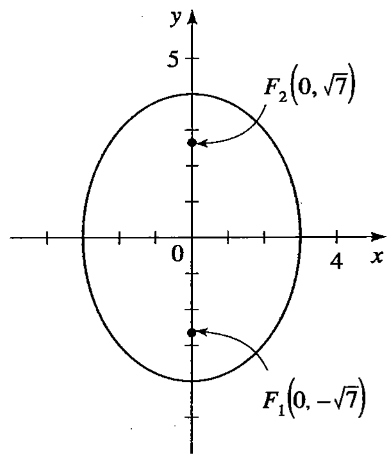


FIGURA 8
$16x^2 + 9y^2 = 144$

■

EXCENTRICIDADES DE ÓRBITAS DE LOS PLANETAS

Las órbitas de los planetas son elipses y el Sol está en uno de sus focos. Para la mayor parte de los planetas esas elipses tienen una excentricidad muy pequeña, y en consecuencia casi son circulares. Sin embargo, Mercurio y Plutón, los planetas más interior y exterior que se conocen, tienen órbitas sensiblemente elípticas.

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.007
Tierra	0.017
Marte	0.093
Júpiter	0.048
Saturno	0.056
Urano	0.046
Neptuno	0.010
Plutón	0.248

Antes, en esta sección, vimos que (figura 3) si $2a$ sólo es un poco mayor que $2c$, la elipse es larga y delgada, mientras que si $2a$ es mucho mayor que $2c$, la elipse es casi circular. La desviación de la forma de la elipse en comparación con la de un círculo se mide por la razón entre c y a.

DEFINICIÓN DE LA EXCENTRICIDAD

Para la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ o $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (siendo $a > b > 0$), la **excentricidad** e es el número

$$e = \frac{c}{a}$$

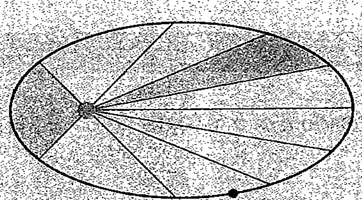
donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad de las elipses satisfacen $0 < e < 1$.

Así, si e es cercana a 1, entonces c casi es igual a a y la elipse tiene forma alargada, pero si e es cercana a 0, la elipse tiene casi la forma de un círculo. La excentricidad es una medida del "estiramiento" de la elipse.

Johannes Kepler (1571–1630) fue el primero en describir el movimiento de los planetas en forma correcta. Según la cosmología de sus tiempos, se postulaban sistemas complicados de círculos moviéndose sobre otros círculos para describir esos movimientos. Kepler buscó una descripción más sencilla y más armoniosa. Como astrónomo oficial de la corte imperial de Praga, estudió las observaciones de Tycho Brahe, astrónomo danés, cuyos datos en esa época eran los más exactos de que se disponía. Después de numerosos intentos de llegar a una teoría, Kepler hizo el notable descubrimiento de que las órbitas de los planetas son elípticas. Sus tres grandes leyes del movimiento planetario son:

1. La órbita de cada planeta es una elipse, con el Sol en uno de sus focos.
2. El segmento de recta que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (véase la figura de abajo).
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Su formulación de esas leyes es, quizá, la deducción más impresionante, a partir de datos empíricos, en la historia de la ciencia.



En la figura 9 vemos varias elipses, para ilustrar el efecto de la variación de la excentricidad e.

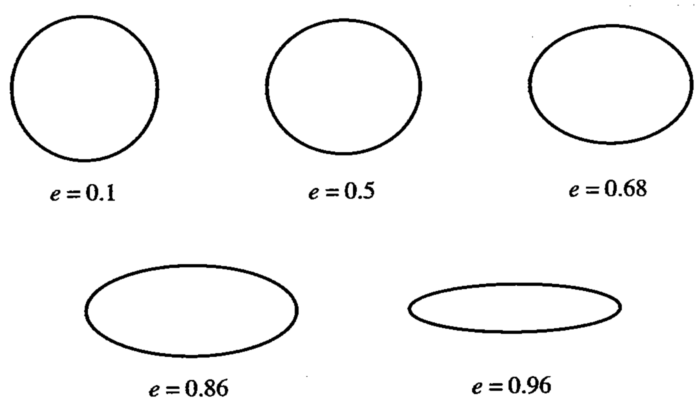


FIGURA 9 Elipses con diferentes excentricidades

EJEMPLO 4 ■ Determinar la ecuación de una elipse a partir de su excentricidad y focos

Deduzca la ecuación de la elipse con focos en $(0, \pm 8)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Los datos son $e = \frac{4}{5}$ y $c = 8$. Entonces

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \qquad \text{Excentricidad } e = c/a$$

$$4a = 40 \qquad \text{Multiplicación cruzada}$$

$$a = 10$$

Para calcular b aprovecharemos que $c^2 = a^2 - b^2$.

$$8^2 = 10^2 - b^2$$

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$b = 6$$

La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Como los focos están en el eje y, la elipse tiene orientación vertical. Para trazarla, calcularemos las intersecciones: las intersecciones en x están en ± 6 y con el eje y están en ± 10. La gráfica se ve en la figura 10.

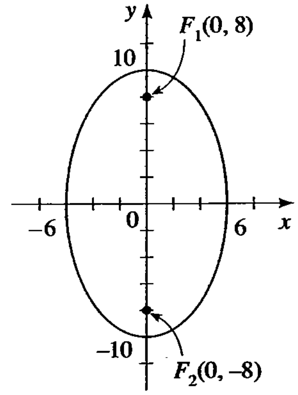


FIGURA 10
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

La atracción gravitacional hace que los planetas describan órbitas elípticas alrededor del Sol, con éste en uno de los focos. Esta notable propiedad fue observada por primera vez por Johannes Kepler, e Isaac Newton la dedujo después a partir de su ley de la gravedad del inverso de la distancia al cuadrado, mediante el cálculo. Las órbitas de los planetas tienen distintas excentricidades, pero la mayor parte son casi circulares.

Las elipses, como las parábolas, tienen una ***propiedad de reflexión*** interesante, que se aprovecha en varias aplicaciones prácticas. Si una fuente luminosa se coloca en un foco de una superficie reflectora con sección transversal elíptica, toda la luz se reflejará en la superficie y llegará al otro foco, como se ve en la figura 11. Este principio, que se aplica a las ondas sonoras igual que a la luz, se usa en la *litotripsia*, tratamiento para los cálculos renales. El paciente se coloca en una tina de agua con sección transversal elíptica, de tal modo que el cálculo se ubique con exactitud en un foco. En el otro foco se generan ondas sonoras de gran intensidad, que se reflejan en la tina y van hacia el cálculo, destruyéndolo con un daño mínimo a los tejidos que lo rodean. El paciente se ahorra el trauma de la cirugía, y se recupera en días, y no en semanas.

La propiedad de reflexión de las elipses se usa también para construir *galerías de murmullos*. El sonido, que viene de un foco, se refleja en las paredes y el techo de un recinto elíptico y pasa al otro foco. En esos recintos se oyen hasta los murmullos susurrados en un foco. Entre las galerías de murmullos más famosas están la Galería Nacional Estatutaria del Capitolio de Estados Unidos en Washington, D. C., y la del Tabernáculo Mormón, en Salt Lake City, Utah.*

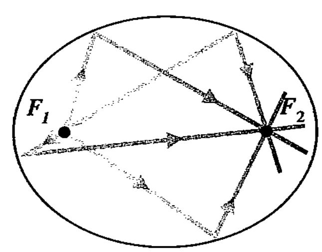


FIGURA 11

*N.R. En el Convento del Desierto de los Leones, México, D.F., también existe una de estas galerías.

9.2 EJERCICIOS

1-14 ■ Determine los vértices, focos y excentricidad de cada elipse. Calcule las longitudes de los ejes mayor y menor y trace la gráfica.

1. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

3. $9x^2 + 4y^2 = 36$

4. $4x^2 + 25y^2 = 100$

5. $x^2 + 4y^2 = 16$

6. $4x^2 + y^2 = 16$

7. $2x^2 + y^2 = 3$

8. $5x^2 + 6y^2 = 30$

9. $x^2 + 4y^2 = 1$

10. $9x^2 + 4y^2 = 1$

11. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{4}$

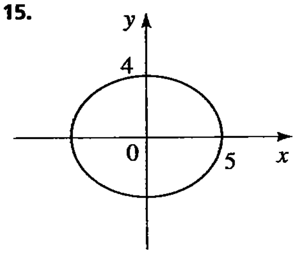
12. $x^2 = 4 - 2y^2$

13. $y^2 = 1 - 2x^2$

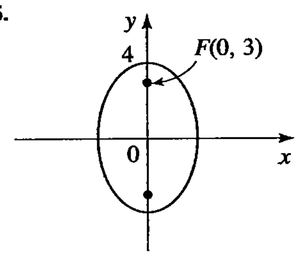
14. $20x^2 + 4y^2 = 5$

15-18 ■ Deduzca una ecuación de cada elipse cuya gráfica se muestra a continuación.

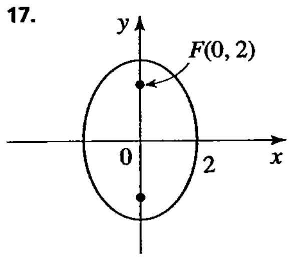
15.



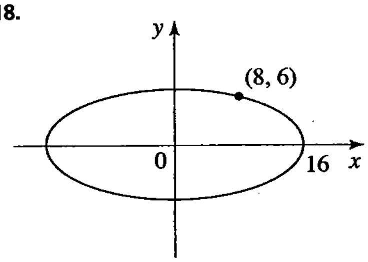
16.



17.



18.



19-30 ■ Deduzca la ecuación de la elipse que cumpla con las siguientes condiciones.

19. Focos en $(\pm 4, 0)$, vértices en $(\pm 5, 0)$

20. Focos en $(0, \pm 3)$, vértices en $(0, \pm 5)$

21. Longitud del eje mayor 4, longitud del eje menor 2, focos en el eje y.

22. Longitud del eje mayor 6, longitud del eje menor 4, focos en el eje x.

23. Focos en $(0, \pm 2)$, longitud del eje menor 6

24. Focos en $(\pm 5, 0)$, longitud del eje mayor 12

25. Extremos del eje mayor en $(\pm 10, 0)$, distancia entre focos 6

26. Extremos del eje menor en $(0, \pm 3)$, distancia entre focos 8

27. Longitud del eje mayor 10, focos en el eje x; la elipse pasa por el punto $(\sqrt{5}, 2)$

28. Excentricidad $\frac{1}{9}$, focos en $(0, \pm 2)$

29. Excentricidad 0.8, focos en $(\pm 1.5, 0)$

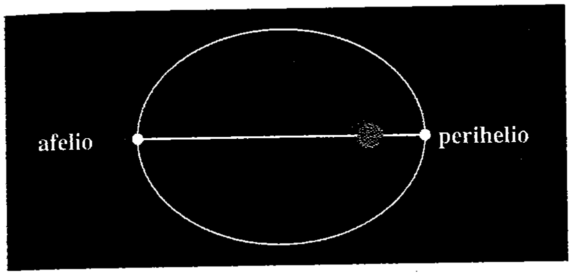
30. Excentricidad $\sqrt{3}/2$, focos en el eje y, longitud del eje mayor 4

31-32 ■ Determine los puntos de intersección de cada par de elipses. Trace las gráficas de cada par de ecuaciones en los mismos ejes de coordenadas, e identifique los puntos de intersección.

31. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$

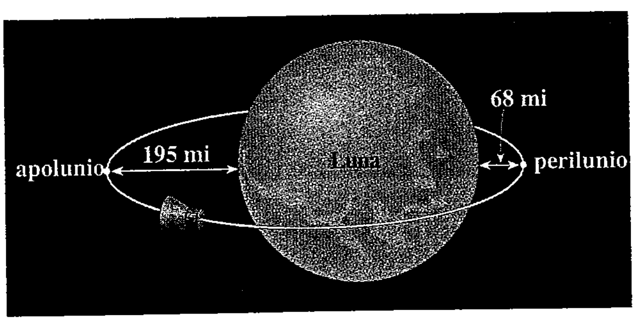
32. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$

33. Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, y el Sol está en uno de los focos de la elipse. El punto de la órbita en el que el planeta está más cercano al Sol se llama **perihelio**, y el punto donde está más alejado se llama **afelio**. Esos puntos son los vértices de la órbita. La distancia de la Tierra al Sol es 147 millones de kilómetros en el perihelio, y 153 millones de kilómetros en el afelio. Deduzca la ecuación de la órbita de la Tierra. (Coloque el origen en el centro de la órbita, y al Sol en el eje x.)

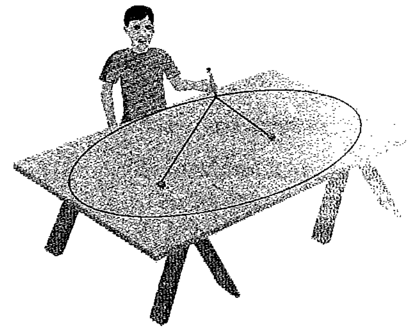


34. Con una excentricidad de 0.25, la órbita de Plutón es la más excéntrica en el sistema solar. La longitud aproximada del eje menor de su órbita es 10,000 millones de kilómetros. Calcule la distancia de Plutón al Sol en el perihelio y en el afelio. (véase el ejercicio 33.)

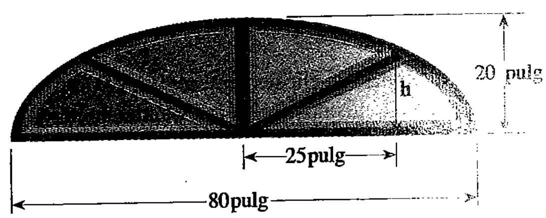
35. Para un objeto en órbita elíptica en torno a la Luna, los puntos de la órbita que están más cerca y más lejos del centro de la Luna se llaman **perilunio** y **apolunio**, respectivamente. Son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en uno de los focos de la órbita. La nave espacial *Apollo 11* se puso en órbita lunar cuyo perilunio estaba a 68 millas y el apolunio a 195 millas de la superficie del satélite. Suponiendo que la Luna es una esfera de 1075 millas de radio, deduzca una ecuación de la órbita de la *Apollo 11*. (Coloque los ejes de coordenadas de tal modo que el origen quede en el centro de la órbita, y los focos estén en el eje x.)



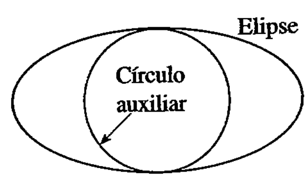
36. Un carpintero construirá la cubierta de una mesa elíptica a partir de una hoja de madera contrachapada (*triplay*), de 4 por 8 pies. Trazará la elipse con el método de "tachuelas e hilo" que se ve en las figuras 2 y 3. ¿Qué longitud de cordón usará, y a qué distancia clavará las tachuelas si la elipse debe tener el tamaño máximo que admita la hoja de madera contrachapada?



37. El frontón de una puerta se construye con la forma de la mitad superior de una elipse, como se ve en la siguiente figura. El frontón tiene 20 pulgadas de alto en su punto de máxima altura, y 80 pulgadas de ancho en su base. Calcule la altura del frontón a 25 pulgadas del centro de la base.



38. El **círculo auxiliar** de una elipse es aquel cuyo radio es igual a la mitad de la longitud del eje menor, y cuyo centro está en el centro de la elipse (véase la figura de abajo). Por consiguiente, el círculo auxiliar es el círculo de tamaño máximo que puede caber en una elipse.[1]
   (a) Deduzca la ecuación del círculo auxiliar de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.
   (b) Para la elipse y su círculo auxiliar de la parte (a), demuestre que si (s, t) es un punto del círculo auxiliar, entonces $(2s, t)$ es un punto de la elipse.

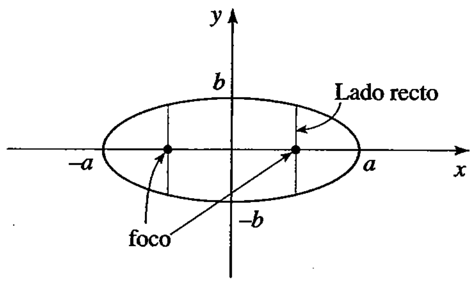


39. El **lado recto** de una elipse es un segmento de recta perpendicular al eje mayor, en cualquiera de los focos, y los

[1] N. del T.: El **círculo principal** es aquel cuyo radio es igual a la mitad de la longitud del eje mayor de la elipse, con centro en el centro de la elipse. Uno de los métodos gráficos para trazar una elipse parte de sus círculos principal y auxiliar.

extremos del segmento están en la elipse, como se ve en la figura. Demuestre que la longitud del lado recto es $2b^2/a$, cuando la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$



40. Si $k > 0$, la siguiente ecuación representa una elipse:

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4 + k} = 1$$

Demuestre que todas las elipses representadas por esta ecuación tienen los mismos focos, independientemente del valor de k.

41. Use un dispositivo graficador para trazar cada elipse, despejando y y graficando ambas soluciones.

(a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ (b) $6x^2 + y^2 = 36$

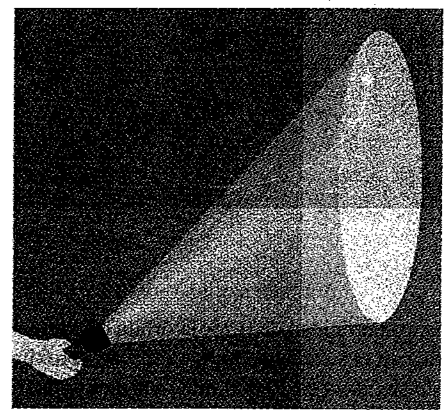
42. (a) Con una graficadora trace la mitad superior (la parte que está en el primero y el segundo cuadrante) de la familia de elipses $x^2 + ky^2 = 100$, para $k = 4, 10, 25$ y 50.

(b) ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de elipses? ¿En qué difieren?

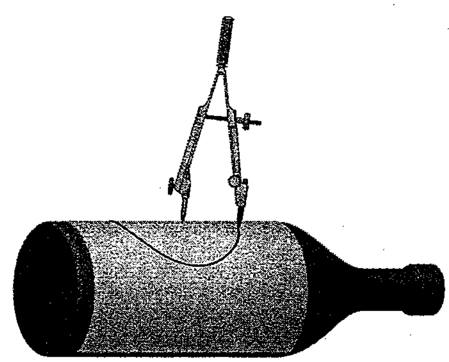
DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

43. Trazo de una elipse en un pizarrón Trate de trazar una elipse, tan exactamente como pueda, en un pizarrón. ¿Cómo se ayudaría con un cordón y dos amigos para su trazo?

44. Cono de luz de una linterna sorda Una linterna sorda se dirige hacia un muro, como se ve en la figura. ¿Cuál es la forma del contorno del área iluminada? Explique su respuesta.



45. ¿Es una elipse? Se envuelve una botella cilíndrica con una hoja de papel, y a continuación se traza un círculo en el papel, con el compás, cuando éste se desenrolla y está plano, ¿la forma que resulta es una elipse? No necesita demostrar su respuesta, pero puede hacer el experimento y ver el trazo que se obtiene.



9.3 HIPÉRBOLAS

Aunque la forma de las elipses y las hipérbolas es totalmente distinta, sus definiciones y ecuaciones son parecidas. En lugar de usar *la suma* de las distancias a dos focos fijos, como en el caso de la elipse, se usa la *diferencia* de las distancias, para definir una hipérbola.

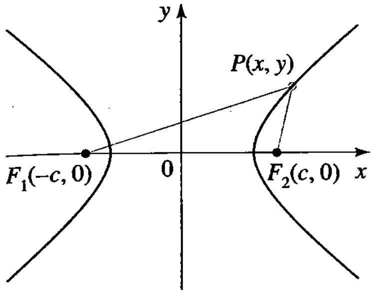


FIGURA 1
P está en la hipérbola si
$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en el plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. (Véase la figura 1.) Esos dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

Como en el caso de la elipse, se obtiene la ecuación más simple de la hipérbola cuando los focos están en el eje x en $(\pm c, 0)$, como se ve en la figura 1. De acuerdo con la definición, si $P(x, y)$ está en la hipérbola, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ o bien $d(P, F_2) - d(P, F_1)$ debe ser igual a una constante positiva, que llamaremos $2a$. Por tanto,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

o sea
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Si procedemos como lo hicimos en el caso de la elipse (sección 9.2), simplificaremos lo anterior a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

En la figura 1, vemos que en el triángulo PF_1F_2 ocurre $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < 2c$. En consecuencia, $2a < 2c$, o $a < c$. Así, $c^2 - a^2 > 0$, por lo que hacemos a $b^2 = c^2 - a^2$. Con lo anterior se simplifica la última ecuación, para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es la *ecuación de la hipérbola*. Si sustituimos x por $-x$ o y por $-y$ la ecuación permanece inalterada, lo que quiere decir que la hipérbola es simétrica respecto a los ejes x y y, así como respecto al origen. Las intersecciones en x son $\pm a$, y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se les llama **vértices** de la hipérbola. No hay intersección en y, porque al hacer $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola se obtiene $-y^2 = b^2$, lo cual es imposible. Además, la ecuación de la hipérbola implica que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geqslant 1$$

así $x^2/a^2 \geqslant 1$. Entonces, $x^2 \geqslant a^2$, de donde $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola está formada por dos partes, que se llaman **ramas**. El segmento que une los dos vértices de las ramas es el **eje transversal** de la hipérbola, y al origen se le llama **centro**.

Si colocamos los focos de la hipérbola en el eje y, y no en el eje x, se obtiene el efecto de invertir los papeles de x y y en la deducción de la ecuación de la hipérbola. Esto da lugar a una hipérbola con eje transversal vertical.

Las propiedades principales de las hipérbolas aparecen en el siguiente cuadro.

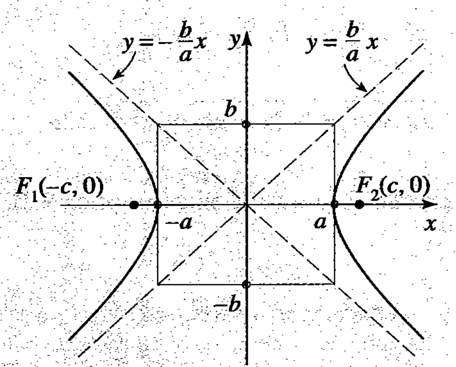
HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN

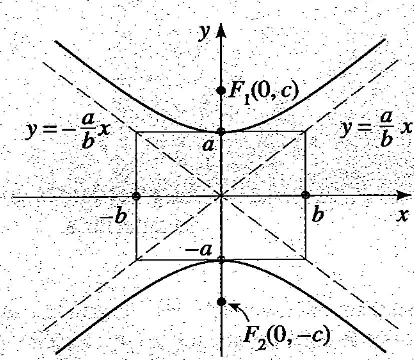
La gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > 0, b > 0$$

es una **hipérbola** con su centro en el origen, que tiene las siguientes propiedades:

GRÁFICA





ECUACIÓN	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE TRANSVERSAL	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
ASÍNTOTAS	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
FOCOS	$(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$	$(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$

Las *asíntotas* que se mencionan en este cuadro son las rectas a las que tiende la hipérbola cuando los valores de x y y se hacen grandes.

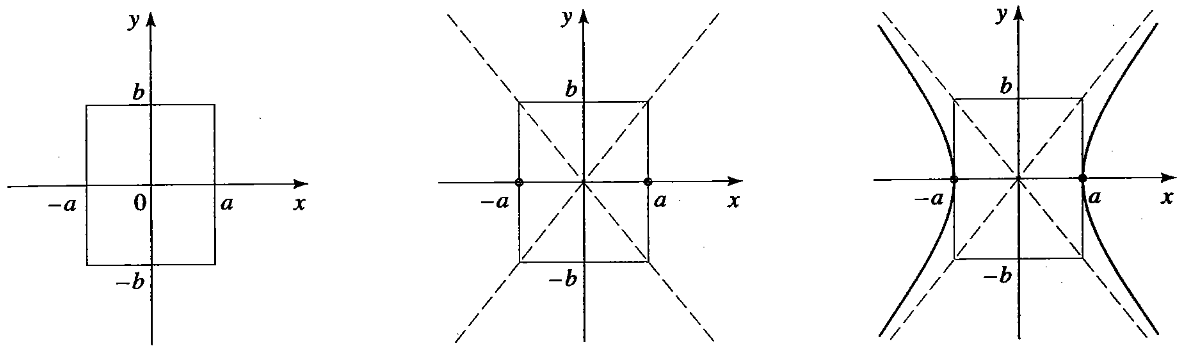
Para determinar las asíntotas en el primer caso del cuadro, se despeja a y de la ecuación, y se obtiene

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$= \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Al crecer x, a^2/x^2 se acerca a cero. En otras palabras, cuando $x \to \infty$* sucede que $a^2/x^2 \to 0$. Así, cuando x es grande, se puede aproximar el valor de y con $y = \pm(b/a)x$. Esto demuestra que esas rectas son asíntotas de la hipérbola.

Las asíntotas son auxiliares esenciales para graficar una hipérbola; con ellas se determina la forma. Una manera cómoda de determinarlas es graficar primero los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. A continuación se trazan segmentos horizontales y verticales que pasen por esos puntos, formando con ellos un rectángulo, como se ve en la figura 2(a), a éste se le llama **rectángulo central** de la hipérbola. Las pendientes de las diagonales del rectángulo central son $\pm b/a$, así que al prolongarlas obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$, que se trazan en la parte (b) de la figura. Por último, se grafican los vértices y se usan las asíntotas como guía para trazar el resto de la hipérbola, como se ve en la parte (c). (Para graficar una hipérbola con eje transversal vertical se usa un método semejante.)



(a) Rectángulo central (b) Asíntotas (c) Hipérbola

FIGURA 2
Pasos para graficar la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

CÓMO TRAZAR UNA HIPÉRBOLA

1. **TRAZAR EL RECTÁNGULO CENTRAL.** Es el rectángulo con centro en el origen, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, que cruza a uno de ellos en $\pm a$ y al otro en $\pm b$.

2. **TRAZAR LAS ASÍNTOTAS.** Son las rectas obtenidas prolongando las diagonales del rectángulo central.

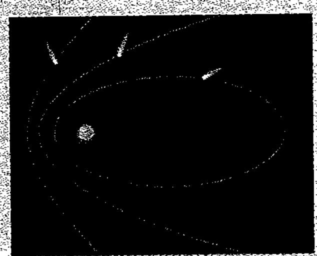
3. **LOCALIZAR LOS VÉRTICES.** Son las dos intersecciones en x, o las dos intersecciones en y.

4. **TRAZAR LA HIPÉRBOLA.** Comenzar en un vértice y trace una rama de la hipérbola, tendiendo a las asíntotas. Trazar del mismo modo la otra rama.

* N. del R. $x \to \infty$, se lee, equis tiende a infinito.

TRAYECTORIAS DE LOS COMETAS

La trayectoria de un cometa es una elipse, una parábola o una hipérbola, y el Sol está en uno de los focos. Se puede demostrar lo anterior mediante el cálculo y las leyes del movimiento de Newton.* Si la trayectoria es una parábola o una hipérbola, el cometa nunca regresa. Si es una elipse, se puede determinar con exactitud cuándo y dónde se podrá ver de nuevo. El cometa Halley tiene una órbita elíptica, y regresa cada 75 años; la última vez que se le vio fue en 1987. El cometa más brillante del siglo XX fue el Hale–Bopp, visto en 1997. Su órbita también es elíptica.



*James Stewart, *Calculus*, 3ª *Edición* (Pacific Grove, Ca: Brooks/Cole, 1995), págs. 745–747.

EJEMPLO 1 ■ Hipérbola con eje transversal horizontal

Determine los vértices, los focos y las asíntotas de la siguiente hipérbola, y trace su gráfica.

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

SOLUCIÓN Primero dividiremos ambos lados de la ecuación por 144, para llevarla a la forma reducida:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Como el término en x^2 es positivo, la hipérbola tiene eje transversal horizontal; sus vértices y focos están en el eje x. Sus vértices están en $(\pm 4, 0)$. Ya que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, se obtiene $c = \sqrt{16 + 9} = 5$. Así, los focos están en $(\pm 5, 0)$. Como $a = 4$ y $b = 3$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{3}{4}x$. Después de trazar el rectángulo central y las asíntotas se completa el trazo de la hipérbola, como en la figura 3.

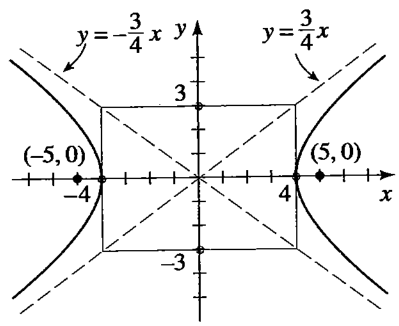


FIGURA 3
$9x^2 - 16y^2 = 144$ ■

EJEMPLO 2 ■ Hipérbola con eje transversal vertical

Determine los vértices, focos y asíntotas de la siguiente hipérbola y trace su gráfica.

$$x^2 - 9y^2 + 9 = 0.$$

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación de la hipérbola en forma reducida.

$$x^2 - 9y^2 = -9$$

$$y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \text{Divida por } -9$$

Como el término en y^2 es positivo, la hipérbola tiene eje transversal vertical; sus focos y vértices están en el eje y. Sus vértices están en $(0, \pm 1)$. Ya que $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$, se obtiene que $c = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Por tanto, los focos están en $(0, \pm 10)$. Como $a = 1$ y $b = 3$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{1}{3}x$. Se trazan el rectángulo central y las asíntotas, y a continuación se completa la gráfica, como se ve en la figura 4. ■

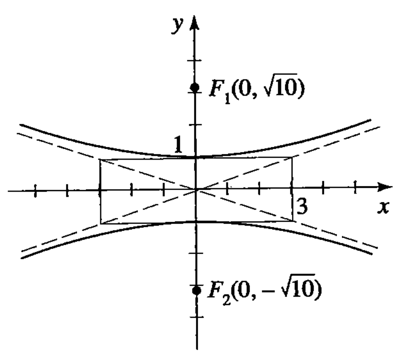


FIGURA 4
$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

EJEMPLO 3 ■ Trazo de la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y sus focos

Obtenga la ecuación de la hipérbola que tiene sus vértices en $(\pm 3, 0)$ y sus focos en $(\pm 4, 0)$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Como los vértices están en el eje x, la hipérbola tiene horizontal su eje transversal. La ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

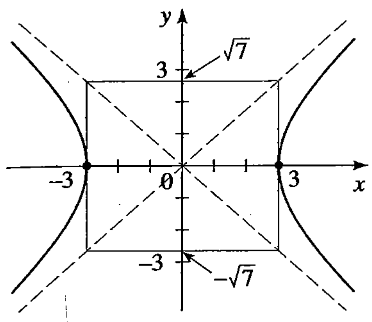


FIGURA 5
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

Entonces, $a = 3$ y $c = 4$. Se calcula b con la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

$$3^2 + b^2 = 4^2$$
$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$
$$b = \sqrt{7}$$

Así, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

La gráfica es la que se ve en la figura 5. ■

EJEMPLO 4 ■ Determinar de la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y asíntotas

Obtenga la ecuación y localice los focos de la hipérbola con vértices en $(0, \pm 2)$ y cuyas asíntotas tienen ecuaciones $y = \pm 2x$. Trace su gráfica.

SOLUCIÓN Ya que los vértices están en el eje y, la hipérbola tiene eje transversal vertical, y $a = 2$. A partir de la ecuación de las asíntotas, vemos que

$$\frac{a}{b} = 2$$
$$\frac{2}{b} = 2 \qquad \text{Ya que } a = 2$$
$$b = \frac{2}{2} = 1$$

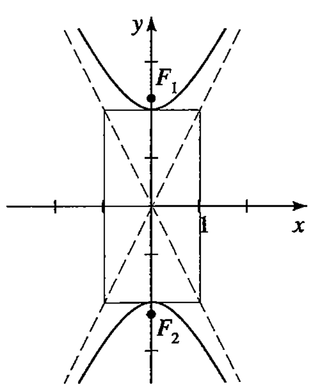


FIGURA 6
$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Para localizar los focos se calcula $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, así $c = \sqrt{5}$. Entonces los focos están en $(0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica aparece en la figura 6. ■

Al igual que las parábolas y elipses, las hipérbolas tienen una interesante *propiedad de reflexión*. La luz que se dirige hacia un foco de un espejo hiperbólico se refleja hacia el otro foco, como se ve en la figura 7. Esta propiedad se aprovecha para construir los telescopios del tipo Cassegrain. Se coloca un espejo hiperbólico dentro del tubo del telescopio, de tal modo que la luz reflejada por el reflector parabólico primario se dirija hacia un foco del espejo hiperbólico. A continuación, la luz se reenfoca en un punto más accesible, atrás del reflector primario (figura 8).

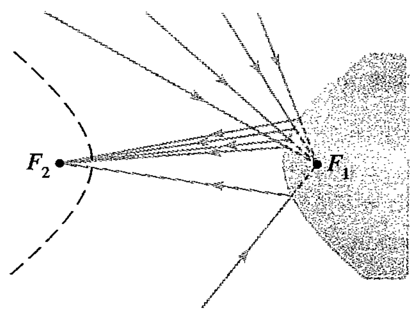


FIGURA 7
Propiedad reflectora de las hipérbolas

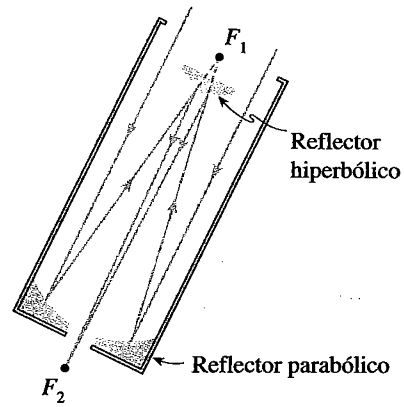


FIGURA 8
Telescopio tipo Cassegrain

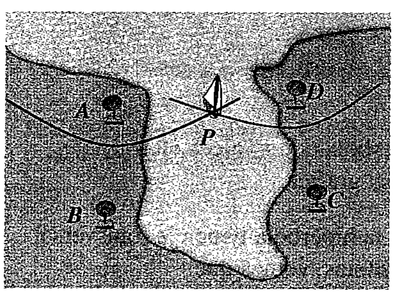


FIGURA 9
Sistema LORAN para determinar la ubicación de un barco.

En el sistema de navegación LORAN (del inglés *LOng RAnge Navigation*, navegación de gran alcance) se usan hipérbolas a bordo de un barco para localizarlo. En la figura 9, las estaciones de radio en A y B transmiten señales simultáneas para que las reciba el barco en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempos de recepción de las señales en una diferencia de distancia, $d(P, A) - d(P, B)$. Por definición de una hipérbola, esa diferencia ubica al barco en una rama de una hipérbola que tiene focos en A y en B. Se sigue el mismo procedimiento con las otras dos estaciones de radio en C y D, con lo que se localiza el barco en una segunda hipérbola. En la práctica sólo se necesitan tres estaciones, porque una puede ser un foco de ambas hipérbolas. La localización de P se calcula, con exactitud mediante la computadora, con las coordenadas del punto de intersección de esas dos hipérbolas.

9.3 EJERCICIOS

1-12 ■ Determine los focos, vértices y asíntotas de cada hipérbola, y trace su gráfica.

1. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

2. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

3. $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$

4. $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

5. $x^2 - y^2 = 1$

6. $9x^2 - 4y^2 = 36$

7. $25y^2 - 9x^2 = 225$

8. $x^2 - y^2 + 4 = 0$

9. $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$

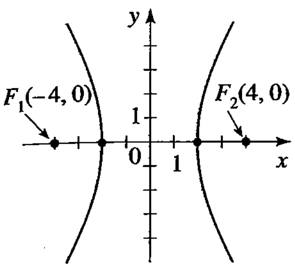
10. $x^2 - 2y^2 = 3$

11. $4y^2 - x^2 = 1$

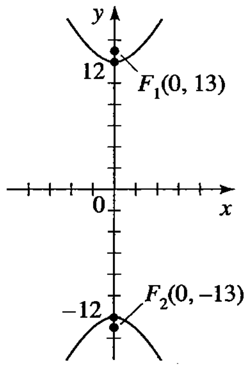
12. $9x^2 - 16y^2 = 1$

13-16 ■ Deduzca la ecuación de la hipérbola cuya gráfica aparece a continuación.

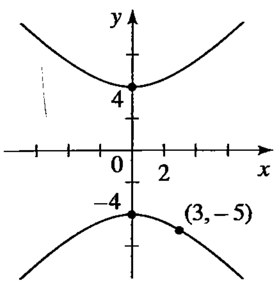
13.



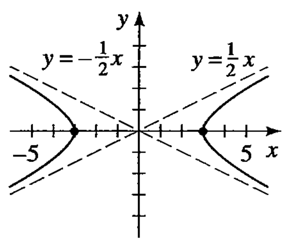
14.



15.



16.



17-28 ■ Deduzca una ecuación de la hipérbola que cumpla con las condiciones dadas.

17. Focos en $(\pm 5, 0)$, vértices en $(\pm 3, 0)$

18. Focos en $(0, \pm 10)$, vértices en $(0, \pm 8)$

19. Focos en $(0, \pm 2)$, vértices en $(0, \pm 1)$

20. Focos en $(\pm 6, 0)$, vértices en $(\pm 2, 0)$

21. Vértices en $(\pm 1, 0)$, ecuaciones de asíntotas $y = \pm 5x$

22. Vértices en $(0, \pm 6)$, ecuaciones de asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$

23. Focos en $(0, \pm 8)$, ecuaciones de asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$

24. Vértices en $(0, \pm 6)$; la hipérbola pasa por $(-5, 9)$

25. Ecuaciones de asíntotas $y = \pm x$, la hipérbola pasa por $(5, 3)$

26. Focos en $(\pm 3, 0)$; la hipérbola pasa por $(4, 1)$

27. Focos en $(\pm 5, 0)$; longitud del eje transversal 6

28. Focos en $(0, \pm 1)$; longitud del eje transversal 1

29. (a) Demuestre que las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ son perpendiculares entre sí.

(b) Determine una ecuación de la hipérbola con focos en $(\pm c, 0)$ cuyas asíntotas sean perpendiculares entre sí.

30. Se dice que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

son **conjugadas** entre sí.

(a) Demuestre que las hipérbolas

$$x^2 - 4y^2 + 16 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4y^2 - x^2 + 16 = 0$$

son conjugadas entre sí, y trace sus gráficas en el mismo sistema coordenado.

(b) ¿Qué tienen en común las hipérbolas de la parte (a)?

(c) Demuestre que cualquier par de hipérbolas conjugadas tienen la relación que descubrió en la parte (b).

31. Al deducir la ecuación de la hipérbola, al comienzo de esta sección, dijimos que la ecuación

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

se simplifica y resulta

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Describa los pasos para demostrar lo anterior.

32. (a) Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

calcule los valores de a, b y c, y determine las coordenadas de los focos F_1 y F_2.

(b) Demuestre que el punto $P(5, \frac{16}{3})$ está en esta hipérbola.

(c) Calcule $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$.

(d) Compruebe que la diferencia entre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$ es $2a$.

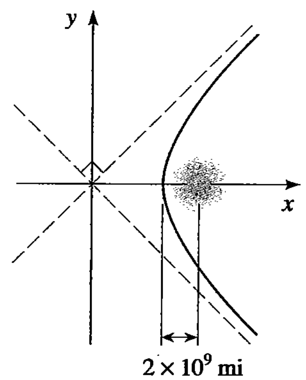
33. Véase la figura 9 del texto. Suponga que las estaciones de radio en A y B están a 500 millas de distancia, y que el barco en P recibe la señal de la estación A 2,640 microsegundos (μs) antes que la señal emitida en B.

(a) Suponga que las señales de radio viajan a 980 pies/μs, calcule $d(P, A) - d(P, B)$.

(b) Determine una ecuación de la rama de la hipérbola de la derecha de la figura. Ponga A y B en el eje y, y el origen a la mitad de la distancia entre ellas. Exprese las distancias en millas.

(c) Si A está justo al norte de B, y P está justo al este de A, ¿a qué distancia está P de A?

34. Algunos cometas, como el Halley, son parte permanente del sistema solar, y describen órbitas elípticas en torno al Sol. Otros, atraviesan el sistema solar sólo una vez, y describen una trayectoria hiperbólica, con el Sol en uno de los focos. La figura siguiente muestra la trayectoria de uno de esos cometas. Deduzca una ecuación de la trayectoria, suponiendo que el máximo acercamiento del cometa al Sol es 2×10^9 mi, y que la trayectoria que traía antes de acercarse al sistema solar forma un ángulo recto con la trayectoria con que continúa después de dejar ese sistema.



35. Las hipérbolas son **cofocales** si tienen los mismos focos.

(a) Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{16 - k} = 1 \qquad \text{con } 0 < k < 16$$

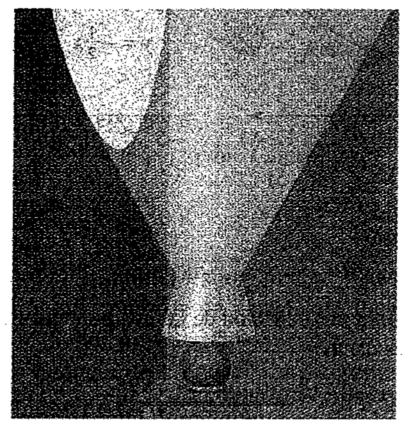
son cofocales.

(b) Con un dispositivo graficador, trace las rampas superiores de la familia de hipérbolas de la parte (a), con $k = 1$, 4, 8 y 12. ¿Cómo varía la forma de la gráfica al aumentar k?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

36. Hipérbolas en el mundo real En el texto se describieron varios ejemplos de las aplicaciones de la hipérbola. Describa otros casos de la vida diaria donde intervengan las hipérbolas. Consulte una enciclopedia científica o busque en Internet.

37. Luz de una lámpara La luz de una lámpara forma un área iluminada en la pared, como se ve en la figura siguiente. ¿Por qué el contorno de esta área iluminada es una hipérbola? ¿Cómo se debe sujetar una linterna sorda para que su haz luminoso forme una hipérbola en el suelo?



9.4 CÓNICAS TRASLADADAS

En las secciones anteriores estudiamos parábolas con vértice en el origen, y elipses e hipérbolas con centro en el origen. Nos limitamos a esos casos porque las ecuaciones que se manejan tienen forma más sencilla. Ahora estudiaremos cónicas cuyos vértices y centros no necesariamente estarán en el origen, y determinaremos la forma en que se modifican las ecuaciones.

También estudiamos transformaciones de funciones, cuyo efecto es trasladar sus gráficas. En general, para cualquier ecuación en x y y, si se reemplaza x por $x - h$ o por $x + h$, la gráfica de la nueva ecuación es la misma que la de la ecuación anterior, sólo que trasladada en dirección horizontal; si y se reemplaza por $y - k$ o por $y + k$, la gráfica se desplaza verticalmente. En el siguiente cuadro mostramos los detalles.

TRASLACIÓN DE GRÁFICAS DE ECUACIONES

Si h y k son números reales positivos, al reemplazar x por $x - h$ o por $x + h$, y al reemplazar y por $y - k$ o por $y + k$, se producen los siguientes efectos en la gráfica de cualquier ecuación en x y y.

Sustitución	Cómo se traslada la gráfica
1. Reemplazar x por $x - h$	h unidades a la derecha
2. Reemplazar x por $x + h$	h unidades a la izquierda
3. Reemplazar y por $y - k$	k unidades hacia arriba
4. Reemplazar y por $y + k$	k unidades hacia abajo

Por ejemplo, veamos la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya gráfica está en la figura 1. Si la trasladamos de modo que su centro esté en el punto (h, k) en lugar de en el origen, su ecuación se transforma en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

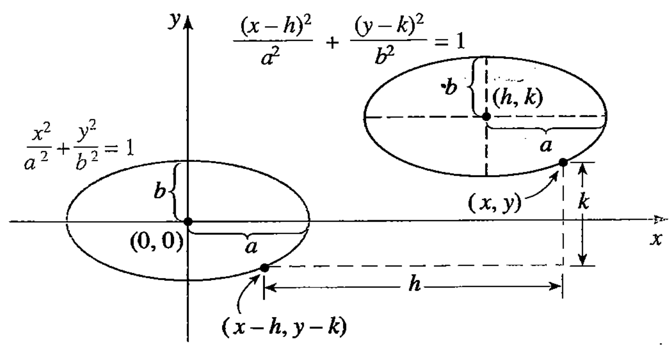


FIGURA 1
Elipse trasladada

EJEMPLO 1 ■ Trazo de la gráfica de una elipse trasladada

Trace la gráfica de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

y determine las coordenadas de los focos.

SOLUCIÓN La elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \qquad \text{(Elipse trasladada)}$$

está trasladada, de tal forma que su centro está en $(-1, 2)$. Ésta se obtuvo a partir de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{(Elipse con el centro en el origen)}$$

al ser trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba. Los extremos de los ejes menor y mayor de la elipse sin trasladar están en $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$ y $(0, -3)$. A esos puntos de les aplican las traslaciones indicadas para obtener los puntos correspondientes de la elipse:

$$(2, 0) \rightarrow (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)$$

$$(-2, 0) \rightarrow (-2 - 1, 0 + 2) = (-3, 2)$$

$$(0, 3) \rightarrow (0 - 1, 3 + 2) = (-1, 5)$$

$$(0, -3) \rightarrow (0 - 1, -3 + 2) = (-1, -1)$$

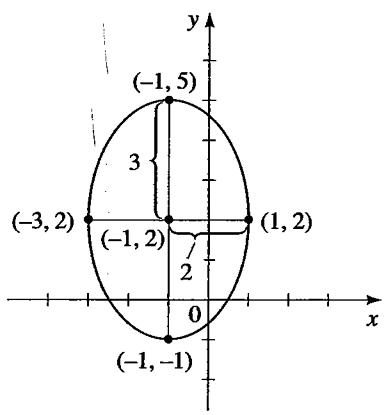


FIGURA 2
$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

Con lo anterior trazamos la gráfica de la figura 2.

Para localizar los focos de la elipse trasladada primero se determinan los correspondientes antes de la traslación, cuando el centro está en el origen. Ya que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, entonces $c^2 = 9 - 4 = 5$, y $c = \sqrt{5}$. Los focos, por lo tanto, están en $(0, \pm\sqrt{5})$. Con la traslación de 1 unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba, obtenemos

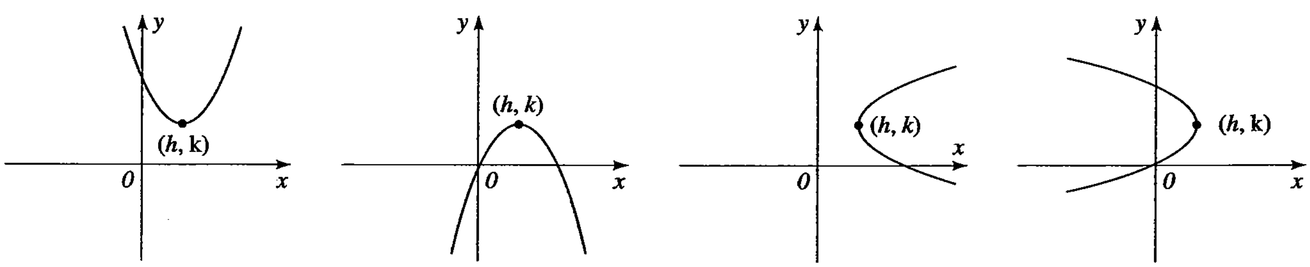
$$(0, \sqrt{5}) \rightarrow (0 - 1, \sqrt{5} + 2) = (-1, 2 + \sqrt{5})$$

$$(0, -\sqrt{5}) \rightarrow (0 - 1, -\sqrt{5} + 2) = (-1, 2 - \sqrt{5})$$

Por lo anterior, los focos de la elipse trasladada están en

$$(-1, 2 + \sqrt{5}) \qquad \text{y} \qquad (-1, 2 - \sqrt{5})$$ ■

Al aplicar translaciones a parábolas e hipérbolas se obtienen las ecuaciones y sus gráficas que muestran en las figuras 3 y 4.



(a) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p > 0$
(b) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p < 0$
(c) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p > 0$
(d) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p < 0$

FIGURA 3 Parábolas trasladadas

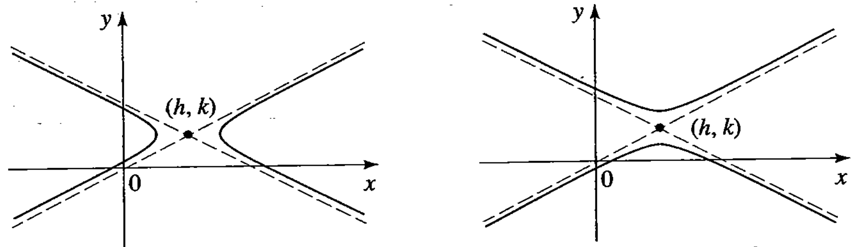


FIGURA 4
Hipérbolas trasladadas

(a) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (b) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

EJEMPLO 2 ■ Gráfica de una parábola trasladada

Determine el vértice, el foco y la directriz, y trace la gráfica de la siguiente parábola.

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

SOLUCIÓN Para transformar esta ecuación a una de las formas de la figura 3, se completa el cuadrado en x.

$$x^2 - 4x + 4 = 8y - 28 + 4 \quad \text{Sume 4 para completar el cuadrado}$$
$$(x-2)^2 = 8y - 24$$
$$(x-2)^2 = 8(y-3) \quad \text{(Parábola trasladada)}$$

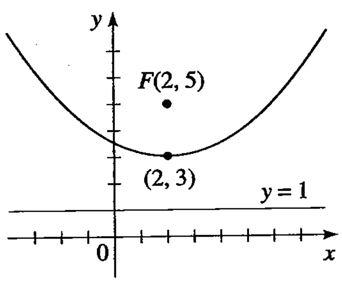


FIGURA 5
$x^2 - 4x = 8y - 28$

Es una parábola que abre hacia arriba, con su vértice en $(2, 3)$. Se obtiene de la parábola

$$x^2 = 8y \quad \text{(Parábola con vértice en el origen)}$$

trasladada 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Ya que $4p = 8$, entonces $p = 2$, por lo que el foco está 2 unidades arriba del vértice, y la directriz 2 unidades abajo del vértice. Así, el foco está en $(2, 5)$ y la ecuación de la directriz es $y = 1$. La gráfica se muestra en la figura 5. ■

EJEMPLO 3 ■ Gráfica de una hipérbola trasladada

Demuestre que la siguiente ecuación representa una hipérbola:

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

Determine su centro, vértices, focos y asíntotas, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN

Primero se completan los cuadrados en x y en y:

$$9(x^2 - 8x \qquad) - 16(y^2 + 2y \qquad) = 16$$
$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 9 \cdot 16 - 16 \cdot 1 \quad \text{Complete los cuadrados}$$
$$9(x-4)^2 - 16(y+1)^2 = 144 \quad \text{Divida por 144}$$
$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad \text{(Hipérbola trasladada)}$$

Es una hipérbola con centro en $(4, -1)$ y con eje transversal horizontal.

CENTRO $(4, -1)$

Su gráfica tendrá la misma forma que la hipérbola sin trasladar

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{(Hipérbola con centro en el origen)}$$

Ya que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, entonces $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Así, los focos están 5 unidades a la izquierda y a la derecha del centro, y los vértices están 4 unidades a cada lado del centro.

FOCOS $(-1, -1)$ y $(9, -1)$

VÉRTICES $(0, -1)$ y $(8, -1)$.

Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola no trasladada son $y = \pm\frac{3}{4}x$, por lo que las de la hipérbola trasladada se determinan como sigue:

$$\text{ASÍNTOTAS} \quad (y + 1) = \pm\tfrac{3}{4}(x - 4)$$

$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}x \mp 3$$

$$y = \tfrac{3}{4}x - 4 \qquad \text{y} \qquad y = -\tfrac{3}{4}x + 2$$

Para ayudarnos a trazar la hipérbola, trazaremos el rectángulo central; llega a 4 unidades a la derecha e izquierda del centro, y a 3 unidades arriba y abajo del centro. Una vez trazado el rectángulo, trazamos las asíntotas y completamos la gráfica de la hipérbola trasladada, que se ve en la figura 6.

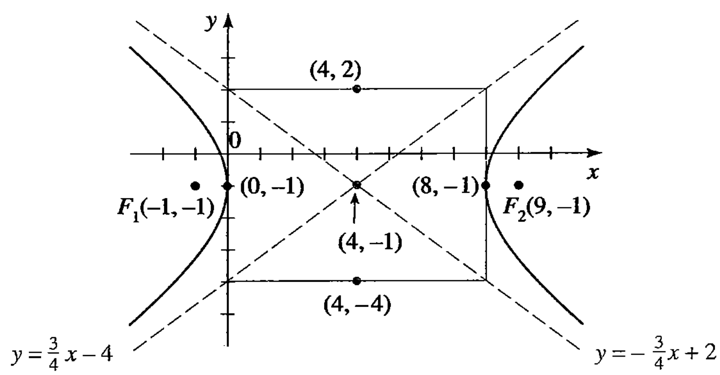


FIGURA 6
$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$

■

Si desarrollamos y simplificamos las ecuaciones de cualquiera de las cónicas trasladadas que se ven en las figuras 1, 3 y 4, siempre obtendremos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son 0 en forma simultánea. Al revés, si partimos de una ecuación de esta forma, completamos el cuadrado en x y y para ver qué cónica representa. En algunos casos, sucede que la ecuación sólo es la de un par de rectas, o de un solo punto, o bien no se puede trazar la gráfica. Esos casos se llaman de **cónicas degeneradas**. El siguiente ejemplo ilustra uno de estos casos.

EJEMPLO 4 ■ Ecuación que conduce a una cónica degenerada

Trace la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de x^2 y y^2 son de signo contrario, parece que esta ecuación representa a una hipérbola (como la ecuación del ejemplo 3). Para ver si sucede así, completamos los cuadrados:

$$9(x^2 + 2x \qquad) - (y^2 - 6y \qquad) = 0$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 0 + 9 - 9$$

$$9(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 0$$

$$(x + 1)^2 - \frac{(y - 3)^2}{9} = 0 \qquad \text{Divida por 9}$$

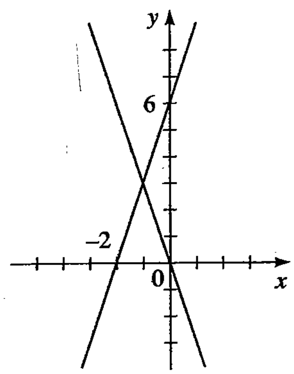


FIGURA 7
$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$

Para que se ajuste lo anterior a la forma de la ecuación de una hipérbola, necesitamos una constante distinta de cero a la derecha del signo igual. De hecho, al continuar el análisis se demuestra que es la ecuación de un par de rectas que se intersecan:

$$(y - 3)^2 = 9(x + 1)^2$$

$$y - 3 = \pm 3(x + 1) \qquad \text{Saque raíz cuadrada}$$

$$y = 3(x + 1) + 3 \qquad \text{o} \qquad y = -3(x + 1) + 3$$

$$y = 3x + 6 \qquad\qquad y = -3x$$

La gráfica de esas rectas está en la figura 7. ■

Como a primera vista la ecuación del ejemplo 4 parecía ser una hipérbola pero, después se vio que representaba simplemente un par de rectas, se dice que su gráfica es la de una **hipérbola degenerada**. También se pueden presentar elipses y parábolas degeneradas al completar el o los cuadrados de una ecuación que representa a una cónica. Por ejemplo, la ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 6 = 0$$

parece ser de una elipse, porque los coeficientes de x^2 y y^2 tienen igual signo. Pero al completar el cuadrado se llega a

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 1)^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

que no tiene solución alguna (porque la suma de dos cuadrados no puede ser negativa). En consecuencia esta ecuación es degenerada.

Resumiendo, llegamos al siguiente teorema:

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CÓNICA TRASLADADA

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la que A y C no son 0 en forma simultánea, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si A o C es 0.
2. una elipse si A y C tienen el mismo signo, o un círculo si $A = C$.
3. una hipérbola si A y C tienen signos contrarios.

9.4 EJERCICIOS

1-4 ■ Localice el centro, los focos y los vértices de cada elipse, y determine las longitudes de los ejes mayor y menor. A continuación trace la gráfica.

1. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

2. $\dfrac{(x-3)^2}{16} + (y+3)^2 = 1$

3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y+5)^2}{25} = 1$

4. $\dfrac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$

5-8 ■ Determine el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de cada parábola, y trace su gráfica.

5. $(x-3)^2 = 8(y+1)$

6. $(y+5)^2 = -6x + 12$

7. $-4(x+\frac{1}{2})^2 = y$

8. $y^2 = 16x - 8$

9-12 ■ Localice el centro, los focos y los vértices de cada hipérbola, y determine las ecuaciones de sus asíntotas. A continuación trace su gráfica.

9. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$

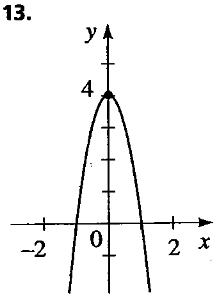
10. $(x-8)^2 - (y+6)^2 = 1$

11. $y^2 - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$

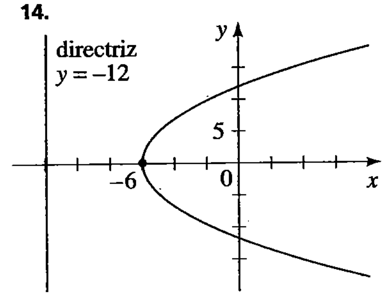
12. $\dfrac{(y-1)^2}{25} - (x+3)^2 = 1$

13-18 ■ Deduzca una ecuación de la cónica que corresponde a cada gráfica.

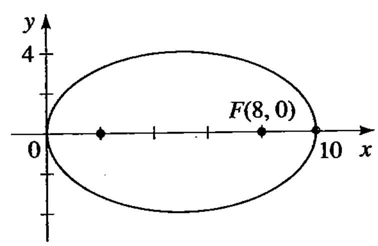
13.



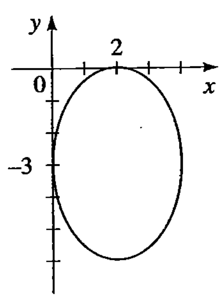
14.



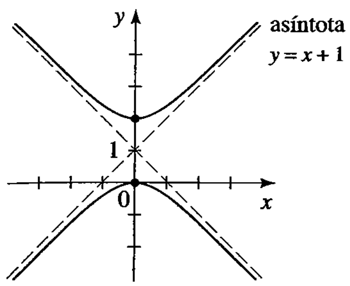
15.



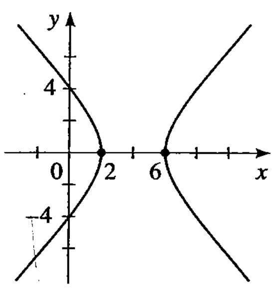
16.



17.



18.



19-30 ■ Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una elipse, parábola, hipérbola o cónica degenerada. A continuación trace la gráfica de la ecuación. Si es una elipse, determine el centro, los focos, los vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor. Si es una parábola, determine el vértice, el foco y la ecuación de la directriz. Si es una hipérbola, determine el centro, los focos, los vértices, y las ecuaciones de las directrices. Si la ecuación no tiene gráfica, explique por qué.

19. $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

20. $y^2 = 4(x + 2y)$

21. $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 20$

22. $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

23. $4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

24. $2x^2 + y^2 = 2y + 1$

25. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

26. $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

27. $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$

28. $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

29. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

30. $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$

31. Determine cuál debe ser el valor de F para que la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$$

sea (a) una elipse, (b) un punto o (c) el conjunto vacío.

32. Deduzca una ecuación de la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$, y que tiene su otro foco en el origen.

33. Este ejercicio es acerca de **parábolas cofocales**, esto es, familias de parábolas que tienen el mismo foco.

(a) Trace las gráficas de la familia de parábolas

$$x^2 = 4p(y + p)$$

para $p = -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ y 2.

(b) Demuestre que cada parábola de esta familia tiene su foco en el origen.

(c) Describa el efecto que tiene, sobre la familia, acercar el vértice al origen.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

34. Una familia de cónicas cofocales Las cónicas que comparten un foco se llaman **cofocales**. Examine la familia de cónicas que tienen un foco en (0, 1) y un vértice en el origen (véase la figura de abajo)

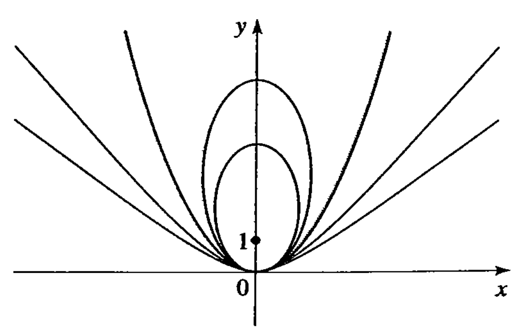
(a) Deduzca ecuaciones de dos elipses distintas que tengan esas propiedades.

(b) Deduzca ecuaciones de dos hipérbolas distintas que tengan esas propiedades.

(c) Explique por qué sólo hay una parábola que tiene esas propiedades. Deduzca su ecuación.

(d) Trace las gráficas de las ecuaciones que dedujo en (a), (b) y (c), en los mismos ejes coordenados. (Para las hipérbolas, sólo grafique las ramas superiores.)

(e) ¿Cómo se relacionan las elipses e hipérbolas con la parábola?



9.5 ROTACIÓN DE EJES

En la sección 9.4 estudiamos cónicas con ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

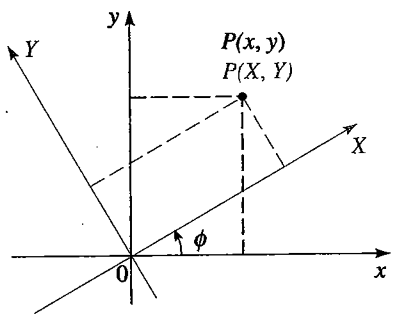


FIGURA 1

Vimos que su gráfica es siempre una elipse, parábola o hipérbola con ejes verticales u horizontales (excepto en los casos degenerados). En esta sección estudiaremos la ecuación más general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y veremos que su gráfica también es una cónica. De hecho, al girar los ejes coordenados un ángulo adecuado, se elimina el término Bxy para así aplicar nuestros conocimientos de las secciones cónicas y analizar la gráfica.

En la figura 1, los ejes x y y se han girado un ángulo agudo ϕ en torno al origen, para producir un nuevo par de ejes, que llamaremos ejes X y Y. Un punto P cuyas coordenadas son (x, y) en el sistema sin girar, tiene coordenadas (X, Y) en el nuevo sistema. Si representamos por r la distancia de P al origen, y hacemos que θ sea el ángulo que forma el segmento OP con el nuevo eje X, podemos ver, en la figura 2, (al considerar los dos triángulos rectángulos que allí se ven) que

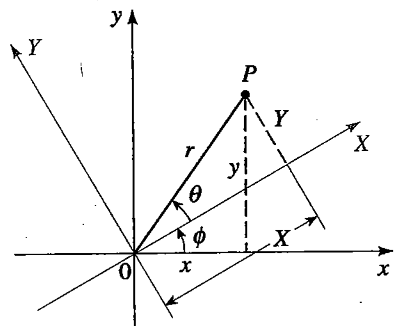


FIGURA 2

$$X = r\cos\theta \qquad Y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x = r\cos(\theta + \phi) \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta + \phi)$$

Aplicando la fórmula del coseno de una suma, vemos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ &= (r\cos\theta)\cos\phi - (r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\phi \\ &= X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

De igual manera podemos aplicar la fórmula del seno, de una suma a la ecuación de y para obtener $y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$. Si se consideran estas ecuaciones de x y y como un sistema de ecuaciones lineales en las variables X y Y (véase el ejercicio 27), obtendremos ecuaciones para X y Y en función de x y y, como se ve en el siguiente cuadro.

FÓRMULAS PARA ROTACIÓN DE EJES

Si los ejes x y y en un plano coordenado se giran el ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y, como se ve en la figura 1, entonces las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en los planos xy y XY se relacionan como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \qquad X = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi$$

$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi \qquad Y = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi$$

EJEMPLO 1 ■ Rotación de ejes

Si los ejes coordenados se giran 30°, determine las coordenadas XY del punto cuyas coordenadas xy son $(2, -4)$.

SOLUCIÓN Aplicamos las fórmulas de rotación de ejes con $x = 2$, $y = -4$ y $\phi = 30°$ para obtener

$$X = 2\cos 30° + (-4)\operatorname{sen} 30° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$Y = -2\operatorname{sen} 30° + (-4)\cos 30° = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas XY son $(-2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$. ■

EJEMPLO 2 ■ Rotación de una hipérbola

Demuestre, rotando 45° los ejes coordenados, que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es una hipérbola.

SOLUCIÓN Aplicamos las fórmulas de rotación de ejes con $\phi = 45°$, para obtener

$$x = X\cos 45° - Y\operatorname{sen} 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\operatorname{sen} 45° + Y\cos 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

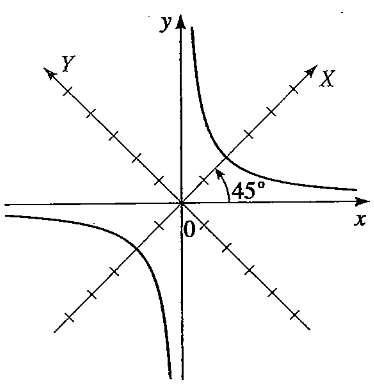


FIGURA 3
$xy = 2$

Al sustituir estas ecuaciones en la ecuación original resulta

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 2$$

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

En esta ecuación se reconoce una hipérbola con vértices en $(\pm 2, 0)$ en el sistema de coordenadas XY. Las ecuaciones de sus asíntotas son $Y = \pm X$, que corresponden a los ejes coordenados del sistema xy (véase la figura 3). ■

Se puede aplicar el método del ejemplo 2 para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación en X y Y que no contenga término en XY, eligiendo un ángulo de rotación adecuado. Para determinarlo, hacemos girar los ejes xy un ángulo ϕ y sustituimos x

y y con las fórmulas de rotación de ejes:

$$A(X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi)^2 + B(X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi)(X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi)$$
$$+ C(X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi)^2 + D(X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi)$$
$$+ E(X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi) + F = 0$$

Si desarrollamos lo anterior y agrupamos los términos semejantes, llegamos a una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

en la que

$$A' = A\cos^2\phi + B\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + C\,\text{sen}^2\phi$$
$$B' = 2(C - A)\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi)$$
$$C' = A\,\text{sen}^2\phi - B\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + C\cos^2\phi$$
$$D' = D\cos\phi + E\,\text{sen}\,\phi$$
$$E' = -\text{D}\,\text{sen}\,\phi + E\cos\phi$$
$$F' = F$$

Para eliminar el término en XY se debe escoger ϕ de tal manera que $B' = 0$, esto es,

$$2(C - A)\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi) = 0$$
$$(C - A)\,\text{sen}\,2\phi + B\cos 2\phi = 0 \qquad \text{Fórmulas de seno y coseno del ángulo doble}$$
$$B\cos 2\phi = (A - C)\,\text{sen}\,2\phi$$
$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} \qquad \text{Divida por sen } 2\phi$$

Los desarrollos anteriores demuestran el siguiente teorema:

SIMPLIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE UNA CÓNICA

Para eliminar el término xy de la ecuación general de una cónica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se rotan los ejes el ángulo agudo ϕ que satisfaga la ecuación

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

EJEMPLO 3 ■ Eliminar el término xy

Con una rotación de ejes, elimine el término xy de la ecuación

$$6\sqrt{3}\,x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}\,y^2 = 21\sqrt{3}$$

Identifique y trace la curva correspondiente.

SOLUCIÓN Para eliminar el término xy rotamos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga lo siguiente:

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por consiguiente, $2\phi = 60°$ y $\phi = 30°$. Con este valor de ϕ se obtiene

$$x = X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - Y\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = X\left(\frac{1}{2}\right) + Y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Fórmulas de rotación de ejes:

$\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen} \phi = \frac{1}{2}$

Sustituimos estos valores de x y y en la ecuación original, como sigue:

$$6\sqrt{3}\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right) + 4\sqrt{3}\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 21\sqrt{3}$$

Al desarrollar y agrupar los términos semejantes obtenemos

$$7\sqrt{3}X^2 + 3\sqrt{3}\,Y^2 = 21\sqrt{3}$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{7} = 1 \qquad \text{Divida por } 21\sqrt{3}$$

Es la ecuación de una elipse en el sistema de coordenadas XY. Los focos están en el eje Y. Como $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$, la longitud del eje mayor es $2\sqrt{7}$, y la del eje menor es $2\sqrt{3}$. Esta elipse se ve en la figura 4. ■

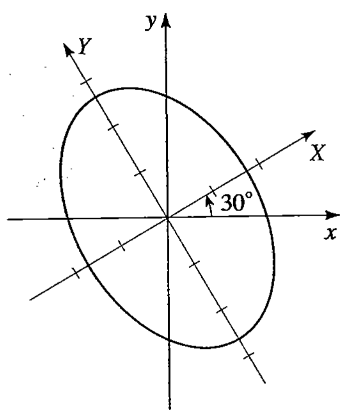


FIGURA 4
$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$

En el ejemplo anterior pudimos determinar ϕ sin dificultad, porque recordamos que $\cot 60° = \sqrt{3}/3$. En general, la determinación de ϕ no es tan fácil. En el siguiente ejemplo veremos cómo se aplican las siguientes fórmulas del ángulo medio, válidas para $0 < \phi < \pi/2$, para determinar ϕ (véase la sección 7.3):

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} \qquad \operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

EJEMPLO 4 ■ Eliminación del término en xy

Haga una rotación de ejes para eliminar el término xy de la ecuación

$$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$$

Identifique y trace la curva.

SOLUCIÓN Para eliminar el término xy rotamos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga la ecuación

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{64 - 36}{96} = \frac{7}{24}$$

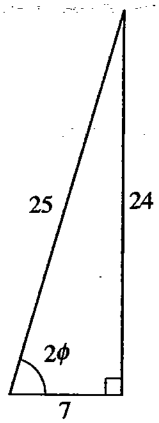


FIGURA 5

En la figura 5 se ve un triángulo para el que cot $2\phi = \frac{7}{24}$. Se reconoce que

$$\cos 2\phi = \tfrac{7}{25}$$

por lo que, aplicando las fórmulas del ángulo medio obtenemos

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Entonces se aplican como sigue las fórmulas de rotación de ejes:

$$x = \tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y$$

Al sustituirlas en la ecuación original, llegamos a

$$64(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y)^2 + 96(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y)(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y)$$
$$+ 36(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y)^2 - 15(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y) + 20(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y) - 25 = 0$$

Desarrollamos y agrupamos los términos semejantes:

$$100X^2 + 25Y - 25 = 0$$

$$-4X^2 = Y - 1 \qquad \text{Simplifique}$$

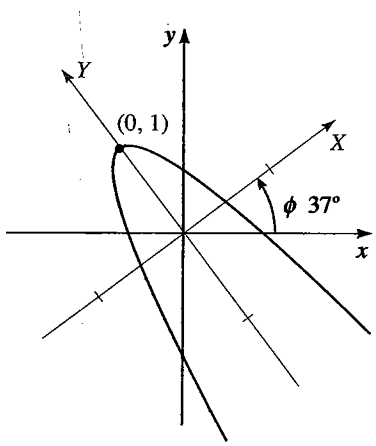


FIGURA 6
$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$

Reconocemos esta ecuación como la de una parábola que abre hacia la parte negativa del eje Y, cuyo vértice está en $(0, 1)$, en las coordenadas XY. Como $4p = -4$, entonces $p = -1$, por lo que el foco está en $(0, 0)$ y la ecuación de la directriz es $Y = 2$. Usando

$$\phi = \cos^{-1}\tfrac{4}{5} \approx 37°$$

La figura 6 muestra esta gráfica. ■

En los ejemplos 3 y 4 identificamos el tipo de cónica rotando los ejes. El siguiente teorema presenta las reglas para identificar el tipo de cónica, en forma directa a partir de la ecuación, sin rotar los ejes.

IDENTIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS MEDIANTE EL DISCRIMINANTE

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede ser una cónica o una cónica degenerada. Cuando no es degenerada, la gráfica es

1. una parábola, si $B^2 - 4AC = 0$.
2. una elipse, si $B^2 - 4AC < 0$.
3. una hipérbola, si $B^2 - 4AC > 0$.

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama el **discriminante** de la ecuación.

■ **Demostración** Si rotamos los ejes un ángulo ϕ obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde $A', B', C', \ldots$, se determinan con las fórmulas de la página 646. Con un cálculo directo se demuestra que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Por tanto, la expresión $B^2 - 4AC$ permanece inalterada para cualquier rotación. En particular, si escogemos una rotación que elimine al término en xy ($B' = 0$), llegaremos a

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

En este caso, $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Así, $B^2 - 4AC = 0$ si A' o C' son cero; $B^2 - 4AC < 0$ si A' y C' tienen el mismo signo, y $B^2 - 4AC > 0$ si A' y C' tienen signos contrarios. Según el cuadro de la página 642, estos casos corresponden a que la gráfica de la última ecuación sea una parábola, una elipse o una hipérbola, respectivamente. □

En la demostración indicamos que el discriminante no cambia en cualquier rotación; por esta razón se dice que el discriminante es **invariante** bajo rotación.

EJEMPLO 5 ■ Identificación de una cónica mediante el discriminante

Use el discriminante para identificar la gráfica de la siguiente ecuación.

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

SOLUCIÓN Como $A = 3, B = 5$ y $C = -2$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 > 0$$

Por consiguiente, la gráfica es una elipse. ■

9.5 EJERCICIOS

1-6 ■ Determine las coordenadas XY del punto dado cuando los ejes coordenados se rotan el ángulo indicado.

1. $(1, 1)$, $\phi = 45°$

2. $(-2, 1)$, $\phi = 30°$

3. $(3, -\sqrt{3})$, $\phi = 60°$

4. $(2, 0)$, $\phi = 15°$

5. $(0, 2)$, $\phi = 55°$

6. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $\phi = 45°$

7-10 ■ Determine, en coordenadas XY, la ecuación dada de la cónica, cuando los ejes coordenados se rotan el ángulo indicado.

7. $y = (x - 1)^2$, $\phi = 45°$

8. $x^2 - y^2 = 2y$, $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5}$

9. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$, $\phi = 30°$

10. $xy = x + y$, $\phi = \pi/4$

11-24 ■ **(a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. **(b)** Haga una rotación de ejes para eliminar el término xy. **(c)** Trace la gráfica.

11. $xy = 8$

12. $xy + 4 = 0$

13. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

14. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$

15. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$

16. $21x^2 + 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144$

17. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20 = 0$

18. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$

19. $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$

20. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$

21. $2\sqrt{3}x^2 - 6xy + \sqrt{3}x + 3y = 0$

22. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 100(x - y - 1)$

23. $53x^2 + 72xy + 73y^2 = 40x - 30y + 75$

24. $(7x + 24y)^2 = 600x - 175y + 25$

25. (a) Haga una rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una hipérbola:

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 200x - 150y + 600 = 0$$

(b) Determine las coordenadas del centro, los vértices y los focos, en el sistema XY y el sistema xy.

(c) Determine las ecuaciones de las asíntotas en las coordenadas XY y en las xy.

26. (a) Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una parábola:

$$2\sqrt{2}(x + y)^2 = 7x + 9y$$

(b) Determine las coordenadas XY y xy del vértice y foco.

(c) Determine la ecuación de la directriz, en coordenadas XY y xy.

27. Obtenga a X y Y de las ecuaciones

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi$$
$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$$

en función de x y y. [*Sugerencia:* comience multiplicando la primera ecuación por $\cos\phi$ y la segunda por $\operatorname{sen}\phi$, y a continuación sume las dos ecuaciones para obtener X.]

28. Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

es parte de una parábola, girando 45° los ejes. [*Sugerencia:* primero transforme la ecuación en una donde no intervengan radicales.]

29. Sean Z, Z' y R las matrices

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Z' = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Demuestre que las fórmulas de rotación de ejes se escriben como sigue:

$$Z = RZ' \qquad \text{y} \qquad Z' = R^{-1}Z.$$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

30. Invariantes algebraicos Una cantidad es *invariante bajo rotación* si no cambia cuando se giran los ejes coordenados. En el texto se demostró que, para la ecuación general de una cónica, la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación. Aplique las fórmulas para A' y C', de la página 646, para demostrar que también la cantidad $A + C$ es invariante bajo rotación. ¿Es invariante bajo rotación la cantidad F?

31. Invariantes geométricos ¿Espera usted que la distancia entre dos puntos sea invariante bajo rotación? Demuestre su respuesta comparando las distancias $d(P, Q)$ y $d(P', Q')$, siendo P' y Q' las imágenes de P y Q bajo una rotación de ejes.

9.6 COORDENADAS POLARES

Un sistema coordenado es un método para especificar el lugar de un punto en el plano. Hasta ahora hemos manejado el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas) que describe los lugares mediante una cuadrícula ortogonal. El uso de las coordenadas rectangulares es similar a localizar un lugar en una ciudad cuando se dice, por ejemplo, que está en la esquina de la Calle 48 y la Avenida 7. Pero también podríamos describir lo anterior diciendo que está a 3 millas al noroeste del centro. En lugar de especificar su ubicación con una cuadrícula de calles y avenidas, la podemos describir citando su distancia y dirección respecto a un punto fijo.

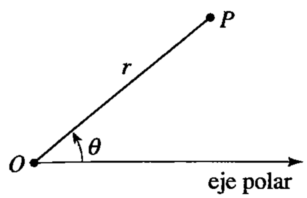


FIGURA 1

En el *sistema de coordenadas polares* se usan distancias y direcciones para especificar los lugares de puntos en el plano. Para establecer ese sistema se determina primero un punto fijo O, llamado **origen** (o **polo**). A continuación se traza un rayo (una semirrecta) que comience en O, llamada **eje polar**. Este eje se suele trazar horizontalmente hacia la derecha de O, y coincide con la parte positiva del eje x en las coordenadas rectangulares. Ahora, sea P cualquier punto en el plano. Sea r la distancia de P al origen y sea θ el ángulo entre el eje polar y el segmento OP, como se ve en la figura 1. Entonces, el par ordenado (r, θ) especifica en forma única el lugar de P. En lo sucesivo escribiremos $P(r, \theta)$ y llamaremos a r y θ las **coordenadas polares** de P. Usaremos la convención que θ es positivo si se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, partiendo del eje polar; es negativo si se mide en la misma dirección que las manecillas. Se acostumbra expresar a θ en radianes. Si $r = 0$, entonces $P = 0$, independientemente del valor de θ, por lo que $(0, \theta)$ representa al polo, para cualquier valor de θ.

Ya que los ángulos $\theta + 2n\pi$, para $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ tienen todos el mismo lado terminal que el ángulo θ, cada punto tiene una cantidad infinita de representaciones en coordenadas polares. Por ejemplo $(2, \pi/3)$, $(2, 7\pi/3)$ y $(2, -5\pi/3)$ representan al mismo punto P, como vemos en la figura 2.

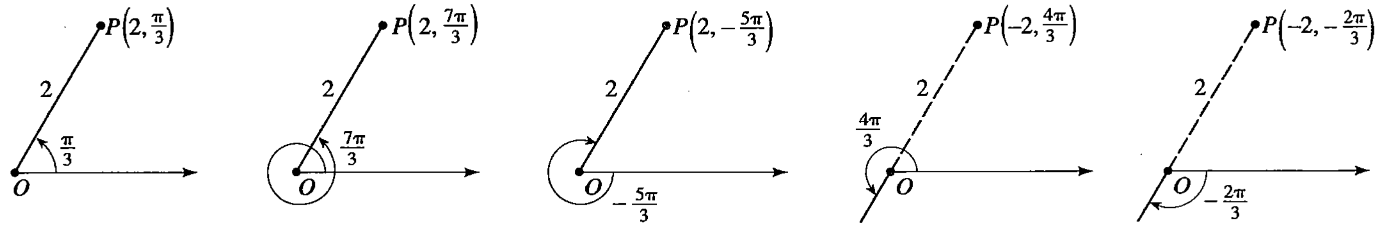


FIGURA 2

Además, también se admite que r tenga valores negativos, sobreentendiendo que si $-r$ es negativo, entonces el punto $P(-r, \theta)$ está alejado r unidades del origen en dirección *opuesta* a la indicada por θ. Así, el punto P de la figura 2 también se describe con las coordenadas $(-2, 4\pi/3)$, o $(-2, -2\pi/3)$. Según esta convención, las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan al mismo punto (véase la figura 3). De hecho, cualquier punto $P(r, \theta)$ también se puede representar con

$$P(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad P(-r, \theta + (2n+1)\pi)$$

para todo entero n.

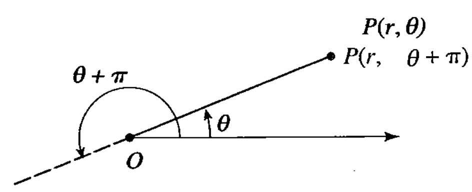


FIGURA 3

EJEMPLO 1 ■ Gráficas de puntos en coordenadas polares

Grafique los puntos cuyas coordenadas polares son las siguientes.

(a) $(1, 3\pi/4)$ (b) $(3, -\pi/6)$ (c) $(3, 3\pi)$ (d) $(-4, \pi/4)$

SOLUCIÓN Las gráficas de esos puntos se ven en la figura 4. Observe que el punto de la parte (d) está a 4 unidades del origen, formando el ángulo $5\pi/4$, porque el valor dado de r es negativo.

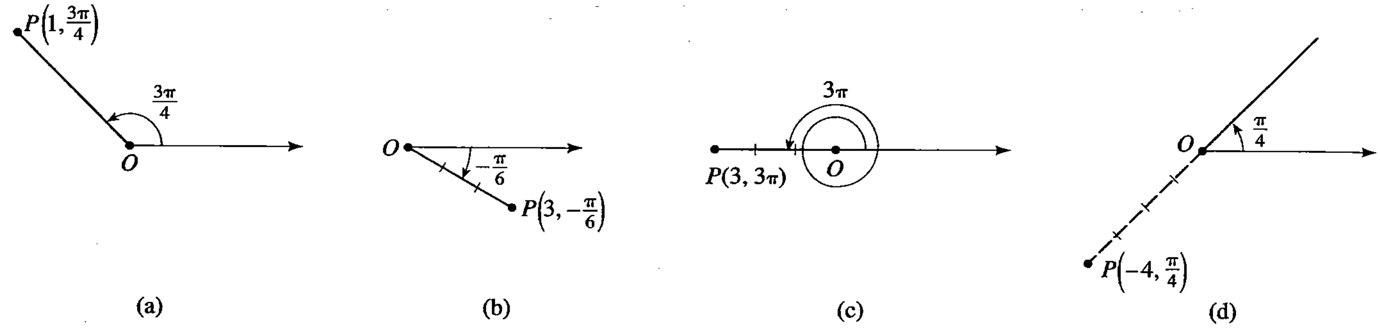


FIGURA 4

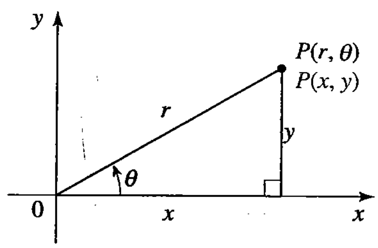


FIGURA 5

Con frecuencia se presentan casos en donde se deben manejar en forma simultánea coordenadas polares y rectangulares. La relación entre los dos sistemas se ilustra en la figura 5, donde el eje polar coincide con la parte positiva del eje x. Las fórmulas del siguiente cuadro se obtuvieron de esa figura, aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. (No obstante que en la figura se ve el caso en el que $r > 0$ y θ es agudo, las fórmulas son válidas para cualquier ángulo θ y cualquier valor de r.)

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

1. Para pasar de coordenadas polares a rectangulares, se aplican las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

2. Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se aplican las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

EJEMPLO 2 ■ Conversión de coordenadas polares en rectangulares

Determine las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares son $(4, 2\pi/3)$.

SOLUCIÓN Como $r = 4$ y $\theta = 2\pi/3$, entonces

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 4\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Así, las coordenadas rectangulares del punto son $(-2, 2\sqrt{3})$. ■

EJEMPLO 3 ■ Conversión de coordenadas rectangulares en polares

Determine las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas rectangulares son $(2, -2)$.

SOLUCIÓN Con $x = 2$ y $y = -2$, obtenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

por lo que $r = 2\sqrt{2}$ o $-2\sqrt{2}$. También

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

por lo que $\theta = 3\pi/4$ o $-\pi/4$. Como el punto $(2, -2)$ está en el cuadrante IV (véase la figura 6), se representa en coordenadas polares en la forma $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$, o como $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$. ■

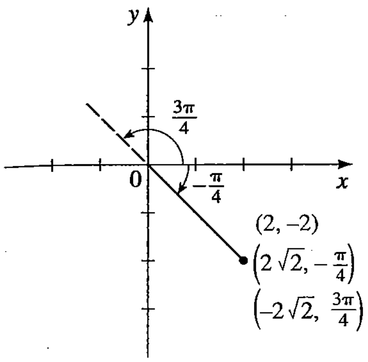


FIGURA 6

Observe que las ecuaciones que relacionan coordenadas polares y rectangulares no determinan a r o a θ en forma única. Cuando usemos esas ecuaciones para determinar las coordenadas polares de un punto, hay que tener cuidado de que los valores que se escojan de r y θ determinen un punto en el cuadrante correcto, como se vio en el ejemplo 3.

GRÁFICAS DE ECUACIONES POLARES

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$ consta de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. En los dos ejemplos siguientes veremos que los círculos centrados en el origen, y las rectas que pasan por el origen, tienen ecuaciones particularmente sencillas en coordenadas polares.

EJEMPLO 4 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación polar

Trace la gráfica de la ecuación $r = 3$.

SOLUCIÓN La gráfica consta de todos los puntos cuya coordenada r es 3; esto es, de todos aquellos que están alejados 3 unidades del origen. Por lo anterior, es el círculo de radio 3 con centro en el origen, como se ve en la figura 7. ■

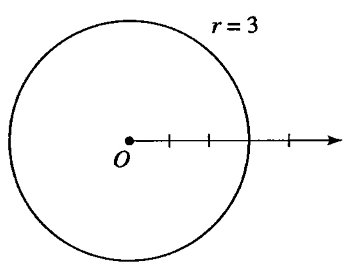


FIGURA 7

En general, la gráfica de la ecuación $r = a$ es el círculo de radio $|a|$ con centro en el origen. Al elevar al cuadrado ambos lados de esta ecuación obtenemos $r^2 = a^2$, y como $r^2 = x^2 + y^2$, la ecuación equivalente en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 = a^2$.

EJEMPLO 5 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación polar

Trace la gráfica de la ecuación $\theta = \pi/3$, y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

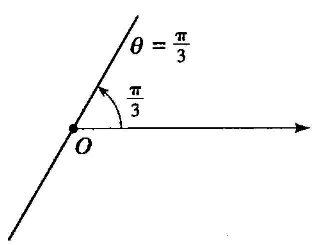


FIGURA 8

SOLUCIÓN La gráfica consta de todos los puntos cuya coordenada θ es $\pi/3$. Es la recta que pasa por el origen, y forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar (véase la figura 8). Observe que los puntos $(r, \pi/3)$ en la recta, cuando $r > 0$, están en el cuadrante I, mientras que aquellos con $r < 0$ están en el cuadrante III. Si el punto (x, y) está en esta recta, entonces

$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Así, la ecuación de esta recta en coordenadas cartesianas es $y = \sqrt{3}\,x$. ■

Para trazar la gráfica de una ecuación polar que no sea tan obvia como las de los ejemplos anteriores, se usan dos técnicas. Una es graficar los puntos calculados con valores de θ suficientes para después unirlos y obtener una curva continua. Es lo que hicimos cuando aprendimos a graficar funciones en coordenadas cartesianas. La otra es pasar la ecuación polar a coordenadas rectangulares, esperando que la ecuación resultante sea una de las que ya conocemos. En el siguiente ejemplo usaremos ambos métodos.

EJEMPLO 6 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación polar

(a) Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.
(b) Convierta la ecuación de la parte (a) a coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN

(a) Primero usaremos la ecuación para calcular las coordenadas polares de varios puntos de la curva. En la siguiente tabla vemos los resultados.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$r = 2 \operatorname{sen} \theta$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

En la figura 9 graficamos esos puntos, y a continuación los unimos para bosquejar la curva. Parece que la gráfica es un círculo. Sólo hemos usado valores de θ entre 0 y π, porque obtendríamos los mismos puntos (expresados con coordenadas negativas de r) si hiciéramos que θ estuviera en el intervalo de π a 2π.

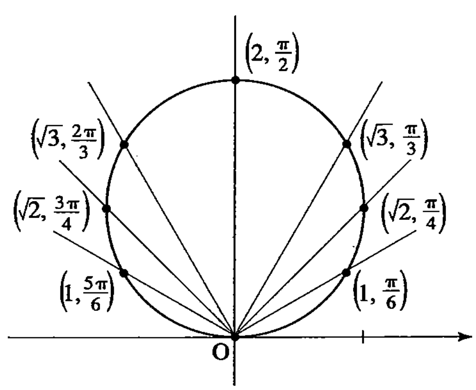


FIGURA 9
$r = 2 \operatorname{sen} \theta$

(b) Multiplicamos por r ambos lados de la ecuación para obtener

$$r^2 = 2r \operatorname{sen} \theta.$$

Para aplicar las fórmulas que relacionan las coordenadas polares y cartesianas, reemplazamos r^2 por $x^2 + y^2$, y y por r sen θ, para llegar a la ecuación en coordenadas rectangulares:

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad \text{Reste } 2y$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad \text{Complete el cuadrado en } y$$

Es la ecuación de un círculo de radio 1, centrado en el punto (0, 1). ■

En general, las gráficas de ecuaciones de la forma

$$r = 2a \text{ sen } \theta \qquad \text{y} \qquad r = 2a \cos \theta$$

son círculos de radio $|a|$ con centro en los puntos cuyas coordenadas polares son $(a, \pi/2)$ y $(a, 0)$, respectivamente.

EJEMPLO 7 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación polar

(a) Trace la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$.
(b) Pase la ecuación de la parte (a) a coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN

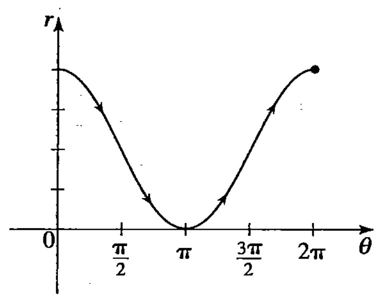


FIGURA 10
$r = 2 + 2\cos\theta$

(a) En lugar de graficar puntos como en el ejemplo 6, trazaremos la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$ en coordenadas *rectangulares*, como en la figura 10. Podemos imaginar que esta gráfica es una tabla de valores que nos permite leer, de un vistazo, los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, vemos que cuando θ aumenta de 0 a $\pi/2$, la coordenada r, que es la distancia a O, disminuye de 4 a 2, así que trazamos la parte correspondiente de la gráfica polar en la figura 11(a). Cuando θ aumenta de $\pi/2$ a π, en la figura 10 vemos que r disminuye de 2 a 0, por lo que trazamos la siguiente parte de la gráfica como en la figura 11(b). Al aumentar θ de π a $3\pi/2$, r aumenta de 0 a 2, como en la parte (c). Por último, cuando θ aumenta de $3\pi/2$ a 2π, r aumenta de 2 a 4, como en la parte (d). Si dejamos que θ aumente a más de 2π, o que disminuya a menos de 0, simplemente describiríamos una vez más esta trayectoria. Al combinar las porciones de la gráfica en las partes (a) a (d) de la figura 11, se obtiene la gráfica completa, como la de la parte (e).

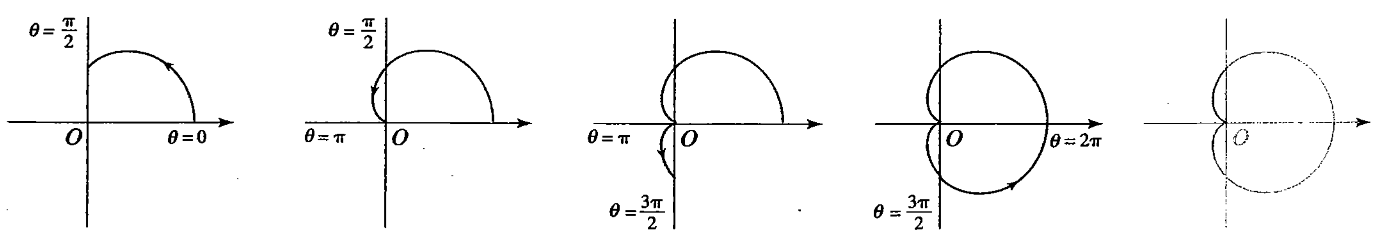


FIGURA 11 Etapas en el trazo de $r = 2 + 2\cos\theta$

(b) Primero multiplicamos ambos lados de la ecuación por r:

$$r^2 = 2r + 2r\cos\theta$$

Sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r \cos \theta$, pasamos dos de los tres términos de la ecuación a coordenadas cartesianas, pero para eliminar la r restante se necesita más trabajo:

$$x^2 + y^2 = 2r + 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 2r$$

$$(x^2 + y^2 - 2y)^2 = 4r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$(x^2 + y^2 - 2y)^2 = 4(x^2 + y^2) \qquad \text{Ya que } r^2 = x^2 + y^2$$

En este caso, la ecuación rectangular es mucho más complicada que la polar, así que la forma polar es la más útil. ■

La curva de la figura 11 se llama **cardioide**, por su forma de corazón. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$r = a(1 \pm \cos \theta) \qquad \text{o} \qquad r = a(1 \pm \operatorname{sen} \theta)$$

es una cardioide.

EJEMPLO 8 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación polar

Trace la gráfica de $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 7, primero trazamos la gráfica de $r = \cos 2\theta$ en coordenadas *rectangulares*, como se ve en la figura 12. Al aumentar θ de 0 a $\pi/4$, según esa figura, r disminuye de 1 a 0, por lo que trazamos en la figura 13 la parte correspondiente de la curva polar (indicada por ①). Cuando θ aumenta de $\pi/4$ a $\pi/2$, el valor de r pasa de 0 a -1. Esto quiere decir que la distancia al origen aumenta de 0 a 1, pero en lugar de estar en el cuadrante I, esta parte de la curva polar (identificada por ②) está en el lado contrario del origen, en el cuadrante III. El resto de la curva se traza en forma parecida, y las flechas y los números indican el orden en el que se trazan las partes. La curva resultante tiene 4 hojas, y se llama **rosa de 4 hojas**.

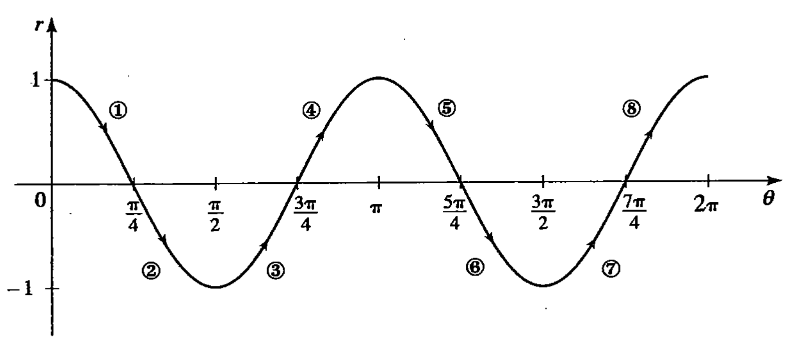


FIGURA 12
Gráfica de $r = \cos 2\theta$ en coordenadas rectangulares

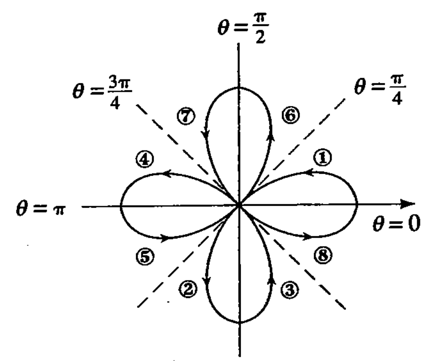


FIGURA 13
Rosa de 4 hojas $r = \cos 2\theta$, trazada en coordenadas polares ■

En general, la gráfica de una ecuación de la forma

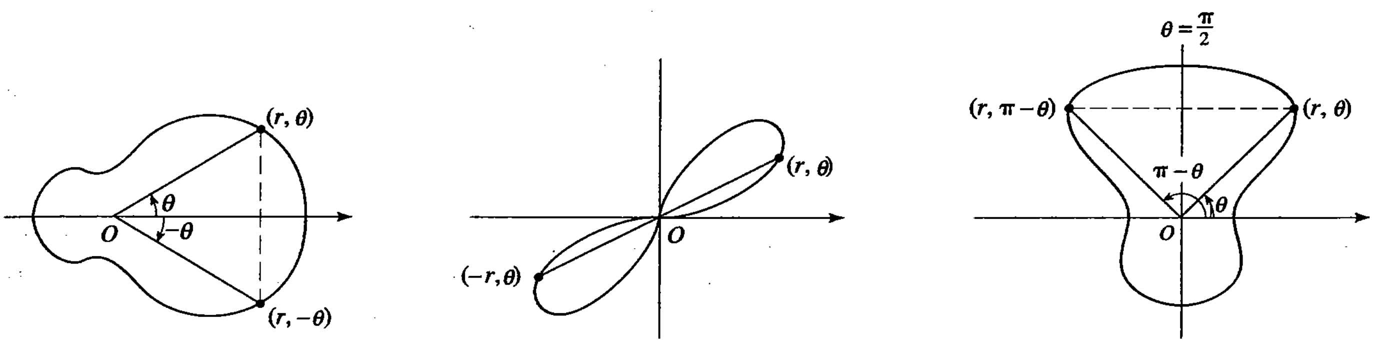
$$r = a \cos n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

es una **rosa de n hojas** si n es impar, o de $2n$ hojas, si n es par, como en el ejemplo 8.

Al trazar la gráfica de una ecuación polar se aconseja aprovechar la simetría. Presentamos una lista de 3 pruebas de simetría; en la figura 14 se ve por qué dan resultado esas pruebas.

PRUEBAS DE SIMETRÍA

1. Si una ecuación no cambia al sustituir θ por $-\theta$, la gráfica es simétrica respecto al eje polar [figura 14(a)].
2. Si una ecuación no cambia al sustituir r por $-r$, la gráfica es simétrica respecto al polo [figura 14(b)].
3. Si una ecuación no cambia cuando se sustituye θ por $\pi - \theta$, la gráfica es simétrica respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$ (el eje y) [figura 14(c)].



(a) Simetría respecto al eje polar (b) Simetría respecto al polo (c) Simetría respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

FIGURA 14

Las gráficas de las figuras 7, 11(e) y 13 son simétricas respecto al eje polar. La de la figura 13 también es simétrica respecto al polo. Las figuras 9 y 13 muestran gráficas simétricas respecto a $\theta = \pi/2$. Observe que la rosa de 4 hojas, de la figura 13 pasa las 3 pruebas de simetría.

GRÁFICA DE ECUACIONES POLARES CON DISPOSITIVOS GRAFICADORES

Aunque es útil graficar a mano las ecuaciones polares sencillas, cuando se encara una gráfica tan complicada como la de la figura 15 se necesita una calculadora gráfica o una computadora. Por fortuna, la mayor parte de las calculadoras gráficas pueden trazar directamente gráficas de ecuaciones polares.

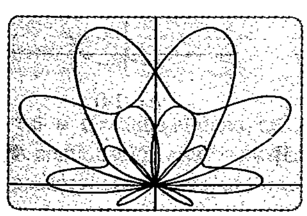


FIGURA 15
$r = \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^3(5\theta/2)$

EJEMPLO 9 ■ Trazo de la gráfica de una ecuación polar

Grafique la ecuación $r = \cos(2\theta/3)$.

SOLUCIÓN Necesitamos determinar el dominio de θ. Nos preguntamos: ¿cuántas rotaciones completas se necesitan para que la gráfica comience a repetirse? La gráfica se repite cuando se obtiene el mismo valor de r en θ y en $\theta + 2n\pi$. Por lo tanto, se debe determinar un entero n tal que

$$\cos\frac{2(\theta + 2n\pi)}{3} = \cos\frac{2\theta}{3}$$

Para que sea válida esta igualdad, $4n\pi/3$ debe ser múltiplo de 2π, lo cual sucede por primera vez cuando $n = 3$. En consecuencia, obtenemos toda la gráfica si elegimos valores de θ entre $\theta = 0$ y $\theta = 0 + 2(3)\pi = 6\pi$. Esa gráfica se ve en la figura 16.

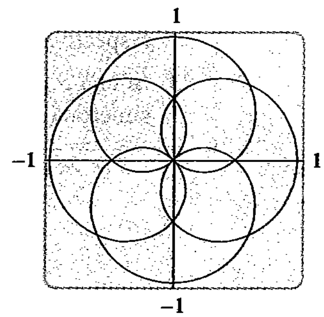


FIGURA 16
$r = \cos(2\theta/3)$

■

EJEMPLO 10 ■ Una familia de ecuaciones polares

Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c$ sen θ, para $c = 3, 2.5, 2, 1.5$ y 1. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando c cambia? (Esas curvas se llaman **caracoles**, debido a su forma para determinados valores de c.)

SOLUCIÓN La figura 17 muestra las gráficas obtenidas en computadora, con los valores especificados de c. Para $c > 1$, la gráfica tiene un bucle interno, cuyo tamaño disminuye al disminuir c. Cuando $c = 1$, el bucle desaparece, y la gráfica se transforma en una cardioide (véase el ejemplo 7).

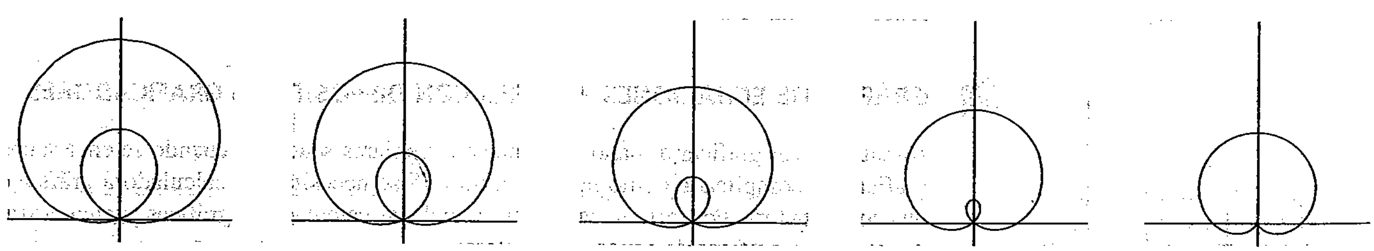
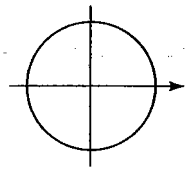
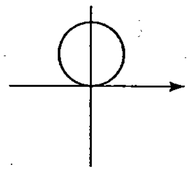
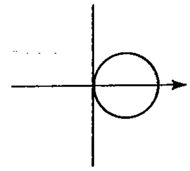
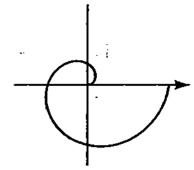
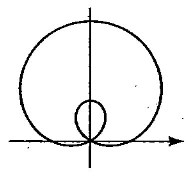
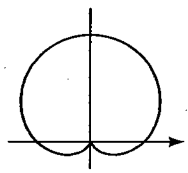
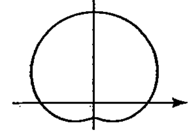
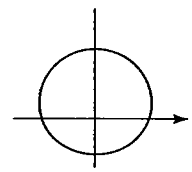
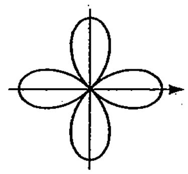
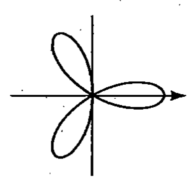
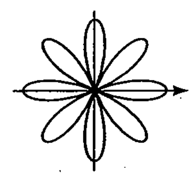
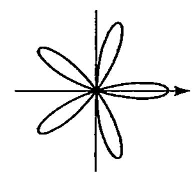
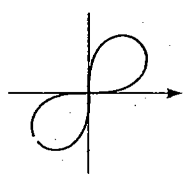
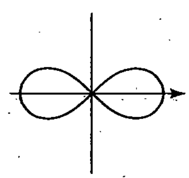


FIGURA 17 Una familia de caracoles $r = 1 + c$ sen θ en el rectángulo de visualización $[-2.5, 2.5]$ por $[-0.5, 4.5]$. ■

El cuadro siguiente es un resumen de las gráficas polares elementales que se usan en cálculo.

ALGUNAS CURVAS POLARES COMUNES

Círculos y espiral	 $r = a$ círculo	 $r = a \operatorname{sen}\theta$ círculo	 $r = a\cos\theta$ círculo	 $r = a\theta$ espiral
Caracoles $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$ $r = a \pm b \cos \theta$ $(a > 0, b > 0)$ La orientación depende de la función trigonométrica (seno o coseno) y del signo de b	 $a < b$ caracol con bucle interno	 $a = b$ cardioide	 $a > b$ caracol aplanado	 $a \geqslant 2b$ caracol convexo
Rosas $r = a \operatorname{sen} n\theta$ $r = a\cos n\theta$ De n hojas si n es impar De $2n$ hojas si n es par	 $r = a\cos 2\theta$ rosa de 4 hojas	 $r = a\cos 3\theta$ rosa de 3 hojas	 $r = a\cos 4\theta$ rosa de 8 hojas	 $r = a\cos 5\theta$ rosa de 5 hojas
Lemniscatas Curvas en forma de 8	 $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ lemniscata	 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ lemniscata		

9.6 EJERCICIOS

1-6 ■ Grafique el punto que tenga las coordenadas polares dadas. A continuación escriba otras dos representaciones del punto en coordenadas polares, una con $r < 0$ y la otra con $r > 0$.

1. $(3, \pi/2)$ **2.** $(2, 3\pi/4)$ **3.** $(-1, 7\pi/6)$

4. $(-2, -\pi/3)$ **5.** $(-5, 0)$ **6.** $(3, 1)$

7-12 ■ Determine las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares se presentan.

7. $(4, \pi/6)$ **8.** $(6, 2\pi/3)$ **9.** $(\sqrt{2}, -\pi/4)$

10. $(-1, 5\pi/2)$ **11.** $(5, 5\pi)$ **12.** $(0, 13\pi)$

13-18 ■ Convierta las coordenadas rectangulares a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

13. $(-1, 1)$ **14.** $(3\sqrt{3}, -3)$ **15.** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

16. $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$ **17.** $(3, 4)$ **18.** $(1, -2)$

19-24 ■ Convierta cada ecuación a su forma polar.

19. $x = y$ **20.** $x^2 + y^2 = 9$ **21.** $y = x^2$

22. $y = 5$ **23.** $x = 4$ **24.** $x^2 - y^2 = 1$

25-38 ■ Convierta cada ecuación polar a coordenadas cartesianas.

25. $r = 7$ **26.** $\theta = \pi$

27. $r \cos \theta = 6$ **28.** $r = 6 \cos \theta$

29. $r^2 = \tan\theta$ **30.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

31. $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$ **32.** $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

33. $r = 1 + \cos \theta$ **34.** $r = \dfrac{4}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$

35. $r = 2 \sec \theta$ **36.** $r = 2 - \cos \theta$

37. $\sec \theta = 2$ **38.** $\cos 2\theta = 1$

39-60 ■ Trace la gráfica de cada ecuación polar.

39. $r = 3$ **40.** $r = -1$

41. $\theta = -\pi/2$ **42.** $\theta = 5\pi/6$

43. $r = 6 \operatorname{sen} \theta$ **44.** $r = \cos \theta$

45. $r = -2 \cos \theta$ **46.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta$

47. $r = 2 - 2 \cos \theta$ **48.** $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

49. $r = -3(1 + \operatorname{sen} \theta)$ **50.** $r = \cos \theta - 1$

51. $r = \theta, \quad \theta \geq 0$ (espiral)

52. $r\theta = 1, \quad \theta > 0$ (espiral recíproca)

53. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (rosa de cuatro hojas)

54. $r = 2 \cos 3\theta$ (rosa de tres hojas)

55. $r^2 = \cos 2\theta$ (lemniscata)

56. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)

57. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ (caracol)

58. $r = 1 - 2 \cos \theta$ (caracol)

59. $r = 2 + \sec \theta$ (concoide)

60. $r = \operatorname{sen} \theta \tan \theta$ (cisoide)

61-64 ■ Con un dispositivo graficador trace la curva de cada ecuación polar. Defina el dominio de θ para asegurar que se cubra toda la gráfica.

61. $r = \cos(\theta/2)$

62. $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

63. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide)

64. $r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$ (hipopeda)

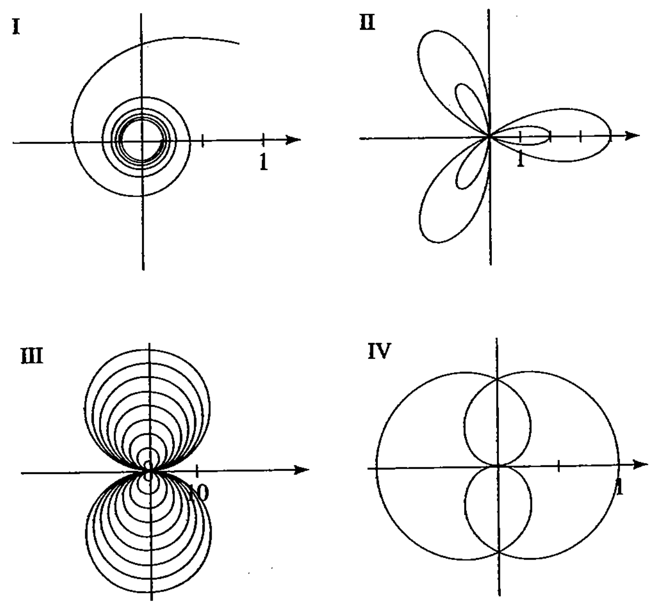
65. Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + \operatorname{sen} n\theta$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Cómo se relaciona la cantidad de bucles con n?

66. Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c \operatorname{sen} 2\theta$ con $c = 0.3, 0.6, 1, 1.5$ y 2. ¿Cómo cambia la gráfica al aumentar c?

67-70 ■ Indique la correspondencia de cada ecuación polar con las gráficas identificadas con I a IV. Explique las razones de sus respuestas.

67. $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$ **68.** $r = 1/\sqrt{\theta}$

69. $r = \theta \operatorname{sen} \theta$ **70.** $r = 1 + 3 \cos(3\theta)$



71. (a) Demuestre que la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) es

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

[*Sugerencia:* use la ley de los cosenos.]

(b) Calcule la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, 3\pi/4)$ y $(-1, 7\pi/6)$.

72. Demuestre que la gráfica de $r = a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta$ es un círculo, localice su centro y determine su radio.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

73. **Transformación de gráficas polares** ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$? En general, ¿cómo se relacionan la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ y la de $r = f(\theta)$?

74. **Elección de un sistema cómodo de coordenadas** Compare la ecuación polar del círculo $r = 2$ con su ecuación en coordenadas rectangulares. ¿En cuál sistema coordenado es más sencilla la ecuación? Haga lo mismo para la ecuación de la rosa de 4 hojas $r = \operatorname{sen} 2\theta$. ¿Cuál sistema coordenado escogería para estudiar esas curvas?

75. **Elección de un sistema cómodo de coordenadas** Compare la ecuación rectangular de la recta $y = 2$ con su ecuación polar. ¿En cuál sistema de coordenadas la ecuación es más simple? ¿Qué sistema coordenado escogería para estudiar rectas?

9.7 ECUACIONES POLARES DE CÓNICAS

Antes, en este capítulo, definimos una parábola en función de un foco y una directriz, pero definimos a la elipse e hipérbola en términos de dos focos. En esta sección presentaremos un tratamiento más unificado de los tres tipos de cónicas, en función de un foco y una directriz. Si colocamos el foco en el origen, entonces la ecuación polar de una sección cónica es sencilla. Además, en la forma polar, la rotación de las cónicas es simple. Las ecuaciones polares de las elipses son fundamentales para deducir las leyes de Kepler del movimiento planetario.

DESCRIPCIÓN EQUIVALENTE DE LAS CÓNICAS

Sean F un punto fijo (el foco) ℓ una recta fija (la **directriz**) y e un número positivo fijo (la **excentricidad**). El conjunto de todos los puntos P tales que la razón de la distancia de P a F, y la distancia de P a ℓ es igual a la constante e, es una cónica. Esto es, el conjunto de todos los puntos tales que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e$$

es una cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.

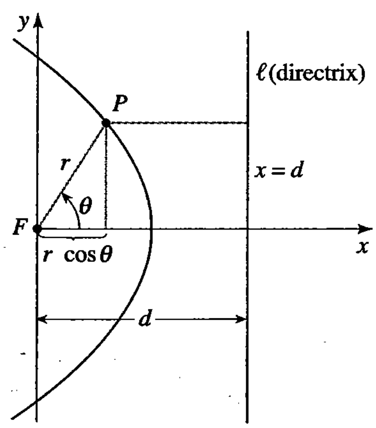


FIGURA 1

■ **Demostración** Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, \ell)$, por lo que la condición dada es la definición de la parábola que se presentó en la sección 9.1.

Ahora, supongamos que $e \neq 1$. Coloquemos el foco F en el origen, y la directriz paralela al eje y, d unidades hacia la derecha. Por consiguiente, la ecuación de la directriz es $x = d$, y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), en la figura 1 vemos que $d(P, F) = r$, y que $d(P, \ell) = d - r \cos \theta$. Así, la condición $d(P, F)/d(P, \ell) = e$, o $d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)$ se transforma en

$$r = e(d - r \cos \theta)$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de esta ecuación polar y la pasamos a coordenadas rectangulares llegaremos a

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2 \qquad \text{Desarrolle y simplifique}$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{Divida por } 1 - e^2 \text{ y complete el cuadrado}$$

Si $e < 1$, al dividir ambos lados de esta ecuación por $e^2d^2/(1 - e^2)^2$ se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$h = \frac{-e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Es la ecuación de una elipse con centro en $(h, 0)$. En la sección 9.2 vimos que los focos de una elipse están a la distancia c del centro, siendo $c^2 = a^2 - b^2$. En nuestro caso

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Así, $c = e^2d/(1 - e^2) = -h$, que confirma que el foco definido en el teorema es el mismo foco que se definió en la sección 9.2. También se deduce que $e = c/a$.

Si $e > 1$, con una demostración parecida se ve que la cónica es una hipérbola con $e = c/a$, siendo $c^2 = a^2 + b^2$. □

En la demostración vimos que la ecuación polar de la cónica de la figura 1 es $r = e(d - r\cos\theta)$. Al despejar r se obtiene

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si se escoge la directriz a la *izquierda* del foco ($x = -d$), se obtiene la ecuación $r = ed/(1 - e\cos\theta)$. Si la directriz es *paralela* al eje polar ($y = d$ o $y = -d$), en la ecuación se obtiene sen θ en lugar de $\cos\theta$. Estas observaciones se resumen en el siguiente cuadro y en la figura 2.

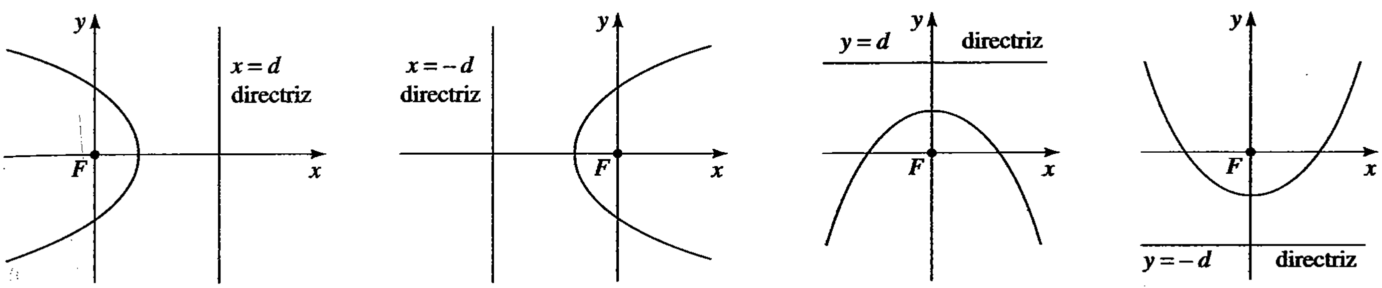
ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta}$$

representa a una cónica de excentricidad e. La cónica es

1. una parábola, si $e = 1$.
2. una elipse, si $e < 1$.
3. una hipérbola, si $e > 1$.



(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 ■ Obtener una ecuación polar de una cónica

Deduzca una ecuación polar de la parábola que tiene su foco en el origen, cuya directriz es la recta $y = -6$.

SOLUCIÓN Usamos $e = 1$ y $d = 6$, y en la parte (d) de la figura 2 vemos que la ecuación polar de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

■

EJEMPLO 2 ■ Identificación y trazo de una cónica

Una cónica está determinada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Identifique la cónica y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Dividimos el numerador y denominador por 3, y la ecuación se transforma en

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

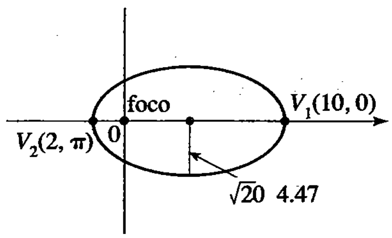


FIGURA 3
$r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$

Vemos que la ecuación representa a una elipse con $e = \frac{2}{3}$, cuyo eje mayor es paralelo al eje polar (por la presencia de cos θ en la ecuación). Para determinar los extremos del eje mayor despejamos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ en la ecuación. Así se obtienen los puntos $V_1(10, 0)$ y $V_2(2, \pi)$. La distancia entre esos dos puntos es 12, y así $2a = 12$ y $a = 6$. El centro de la elipse está en $C(4, 0)$, el punto intermedio de V_1V_2. Para trazar la gráfica se necesita calcular b. Como $c = ae = 6(\frac{2}{3}) = 4$, entonces

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

por lo que $b = \sqrt{20} \approx 4.47$. Con esta información se hace el bosquejo de la gráfica, que vemos en la figura 3. ■

EJEMPLO 3 ■ Identificación y trazo de una cónica

Una cónica se representa por la ecuación polar

$$r = \frac{12}{2 + 4\,\text{sen}\,\theta}$$

Identifíquela y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador por 2, la ecuación se transforma en

$$r = \frac{6}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$$

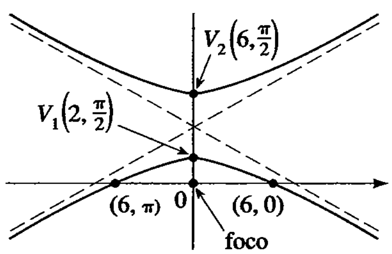


FIGURA 4
$r = \dfrac{12}{2 + 4\,\text{sen}\,\theta}$

Vemos que la ecuación representa a una hipérbola con $e = 2$, cuyo eje transversal es perpendicular al eje polar (por la presencia de sen θ). Los vértices se presentan cuando $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\,\pi/2$, así que son $V_1(2, \pi/2)$ y $V_2(-6, 3\pi/2) = V_2\ (6, \pi_2)$ Las intersecciones en x se presentan cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; están en $(6, 0)$ y $(6, \pi)$. Estas intersecciones en x ayudan a trazar la rama inferior de la hipérbola (figura 4).

La distancia entre los dos vértices es 4; por tanto $2a = 4$ y $a = 2$. Para calcular b primero determinamos $c = ae = 2 \cdot 2 = 4$, y entonces

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

así que $b = \sqrt{12} \approx 3.46$. Conocer a y b nos ayuda a trazar las asíntotas y a completar la gráfica, que vemos en la figura 4. ■

Cuando se rotan las secciones cónicas es mucho más cómodo hacerlo con ecuaciones polares que con cartesianas. Tan sólo se aprovecha que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la de $r = f(\theta)$ girada un ángulo α en torno al origen en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase el ejercicio 73 de la sección 9.6).

EJEMPLO 4 ■ Rotación de una elipse

Supongamos que se rota la elipse del ejemplo 2, un ángulo de $\pi/4$ en torno al origen. Deduzca una ecuación polar de la elipse que resulta y trace su gráfica.

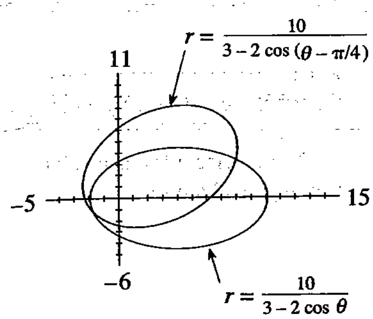


FIGURA 5

SOLUCIÓN La ecuación de la elipse rotada se obtiene reemplazando θ por $\theta - \pi/4$ en la ecuación del ejemplo 2. Entonces, la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

Con esta ecuación graficamos la elipse rotada, que se ve en la figura 5. Observe que la rotación fue en torno a su foco izquierdo, que está en el origen. ■

En la figura 6 se usó una computadora para trazar varias cónicas y demostrar el efecto de variar la excentricidad e. Se observa que cuando e es cercana a 0, la elipse es casi circular, y se alarga cada vez más a medida que aumenta e. Naturalmente, cuando $e = 1$, la cónica es una parábola. Al aumentar e más allá de 1, la cónica es una hipérbola cada vez más abierta.

FIGURA 6

9.7 EJERCICIOS

1-8 ■ Deduzca una ecuación polar de la cónica que tenga su foco en el origen y que satisfaga las condiciones dadas.

1. Elipse, excentricidad $\frac{2}{3}$, directriz $x = 3$
2. Hipérbola, excentricidad $\frac{4}{3}$, directriz $x = -3$
3. Parábola, directriz $y = 2$
4. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $y = -4$
5. Hipérbola, excentricidad 4, directriz $r = 5 \sec\theta$
6. Elipse, excentricidad 0.6, directriz $r = 2 \csc\theta$
7. Parábola, vértice en $(5, \pi/2)$
8. Elipse, excentricidad 0.4, vértice en $(2, 0)$

9-16 ■ **(a)** Calcule la excentricidad e identifique cada cónica. **(b)** Trace la cónica e identifique los vértices.

9. $r = \dfrac{4}{1 + 3\cos\theta}$
10. $r = \dfrac{8}{3 + 3\cos\theta}$
11. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$
12. $r = \dfrac{10}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$
13. $r = \dfrac{6}{2 + \text{sen}\,\theta}$
14. $r = \dfrac{5}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$
15. $r = \dfrac{7}{2 - 5\,\text{sen}\,\theta}$
16. $r = \dfrac{8}{3 + \cos\theta}$

17. **(a)** Calcule la excentricidad y determine la ecuación de la directriz de la cónica $r = 1/(4 - 3\cos\theta)$ y grafique la cónica y su directriz.
(b) Si esa cónica se rota un ángulo de $\pi/3$ respecto al origen, escriba la ecuación resultante y trace su gráfica.

18. Grafique la parábola $r = 5/(2 + 2\,\text{sen}\,\theta)$ y su directriz. También la curva que se obtiene rotando esa parábola en torno a su foco, un ángulo de $\pi/6$.

19. Grafique las cónicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0, en una sola pantalla. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la curva?

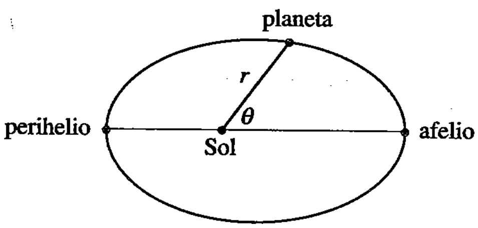
20. (a) Grafique las cónicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ y para varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d a la forma de la cónica?
(b) Grafique esas cónicas para $d = 1$ y diversos valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la cónica?

21. (a) Demuestre que la ecuación polar de una elipse con directriz $x = -d$ se puede escribir como sigue:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

(b) Deduzca una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra en torno al Sol (que está en uno de los focos), sabiendo que la excentricidad aproximada es de 0.017 y que la longitud aproximada del eje mayor es de 2.99×10^8 km.

22. (a) Los planetas giran en torno al Sol describiendo órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos. Las posiciones de un planeta cuando está más cercano y más alejado del Sol se llaman **perihelio** y **afelio**, respectivamente. Use el resultado del ejercicio 21(a) para demostrar que la distancia de un planeta al Sol en el perihelio es $a(1 - e)$ y en el afelio es $a(1 + e)$.



(b) Con los datos del ejercicio 21(b), calcule las distancias de la Tierra al Sol en el perihelio y en el afelio.

23. La distancia de Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio, y de 7.37×10^9 km en el afelio. Con los resultados del ejercicio 22, calcule la excentricidad de la órbita de Plutón.

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

24. **Distancia a un foco** Cuando determinamos las ecuaciones polares de las cónicas, colocamos un foco en el polo. Es fácil calcular la distancia de ese foco a cualquier punto de la cónica. Explique la forma en que se obtiene esa distancia a partir de la ecuación polar.

25. **Ecuaciones polares de órbitas** Cuando un satélite describe una órbita en torno a la Tierra, su trayectoria es una elipse, y el centro de la Tierra está en uno de los focos. ¿Por qué los investigadores usan coordenadas polares, y no cartesianas, para rastrear la posición de los satélites? En este caso, es importante su respuesta del ejercicio 24.

9.8 ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Hasta ahora hemos descrito a una curva mediante una ecuación, que cumplen las coordenadas de todos los puntos de esa curva. Por ejemplo, sabemos que la ecuación $y = x^2$ representa a una parábola en coordenadas cartesianas, y que $r = \operatorname{sen} \theta$ a un círculo en coordenadas polares. Ahora estudiaremos otro método para describir una curva en el plano, método que en muchos casos es más útil y natural que con las ecuaciones rectangulares o polares. En este método, las coordenadas x y y de los puntos en la curva se expresan por separado, como funciones de t, una variable adicional llamada **parámetro**:

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

A las anteriores se les llama **ecuaciones paramétricas** de la curva. Al sustituir un valor de t en cada ecuación se determinan las coordenadas de un punto (x, y). Al variar t, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ cambia de lugar y describe la curva. Si nos imaginamos que

t representa al tiempo, podremos imaginar que cuando t aumenta, hay una partícula en el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ que se mueve a lo largo de la curva.

EJEMPLO 1 ■ Trazo de una curva paramétrica

Trace la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 3t \qquad y = t - 1$$

Elimine el parámetro t para obtener una sola ecuación para la curva en las variables x y y.

SOLUCIÓN Para cada valor de t se obtiene un punto en la curva. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$ y $y = -1$, y el punto correspondiente es $(0, -1)$. En la figura 1 graficamos los puntos (x, y) calculados con los valores de t de acuerdo con la siguiente tabla:

t	x	y
−2	10	−3
−1	4	−2
0	0	−1
1	−2	0
2	−2	1
3	0	2
4	4	3
5	10	4

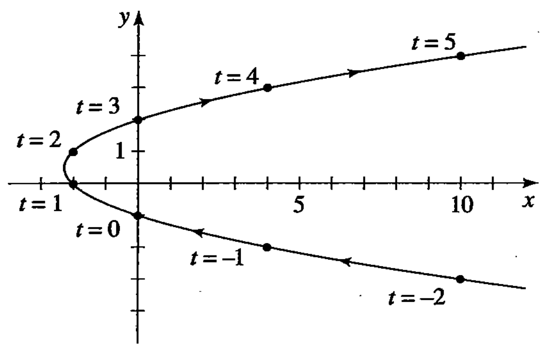


FIGURA 1

Cuando aumenta t, una partícula cuya posición está determinada por las ecuaciones paramétricas se mueve a lo largo de la curva, en dirección de las flechas. La curva parece ser una parábola. Lo confirmamos eliminando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas, reduciéndolas a una sola ecuación como describiremos a continuación. Primero despejamos a t de la segunda ecuación, y obtenemos $t = y + 1$. Al sustituir esto en la primera ecuación, se obtiene

$$x = (y + 1)^2 - 3(y + 1) = y^2 = -y - 2$$

Esta curva es la parábola $x = y^2 - y - 2$. ■

Vemos que habríamos obtenido la misma gráfica que la del ejemplo 1 con la parametrización

$$x = t^2 - t - 2 \qquad y = t$$

porque los puntos de esta curva también satisfacen la ecuación $x = y^2 - y - 2$. Pero el mismo valor de t produce puntos distintos en la curva, con esas dos parametrizaciones. Por ejemplo, cuando $t = 0$, la partícula que describe la curva en la figura 1 está en $(0, -1)$, mientras que en la parametrización de las ecuaciones de arriba la partícula ya está en

$(-2, 0)$ cuando $t = 0$. *Por consiguiente, una parametrización contiene más información que tan sólo la curva que se parametriza; también indica cómo se recorre la curva.*

EJEMPLO 2 ■ Eliminación del parámetro

Describa y grafique la curva representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

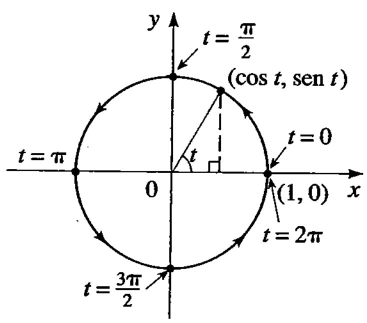


FIGURA 2

SOLUCIÓN Para identificar la curva eliminamos el parámetro. Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, y como $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ para cada punto (x, y) en la curva, entonces

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$$

Esto quiere decir que todos los puntos de la curva satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo que la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Al aumentar t de 0 a 2π, el punto determinado por las ecuaciones paramétricas parte de $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj, una vez en torno al círculo, como se ve en la figura 2. Vemos que se puede interpretar al parámetro t como el ángulo que se indica en la figura. ■

EJEMPLO 3 ■ Deducción de las ecuaciones paramétricas de una gráfica

Deduzca las ecuaciones paramétricas de la recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(2, 6)$.

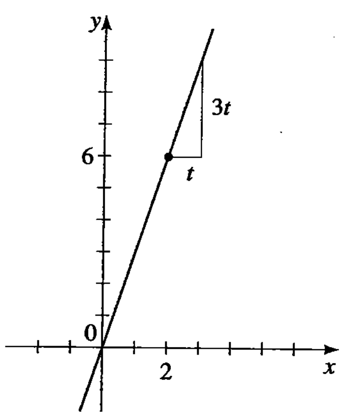


FIGURA 3

SOLUCIÓN Comenzamos en el punto $(2, 6)$, y nos movemos hacia arriba a la derecha, a lo largo de esta recta. Como la recta tiene pendiente 3, por cada unidad que recorremos hacia la derecha debemos movernos 3 unidades hacia arriba. En otras palabras, si aumentamos t unidades la abscisa, debemos aumentar simultáneamente $3t$ unidades la ordenada. Esto nos conduce a las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 6 + 3t$$

Para confirmar que esas ecuaciones representan a la recta deseada, eliminaremos al parámetro. Despejamos a t en la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda, para obtener

$$y = 6 + 3(x - 2) = 3x$$

Entonces, la forma simplificada (pendiente–ordenada al origen) de esta recta es $y = 3x$, que representa a una recta de pendiente 3 que pasa por $(2, 6)$, como se especificó. En la figura 3 vemos esta gráfica. ■

EJEMPLO 4 ■ Trazo de una curva paramétrica

Trace la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = 2 - \cos^2 t$$

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro aplicamos primero la identidad trigonométrica $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$, y la segunda ecuación cambia a

$$y = 2 - \cos^2 t = 2 - (1 - \operatorname{sen}^2 t) = 1 + \operatorname{sen}^2 t$$

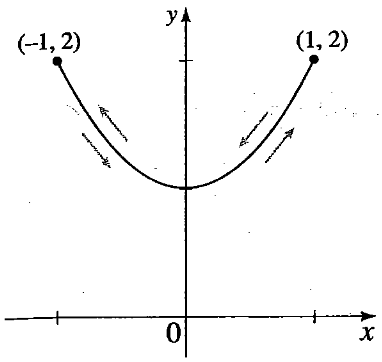


FIGURA 4

Ahora sustituimos a sen $t = x$ de la primera ecuación, para obtener

$$y = 1 + x^2$$

por lo que el punto (x, y) describe la parábola $y = 1 + x^2$. Sin embargo, como $-1 \leqslant$ sen $t \leqslant 1$, entonces $-1 \leqslant x \leqslant 1$, y las ecuaciones paramétricas sólo representan a la parte de la parábola que está entre $x = -1$ y $x = 1$. Ya que sen t es una función periódica, el punto $(x, y) = (\text{sen}\, t, 2 - \cos^2 t)$ se mueve yendo y viniendo una cantidad infinita de veces a lo largo de la parábola, entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$, como se indica en la figura 4. ■

EJEMPLO 5 ■ Ecuaciones paramétricas de la cicloide

Al rodar un círculo por una recta, la curva que describe un punto fijo P en la circunferencia del círculo se llama **cicloide** (véase la figura 5). Si el círculo tiene radio a y rueda a lo largo del eje x, y si el punto P parte del origen, deducir las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

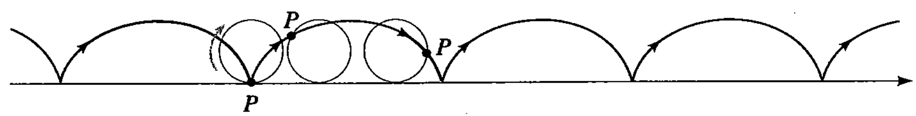


FIGURA 5

SOLUCIÓN La figura 6 muestra al círculo y al punto P, después de rodar el círculo un ángulo θ (en radianes). La distancia $d(O, T)$ que ha rodado el círculo debe ser igual que la longitud del arco PT que, según la fórmula de la longitud de un arco, es igual a $a\theta$ (véase la sección 6.1). Esto quiere decir que el centro del círculo es $C(a\theta, a)$.

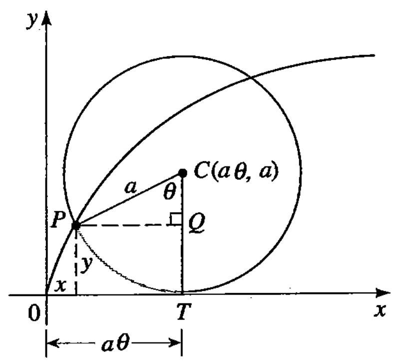


FIGURA 6

Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces, de acuerdo con la figura 6 (que representa el caso en que $0 < \theta < \pi/2$), vemos que

$$x = d(O, T) - d(P, Q) = a\theta - a \,\text{sen}\, \theta = a(\theta - \text{sen}\, \theta)$$

$$y = d(T, C) - d(Q, C) = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

y las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a(\theta - \text{sen}\, \theta) \qquad y = a(1 - \cos \theta)$$ ■

La cicloide tiene varias propiedades físicas interesantes. Es la "curva de descenso más rápido" en el sentido siguiente. Elijamos dos puntos P y Q que no estén uno directamente arriba (o abajo) del otro, y unámoslos con un alambre. Supongamos que una cuenta se desliza por el alambre bajo la influencia de la gravedad, sin tener en cuenta la fricción. De todas las formas posibles en que se puede amoldar un alambre, la cuenta se deslizará de P a Q con máxima rapidez cuando la forma sea la mitad de un arco de cicloide invertida (véase la figura 7). También, la cicloide es la "curva de descenso igual", en el sentido que no importa dónde se coloque una cuenta B en un alambre en forma de cicloide, tarda el mismo tiempo en deslizarse hasta el extremo inferior (véase la figura 8). Estas propiedades de la cicloide, bastante sorprendentes, fueron demostradas, mediante el cálculo, por varios matemáticos y físicos del siglo XVII, como Johann Bernoulli, Blaise Pascal y Christian Huygens.

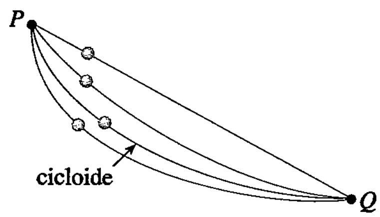


FIGURA 7

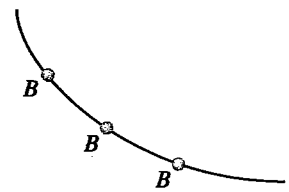


FIGURA 8

USO DE DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN PARA TRAZAR CURVAS PARAMÉTRICAS

La mayor parte de las calculadoras gráficas y de los programas de cómputo para gráficas se pueden emplear para graficar ecuaciones paramétricas. Son muy útiles para trazar curvas complicadas, como la de la figura 9.

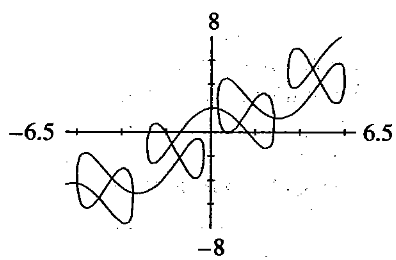


FIGURA 9
$x = t + 2 \text{ sen } 2t,\ y = t + 2 \cos 5t$

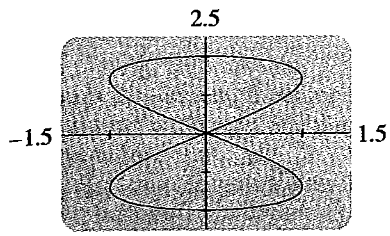
EJEMPLO 6 ■ Trazado de curvas paramétricas

Use un dispositivo graficador para trazar las siguientes curvas paramétricas. Describir sus semejanzas y diferencias.

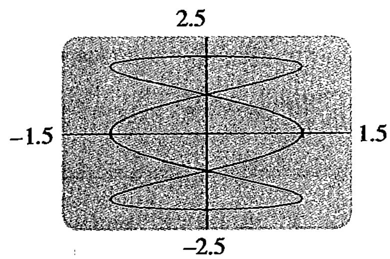
(a) $x = \text{sen } 2t$
$y = 2 \cos t$

(b) $x = \text{sen } 3t$
$y = 2 \cos t$

SOLUCIÓN En las partes (a) y (b), la gráfica estará dentro del rectángulo determinado por $-1 \leqslant x \leqslant 1, -2 \leqslant y \leqslant 2$, porque el seno y el coseno de cualquier número están entre -1 y 1. Por consiguiente, usamos el rectángulo de visualización $[-1.5, 1.5]$ por $[-2.5, 2.5]$.



(a) $x = \text{sen } 2t, y = 2 \cos t$



(b) $x = \text{sen } 3t, y = 2 \cos t$

FIGURA 10

(a) Como $2 \cos t$ es periódica, y su periodo es 2π, y ya que el periodo de sen $2t$ es π, si dejamos que varíe en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ se obtiene la gráfica completa, que se ve en la figura 10(a).

(b) De nuevo, al dejar que t tiene valores entre 0 y 2π se obtiene la gráfica completa, que se ve en la figura 10(b).

Ambas gráficas son *curvas cerradas*, es decir, que forman bucles con el mismo punto inicial y punto final; también, ambas gráficas se cruzan. Sin embargo, la de la figura 10(a) tiene dos bucles, como el número 8, mientras que la de la figura 10(b) tiene 3 bucles. ■

Las curvas que se obtuvieron en el ejemplo 6 se llaman figuras de Lissajous. Una **figura de Lissajous** es la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = A \text{ sen } \omega_1 t \qquad y = B \cos \omega_2 t$$

en donde A, B, ω_1 y ω_2 son constantes reales. En vista de que sen $w_1 t$ y cos $w_2 t$ quedan entre -1 y 1, una figura de Lissajous estará dentro del rectángulo determinado por $-A \leqslant x \leqslant A, -B \leqslant y \leqslant B$. Aprovechamos esto para escoger un rectángulo de visualización al graficar una figura de Lissajous, como en el ejemplo 6.

Recordemos, de la sección 9.6, que las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) se relacionan mediante las ecuaciones $x = r \cos \theta, y = r \text{ sen } \theta$. Por consiguiente, podremos graficar la ecuación polar $r = f(\theta)$ cambiándola a la forma paramétrica como sigue:

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$$
$$y = r \text{ sen } \theta = f(\theta) \text{ sen } \theta \qquad \text{Ya que } r = f(\theta)$$

Si sustituimos a θ por la variable paramétrica acostumbrada t, llegamos al siguiente resultado:

ECUACIONES POLARES EN FORMA PARAMÉTRICA

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ es igual que la de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \cos t \qquad y = f(t) \text{ sen } t$$

EJEMPLO 7 ■ Forma paramétrica de una ecuación polar

Se tiene la ecuación polar $r = \ln \theta, 1 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$.

(a) Exprésela en forma paramétrica.

(b) Trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas de la parte (a).

SOLUCIÓN

(a) La ecuación polar dada equivale a las ecuaciones paramétricas

$$x - \ln t \cos t \qquad y = \ln t \text{ sen } t$$

(b) Ya que $\ln 10\pi \approx 3.45$, usaremos el rectángulo de visualización $[-3.5, 3.5]$ por

$[-3.5, 3.5]$ y dejaremos que t varíe de 1 a $10\pi \approx 31.42$. La gráfica resultante se ve en la figura 11, y se llama *espiral logarítmica*.

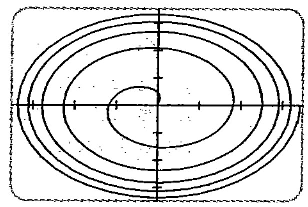


FIGURA 11
$x = \ln t \cos t, y = \ln t \operatorname{sen} t$

9.8 EJERCICIOS

1-22 ■ (a) Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas. (b) Deduzca una ecuación de la curva en coordenadas rectangulares, eliminando el parámetro.

1. $x = 2t, \quad y = t + 6$

2. $x = 6t - 4, \quad y = 3t, \quad t \geqslant 0$

3. $x = t^2, \quad y = t - 2, \quad 2 \leqslant t \leqslant 4$

4. $x = 2t + 1, \quad y = (t + \frac{1}{2})^2$

5. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

6. $x = t^2, \quad y = t^4 + 1$

7. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = t + 1$

8. $x = t + 1, \quad y = \dfrac{1}{t+1}$

9. $x = 4t^2, \quad y = 8t^3$

10. $x = |t|, \quad y = |1 - |t||$

11. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

12. $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

13. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^4 t$

14. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos t$

15. $x = \cos t, \quad y = \cos 2t$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

17. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad 0 \leqslant t < \pi/2$

18. $x = \cot t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

19. $x = e^t, \quad y = e^{-t}$

20. $x = e^{2t}, \quad y = e^t, \quad t \geqslant 0$

21. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$

22. $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

23-26 ■ Deduzca ecuaciones paramétricas de la recta cuyas propiedades se describen.

23. Pendiente $\frac{1}{2}$, pasa por $(4, -1)$.

24. Pendiente -2, pasa por $(-10, -20)$.

25. Pasa por $(6, 7)$ y $(7, 8)$.

26. Pasa por $(12, 7)$ y por el origen.

27. Deduzca las ecuaciones paramétricas del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

28. Deduzca ecuaciones paramétricas de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

29. Demuestre, eliminando al parámetro θ, que las siguientes ecuaciones paramétricas representan a una hipérbola:

$$x = a \tan \theta \qquad y = b \sec \theta$$

30. Demuestre que las siguientes ecuaciones paramétricas representan a una parte de la hipérbola del ejercicio 29:

$$x = a\sqrt{t} \qquad y = b\sqrt{t+1}$$

31-34 ■ Trace la curva determinada por las ecuaciones paramétricas.

31. $x = t \cos t, \quad y = t \operatorname{sen} t, \quad t \geqslant 0$

32. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

33. $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

34. $x = \cot t, \quad y = 2 \operatorname{sen}^2 t, \quad 0 < t < \pi$

35. Si se dispara un proyectil con rapidez inicial de v_0 pies/s, apuntando en un ángulo α sobre la horizontal, la posición del proyectil a los t segundos se determina con las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - 16t^2$$

(donde x y y están expresados en pies). Muestre que la trayectoria del proyectil es una parábola, eliminando el parámetro t.

36. Acerca del ejercicio 35, suponga que un rifle dispara una bala al aire, con una rapidez inicial de 2048 pies/s, apuntando a 30° sobre la horizontal.
(a) ¿Cuántos segundos tardará la bala en llegar al suelo?
(b) ¿A qué distancia llegará la bala al suelo?
(c) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega la bala?

37-42 ■ Use un dispositivo graficador para tarzar la curva representada por cada par de ecuaciones paramétricas.

37. $x = \text{sen}\, t, \quad y = 2\cos 3t$

38. $x = 2\,\text{sen}\, t, \quad y = \cos 4t$

39. $x = 3\,\text{sen}\, 5t, \quad y = 5\cos 3t$

40. $x = \text{sen}\, 4t, \quad y = \cos 3t$

41. $x = \text{sen}(\cos t), \quad y = \cos(t^{3/2}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

42. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 2t$

43-46 ■ (a) Exprese la ecuación polar en forma paramétrica.
(b) Use un dispositivo graficador para trazar las ecuaciones paramétricas que dedujo en la parte (a).

43. $r = e^{\theta/12}, \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi$

44. $r = \text{sen}\,\theta + 2\cos\theta$

45. $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$

46. $r = 2^{\text{sen}\theta}$

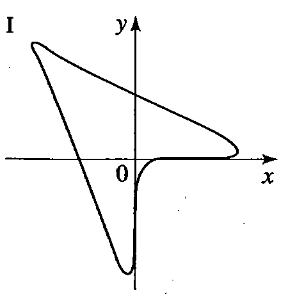
47-50 ■ Defina la correspondencia entre las ecuaciones paramétricas y las gráficas I–IV. Explique los argumentos de sus respuestas.

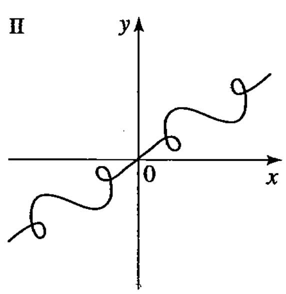
47. $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$

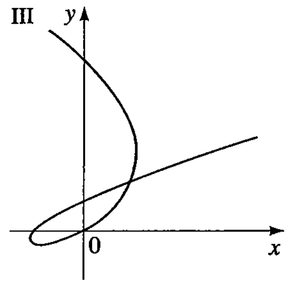
48. $x = \text{sen}\, 3t, \quad y = \text{sen}\, 4t$

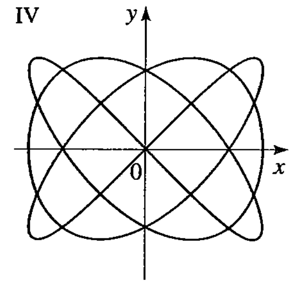
49. $x = t + \text{sen}\, 2t, \quad y = t + \text{sen}\, 3t$

50. $x = \text{sen}(t + \text{sen}\, t), \quad y = \cos(t + \cos t)$









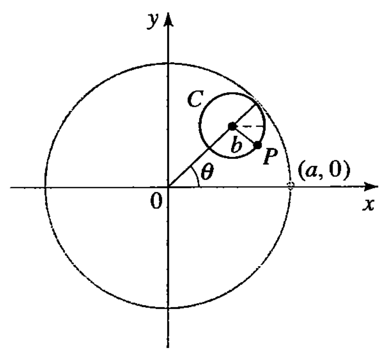
51. Suponga que en el ejemplo 5 el punto P que describe la curva no está en la orilla del círculo, sino en un punto fijo dentro del círculo, a una distancia b del centro (siendo $b < a$). La curva que describe P se llama **cicloide acortada** (o **trocoide acortada**). Muestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

$$x = a\theta - b\,\text{sen}\,\theta \qquad y = a - b\cos\theta$$

Trace la gráfica.

52. En el ejercicio 51, si el punto P está *fuera* del círculo, a la distancia b del centro (siendo $b > a$), la curva que describe P se llama **cicloide alargada** (o **trocoide alargada**). Demuestre que las ecuaciones paramétricas de la cicroide alargada son iguales que las de la cicloide acortada, y trace la gráfica para el caso en que $a = 1$ y $b = 2$.

53. Un círculo C de radio b rueda en el interior de un círculo mayor de radio a, centrado en el origen. Sea P un punto del círculo menor, cuya posición inicial en el punto $(a, 0)$ se ve en la figura de abajo. La curva que describe P se llama **hipocicloide**.



(a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right)$$

$$y = (a - b)\,\text{sen}\,\theta - b\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right)$$

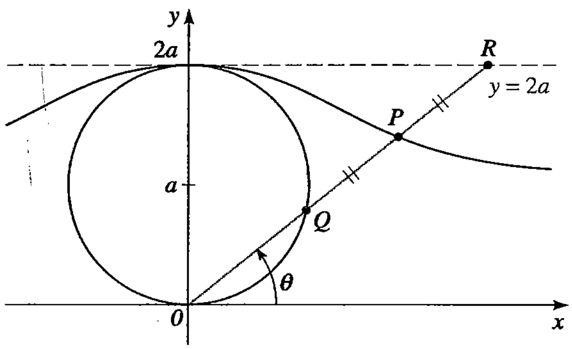
(b) Si $a = 4b$, la hipocicloide se llama **astroide**. Demuestre que en este caso, las ecuaciones paramétricas se pueden reducir a

$$x = a\cos^3\theta \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$$

Trace la curva y elimine el parámetro para obtener una ecuación de la astroide en coordenadas cartesianas.

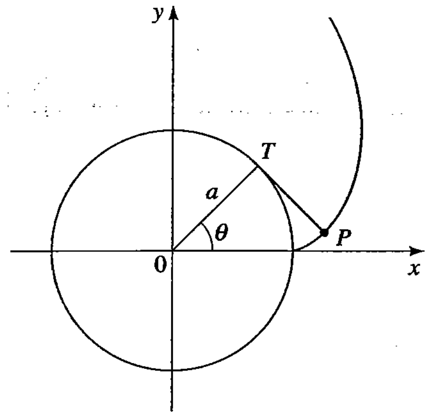
54. Si el círculo C del ejercicio 53 rueda en el *exterior* del círculo mayor, la curva que describe P se llama **epicicloide**. Deduzca ecuaciones paramétricas para esa curva.

55. En la figura de abajo, el círculo de radio a está fijo y, para cada θ, el punto P está en la mitad del segmento QR. La curva descrita por P, para $0 < \theta < \pi$ se llama **arco largo**. Deduzca ecuaciones paramétricas para esa curva.



56. Un cordón se enrolla en un círculo, con un lápiz atado a su extremo; después se desenrolla manteniéndolo tirante. La curva que describe el punto P (el lápiz) en el extremo del cordón se llama **evolvente**, como se ve en la figura siguiente. Si el círculo tiene radio a y está centrado en el origen, y si la posición inicial de P es $(a, 0)$, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la evolvente, en función del parámetro θ son

$$x = a(\cos\theta = \theta\,\mathrm{sen}\theta) \qquad y = a(\mathrm{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)$$



57. Elimine el parámetro θ en las ecuaciones paramétricas del cicloide (ejemplo 5) con el fin de encontrar una ecuación coordenada cartesiana de la sección de la curva dada por $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

58. Más información en las ecuaciones paramétricas En esta sección dijimos que las ecuaciones paramétricas contienen más información que tan sólo la forma de una curva. Escriba un párrafo que explique esa afirmación. Incluya el siguiente ejemplo y sus respuestas a las siguientes preguntas.
La posición de una partícula se describe con las ecuaciones paramétricas

$$x = \mathrm{sen}\,t \qquad y = \cos t$$

en donde t representa al tiempo. Se sabe que la partícula se mueve en un círculo.

(a) ¿Cuánto tarda la partícula en recorrer una vez el círculo? Deduzca ecuaciones paramétricas para que se mueva en el círculo al doble de velocidad.

(b) La partícula, ¿se mueve en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario en el círculo? Deduzca ecuaciones paramétricas para el caso en que se mueva en dirección contraria en el círculo.

9 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Cite la definición geométrica de una parábola. ¿Qué son el foco y la directriz de la parábola?
   (b) Trace la parábola $x^2 = 4py$ para el caso $p > 0$. Identifique en su diagrama el vértice, el foco y la directriz. ¿Qué sucede si $p < 0$?
   (c) Trace la parábola $y^2 = 4px$, junto con su vértice, foco y directriz, para el caso $p > 0$. ¿Qué sucede si $p < 0$?

2. (a) Cite la definición geométrica de una elipse. ¿Qué son los focos de la elipse?
   (b) Para la elipse cuya ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   donde $a > b > 0$, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? ¿Cuáles son los ejes mayor y menor? Ilustre su explicación con una gráfica.
   (c) Dé una expresión de la excentricidad de la elipse de la parte (b).
   (d) Escriba la ecuación de una elipse con los focos en el eje y.

3. (a) Cite la definición geométrica de una hipérbola. ¿Qué son los focos de la hipérbola?
   (b) Para la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   ¿cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas? ¿Qué es el eje transversal? Ilustre su explicación con una gráfica.
   (c) Escriba la ecuación de una hipérbola con focos en el eje y.
   (d) ¿Qué pasos se siguen para trazar una hipérbola, dada su ecuación?

4. Suponga que h y k son números positivos. ¿Cuál es el efecto que tiene lo siguiente sobre la gráfica de una ecuación en x y y si
   (a) x se reemplaza por $x - h$? ¿Y por $x + h$?
   (b) y se reemplaza por $y - k$? ¿Y por $y + k$?

5. ¿Cómo se puede decir si la siguiente cónica no degenerada es una parábola, una elipse o una hipérbola?

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

6. Suponga que los ejes x y y se giran un ángulo agudo ϕ para obtener los ejes X y Y. Escriba ecuaciones que relacionen las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en el plano xy y en el plano XY, respectivamente.

7. (a) ¿Cómo elimina usted el término en xy en esta ecuación?

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   (b) ¿Cuál es el discriminante de la cónica en la parte (a)? ¿Cómo puede usar el discriminante para determinar si la cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola?

8. (a) Describa cómo se representa en coordenadas polares la posición de un punto en el plano.
   (b) ¿Qué ecuaciones usa usted para pasar de coordenadas polares a rectangulares?
   (c) ¿Qué ecuaciones usa usted para pasar de coordenadas rectangulares a polares?

9. (a) Escriba ecuaciones polares que representen una cónica con excentricidad e.
   (b) ¿Para qué valores de e la cónica es una elipse? ¿y una hipérbola? ¿y una parábola?

10. ¿Cómo traza usted una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$, $y = g(t)$?

EJERCICIOS

1-4 ■ Determine el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola, y trace la gráfica.

1. $x^2 + 8y = 0$
2. $2x - y^2 = 0$
3. $x - y^2 + 4y - 2 = 0$
4. $2x^2 + 6x + 5y + 10 = 0$

5-8 ■ Determine el centro, los vértices, los focos y las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, y trace su gráfica.

5. $x^2 + 4y^2 = 16$

6. $9x^2 + 4y^2 = 1$

7. $4x^2 + 9y^2 = 36y$

8. $2x^2 + y^2 = 2 + 4(x - y)$

9-12 ■ Determine el centro, los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola, y trace su gráfica.

9. $x^2 - 2y^2 = 16$

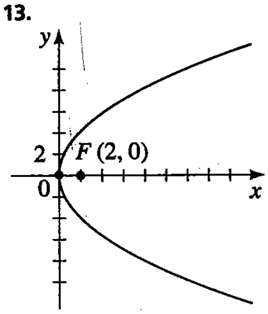
10. $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

11. $9y^2 + 18y = x^2 + 6x + 18$

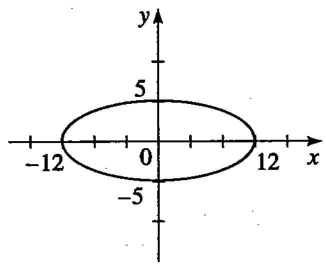
12. $y^2 = x^2 + 6y$

13-18 ■ Deduzca una ecuación de la cónica correspondiente a cada gráfica.

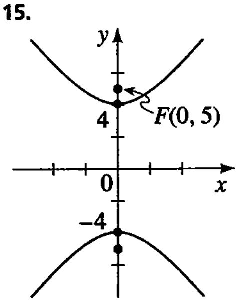
13.



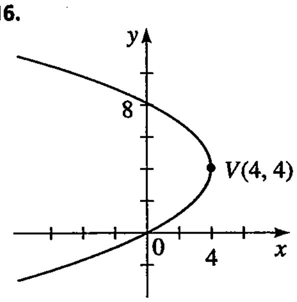
14.



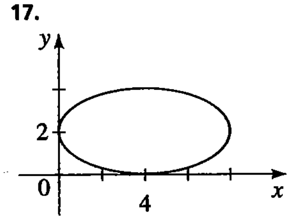
15.



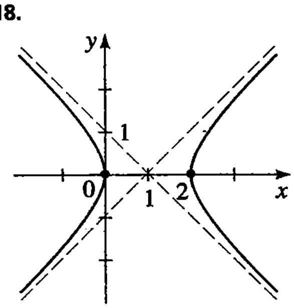
16.



17.



18.



19-30 ■ Determine el tipo de curva representada por la ecuación. Determine los focos y los vértices (si los hay) y trace la gráfica.

19. $\dfrac{x^2}{12} + y = 1$

20. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{144} = \dfrac{y}{12}$

21. $x^2 - y^2 + 144 = 0$

22. $x^2 + 6x = 9y^2$

23. $4x^2 + y^2 = 8(x + y)$

24. $3x^2 - 6(x + y) = 10$

25. $x = y^2 - 16y$

26. $2x^2 + 4 = 4x + y^2$

27. $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

28. $36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$

29. $9x^2 + 8y^2 - 15x + 8y + 27 = 0$

30. $x^2 + 4y^2 = 4x + 8$

31-38 ■ Deduzca una ecuación de la sección cónica cuyas propiedades se describen.

31. Parábola con foco $F(0, 1)$ y directriz $y = -1$

32. La elipse con centro $C(0, 4)$, focos $F_1(0, 0)$ y $F_2(0, 8)$, con eje mayor de longitud 10

33. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$

34. La hipérbola con centro $C(2, 4)$, focos $F_1(2, 1)$ y $F_2(2, 7)$ y vértices $V_1(2, 6)$ y $V_2(2, 2)$

35. La elipse con focos $F_1(1, 1)$ y $F_2(1, 3)$ y con un vértice en el eje x

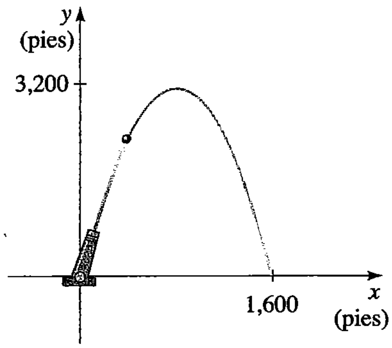
36. La parábola con vértice $V(5, 5)$ y directriz en el eje y

37. La elipse con vértices $V_1(7, 12)$ y $V_2(7, -8)$, que pasa por el punto $P(1, 8)$

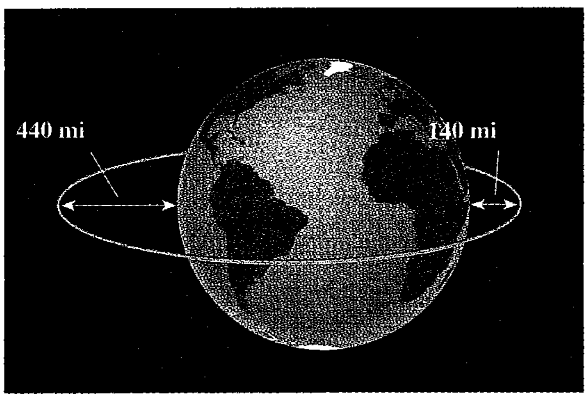
38. La parábola con vértice $V(-1, 0)$ y eje de simetría horizontal, y que cruza el eje y en $y = 2$

39. Un cañón dispara una bala, como se ve en la figura siguiente. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si la bala llega al suelo a 1,600 pies del cañón, y si la altura máxima de su trayectoria

es 3,200 sobre el piso, deduzca una ecuación de la trayectoria. Coloque el origen en el lugar del cañón.



40. Un satélite describe una órbita elíptica en torno a la Tierra, con uno de los focos en el centro de la Tierra. La altura del satélite sobre la superficie varía entre 140 mi y 440 mi. Suponga que la Tierra es una esfera con 3,960 mi de radio. Deduzca una ecuación de la trayectoria del satélite, con el origen en el centro de la Tierra.



41. La trayectoria de la Tierra en torno al Sol es una elipse, y el Sol está en uno de los focos. El eje mayor de la elipse mide 186,000 000 mi, y la excentricidad es 0.017. Calcule la distancia de la Tierra al Sol cuando ésta se encuentra (a) más cercana al Sol, y (b) más alejada del Sol.

42. Un barco está a 40 mi, de una costa recta. En esa costa están las estaciones LORAN A y B con una separación de 300 mi. De acuerdo con las señales LORAN, el capitán determina que su barco está 80 mi, más cerca de A que de B. Calcule la ubicación del barco. (Ponga A y B en el eje y, y el eje x a la mitad entre ellas. Calcule la ordenada y la abscisa del barco.)

43. (a) Trace gráficas de la siguiente familia de elipses, para $k = 1, 2, 4$ y 8.

$$\frac{x^2}{16 + k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

(b) Demuestre que todas las elipses de la parte (a) tienen los mismos focos.

44. (a) Trace las gráficas de la siguiente familia de parábolas, para $k = \frac{1}{2}, 1, 2$ y 4.

$$y = kx^2$$

(b) Determine la posición de los focos de esas parábolas.
(c) ¿Cómo cambia la posición del foco cuando aumenta k?

45-48 ■ (a) Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. (b) Haga una rotación de ejes para eliminar el término xy. (c) Trace la gráfica.

45. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

46. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x + 8y - 8 = 0$

47. $7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}\,x - 4y = 0$

48. $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

49-56 ■ (a) Trace la gráfica de la ecuación polar. (b) Exprese la ecuación en coordenadas cartesianas.

49. $r = 3 + 3\cos\theta$

50. $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$

51. $r = 2\,\mathrm{sen}\,2\theta$

52. $r = 4\cos 3\theta$

53. $r^2 = \sec 2\theta$

54. $r^2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$

55. $r = \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta$

56. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

57-60 ■ Con un dispositivo graficador trace la curva de la ecuación polar. Defina el dominio de θ para asegurarse de obtener toda la gráfica.

57. $r = \cos(\theta/3)$

58. $r = \mathrm{sen}(9\theta/4)$

59. $r = 1 + 4\cos(\theta/3)$

60. $r = \theta\,\mathrm{sen}\,\theta$

61-64 ■ (a) Calcule la excentricidad e identifique la cónica. (b) Trace la gráfica e identifique los vértices.

61. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

62. $r = \dfrac{2}{1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

63. $r = \dfrac{4}{1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

64. $r = \dfrac{12}{1 - 4\cos\theta}$

65-68 ■ Trace la curva paramétrica y elimine el parámetro para llegar a una ecuación, en coordenadas rectangulares, que satisfagan todos los puntos de la curva.

65. $x = 1 - t^2, \quad y = 1 + t$

66. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1$

67. $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

68. $x = \dfrac{1}{t} + 2, \quad y = \dfrac{2}{t^2}, \quad 0 < t \leq 2$

69-70 ■ Con un dispositivo graficador trace cada curva paramétrica.

69. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 3t$

70. $x = \operatorname{sen}(t + \cos 2t), \quad y = \cos(t + \operatorname{sen} 3t)$

71. Las curvas C, D, E y F se definen paramétricamente como sigue, y el parámetro t toma todos los valores reales, a menos que se diga otra cosa.

C: $x = t, \quad y = t^2$

D: $x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$

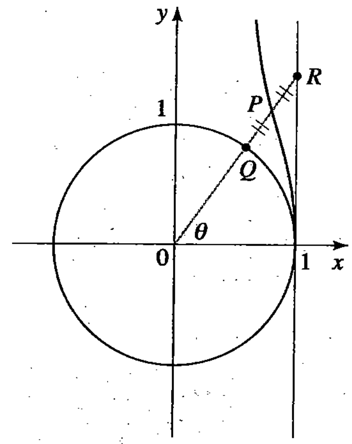
E: $x = \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos^2 t$

F: $x = e^t, \quad y = e^{2t}$

(a) Demuestre que los puntos en las 4 curvas satisfacen la misma ecuación en coordenadas cartesianas.

(b) Trace la gráfica de cada curva y explique en qué difieren las curvas.

72. En la figura, el punto P es el punto medio del segmento QR, y $0 \leq \theta < \pi/2$. Con θ como parámetro, deduzca una representación paramétrica de la curva que describe P.



9 EXAMEN

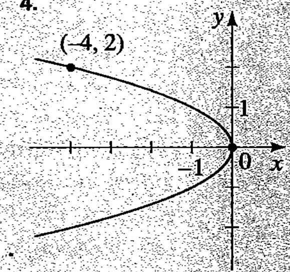
1. Determine el foco y la ecuación de la directriz de la parábola $x^2 = -12y$ y trace su gráfica.

2. Determine los vértices, los focos y las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. A continuación trace su gráfica.

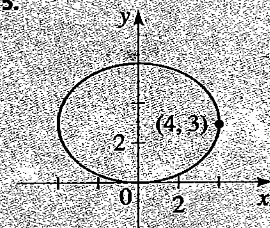
3. Determine los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$. A continuación trace su gráfica.

4-6 ■ Deduzca una ecuación de la cónica cuya gráfica se presenta.

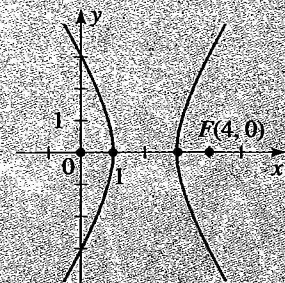
4.



5.



6



7-9 ■ Trace la gráfica de la ecuación.

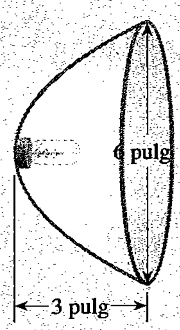
7. $16x^2 + 36y^2 - 96x + 36y + 9 = 0$

8. $9x^2 - 8y^2 + 36x + 64y = 92$

9. $2x + y^2 + 8y + 8 = 0$

10. Deduzca una ecuación de la hipérbola cuyos focos están en $(0, \pm 5)$ y cuyas asíntotas son $y = \pm(\frac{3}{4})x$.

11. Deduzca una ecuación de la parábola con foco en $(2, 4)$ y cuya directriz está en el eje x.



12. Un reflector parabólico de un faro de coche tiene una forma cóncava de 6 pulgadas de diámetro en su borde y 3 pulgadas de profundidad, como se ve en la figura de la izquierda. ¿A qué distancia del vértice debe colocarse el filamento del bulbo para que esté en el foco?

13. (a) Use el discriminante para determinar si la gráfica de esta ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$$

(b) Rote los ejes para eliminar el término xy de la ecuación.
(c) Trace la gráfica de la ecuación.
(d) Calcule las coordenadas de los vértices de esta cónica, en el sistema coordenado xy.

14. Grafique la ecuación polar $r = 2 + \cos\theta$.

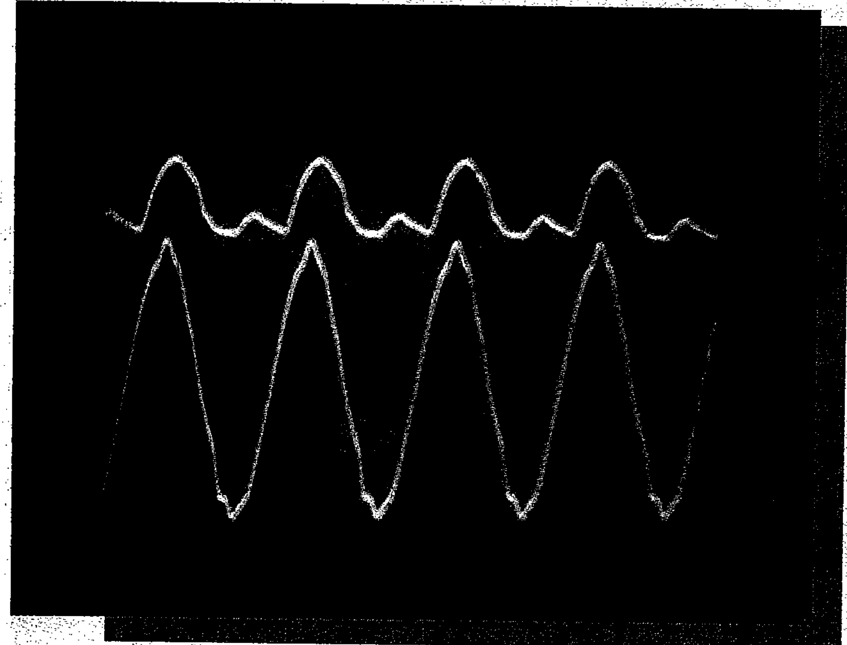
15. Convierta la ecuación polar $r = 2\cos\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta$ a coordenadas cartesianas e identifique la gráfica.

16. (a) Trace la gráfica de la curva paramétrica

$$x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta + 3 \qquad y = 2\cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

(b) Elimine el parámetro θ para obtener una ecuación de esa curva en coordenadas rectangulares.

10 LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES



El osciloscopio es básicamente un dispositivo de visualización gráfica que muestra señales eléctricas variables en el tiempo. El eje vertical representa el voltaje; mientras que el eje horizontal representa el tiempo. El estudio de la función registrada surge de la aplicación del concepto matemático de continuidad.

Saber que no se sabe, eso es humildad. Pensar que uno sabe lo que no sabe, eso es enfermedad.

LAO-TSÉ

10.1 LÍMITE

Consideremos las gráficas que aparecen en la columna lateral:

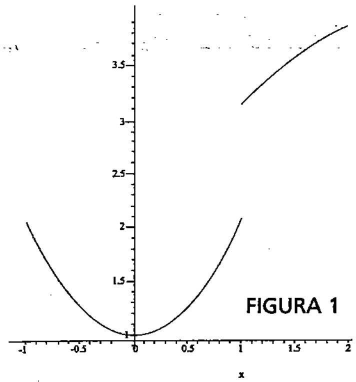


FIGURA 1

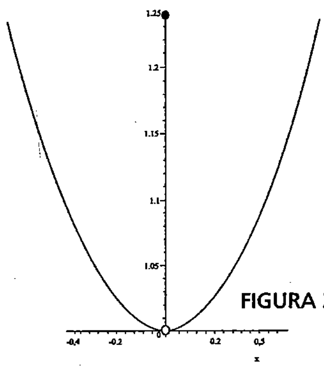


FIGURA 2

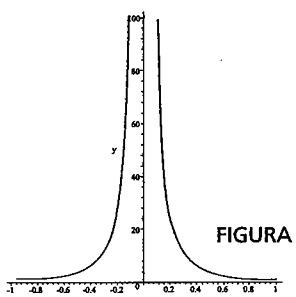


FIGURA 3

Al observar estas funciones, todas tienen en común el hecho de que su gráfica se *interrumpe* para algún valor de x. Es decir, su gráfica se *quiebra* cuando hacemos variar x de un sentido al otro. ¿Cómo definir este concepto matemáticamente? Si miramos con cuidado podemos ver que en la figura 1, el gráfico se interrumpe en $x = 1$, es decir, la función tiene un salto en $x = 1$; lo mismo ocurre en la figura 2, la gráfica se interrumpe en el punto $x = 0$, pero esta vez sin dar un salto. Finalmente, en la figura 3 la gráfica para los reales positivos no se quiebra y para los reales negativos tampoco, pero para $x = 0$ vemos que la función se interrumpe.

Ahora bien, analicemos estas observaciones. En el primer caso, cuando x se acerca a 1 por la derecha, las imágenes se acercan a 3, pero cuando x se acerca a 1 por la izquierda, las imágenes se acercan a 2. Éste es el salto descrito anteriormente. Esto no ocurre en el segundo ejemplo ya que cuando x se acerca a 0, independientemente del lado por el cual lo haga, las imágenes se aproximan a 1 aunque la función en cero es 1.25. Éste es el porqué se produce la discontinuidad. Por último, en el tercer gráfico vemos que cuando x tiende a 0 sus imágenes tienden a ser muy grandes.

De lo dicho en el párrafo anterior, podemos deducir que un aspecto importante para definir la continuidad de una función pasa por entender bien la idea de *acercarse a* y el comprender cómo se comporta una función cuando se acerca a cierto valor.

Si consideramos el punto (0,0) del plano cartesiano, acercarse a él podrá ser de infinitas maneras, como se observa en la figura 4, pero si pensamos en el punto 0 en la recta, el acercarse a él sólo es posible en dos sentidos, como lo muestra la figura 5.

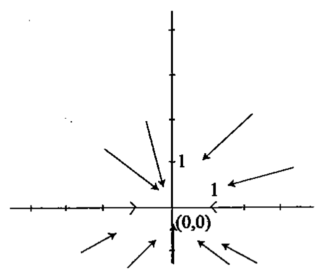


FIGURA 4

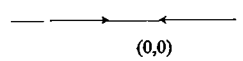


FIGURA 5

La primera manera natural para entender la idea de acercarse a un punto está dada por el concepto de *límite*. En este caso nos concentraremos en entender dicho concepto en una dimensión; es decir que, como lo muestra la figura 5, son esencialmente dos direcciones, por la derecha y por la izquierda. Hasta ahora hemos definido límite para sucesiones que pueden ser consideradas como funciones de los naturales a los reales. Sin embargo, este concepto se puede definir para funciones reales, como se hará en este capítulo. Más aun, es quizás el concepto de límite uno de los más importantes y fascinantes en toda la matemática.

Volviendo a los ejemplos iniciales, intuitivamente la palabra *continuidad* nos hace referencia a que cierta cosa, elemento, expresión, modelo, etcétera, no tiene interrupciones en su desarrollo. A pesar de esta naturalidad, este concepto no fue formalizado sino hasta el siglo XVIII, con la ayuda de los límites, y fue un gran aporte a la matemática moderna y al desarrollo de las ciencias en general.

LÍMITES DE FUNCIONES

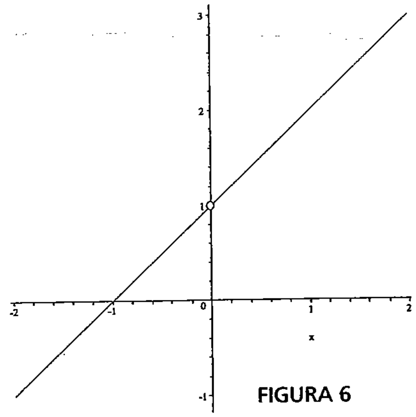


FIGURA 6

Conocemos el concepto y la definición formal de límite de sucesiones, las cuales, como ya hemos dicho, pueden ser consideradas como funciones de los números naturales a los reales. A partir de esto, la idea natural de lo que es el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es que a medida que x se acerca a x_0, $f(x)$ se acerca a algún valor. O sea, intuitivamente $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ significa que $f(x)$ está arbitrariamente cerca de l si x está cerca de x_0. Por ejemplo, en la figura 2, $f(x)$ está cada vez más cerca de 1 a medida que x se acerca a 0, es decir, intuitivamente su límite cuando x tiende a 0 es uno.

Otro ejemplo: Consideremos $f(x) = (x^2 + x)/x$ que no está definida para $x = 0$ ya que el denominador se anula. Graficando esta función podemos ver que a medida que x se acerca a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ se acerca a 1.

Esto queda en evidencia teniendo en cuenta que para $x \neq 0$, cercanos a 0 se tiene, factorizando por x, que $f(x) = \frac{x^2+x}{x} = x+1$, o sea, claramente $f(x) \to 1$ cuando $x \to 0$. Esta idea intuitiva se formaliza con la siguiente definición.

■ **Definición 1** Sea $f(x)$ una función real y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to x0} f(x) = l$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$, cuando

El lector debe entender que esta definición, aun cuando es un poco complicada de entender en un principio, es muy natural una vez que se han visto algunos ejemplos. En efecto, al igual que en sucesiones, esto significa que para cualquier intervalo centrado en l de radio $\varepsilon > 0$, debe existir un intervalo centrado en x_0 de radio δ tal que para todos los puntos de dicho intervalo, la imagen de cada uno de ellos bajo f está dentro del intervalo de radio ε de l.

Otro aspecto de relevancia para entender la definición se refiere al punto x_0. En la definición se tiene que x tiende a x_0 y $f(x)$ tiende a l; es decir, los puntos x deben estar en el dominio de f y x_0 es un punto que debe ser alcanzado por puntos del dominio de f, y no tiene sentido pensar en x_0 como un punto aislado totalmente del dominio. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$, la cual tiene por dominio al intervalo $(-1,1)$, entonces no tiene sentido alguno la expresión $\lim_{x\to 4} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ ya que el punto 4 no puede ser alcanzado por puntos del intervalo $(-1,1)$. Sin embargo sí tiene sentido preguntarse por el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1/2, a cualquier punto del dominio o los puntos 1 y –1, los cuales sí pueden ser alcanzados por puntos del dominio.

Teorema 1 El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es único.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que no es único. Sean l y k estos límites. Como $l \neq k$, sea ε la diferencia entre ellos, luego existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - k| < \varepsilon/2$ si $|x - x_0| < \delta$; luego para cualquier intervalo centrado en x_0 siempre podemos encontrar puntos en él tales que $|f(x) - k| < \varepsilon/2$ y por consiguiente $|f(x) - l| > \varepsilon/2$, lo que contradice el hecho de que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Supongamos que $f(x) \to l$ cuando $x \to x_0$ con $x > x_0$ (x tiende a x_0 por la derecha), decimos que l es el límite lateral por derecha de $f(x)$ en x_0, y lo denotamos como

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$$

Análogamente, definimos el límite lateral por izquierda de $f(x)$ en x_0, para el límite cuando $x \to x_0$ con $x < x_0$ y lo denotamos $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = k$.

Teorema 2 $f(x)$ tiene límte en x_0 si sus límites laterales existen y son iguales, si no el límite de $f(x)$ en x_0 no existe.

EJEMPLO 1 ■ Cálculo del límite de $f(x) = 2x+1$ cuando x tiende a 1.

SOLUCIÓN

Tomando valores cercanos a 1 nos damos cuenta de que la función $f(x) = 2x+1$ se acerca a 3. Es por esto que ahora trataremos de probar que esto es cierto. Para esto usaremos la definición. Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$, el cual depende de ε, tal que cuando $|x-1| < \delta$ esto implique que $|f(x)-3| < \varepsilon$. Luego

$$|f(x)-3| = |2x+1-3| = |2x-2| = 2|x-1|,$$

entonces basta con escoger $\delta = \varepsilon/2$ para que cuando $|x-1| < \delta$ (mire el último término) implique que $|f(x)-3| < \varepsilon$.

EJEMPLO 2 ■ Cálculo del límite de $f(x) = [x]$ cuando x tiende a 3 y cuando x tiende a 0.3, siendo $[x]$ la parte entera de x.

SOLUCIÓN

La parte entera de un número es el entero menor o igual al número, por ejemplo $[2.3] = 2$, $[-2,1] = -3$ y $[4] = 4$. Observemos que cuando nos acercamos a 3 por la derecha, es decir, por números mayores que 3, a saber, 3.00001, 3.0000001, etcétera, tenemos que la parte entera de ellos es siempre igual a 3, es decir $|x - x_0| < \delta$

Por otro lado, si consideramos $x \to 3$ por la izquierda, es decir, con valores del tipo 2.9, 2.99, 2.999, etcétera, nos damos cuenta de que la función evaluada en estos valores es siempre 2, luego $\lim_{x \to 3^-} [x] = 2$. Como los límites laterales no son iguales, concluimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 no existe.

Ahora veamos qué sucede con el límite de $f(x)$ en 0.3. Nos damos cuenta de que independientemente de si nos acercamos por la derecha o por la izquierda, todos los valores están entre 0 y 1; por consiguiente, la parte entera de ellos es 0, de modo que $\lim_{x \to 0.3} [x] = 0$

En general, el acercarse a un punto x_0 puede ser de muchas maneras, a saber, por la izquierda de x_0, por la derecha, o de cualquier otra manera, pero si la función $f(x)$ tiene límite en dicho punto ocurre que para cualquier forma que se tenga de acercarse a x_0, el límite será igual en todos los casos, de lo contrario el límite no existirá.

Teorema 3: $\lim_{x \to x0} f(x) = l$ si y sólo si para cualquier sucesión x_n con $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$; entonces la sucesión $f(x_n)$ converge a l.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f(x) \to l$ cuando $x \to x_0$. Sea x_n una sucesión que converge a x_0 y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_0| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, por lo que $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ cuando $n \leq n_0$; por lo tanto $f(x_n)$ tiende a l cuando $n \to \infty$.

Recíprocamente, supongamos que para cualquier sucesión x_n que tienda a x_0 ocurre que $f(x_n)$ tiende a l. Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq l$; es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x tal que $|x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Luego, considerando $\delta = 1/n$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe x_n tal que $|x_n - x_0| < 1/n$ y $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$, esto implica que la sucesión x_n tiende a x_0, pero $f(x_n)$ no tiende a l, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

EJEMPLO 3 ■ Cálculo del $\lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x)$

SOLUCIÓN Consideremos la sucesión $x_n = 1/(2\,n\,\pi)$, la cual tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Para esta sucesión tenemos que $f(x_n) = \cos(2\,n\,\pi) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $f(x_n) \to 1$ cuando $n \to \infty$. Ahora tomemos otra sucesión que tiende a infinito, $x_n = 1/((2n-1)\,\pi/2)$, para la cual $f(x_n) = \cos((2n-1)\,\pi/2) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tiende a 0; luego hemos encontrado dos sucesiones que tienden a cero, pero que la evaluación en f de ellas convergen a distintos límites. Por el teorema anterior se tiene que el $\lim\limits_{x \to x_0} \cos(1/x)$ no existe.

Este teorema es de gran ayuda en esta parte ya que relaciona el límite de funciones con los límites de sucesiones, teniendo de manera trivial todos los teoremas sobre álgebra de límites para sucesiones, ahora, para límites de funciones. Es decir, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k$, se tiene que:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lambda g(x) = l + \lambda k$ con $\lambda \in \mathbb{N}$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = lk$.

3. Si $g(x) \neq 0$ y $k \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = l/k$.

4. Además, se satisface el teorema del sándwich, o sea, si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para cada x de un intervalo, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} h(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

EJEMPLO 4 ■ Cálculo del límite de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ cuando $x \to 0$.

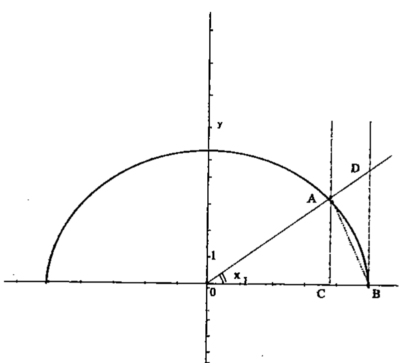


FIGURA 7

SOLUCIÓN Sabemos que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es impar, luego estudiaremos sus límites laterales. Primero consideremos $x > 0$ tales que $x \to 0$; observemos en la figura que $\operatorname{sen}(x) = AC$ y este segmento a su vez es menor que el segmento circular AB, a partir de que x es un ángulo agudo se tiene que

$$0 \leq \operatorname{sen}(x) \leq \overset{\frown}{AB} = 1 \cdot x,$$

luego usando el teorema del sándwich tenemos que $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sen}(x) = 0$. Ahora si $x < 0$ tenemos que $-x > 0$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, entonces $0 \leq \operatorname{sen}(-x) \leq -x$ y por lo tanto $0 \geq \operatorname{sen}(x) \geq x$, luego por teorema del sándwich $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sen}(x) = 0$; por lo tanto, se tiene que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$.

Una aplicación directa de lo anterior es que cos x = 1 ya que $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ para todo x.

Teorema 4: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$

DEMOSTRACIÓN: La demostración se basa en el teorema del sándwich y la figura 7. Observemos que el área del triángulo AOC viene dada por

$$A(AOC) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2}.$$

Por otro lado, el área del triángulo DOB está dada por

$$A(DOB) = \frac{\tan(x)}{2},$$

y finalmente tenemos que el área del sector circular $\triangleleft AOB$ es $\dfrac{x}{2}$. De la figura podemos ver que $A(\Delta AOC)) \leq A(\triangleleft AOB) \leq A(\Delta DOB))$, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2},$$

como en el primer cuadrante tanto $\operatorname{sen}(x)$ como $\cos(x)$ son positivas se obtiene que

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Entonces usando el teorema del sándwich y el hecho de que $\cos(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a 0, podemos concluir que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

EJEMPLO 5 ■ Cálculo del $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos(x)} = (1)^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Lema 1 $\lim_{x\to 1} \ln(x) = 0$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $x = e^h$, luego tomando sucesiones podemos observar que $x \to 1$ si y sólo si $h \to 0$. Entonces el límite anterior se puede reescribir en términos de h como:

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \lim_{h\to 0} \ln(e^h) = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

No es difícil demostrar que si $x \to a$ entonces $\ln(x) \to \ln(a)$. Se deja su demostración como ejercicio para el lector.

EJEMPLO 6 ■ Pruebe que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

SOLUCIÓN Sea $h = e^x$-1, lo cual implica que $x = \ln(1\text{-}h)$ y $x \to 0$ si y sólo si $h \to 0$. Entonces escribiendo el límite anterior en términos de h tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\ln(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{1}{h}\ln(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}}.$$

Pero como $(1+h)^{\frac{1}{h}} \to e$ cuando $h \to 0$ y usando el lema anterior tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{\ln(e)} = 1.$$

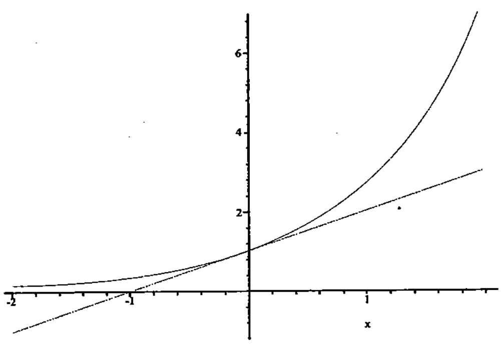


FIGURA 8

Observemos que la cantidad $(e^x\text{-}1) / x = (e^x\text{-}e^0) / x$; ahora bien, si consideramos $x \neq 0$ cercano a cero y la función $f(x) = e^x$, este cociente se puede reescribir como

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

lo cual representa la pendiente de la recta que pasa sólo por los puntos $(x, f(x))$ y $(0, f(0)) = (0,1)$. Es por esto que es natural preguntarse qué significa o qué representa geométricamente este límite. En este caso (y en muchos otros también) cuando $x \to 1$ el punto $(x, f(x)) \to (0,1)$ luego la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos tiende a la pendiente que pasa sólo por el punto (0,1). Es decir, este límite representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = e^x$ en el punto (0,1).

10.1 EJERCICIOS

17 ■ Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{x}$.

2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

4. sea $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ \cos(x) & x \leq 0, \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x)$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(5x)}{x}$.

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{x^3 + x^2}$.

7. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)}{\pi - x}$.

8. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}(a+h) - \text{sen}(a)}{h}$.

9. $\lim_{x\to 0} \text{sen}\dfrac{1}{x}$.

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(7x)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-cos(x-2)}{x^2-4}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x+2}{x^4+2x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} [x]$ donde $[x]$ es la parte entera de x.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} (-1)^{[\frac{1}{x}]}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

16. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x|}{x}$

17. $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

18-23 ■ Usando la definición demuestre los siguientes límites:

18. $\lim\limits_{x\to 2} 2x+3=7$

19. $\lim\limits_{x\to 1} x^2-1=0$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)=1$

21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}=0$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

24. ¿Hay un número a tal que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista? Si es así, encuentre los valores de a y del límite.

25. Sea $f(x)=1$ si x es racional y $f(x)=0$ si x es irracional. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

26. Sea $f(x)=x\,\text{sen}(\frac{1}{x})$ para $x\neq 0$. ¿Cuál es el límite de $f(x)$ cuando $x\to 0$?

27. Sea $f(x)=x^2$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. ¿Qué representa geométricamente este límite?

28. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} \ln(x)=\ln(a)$.

29-34 ■ Calcule

29. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{7x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{\text{sen}(bx)}$.

32. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\text{sen}\,x-\text{sen}\,a}{x-a}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{x^2}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x|\cdot x}{x^2+x}$.

35. Encuentre la recta secante a la gráfica de $f(x)=sen(x)$ que pasa por los puntos $(\pi,0)$ y $(h, sen(h))$. ¿Qué sucede con la pendiente de esta recta cuando $h\to\pi$?

10.2 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE FUNCIONES

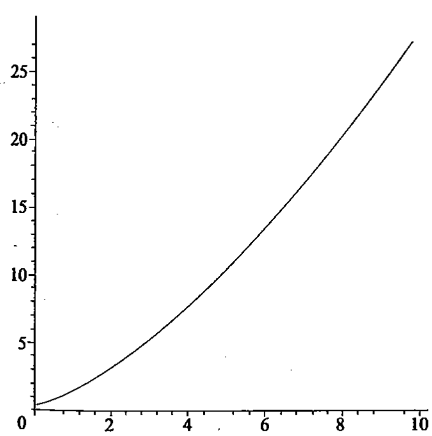


FIGURA 1

En la sección anterior vimos que $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}(x)/x=1$; es decir que la $f(x)=\text{sen}(x)$ y $g(x)=x$ se comportan igual cuando x es cercano a 0. Pero ¿qué sucede con el comportamiento comparativo de funciones en el infinito, es decir, para valores muy grandes de x? En muchas aplicaciones nos interesa saber el comportamiento a largo plazo de alguna función, por ejemplo, la población de células en un organismo según el tiempo: ¿cómo es su comportamiento a medida que el tiempo transcurre? Si interpretamos esta pregunta matemáticamente, lo natural es definir $p(t)$ a la población de células según el tiempo t. De manera experimental hemos encontrado una manera explícita de $p(t)$. La pregunta, desde el punto de vista matemático, sobre el comportamiento de $p(t)$ se resuelve tomando $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$; sin embargo en muchas ocasiones este límite es ∞, pero no sólo es importante saberlo, sino también saber cómo tiende a ∞. Supongamos que $p(t)=\dfrac{3te^{0.3t}+1}{2+e^{0.3t}}$, medidas en millones de células y el tiempo t en días.

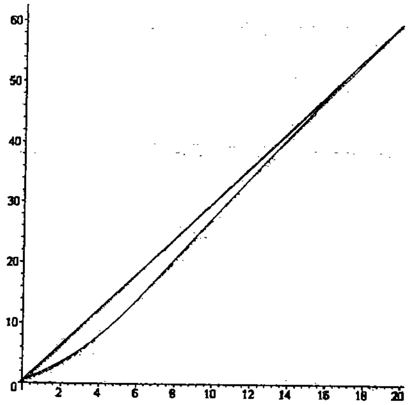


FIGURA 2

Observemos que $p(t)=\dfrac{3te^{0.3t}+1}{2+e^{0.3t}}=\dfrac{e^{0.3t}(3t+\frac{1}{e^{0.3t}})}{e^{0.3t}(\frac{2}{e^{0.3t}}+1)}=\dfrac{3t+\frac{1}{e^{0.3t}}}{\frac{2}{e^{0.3t}}+1}\to\infty.$ Aun cuando el límite es infinito podemos ver que, como $e^{0.3t}\to\infty$ cuando $t\to\infty$,

$p(t)=\dfrac{3t+\frac{1}{e^{0.3t}}}{\frac{2}{e^{0.3t}}+1}\approx\dfrac{3t}{1}\approx 3t,$ es decir que *p(t)* se comporta como la recta *3t* cuando *t* es suficientemente grande.

Por ejemplo si consideramos la función $f(x)=1/x$ cuando $x\to\infty$ sabemos que $f(x)\to 0$, o sea $f(x)$ es cercano a cero para x suficientemente grandes del mismo modo si x es suficientemente pequeño ($x\to-\infty$).

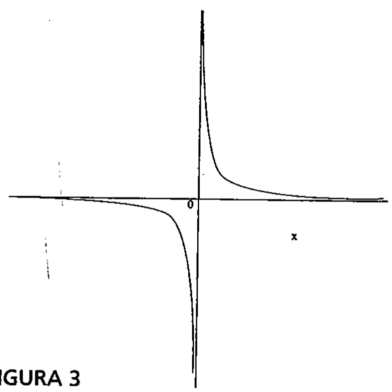


FIGURA 3

Una recta se dice que es una asíntota de una curva si la curva se parece a la recta sin serlo. Por ejemplo, en la figura 3 podemos ver que la recta $y=0$ es una asíntota para $f(x)$. Además observamos que el eje y es asíntota vertical para la gráfica de $f(x)$, es decir, $f(x)$ es muy grande a medida que x se acerca por la derecha a cero y es muy pequeña si x se acerca por la izquierda a cero. Del mismo modo si consideramos la función $g(x)=\dfrac{1+x}{x-1}$, tenemos que $g(x)\to 1$ cuando $x\to\infty$ y $x\to-\infty$, es decir, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal de $g(x)$ y la recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} g(x)=\pm\infty$.

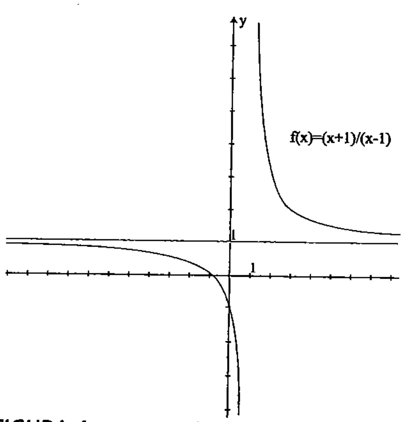


FIGURA 4

■ **Definición 1** Sea f una función de variable real, entonces:

i) $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $M<\infty$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ cuando $x>M$.

ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $M<\infty$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ cuando $x<M$.

EJEMPLO 1 ■ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x-1}=1.$

SOLUCIÓN De la definición, sea $\varepsilon>0$, luego $|f(x)-L|=\left|\dfrac{1+x}{x-1}-1\right|=\left|\dfrac{2}{x-1}\right|<\varepsilon,$

como $x>0$ tenemos que $\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{1}{\varepsilon}$ y en consecuencia $x>\dfrac{2}{\varepsilon}+1.$

Entonces hemos probado que para cualquier $\varepsilon>0$ existe $M=2/\varepsilon+1$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ cuando $x>M$.

■ Probar que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x-1}=1$ se deja como ejercicio al lector.

Lema 1 $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia directa de la definición. Se deja como ejercicio al lector.

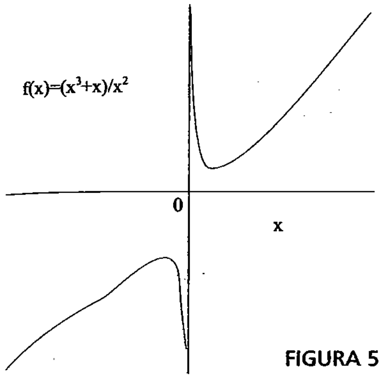


FIGURA 5

■ **Definición 2** Se dice que la recta $y=a$ es asíntota horizontal de $f(x)$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ ó $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$.

■ **Definición 3** La recta $x = c$ es una asíntota vertical de $f(x)$ si $\lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty$.

Como podemos observar en la gráfica, esta función no tiene asíntota horizontal pero sí vertical, a saber $\lim_{x\to 0+}\frac{x^3+x}{x^2}=\infty$ y $\lim_{x\to 0-}\frac{x^3+x}{x^2}=-\infty$.

Es decir la recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Por otro lado, su comportamiento al infinito, aun cuando tiende a infinito, es como el de una recta $y = mx + n$. Pero ¿cuáles son m y n?

Si $f(x) = mx + n$ para x suficientemente grande, entonces $\frac{f(x)}{x}\approx\frac{mx+n}{x}\approx m+\frac{n}{x}$, tomando límite tenemos que $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(m+\frac{n}{x})=m$, es decir, la pendiente de la asíntota oblicua, si la hay, es $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Ahora como ya concemos la pendiente, entonces $f(x)\approx mx+n$ implica que $f(x)-mx\approx n$ para x suficientemente grande, es decir, $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$.

El mismo análisis se puede hacer para $x\to-\infty$, obteniéndose el comportamiento para valores muy pequeños.

■ **Definición 4** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ existe, en cuyo caso será el valor de m. Si éste es el caso, n se calcula como $n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx$.

Análogamente se define una asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$.

EJEMPLO 2 ■ **Consideremos la función de la gráfica, entonces**
$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x(x^2+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3+x^2}=1$, por lo que la pendiente de la asíntota oblicua es $m=1$.
Entonces $n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+x}-1\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1-x(x^2+x)}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-x^2}{x^2+x}=-1$,
en consecuencia $f(x)$ tiene la asíntota oblicua $y=x-1$. De manera similar podemos ver que la situación para $x\to-\infty$ es análoga, generándose la misma asíntota oblicua.

10.2 EJERCICIOS

1-11 ■ Calcule límite de $f(x)$ cuando $x\to\infty$.

1. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$.
2. $f(x)=\frac{x^4+x^3-2x}{3x^4+2}$.
3. $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$.
4. $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+2x^2}}{x^2+1}$.
5. $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.
6. $f(x)=\frac{1}{[x]}$, donde $[x]$ es la parte entera de x.
7. $f(x)=x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.
8. $f(x)=\frac{2^x}{2^x+3^x}$.

9. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+x)}$.

10. $f(x)=(1+x)^{1/x}$.

11. $f(x)=\dfrac{\ln(1/x)}{x}$.

12-19 ■ Calcule las asíntotas (si las hay) de $f(x)$.

12. $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$.

13. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

14. $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$.

15. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$.

16. $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.

17. $f(x)=x/(x^2-4)$.

18. $f(x)=sen(\frac{1}{x})$.

19. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2e^{2x}+x}$.

20-22 ■ Dibuje un ejemplo de una función que satisfaga lo que se indica en cada caso:

20. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty, \lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty, \lim_{x\to\infty} f(x)=1, \lim_{x\to -\infty} f(x)=1$

21. Igual que el ejercicio anterior, pero satisfaciendo: $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty, \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim_{x\to -\infty} f(x)=0, \lim_{x\to 0+} f(x)=\infty,$ $\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty$

22. Igual que el anterior, pero satisfaciendo: $\lim_{x\to 3} f(x)=-\infty, \lim_{x\to\infty} f(x)=2, f(0)=0$ y f par.

23. Encuentre una fórmula para una función que tenga asíntotas verticales $x=0$ y $x=4$ y asíntota horizontal $y=1$.

24. Un depósito contiene 550 l de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito a una velocidad de 25 litros por minuto. Demuestre que la concentración de sal t minutos después es $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$. ¿Qué sucede con la concentración cuando $t\to\infty$?

25. ¿Es $\ln(x)$ asintótico a x cuando $t\to\infty$?

26. Calcule $\lim x^n$ cuando $n\to\infty$. Describa lo que sucede.

27. Encuentre la asíntotas (si las tiene) de $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

28. Sea $f(x)=\dfrac{2e^x}{1-e^x}$.. Encuentre todas sus asíntotas.

29. ¿Qué valor debe tener a para que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^3+x^2+1}{2ax^2+x}$ exista? ¿Cuál es el valor de dicho límite?

10.3 CONTINUIDAD

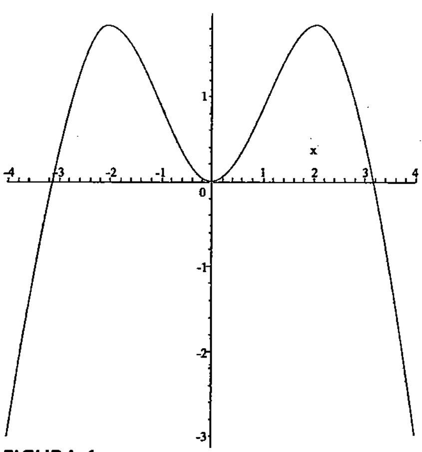


FIGURA 1

Intuitivamente, decimos que una función es continua en un intervalo si su gráfica no se quiebra; es decir, se puede hacer la gráfica de la función desde un punto al otro de manera ininterrumpida.

Del mismo modo, $f(x)$ es continua en $x=a$ si en este punto la gráfica no se quiebra, es decir, a medida que x se acerca a a, $f(x)$ se acerca a $f(a)$, no importando cómo se acerca x a a. Fue A. L. Cauchy (1821) quien dio una formulación matemática para definir continuidad:

■ **Definición 1** Una función $f(x)$ se dice continua en $x=a$ si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$;

Además, decimos que $f(x)$ es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo.

Vimos en la sección anterior que x^n tiende a a^n cuando $x\to a$ y que el límite de la suma es la suma de los límites (si existen), entonces un polinomio es una función continua en todos los reales. De este mismo modo, las funciones trigonométricas, sen(x) y cos (x) también resultan ser funciones continuas en todos los reales al igual que las funciones e^x y $\ln(x)$, ya que en todos estos casos vimos que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$;.

EJEMPLO 1 ■ Determinación del punto de discontinuidad

Sea $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+1}$. Por álgebra de límites se tiene que para cualquier valor $x \neq -1$, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$; o sea, es continua en todo punto distinto de -1. Ahora bien, no es difícil darse cuenta de que cuando x se acerca a -1, el numerador tiende a -2, pero el denominador se acerca a 0, por tanto $f(x)$ se acerca a ∞ o a $-\infty$. Entonces no existe el $\lim_{x\to -1} f(x)$, por lo tanto f no es continua en $x=-1$, es decir, $x=-1$ es un punto de discontinuidad de $f(x)$.

Observemos que el hecho de que $f(x)$ no sea continua en $x = a$ significa que $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$. Pero esto puede ocurrir de distintas maneras:

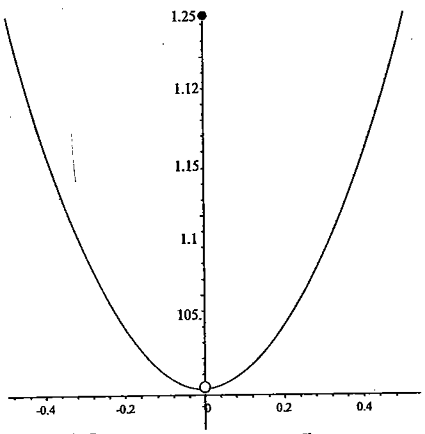


FIGURA 2

i) Si bien existe $\lim_{x\to a} f(x)$, este valor es distinto de $f(a)$, en cuyo caso la discontinuidad se llama *removible* o *evitable*, ya que podemos redefinir la función de modo que sea continua en $x = a$. Esto se produce cambiando el valor de $f(a)$ por el valor del límite.

En este ejemplo hay discontinuidad evitable en $x = 0$ ya que el límite cuando x tiende a 0 de $f(x)$ es 1, que es distinto del valor de la función en 0, que es 5/4. Para este caso $f(x)$ se puede redefinir de manera que sea continua en $x = 0$ como:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ x\neq 0 \\ \dfrac{5}{4} & ,\ x=0 \end{cases}$$

ii) Otra forma para que f sea discontinua en $x = a$ es que $\lim_{x\to a} f(x)$ no exista. Recuerde que esto ocurre si el límite es infinito o sus límites laterales son distintos. En cualquier caso la discontinuidad se denomina *esencial*, ya que de ningún modo se puede redefinir la función para que sea continua en $x = a$.

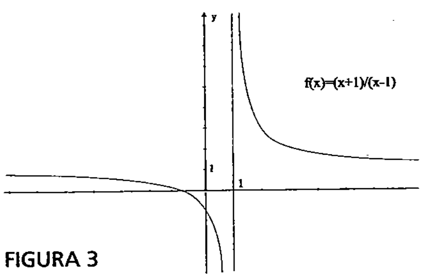


FIGURA 3

En la figura 3 $f(x)$ tiene una discontinuidad de tipo esencial en $x = 1$, ya que $\lim_{x\to 1+} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to 1-} f(x)=-\infty$, luego $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

EJEMPLO 2 ■ Sea $f(x)$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0 \\ 2x-1, & x\leq 0 \end{cases}$ podemos ver que para cualquier valor distinto de cero, al estar $f(x)$ definida según dos polinomios, la función es continua. Entonces el estudio sobre la continuidad de f se reduce a determinar si f es continua en $x = 0$. Pero sus límites laterales cuando $x\to 0$ son distintos, ya que si se acerca por la derecha, el límite es 1, mientras que si acerca por la izquierda es -1, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe. Es decir, $x = 0$ es un punto de discontinuidad del tipo esencial.

EJEMPLO 3 ■ Estudio de la continuidad de *h (x)*

Sea $f(x)$=tan(x) y $g(x)$ definida por $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Estudiemos la continuidad de $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Primero, $h(x) = g(f(x)) = g(\tan(x))$. Como $\tan(x) = 0$ si y sólo si $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $h(x) = 1$ para estos valores. En cualquier otro caso $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan(x)}$, es decir $h(x)$ se puede escribir como $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan(x)}, & x \neq k\pi \\ 1, & x = k\pi \end{cases}$

Los únicos puntos donde $h(x)$ podría ser discontinua son los de la forma $k\pi$ ya que para el resto de los puntos la función es el cociente de dos funciones continuas con denominador distinto de cero. Veamos si es continua en estos puntos. Para ver esto tomamos un valor $k\pi$ y calculamos $\lim\limits_{x\to k\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(\tan(x))}{\tan(x)}$, si llamamos a $u = \tan(x)$, entonces $x \to k\pi$ si y sólo si $u \to 0$, luego el límite en términos de u es $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$, lo cual es igual a $h(k\pi)$, por lo tanto h es continua en todos los reales.

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del álgebra de límites.

Teorema 1 Sean f y g funciones continuas en $x = p$. Entonces $f+g$, $f-g$, $f.g$, kf con $k \in \mathbb{R}$ son funciones continuas en $x = p$. Además, el cociente f/g es continuo si $g(p) \neq 0$.

Una consecuencia directa de este teorema es que todas las funciones racionales (cociente entre dos polinomios) son continuas salvo en las raíces del denominador. La función $\tan(x)$ es continua, salvo en los múltiplos impares de $\pi/2$.

Lema 1 Sea f continua en p tal que $f(p) \neq 0$. Entonces existe un intervalo centrado en p tal que f no cambia de signo.

DEMOSTRACIÓN: Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(p) > 0$. Como f es continua en $x = p$, se tiene que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$, lo que significa que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ cuando $|x - p| < \delta$. Escogiendo $\varepsilon = f(p)/2$ y usando la definición de valor absoluto tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $f(p) - f(p)/2 < f(x) < f(p) + f(p)/2$ para todos aquellos puntos que están en el intervalo $(p-\delta, p+\delta)$. Es decir, en este intervalo, sus imágenes son mayores que $f(p)/2$, el cual es positivo. Por consiguiente, f tiene el mismo signo que $f(p)$ en el intervalo $(p-\delta, p+\delta)$.

Teorema 2 (de Bolzano). Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signos. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Sea $S = \{x \in (a,b) : f(x) \leq 0\}$, el cual es distinto de vacío ya que al menos está a. Llamemos $c = \sup S$ y probaremos que $f(c)=0$. Supongamos que $f(c) \neq 0$, entonces $f(c) < 0$ o $f(c) > 0$. Por lema anterior existe un intervalo centrado en c tal que f tiene el mismo signo de $f(c)$. Si $f(c)< 0$ hay valores a la derecha de c para los cuales $f \leq 0$, o sea, hay valores mas grandes que c que pertencen a S, lo que contradice el hecho de que c=sup$S$. Ahora si $f(c) > 0$, entonces hay valores a la izquierda de c tales que $f > 0$, luego c no es la menor de las cotas superiores, lo que contradice nuevamente el hecho de que c=sup$S$. Por consiguiente, $f(c)$=0.

EJEMPLO 4 ■ Cuando Juan tenía 10 años medía 15 centímetros más que su hermano Pedro de 5 años, pero cuando éste cumplió los 18 años superaba a su hermano en 3 centímetros. Pruebe que existe un tiempo en que ambos hermanos midieron lo mismo.

SOLUCIÓN Sea $h(t)$ la diferencia de edad entre Juan y Pedro respectivamente según el tiempo. O sea, $h(0)$=15 la diferencia inicial. Pero $h(13)$ (es la diferencia que hay cuando Pedro tiene 18 años) es la edad de Juan menos la edad de Pedro, es decir –3. Luego como la función $h(t)$ es continua a menos que una persona pueda agregarse altura en un instante, cosa que es imposible, por el teorema de Bolzano tenemos que existe un valor de t entre 0 y 13 tal que $h(t) = 0$; es decir, la diferencia entre los hermanos en ese instante es 0.

Teorema 3 (del valor intermedio). Sea $f(x)$ continua en un intervalo $[a,b]$. Entonces para cada $y \in [f(a), f(b)]$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$. Es decir, todo punto del intervalo $[f(a),f(b)]$ es alcanzado por algún valor en $[a,b]$ bajo la función $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $y \in [f(a),f(b)]$, definimos la función $g(x) = f(x)-y$. Luego $g(x)$ es continua (diferencia de funciones continuas) tal que $g(a) = f(a)-y < 0$ y $g(b) = f(b)-y > 0$, entonces por el teorema de Bolzano se tiene que existe $x \in [a,b]$. tal que $g(x) = 0$, o sea $f(x) = y$.

Una aplicación interesante del teorema de Bolzano está relacionada con las soluciones a las ecuaciones no lineales. En muchas oportunidades nos enfrentamos a resolver ecuaciones, las cuales en general no resultan ser lineales ni menos polinómicas. Por ejemplo, el encontrar el punto de *equilibrio del mercado* como la intersección de las curvas *oferta* y *demanda*. Sea $S(p)$ la oferta de los fabricantes de cierto producto al precio p y $D(p)$ es la demanda de los consumidores de dicho producto al precio p. Es lógico pensar que la oferta es una función creciente en el precio y que por el contrario a medida que el precio aumenta la demanda disminuirá. Consideremos que las funciones $D(p)$ y $S(p)$ son funciones continuas tales que $\lim_{p \to 0+} D(p) = \infty$, $\lim_{p \to 0+} S(p) = 0$ y $\lim_{p \to \infty} D(p) = 0$, $\lim_{p \to \infty} S(p) = \infty$, en consecuencia si consideramos la función $f(p) = D(p) - S(p)$, la cual es continua, podremos concluir gracias al teorema de Bolzano que existe un valor p_0 tal que $f(p_0) = 0$ ya que $f(p) \to \infty$ cuando $p \to 0$ y $f(p) \to -\infty$ cuando $p \to \infty$. Es decir existe un punto de equilibrio del sistema. Pero no sólo es importante saber matemáticamente que existe, sino que nos gustaría dar una aproximación a su valor real. Para entender mejor esto, usaremos el siguiente ejemplo:

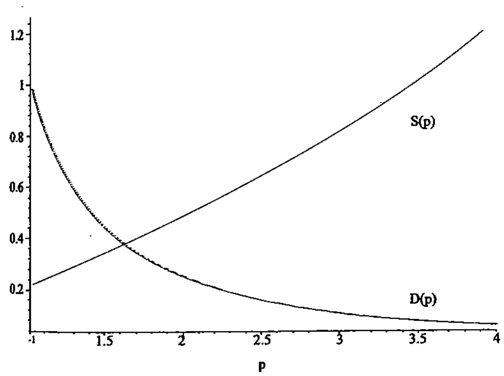


FIGURA 4

Supongamos que de modo experimental hemos modelado el mercado para cierto producto y tenemos que la oferta y la demanda estan dadas por, $S(p) = e^{0.2p} - 1$ y $D(p) = 1/p^2$, respectivamente.

Sea $f(p)=D(p)-S(p)=1/p^2-e^{0.2p}+1$, luego $f(1)=2-e^{0.2}\approx 0.7786>0$ y $f(2)=1.25-e\approx -1.4683<0$. O sea, por el teorema de Bolzano $p_0\in(1,2)$. Ahora consideremos el punto medio del intervalo, es decir, el valor $p_1=1.5$, el cual satisface que $f(1.5)\approx 0.0946>0$, luego como $f(2)<0$, entonces por el teorema de Bolzano $p_0\in(1.5,2)$. Ahora repetimos el proceso anterior, es decir, consideramos el punto medio del intervalo que en este caso es $p_2=1.75$, el que al evaluar en la función se obtiene $f(1.75)\approx -0.0925<0$. Al ser $f(1.5)>0$ y $f(1.75)<0$ por el teorema de Bolzano $p_0\in(1.5,1.75)$. Procedemos igual que antes y evaluamos en $p_3=1.625$, obteniendo $f(1.625)\approx -0.0533<0$, luego $p_0\in(1.5,1.625)$. En el siguinte paso calculamos nuevamente el punto medio $p_4=1.5625$ y en consecuencia $f(1.5625)\approx 0.042>0$, luego $p_0\in(1.5625,1.625)$, entonces en el siguiente paso una aproximación a la solución de la ecuación $f(p)=0$ es el valor $p_5=1.59375$, siendo el valor real 1.617849996. Es decir, con este proceso generamos una sucesión de valores p_n tales que p_0 siempre está entre p_n y p_{n+1} y por la construcción de la sucesión, es fácil darse cuenta de que $|p_n-p_{n+1}|<2^{-n}$; por consiguiente p_n es una sucesión convergente, la cual por construcción debe tener como límite la solución real de la ecuación $f(p)=0$, que en este caso es 1.617849996.

10.3 EJERCICIOS

1-11 ■ Indique si la función es continua en los reales. Si no, diga en qué puntos es discontinua y qué tipo de discontinuidad presenta.

1. $f(x)=x^2-2x+1$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$
3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$
4. $f(x)=e^{1/x}$
5. $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$
6. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$
7. $f(x)=\dfrac{tgx}{x}$
8. $f(x)=\dfrac{senx}{\pi-x}$
9. $f(x)=arctgx$
10. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$
11. $f(x)=[\![3x]\!]$

12-21 ■ Estudie la continuidad de la función $f(x)$, especificando el tipo de discontinuidad, si la hay.

12. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3x^2+x}$.
13. $f(x)=x(1+\dfrac{1}{x})$.
14. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$.
15. $f(x)=\ln(4x^2)$.
16. $f(x)=\cos(\dfrac{1}{x})$.
17. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x\neq 0 \\ 4x^3+2x, & x=0 \end{cases}$
18. $f(x)=[\dfrac{1}{x}]$.
19. $f(x)=e^{1/x}$.
20. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leq 2 \\ x^2-2x, & x>2 \end{cases}$
21. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

22. Pruebe que existe al menos un número real tal que $e^x = 2 - x$. ¿Dónde está tal número?

23. ¿Existe un número tal que su cuadrado sea igual a su raíz cuadrada?

24. Determine la constante c para que la función $f(x)$ sea continua en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c^2, & x < 4 \\ cx + 20, & x \geq 4 \end{cases}$$

25. Halle los valores de c y d para los cuales la función $f(x)$ es continua en todos los reales.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ cx^2 + d, & 1 \leq x \leq 2 \\ 4x, & x > 2 \end{cases}$$

26-31 ■ Diga si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique matemáticamente sus respuestas.

26. Si f es continua, entonces f^2 también lo es.

27. Si $f + g$ es continua en $[a,b]$, entonces f y g son continuas en dicho intervalo.

28. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, para toda función f.

29. Si $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces hay un valor c entre a y b tal que $f(c) = c$.

30. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces el conjunto $I = \{f(x) : x \in [a,b)\}$, tiene máximo y mínimo.

31. f es continua si y sólo si $|f|$ es continua.

32. Estudie la continuidad de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2 + x}$. Indique (si los hay) los tipos de discontinuidad que presenta y repare f para que sea continua donde corresponda.

33. Utilizando el teorema del valor intermedio demuestre que existe un número real tal que su cubo es 4.

34. Demuestre que si f es continua entonces f^2 también lo es.

35. ¿Es cierto el recíproco de la afirmación anterior?

36. Si $f(x) + g(x)$ es una función continua, entonces ¿es cierto que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas?

37. Sea $f(x) \geq 0$, entonces demuestre que si es continua entonces el área comprendida entre la gráfica y el eje X (entre 0 y x) es una función continua. ¿Qué sucede si $f(x)$ tiene una discontinuidad en $x = 1$?

10 REPASO

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

1. $\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4}\right) = \lim\limits_{x \to 4}\dfrac{2x}{x-4} - \lim\limits_{x \to 4}\dfrac{8}{x-4}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+6x-7)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+5x-6)}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+2x-4)}$.

4. Si $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

5. Si $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

6. Si $\lim\limits_{x \to 6} f(x)g(x)$ existe, entonces el límite tiene que ser $f(6)g(6)$

7. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim\limits_{x \to b} p(x) = p(b)$.

8. Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - g(x) = 0$.

9. Una función puede tener dos asíntotas horizontales.

10. Si la recta $x=1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, está definida en $x=1$.

11. Si $f(1)>0$ y $f(3)<0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

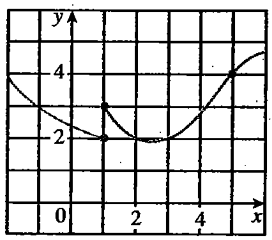
12. Si f es continua en 5 y $f(5)=2$ y $f(4)=3$, entonces $\lim\limits_{x \to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

13. Si $f(x)>1$ para todo x real, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) > 1$ (si existe).

EJERCICIOS

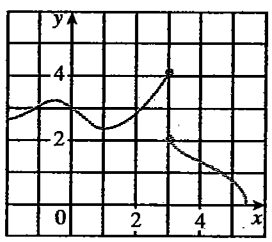
1. Use la gráfica de f que se proporciona para determinar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to 1-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



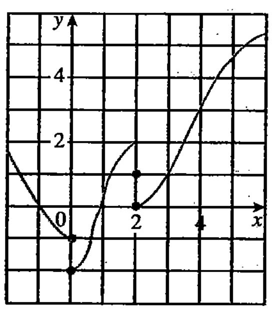
2. Para la función f cuya gráfica se ilustra, repita el problema anterior.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



3. Repita el ejercicio anterior considerando esta nueva función.

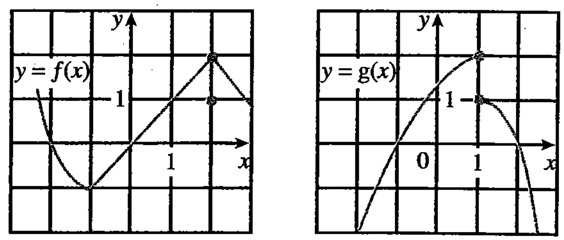
(a) $\lim_{t\to 0-} f(t)$ (b) $\lim_{t\to 0+} f(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} f(t)$ (d) $\lim_{t\to 2-} f(t)$ (e) $\lim_{t\to 2+} f(t)$
(f) $\lim_{t\to 2} f(t)$



4. Dado que $\lim_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} h(x) = 8$, encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

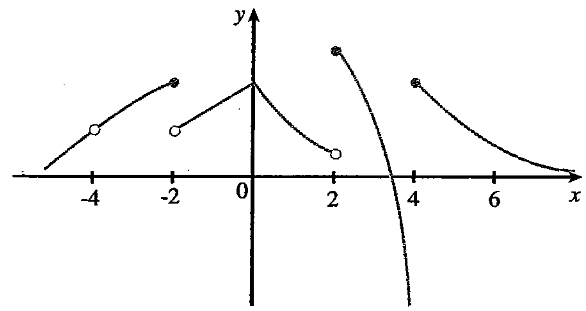
(a) $\lim_{x\to a} f(x) + h(x)$ (b) $\lim_{x\to a} f(x)^2$ (c) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
(e) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \frac{2f(x)}{h(x)-f(x)}$

5. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite si existe, si no, explique por qué.

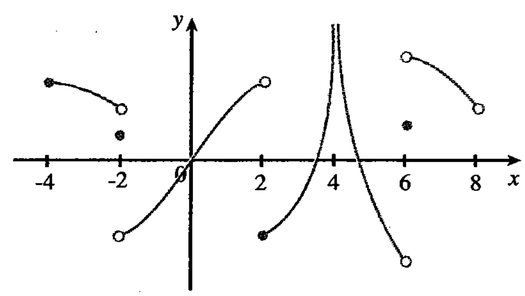


(a) $\lim_{x\to 2} f(x) + g(x)$ (b) $\lim_{x\to 1} f(x) + g(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)\, g(x)$
(d) $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)}$ (e) $\lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3+f(x)}$

6. **(a)** A partir de la gráfica de f, establezca los puntos donde f es discontinua y explique por qué.
(b) Para cada uno de los puntos que se determinaron en el inciso anterior, determine si f es continua.



7. A partir de la gráfica de f, dé los intervalos sobre los que f es continua.



8-26 Calcule los siguientes límites.

8. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x-2}$.

9. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2}$.

10. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^4-16}{x}$.

11. $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^4 + x^5} sen\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + tg(x)}{sen(x)}$.

15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + tg(x)}{sen(x)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{sen(2x)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2)}{e^x - 1}$.

20. $\lim\limits_{x\to -1} [\![x - [\![x]\!]]\!]$.

21. Pruebe que $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$.

22. Calcule $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x^4}{2x^2 - 3x^4}$.

23. Calcule $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{sen(x)}{x}$.

24. Calcule $\lim\limits_{x\to \infty} e^{x-x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to \infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$.

26. Calcule $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-2x}\cos(x)$.

27. Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la curva:

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

28. Repita el problema anterior para la curva $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

29. (a) Estime el valor de $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x$ dibujando la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

(c) Pruebe su conjetura.

30. (a) Use la gráfica de $f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ para estimar el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro decimales.

(c) Halle el valor exacto del límite.

31. Estime la asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$. Calcule la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explicaría esta discrepancia?

32. Encuentre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, si para todo $x > 1$ se tiene que

$$\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} < f(x) < \frac{10e^x - 21}{2e^x}.$$

33. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, donde m_0 es la masa de una partícula en estado de reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c-$?

34. (a) Demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 1} = 2$.

(b) Usando la definición de límite, encuentre un natural N tal que $\dfrac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 1} > 1.9$ cuando $x > N$. ¿Qué pasa si reemplazamos 1.9 por 1.99?

35. Estudie la continuidad de $f(x) = \dfrac{sen(x+2)}{x^2 + 5x + 6}$. Clasifique los puntos de discontinuidad, si los hay.

36. Pruebe que la función $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ no es continua en $x = 0$.

37. Estudie la continuidad $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. Clasifique los puntos de discontinuidad, si los hay.

38. Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & si \quad x < 0 \\ 3 - x & si \quad 0 \le x < 3 \\ (x-3)^2 & si \quad x > 3 \end{cases}$.

(a) Evalúe cada límite, si existe.

(i) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ (v) $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$

(vi) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua?

(c) Trace la gráfica de f.

39. Usando el teorema del valor intermedio, pruebe que hay un número real tal que la suma de él con su inverso multiplicativo es igual a su cuadrado.

40. Usando el teorema del valor intermedio, pruebe que hay al menos una raíz de la ecuación $2x^5 - 4x^3 + 3 = 0$. ¿Hay más de una raíz?

41. (a) Demuestre que la función $f(x)=|x|$ es continua en todos los reales.

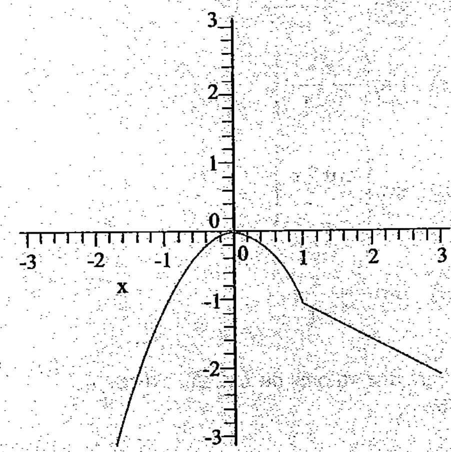
(b) Compruebe que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.

(c) ¿Es cierto el recíproco de la afirmación anterior?

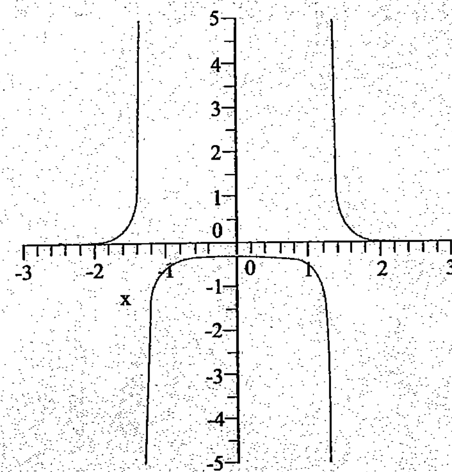
42. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00. y emprende su camino habitual a la cima de la montaña a donde llega a las 19:00. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 y llega al monasterio a las 19:00. Usando el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

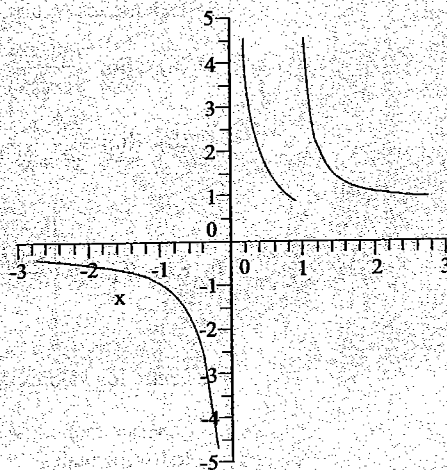
1. Considere las gráficas siguientes:

a)



b)





Sean $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ -\dfrac{1}{2}(x+1) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2-1}+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, $h(x)=\dfrac{1}{x^4}-3$,

$j(x)=\dfrac{1}{x^4-3}$ y $r(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<1 \\ e^{x-1} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

(a) Relacione cada gráfica con una de las funciones dadas. Justifique matemáticamente sus respuestas.

(b) De los gráficos anteriores diga en qué puntos la función es discontinua y qué tipo de discontinuidad se presenta.

2. Sean f y g dos funciones definidas por: $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$ y $g(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

(a) Halle la función h (x) = $(f\circ g)$ (x)

(b) ¿Para qué valores de x es continua h?

3. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

(b) $\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\tan(x-\pi)}{x^2-\pi^2}\right)$

(c) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$

4. ¿Para qué valores de $a\in IR$, existe $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(a^2-1)x^3+ax^2+1}{5x^2+2x}\right)$? Para esos valores calcule el límite.

5. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{sen(bx)}$

(b) $\lim_{x\to 0+}\frac{|x|\cdot x}{x^2+x}$

6. Sea $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} bx - x^2 \operatorname{sen} b}{ax} & \text{si} \quad 0\le x\le 1, \\ x^2+2a & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

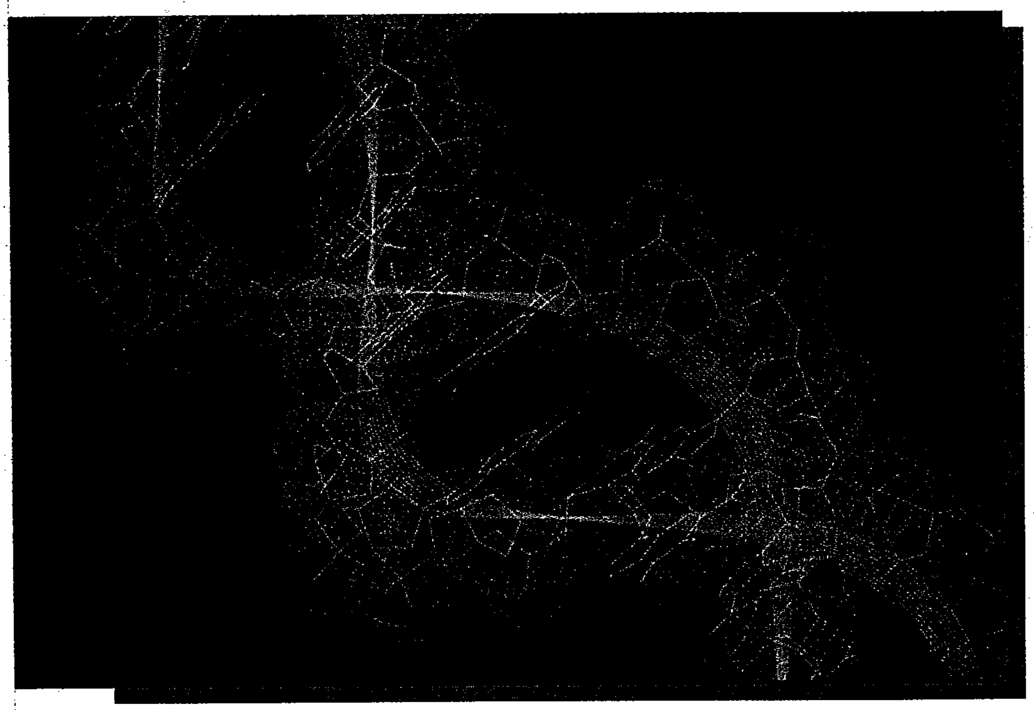
Encuentre los valores de a y b, si existen, tal que f sea continua en todos los reales.

7. ¿De qué manera se tendría que definir la función $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x^2}}}$ para que sea continua en todos los reales?

8. Estudie la continuidad de $f(x)=\frac{sen(2x)}{x^2+x}$. Indique (si los hay) los tipos de discontinuidad que presenta y repare $f(x)$ para que sea continua donde corresponda.

11

CONTEO Y PROBABILIDAD



La probabilidad es el estudio matemático del azar y los procesos aleatorios. Las leyes de la probabilidad son esenciales para comprender campos como la genética, las encuestas de opinión, los juegos de azar y muchos más.

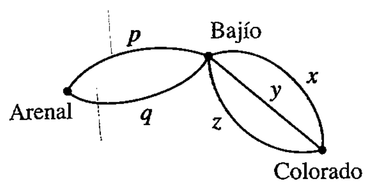
Cuando no podemos determinar qué es verdad, deberíamos apegarnos a lo que es más probable.

RENÉ DESCARTES

En muchos asuntos de matemáticas interviene el *conteo*. Por ejemplo, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar un comité de dos hombres y tres mujeres de un grupo de 35 hombres y 40 mujeres? ¿Cuántas placas de identificación distintas se pueden hacer con tres letras seguidas de tres números? ¿Cuántas manos de póquer es posible tener?

En relación muy estrecha con los asuntos del conteo están los de *probabilidad*. Examinaremos preguntas como las siguientes: si se elige un comité de cinco personas al azar, entre un grupo de 35 hombres y 40 mujeres, ¿cuáles son las posibilidades de que no haya mujeres en el comité? ¿Cuál es la posibilidad de obtener un póquer jugando a las cartas? Al estudiar la probabilidad asignaremos un significado matemático preciso a frases tales como "¿cuáles son las oportunidades de . . .?" y "¿cuál es la certeza de . . .?

11.1 PRINCIPIOS DE CONTEO



Hay tres pueblos, Arenal, Bajío y Colorado, ubicados de tal modo que dos carreteras unen a Arenal con Bajío y tres unen a Bajío con Colorado. ¿Cuántas rutas distintas puede uno tomar para ir de Arenal a Colorado pasando por Bajío? La idea clave para contestar esta pregunta es examinar el problema en etapas. Primero, de Arenal a Bajío, hay dos opciones. Para cada una de ellas, hay tres opciones en la segunda etapa, de Bajío a Colorado. Por tanto, la cantidad de rutas distintas es $2 \times 3 = 6$. Esas rutas se determinan en forma adecuada mediante un *diagrama de árbol*, como el de la figura. 1.

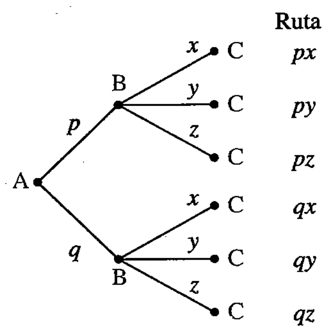


FIGURA 1
Diagrama del árbol

El método que empleamos para resolver este problema conduce al siguiente principio:

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO

Cuando dos eventos suceden uno tras otro, si el primero puede suceder en m formas y el segundo en n formas (después de haber sucedido el primero), entonces ambos pueden suceder, uno tras otro, en $m \times n$ formas distintas.

Hay una consecuencia inmediata de este principio, para cualquier cantidad de eventos: Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son eventos sucesivos, y si E_1 puede suceder en n_1 formas, E_2 en n_2 formas, etcétera, todos juntos uno tras otro pueden suceder de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ maneras distintas.

EJEMPLO 1 ■ Aplicación del principio fundamental de conteo

En una nevería se ofrecen tres tipos de barquillo y helados de 31 sabores. ¿Cuántos helados distintos se pueden comprar?

SOLUCIÓN Se deben hacer dos elecciones: el tipo de barquillo y el sabor de la nieve. En la primera etapa se escoge un tipo de barquillo, y en la segunda se escoge un sabor. Podemos imaginar que las distintas etapas son cuadros:

↑	↑
Etapa 1	Etapa 2
tipo de barquillo	sabor

El primer cuadro se llena de tres maneras, y el segundo de 31 maneras:

3	31
↑	↑
Etapa 1	Etapa 2

Así, según el principio fundamental de conteo, hay $3 \times 31 = 93$ maneras de pedir una nieve en esta nevería. ■

EJEMPLO 2 ■ Aplicación del principio fundamental del conteo

En un estado, las placas de los automóviles tienen 3 letras seguidas de 3 dígitos. ¿Cuántas placas se pueden tener si

(a) se permite repetir letras? (b) no se permite repetir letras?

SOLUCIÓN

(a) Se pueden hacer 6 elecciones, una por cada letra o por cada dígito. Como en el ejemplo anterior, trazaremos un cuadro para cada etapa:

26	26	26	10	10	10
Letras			Dígitos		

En la primera etapa se elige una letra (de 26 opciones posibles*); en la segunda, otra letra (de nuevo entre 26 opciones); en la tercera, otra letra (26 opciones); en la cuarta un dígito (de 10 opciones posibles); en la quinta, un dígito (de nuevo

*En todos los problemas *no* se consideran las letras ch, ll, y ñ.

entre 10 opciones) y en la sexta etapa, otro dígito (10 opciones). Según el principio fundamental del conteo, la cantidad de placas distintas es

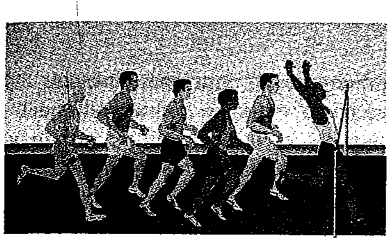
$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17{,}576{,}000$$

(b) Si no se permite repetir letras, las opciones se pueden representar como sigue:

26	25	24	10	10	10
Letras			Dígitos		

En la primera etapa tenemos 26 letras para elegir, pero una vez seleccionada la primera letra, sólo quedan 25 para elegir en la segunda etapa. Una vez elegidas las dos primeras letras, quedan 24 para la tercera etapa. Los dígitos se determinan como antes. Así, la cantidad de placas distintas posibles en este caso es

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 10 \times 10 = 15{,}600{,}000$$ ■



La notación factorial se explica algunas páginas más adelante.

Ejemplo 3 ■ Empleo de la notación factorial

¿De cuántas formas distintas puede terminar una competencia entre seis corredores? Suponga que no hay empates.

SOLUCIÓN Hay seis opciones posibles para el primer lugar, cinco para el segundo, porque después de haberse decidido el primer lugar sólo quedan cinco corredores; hay cuatro opciones para el tercer lugar, y así sucesivamente. De acuerdo con el principio fundamental de conteo, la cantidad de opciones distintas en la que puede terminar esta carrera es

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$$ ■

11.1 EJERCICIOS

1. Un señor vende helados en un carrito por las aceras. Ofrece de vainilla, chocolate, fresa y pistache, servidos en un cono sencillo, doble o triple. ¿Cuántos helados distintos se le pueden comprar?

2. ¿Cuántas "palabras" de 3 letras (cadenas de 3 letras) se pueden formar con las 26 letras del alfabeto si la repetición de letras
(a) se permite? **(b)** no se permite?

3. ¿Cuántas "palabras" de 3 letras se pueden formar con las letras *WXYZ* si la repetición de letras
(a) se permite? **(b)** no se permite?

4. En una carrera se inscriben ocho caballos.
(a) ¿Cuántos órdenes distintos es posible tener en los lugares de la carrera?
(b) ¿De cuántas formas distintas se pueden decidir los tres primeros lugares? (Suponga que no hay empates.)

5. Un examen de opción múltiple tiene cinco preguntas con cuatro opciones en cada una. ¿De cuántas formas distintas se puede contestar este examen?

6. Los números telefónicos constan de 7 dígitos; el primero de ellos no puede ser 0 ni 1. ¿Cuántos números telefónicos son posibles?

7. ¿De cuántas formas distintas puede terminar una carrera de cinco corredores? (Suponga que no hay empates.)

8. ¿De cuántas formas pueden sentarse cinco personas en una fila de cinco butacas?

9. En un restaurante se ofrecen cinco platillos principales, ocho bebidas y tres postres. ¿Cuántas comidas distintas ofrece, formadas por un platillo, una bebida y un postre?

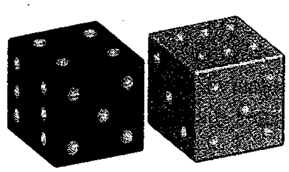
10. ¿De cuántas maneras se pueden colocar cinco libros distintos de matemáticas, en un librero?

11. Los pueblos A, B, C y D están ubicados de tal forma que hay cuatro carreteras de A a B, cinco de B a C y seis de C a D. ¿Cuántas rutas distintas hay del pueblo A al pueblo D, pasando por los pueblos B y C?

12. En una familia con cuatro hijos, ¿cuántas secuencias de nacimientos tiene la combinación hombre-mujer? Las secuencias *HHHM* y *HHMH* son distintas.

13. Se lanza una moneda cinco veces y se anota la sucesión de caras y cruces. ¿Cuántos son los posibles sucesos?

14. Se lanzan dos dados, uno rojo y otro blanco, y se anotan los números que se obtienen. ¿Cuántos resultados son posibles?



15. Se lanzan un dado rojo, uno azul y uno blanco, y se anotan los números que se obtienen. ¿Cuántos resultados son posibles?

16. De una baraja (52 naipes) se escogen dos cartas. ¿De cuántos modos se pueden escoger si
(a) la primera carta debe ser espada y la segunda debe ser corazón?
(b) ambas cartas deben ser espadas?

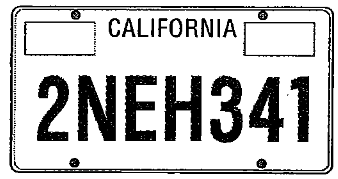
17. Una muchacha tiene cinco faldas, ocho blusas y 12 pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones distintas de falda-blusa-zapatos puede usar? Suponga que cada prenda va con las demás, por lo que se puede usar cualquier combinación.

18. La clave de identificación de un empleado está formado por una letra seguida de 3 dígitos. ¿Cuántos números distintos de identificación son posibles con este sistema?

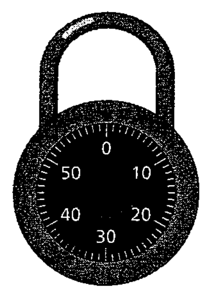
19. Una empresa tiene 2,844 empleados. A cada uno se le va a asignar una clave de identificación, formada por una letra seguida por 2 dígitos. ¿Es posible asignarle una clave distinta con este esquema? Explique por qué.

20. Un equipo de beisbol tiene un cuerpo de cinco lanzadores y tres receptores. ¿Cuántos pares lanzador-receptor puede seleccionar el entrenador de entre ellos?

21. En el estado de California, las placas de los automóviles tienen un dígito distinto de cero, seguido por 3 letras y después por 3 dígitos. ¿Cuántas placas distintas son posibles con este sistema?



22. Un candado de combinación tiene 60 posiciones distintas. Para abrirlo, se gira la rueda en sentido de las manecillas del reloj hasta llegar a un número, después en sentido contrario, y por último a un tercer número en dirección de las manecillas. Si los números sucesivos de la combinación no pueden ser iguales, ¿cuántas combinaciones distintas son posibles?



23. Un examen de verdadero-falso contiene 10 preguntas. ¿De cuántas maneras se puede contestar este examen?

24. Una agencia automotriz ofrece cinco modelos. Cada modelo se puede pedir en cuatro colores distintos, tres estéreos distintos, con o sin aire acondicionado, y con o sin quemacocos. ¿De cuántas formas distintas puede pedir un cliente su automóvil en esta agencia?

25. En el archivo de una universidad se clasifica a los alumnos de acuerdo a su área de especialidad, su área básica, por el año que cursan (1, 2, 3 o 4), y por su sexo (H, M). Cada alumno debe elegir una especialidad y un área básica, entre los 32 campos que se enseñan allí. ¿Cuántas clasificaciones distintas son posibles para un estudiante?

26. ¿Cuántos monogramas formados por 3 letras son posibles?

27. Un estado tiene ocho millones de automóviles registrados. Para simplificar el sistema de placas de identificación, un empleado estatal sugiere que cada placa sólo muestre 2 letras seguidas por 3 dígitos. ¿Se tendrán placas suficientes con este sistema, para todos los vehículos registrados?

28. Un sistema de placas de automóvil en cierto estado tiene seis lugares. Cada placa comienza con una cantidad fija de letras, y los lugares restante se llenan con dígitos. Por ejemplo, una letra seguida por 5 dígitos, 2 letras seguidas por 4 dígitos, y así sucesivamente. En el estado hay registrados 17 millones de vehículos.
(a) El estado va a cambiar a un sistema formado por una letra seguida por 5 dígitos. ¿Permitirá este sistema tener bastantes placas diferentes para ponerlas en todos los vehículos registrados?
(b) Proponga un sistema que sea suficiente, que use la cantidad mínima de letras posible.

29. ¿De cuántas maneras se pueden elegir un presidente, un vicepresidente y un secretario en una clase de 30 alumnos?

30. ¿De cuántas maneras pueden elegirse un presidente, un vicepresidente y un secretario entre una clase de 20 mujeres y 30 hombres, si el presidente debe ser mujer y el vicepresidente hombre?

31. Un subcomité del Senado está formado por 10 demócratas y siete republicanos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir un director, un subdirector y un secretario, si el director debe ser demócrata y el subdirector debe ser republicano?

32. Los números del Seguro Social están formados por nueve dígitos, y el primer dígito puede ser de 0 a 6 inclusive. ¿Cuántos números de seguro son posibles?

33. Se forman "palabras" de 5 letras, con las letras *A, B, C, D, E, F* y *G*. ¿Cuántas palabras son posibles para cada una de las siguientes condiciones?
(a) Sin condición alguna.
(b) En una palabra no se puede repetir letra alguna.
(c) Cada palabra debe comenzar con la letra *A*.
(d) La letra *C* debe estar en medio (debe ser la tercera).
(e) La tercera letra debe ser vocal.

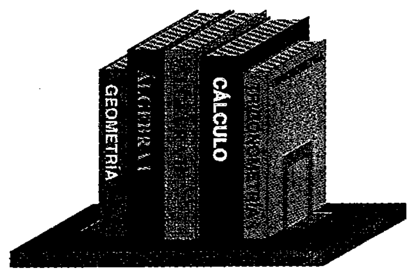
34. ¿Cuántos palindromas de 5 letras es posible formar? Un *palindroma* es una cadena de letras que se lee igual hacia delante y hacia atrás, como por ejemplo *XCZCX*.

35. Cierto lenguaje informático permite que los nombres de variables consistan de 2 caracteres, siendo el primero cualquier letra y el segundo cualquier letra o dígito. ¿Cuántos nombres de variables es posible tener?

36. ¿Cuántas palabras de código distintas, de 3 caracteres, formadas por letras o dígitos, es posible tener con los siguientes sistemas de codificación?
(a) El primer elemento debe ser una letra.
(b) El primer elemento no debe ser cero.

37. ¿De cuántas maneras se pueden sentar cuatro hombres y cuatro mujeres en una fila de ocho butacas en cada uno de los siguientes casos?
(a) Las mujeres se deben sentar juntas, y los hombres se deben sentar juntos.
(b) Se deben sentar con género alternado.

38. ¿De cuántas maneras se pueden colocar cinco libros distintos de matemáticas en un anaquel, de manera que queden juntos los dos libros de álgebra?



39. En una repisa se ponen ocho libros de matemáticas y tres de química. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar, si los libros de matemática deben estar juntos y los de química deben estar juntos?

40. Se forman números de 3 cifras con los dígitos 2, 4, 5 y 7, y se permite repetir dígitos. ¿Cuántos números se pueden formar si
(a) los números deben ser menores que 700?
(b) los números deben ser pares?
(c) los números deben ser divisibles entre 5?

41. ¿Cuántos números impares de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 4 y 6, si no se permite repetir?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

42. Pares de iniciales Explique por qué, en cualquier grupo de 677 personas, habrá cuando menos dos que tengan el mismo par de iniciales.

43. **Códigos de área** Hasta hace poco, los códigos telefónicos de área en Estados Unidos, Canadá y las islas del Caribe se determinaban con las siguientes reglas: (*i*) el primer dígito *no puede* ser 0 ni 1, y (*ii*) el segundo dígito *debe ser* 0 o 1. Pero en 1995 se abandonó la segunda regla cuando se introdujo el código de área 360 en partes del oriente de Washington. Desde entonces se han comenzado a usar muchos otros códigos de área que violan la regla (*ii*), aunque la regla (*i*) sigue vigente.

(a) ¿Cuántas combinaciones de código de área + número telefónico son posibles de acuerdo con las reglas anteriores? (Véase la descripción de los números telefónicos locales en el ejercicio 6.)

(b) ¿Cuántas combinaciones de código de área + número telefónico son posibles de acuerdo con las reglas nuevas?

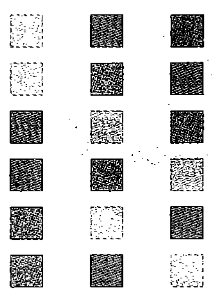
(c) ¿Por qué cree que fue necesario hacer este cambio?

11.2 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

En esta sección examinaremos dos casos especiales importantes del principio de multiplicación: las permutaciones y las combinaciones.

PERMUTACIONES

Permutaciones de tres cuadros distintos:



Una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es un ordenamiento de esos objetos. Por ejemplo, algunas de las permutaciones de las letras *ABCDWXYZ* son las siguientes:

XAYBZWCD *ZAYBCDWX* *DBWAZXYC* *YDXAWCZB*

¿Cuántas permutaciones son posibles? Como hay ocho alternativas para la primera posición, siete para la segunda (ya se ha elegido la primera), seis para la tercera (ya se eligieron las dos primeras), etcétera, de acuerdo con el principio fundamental de conteo, la cantidad de permutaciones posibles es

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40{,}320$$

Este mismo razonamiento, si se maneja n en vez de 8, conduce a la siguiente observación.

> La cantidad de permutaciones de n objetos es $n!$

¿Cuántas permutaciones formadas por 5 letras se pueden tener con esas mismas ocho letras? Algunas de esas permutaciones son

XYZWC *AZDWX* *AZXYB* *WDXZB*

De nuevo, hay ocho alternativas para la primera posición, siete para la segunda, seis para la tercera, cinco para la cuarta y cautro para la quinta. Según el principio fundamental de conteo, la cantidad de permutaciones es

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

En general, si un conjunto tiene n elementos, el número de formas de ordenar a r elementos del conjunto se representa con $P(n,r)$ y se llama **número de permutaciones de n objetos tomados de r en r.**

Acabamos de mostrar que $P(8, 5) = 6720$. Con los mismos argumentos podemos deducir una fórmula general de $P(n, r)$. En realidad, hay n objetos y r lugares para colocarlos. Por tanto hay n alternativas para la primera posición, $n - 1$ para la segunda, $n - 2$ para la tercera, y así sucesivamente. La última posición se puede llenar en $n - r + 1$ maneras. De acuerdo con el principio fundamental de conteo,

$$P(n, r) = n(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Esta fórmula se puede escribir en forma más compacta con la notación factorial:

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

PERMUTACIONES DE n OBJETOS TOMADOS DE r EN r

El número de permutaciones de n objetos tomados de r en r es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

EJEMPLO 1 ■ Cálculo del número de permutaciones

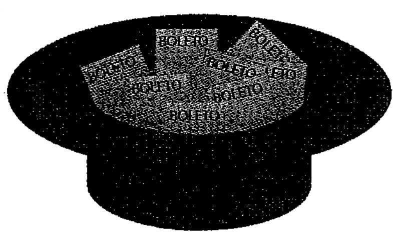
Un club tiene nueve miembros. ¿De cuántas maneras pueden elegirse un presidente, un vicepresidente y un secretario entre ellos?

SOLUCIÓN Se debe conocer el número de formas de seleccionar tres miembros *en orden* para los puestos de presidente, vicepresidente y secretario, entre los nueve miembros del club. Ese número es

$$P(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 \times = 504 \qquad ■$$

EJEMPLO 2 ■ Cálculo del número de permutaciones

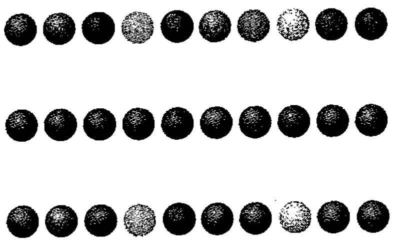
Se deben seleccionar en orden cuatro boletos de una rifa, de entre 20 que hay en un sombrero. El que tenga el primer boleto gana un automóvil, el segundo gana una motocicleta, el tercero una bicicleta y el cuarto una patineta. ¿De cuántas formas distintas se pueden ganar esos premios?



SOLUCIÓN El orden en que se sacan los boletos determina quién gana cada premio. Es decir, se necesita calcular el número de formas de seleccionar cuatro objetos *en orden* entre 20 objetos (los boletos). Ese número es

$$P(20, 4) = \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116,280 \qquad ■$$

PERMUTACIONES DISTINGUIBLES



Si hay un conjunto de 10 pelotas, cada una de un color distinto, el número de permutaciones de esas pelotas es $P(10, 10) = 10!$ Si las 10 pelotas son rojas, sólo hay una permutación distinta, porque se ven igual con todas las maneras de ordenarlas. En general, cuando se maneja un conjunto de objetos, algunos de los cuales son iguales, dos permutaciones son **distinguibles** si una de ellas no se puede obtener de la otra al intercambiar las posiciones de los elementos iguales. Por ejemplo, si hay 10 pelotas de las cuales seis son rojas y las otras cuatro son de un color distinto cada una, ¿cuántas permutaciones distinguibles son posibles? En este caso la clave es que las pelotas del mismo color no se pueden distinguir entre sí. Por consiguiente, cada reacomodo de las bolas rojas, estando fijas las demás, es esencialmente la misma permutación. Como hay 6! rearreglos de las bolas rojas para cada posición fija de las demás, la cantidad total de las permutaciones distinguibles es 10!/6! Con este argumento podemos llegar a la siguiente regla general:

PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

Si un conjunto de n objetos consiste en k tipos distintos de objetos con n_1 objetos del primer tipo, n_2 del segundo, n_3 del tercero, etcétera, siendo $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, el número de permutaciones distinguibles de esos objetos es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_k!}$$

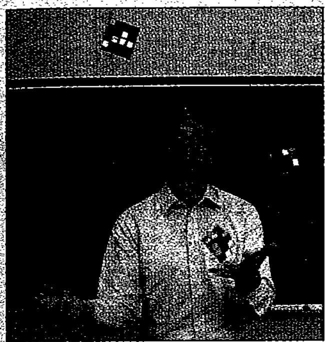
EJEMPLO 3 ■ Cálculo del número de permutaciones distinguibles

Calcule el número de formas distintas de colocar 15 pelotas en una fila, si cuatro son rojas, tres son amarillas, seis son negras y dos son azules.

SOLUCIÓN Se trata de determinar el número de permutaciones distinguibles de esas pelotas. De acuerdo con la fórmula, ese número es

$$\frac{15!}{4!\, 3!\, 6!\, 2!} = 6{,}306{,}300$$ ■

Supongamos que hay 15 bolas de madera en una fila, y cuatro colores de pintura: rojo, amarillo, negro y azul. ¿De cuántas formas distintas se pueden pintar para que haya cuatro rojas, tres amarillas, seis negras y dos azules? Con un poco de deducción veremos que es exactamente el mismo número que se calculó en el ejemplo 3. Sin embargo, esta forma de plantear el problema es algo distinta. Se trata de conocer el número de formas de **hacer una partición** de las pelotas en cuatro grupos, cada uno conteniendo 4, 3, 6 y 2, que se van a pintar, respectivamente, de rojo, amarillo, negro y azul. El siguiente ejemplo indica cómo se usa este razonamiento.



Ronald Graham nació en Taft, California, en 1935. Es considerado el principal matemático del mundo en el campo del análisis combinatorio, la rama de las matemáticas que estudia el conteo. Durante muchos años Graham fue jefe del Centro de Estudios Matemáticos de los Laboratorios Bell en Murray Hill, New Jersey. Allí resolvió muchos problemas que se le presentaron a la industria telefónica. Durante el programa *Apollo*, la NASA necesitaba evaluar programas de misión, de tal manera que los astronautas a bordo tuvieran tiempo para ejecutar todas las tareas necesarias. La cantidad de maneras de asignar esas tareas era astronómica: demasiado grande hasta para que las clasificara una computadora. Graham, con sus conocimientos del análisis combinatorio, pudo asegurar a la NASA que había formas fáciles de resolver su problema, que no se alejaban mucho de la mejor solución posible. Además de ser un matemático prolífico, Graham es consumado malabarista, y ha sido presidente de la Asociación Internacional de Malabaristas.

EJEMPLO 4 ■ Cálculo del número de patrones

Se van a asignar 14 obreros de construcción a tres tareas distintas. Se necesitan siete para mezclar el mortero, cinco para colocar ladrillos y dos para llevar los ladrillos a los colocadores. ¿De cuántas maneras distintas se pueden asignar los trabajadores a esas tareas?

SOLUCIÓN Se necesita hacer una partición de total de trabajadores en 3 grupos que contengan 7, 5 y 2 trabajadores, respectivamente. El número de formas de hacerlo es

$$\frac{14!}{7!\,5!\,2!} = 72{,}072$$

■

COMBINACIONES

Al determinar permutaciones nos interesa la cantidad de maneras de ordenar elementos de un conjunto. Sin embargo, en muchos problemas de conteo *no es* importante el orden. Por ejemplo, una mano de póquer es la misma independientemente de cómo se ordene. Un jugador de póquer que le interese el número posible de manos se interesa en saber el número de formas de sacar cinco cartas entre 52, sin considerar el orden en el que salgan las cartas de determinada mano. En esta sección deduciremos una fórmula para contar en casos como este, donde el orden no importa.

Una **combinación** de r elementos de un conjunto es cualquier subconjunto de r elementos, sin tener en cuenta su orden. Si el conjunto tiene n elementos, el número de combinaciones de r elementos se representa por $\boldsymbol{C(n, r)}$ y se llama **número de combinaciones de $\boldsymbol{n}$ elementos tomados de $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{r}$**.

Por ejemplo, veamos un conjunto con los cuatro elementos A, B, C y D. Las combinaciones de esos cuatro elementos tomados de tres en tres son

$$ABC \qquad ABD \qquad ACD \qquad BCD$$

Las permutaciones de esos elementos tomados de tres en tres son

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Vemos que el número de combinaciones es bastante menor que la de permutaciones. De hecho, cada combinación de tres elementos genera 3! permutaciones. Entonces

$$C(4, 3) = \frac{P(4, 3)}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

En general, cada combinación de r objetos da lugar a $r!$ permutaciones de ellos. Así:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

COMBINACIONES DE n OBJETOS TOMADOS DE r EN r

El número de combinaciones de n objetos tomados de r en r es

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La diferencia principal entre permutaciones y combinaciones es *el orden*. Si nos interesan arreglos ordenados, quiere decir que estamos contando permutaciones, pero si lo que nos ocupan son subconjuntos sin considerar el orden, quiere decir que estamos contando combinaciones. Compare los ejemplos 5 y 6 a continuación, donde no interesa el orden, con los ejemplos 1 y 2, donde sí importa el orden.

EJEMPLO 5 ■ Cálculo del número de combinaciones

Un club tiene nueve miembros. ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de tres entre los miembros de ese club?

SOLUCIÓN Se necesita calcular el número de formas de elegir tres miembros de los nueve. En este caso no importa el orden, porque el comité será igual sin importar cómo se ordenan sus miembros. Así, se desea conocer el número de combinaciones de nueve objetos (los miembros del club) tomados de tres en tres. Ese número es

$$C(9,3) = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84$$ ■

EJEMPLO 6 ■ Cálculo del número de combinaciones

En una rifa hay 20 boletos en un sombrero y se deben sacar cuatro al azar. Los poseedores de los boletos se van a ganar viajes gratis a las Bahamas. ¿De cuántas formas pueden salir los ganadores?

SOLUCIÓN Se debe calcular el número de formas de elegir cuatro ganadores de 20 elementos. El orden en el que se tomen los boletos no importa, porque cada uno de los ganadores obtiene el mismo premio. En consecuencia, se desea calcular el número de combinaciones de 20 objetos (los boletos) tomados de cuatro en cuatro. Esa cantidad es

$$C(20,4) = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!\,6!} = \frac{20\times 19\times 18\times 17}{4\times 3\times 2\times 1} = 4845$$ ■

Si un conjunto S tiene n elementos, entonces $C(n, k)$ es el número de formas de tomar k elementos de S, esto es, el número de subconjuntos de S que tienen k elementos. El número de subconjuntos de S que tienen todos los tamaños posibles se determina con la suma

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

EJEMPLO 7 ■ Cálculo del número de subconjuntos de un conjunto

Una pizzería ofrece la misma pizza básica de queso y un conjunto de 16 aderezos. ¿Cuántas pizzas distintas se pueden pedir en esta pizzería?

SOLUCIÓN Se necesita conocer el número posible de subconjuntos de los 16 aderezos, incluyendo al subconjunto vacío, que corresponde a una pizza sencilla de queso. Así, se pueden hacer $2^{16} = 65{,}536$ pedidos distintos de pizzas. ■

El paso principal para resolver problemas de conteo es decidir cuándo se usan las permutaciones, las combinaciones o el principio fundamental de conteo.

LINEAMIENTOS PARA USAR PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Cuando se desea calcular el número de formas de escoger r objetos de n objetos, hay que preguntarse: ¿Importa el orden?

Si el orden sí importa, se usan permutaciones.

Si el orden no importa, se usan combinaciones.

EJEMPLO 8 ■ Problema donde intervienen permutaciones y combinaciones

Una clase de 20 alumnos va a elegir un comité de siete, formado por un presidente, un vicepresidente, un secretario y cuatro vocales. ¿De cuántas formas se puede elegir ese comité?

SOLUCIÓN Para elegir los tres directivos el orden sí es importante. Por tanto, el número de formas de elegirlos es

$$P(20,3) = 6840$$

A continuación se necesitan elegir otros cuatro alumnos entre los 17 restantes. Como en este caso el orden no es importante, el número de formas de hacerlo es

$$C(17,4) = 2380$$

Por consiguiente, según el principio fundamental de conteo, el número de formas de elegir a este comité es

$$P(20,3) \times C(17,4) = 6840 \times 2380 = 16{,}279{,}200$$ ■

Podríamos escoger primero a los cuatro miembros no ordenados del comité, en $C(20,4)$ maneras, y después los tres directivos entre los 16 miembros restantes en $P(16,3)$ maneras. Compruebe que al proceder así se llega al mismo resultado.

11.2 EJERCICIOS

1-6 ■ Evalúe cada expresión

1. $P(8, 3)$ **2.** $P(9, 2)$ **3.** $P(11, 4)$

4. $P(10, 5)$ **5.** $P(100, 1)$ **6.** $P(99, 3)$

7. ¿De cuántas maneras distintas se pueden elegir un presidente, un vicepresidente y un secretario en una clase de 15 alumnos?

8. ¿De cuántas formas distintas se pueden asignar el primero, el segundo y el tercer premio de un campeonato con ocho participantes?

9. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar seis de 10 personas, en una fila de seis asientos?

10. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar seis personas en una fila de cinco butacas?

11. ¿Cuántas "palabras" de 3 letras se pueden formar con *F, G, H, I, J* y *K*? (No se permite repetir letras.)

12. ¿Cuántas permutaciones posibles hay entre las letras de la palabra AMOR?

13. ¿Cuántos enteros distintos de 3 dígitos se pueden formar con los números 1, 3, 5 y 7, si no se permite repetir números?

14. Un pianista tocará ocho piezas en un recital. ¿De cuántas formas puede ordenar esas piezas en el programa?

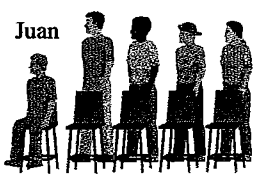
15. ¿De cuántas maneras puede acabar una carrera con nueve participantes, suponiendo que no hay empates?

16. Un barco tiene cinco banderines de señal de distintos colores. ¿Cuántas señales distintas puede mandar, izando exactamente tres banderines en su asta, en distinto orden?

17. ¿De cuántas maneras se pueden otorgar el primero, el segundo y el tercer premio de un concurso con 1,000 participantes?

18. ¿De cuántas maneras se pueden elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero en una clase de 30 alumnos?

19. ¿De cuántas maneras se pueden sentar cinco alumnos en una fila de cinco sillas, si Juan insiste en sentarse en la primera silla?



20. ¿De cuántas maneras se pueden sentar los alumnos del ejercicio 19, si Juan insiste en sentarse en la silla de en medio?

21-24 ■ Calcule la cantidad de permutaciones distinguibles de cada serie de letras

21. *AAABBC*

22. *AAABBBCCC*

23. *AABCD*

24. *ABCDDDEE*

25. ¿De cuántas maneras se puede formar una fila de dos canicas azules y cuatro rojas?

26. ¿De cuántas formas distintas se puede formar una fila de cinco canicas rojas, dos blancas y siete azules?

27. ¿De cuántas maneras se puede formar una fila con cuatro monedas de 5¢, tres de 10¢ y dos de 20¢?

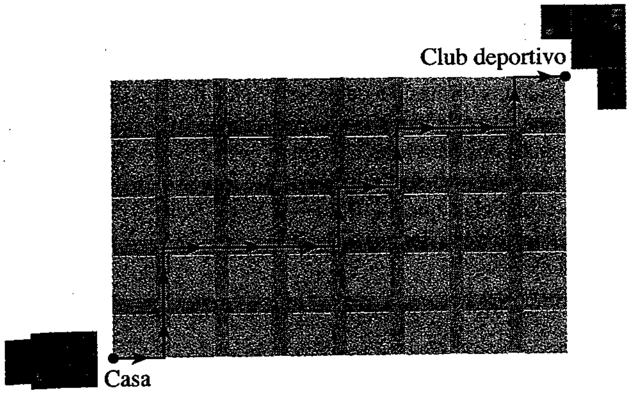
28. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar las letras de la palabra *ELEEMOSYNARY*?

29. Un señor compró tres helados de vainilla, dos de chocolate, cuatro de fresa y cinco de pistache, para sus 14 niños. ¿De cuántas maneras puede distribuir los helados entre sus niños?

30. Siete alumnos van de viaje, llegan a un hotel con tres cuartos disponibles: uno para una persona, uno para dos y uno para tres. ¿De cuántas maneras distintas pueden alojarse los alumnos en esos cuartos? (Uno va a tener que dormir en el coche.)

31. Hay ocho trabajadores limpiando una casa grande. Para limpiar las ventanas se necesitan cinco, para las alfombras se necesitan dos, y uno para el resto de la casa. ¿De cuántas formas distintas se pueden asignar tareas a los ocho trabajadores?

32. Una persona corre cada mañana hasta su club deportivo, a ocho cuadras al este y cinco al norte de su casa. Siempre toma una ruta lo más corta posible, pero le gusta variar su camino como sigue (véase la figura). ¿Cuántas rutas distintas puede recorrer? [*Sugerencia:* se puede uno imaginar la palabra *ENNEEENENEENE*, donde *E* es este, y *N* es norte.]



33-38 ■ Evalúe cada expresión

33. $C(8, 3)$ **34.** $C(9, 2)$ **35.** $C(11, 4)$

36. $C(10, 5)$ **37.** $C(100, 1)$ **38.** $C(99, 3)$

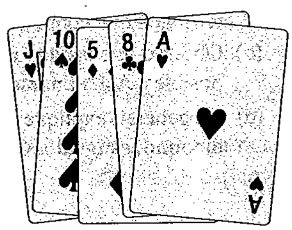
39. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres libros de un grupo de seis?

40. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres aderezos de pizza entre 12 disponibles?

41. ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres personas de un grupo de 10?

42. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de tres miembros en un club con 25 miembros?

43. ¿Cuántas manos de cinco cartas se pueden tener con un mazo de 52 cartas?



44. ¿Cuántas manos de siete cartas se pueden tener con un mazo de 52 cartas?

45. Un alumno debe contestar siete de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

46. Una pizzería vende 16 aderezos distintos para sus pizzas. ¿Cuántas pizzas de tres aderezos puede ofrecer?

47. Un violinista ha practicado 12 piezas. ¿De cuántas maneras puede escoger ocho de ellas para un recital?

48. Si una mujer tiene ocho faldas, ¿de cuántas maneras puede elegir cinco de ellas para un viaje de fin de semana?

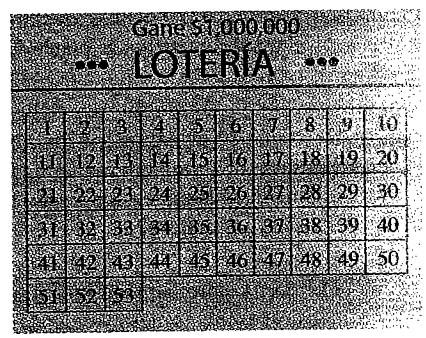
49. ¿De cuántas maneras se asignan a siete alumnos de una clase de 30, para un recorrido de campo?

50. ¿De cuántas formas se pueden escoger los siete alumnos del ejercicio 49, si Juan debe ir al recorrido de campo?

51. ¿De cuántas maneras se pueden escoger los siete alumnos del ejercicio 49, si Juan no debe ir al recorrido de campo?

52. En el juego de lotería 6/49, un participante escoge seis números del 1 al 49. ¿Cuántas opciones distintas tiene el participante?

53. En la Lotería de California, un participante escoge seis números, del 1 al 53. El boleto cuesta $1. ¿Cuánto costaría comprar todas las combinaciones posibles de seis números para asegurarse de obtener los seis números ganadores?



54. Una clase tiene 20 alumnos, de los cuales 12 son mujeres y 8 hombres. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de cinco alumnos en esta clase, con cada una de las siguientes condiciones?

(a) No hay restricción en la cantidad de hombres ni mujeres en el comité.

(b) En el comité no debe haber hombres.

(c) El comité debe estar formado por tres mujeres y dos hombres.

55. Un conjunto tiene ocho elementos.

(a) ¿Cuántos subconjuntos de cinco elementos tiene ese conjunto?

(b) ¿Cuántos subconjuntos tiene este conjunto?

56. Una agencia de viajes tiene cantidades limitadas de ocho folletos distintos acerca de Australia. Le dicen a sus clientes que tomen el que deseen, pero sólo uno de cada tipo. ¿De cuántas formas puede usted escoger folletos, incluyendo la opción de no escoger alguno?

57. Le venden hamburguesas con 10 aderezos distintos. ¿De cuántas maneras distintas puede un cliente pedir una hamburguesa?

58. Cada uno de los 20 clientes de un centro comercial puede optar por entrar a un almacén de ropa, o no entrar en él. ¿Cuántas decisiones distintas puede haber en ese grupo?

59. Entre un grupo de 10 tenistas hombres y 10 tenistas mujeres, se deben enfrentar dos hombres y dos mujeres en un encuentro de dobles de hombres contra mujeres. ¿De cuántas formas distintas se puede organizar este encuentro?

60. Un comité escolar de danza deben formarlo dos alumnos de primero, tres de segundo, cuatro de tercero y cinco de cuarto. Si para ese comité son elegibles seis de primero, ocho de segundo, 12 de tercero y 10 de cuarto, ¿de cuántas maneras se puede integrar el comité?

61. Un grupo de 22 actores aspirantes está formado por 10 hombres y 12 mujeres. Para la siguiente obra, el director debe escoger a un actor principal, una actriz principal, un actor secundario, una actriz secundaria y ocho extras: tres mujeres y cinco hombres. ¿De cuántas maneras se puede determinar el reparto?

62. Un equipo de hockey tiene 20 jugadores, de los cuales 12 son delanteros, seis defensas y dos son porteros. ¿De cuántas maneras puede formar el técnico la alineación inicial de tres delanteros, dos defensas y un portero?

63. En una pizzería se ofrecen cuatro tamaños (chica, mediana, grande y colosal), dos espesores (gruesa y delgada) y 14 aderezos. ¿Cuántas pizzas se pueden hacer con esas opciones?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

64. Combinaciones complementarias Sin efectuar cálculos, explique, en palabras, por qué el número de formas de escoger dos objetos entre 10 es igual a la cantidad de formas de escoger ocho objetos entre 10. En general, explique por qué $C(n, r) = C(n, n - r)$.

65. Identidad donde intervienen combinaciones Juan tiene 10 canicas distintas, y quiere dar tres a Lucas y dos a Marcos. ¿De cuántas formas puede hacerlo? Hay dos maneras de analizar este problema: primero podría escoger tres para Lucas y después dos para Marcos, o bien, primero escoger las dos de Marcos y después las tres de Lucas. Cómo se explica, con esas estrategias, que $C(10, 3) \cdot C(7,2) = C(10, 2) \cdot C(8, 3)$. En general, describa por qué

$$C(n, r) \cdot C(n - r, k) = C(n, k) \cdot C(n - k, r)$$

66. ¿Por qué $\binom{n}{r}$ es igual que $C(n, r)$? En este ejercicio se explicará por qué los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$ que aparecen en el desarrollo de $(x + y)^n$ son iguales a $C(n, r)$, el número de formas de tomar r objetos entre n objetos. Primero vemos que al desarrollar un binomio aplicando sólo la propiedad distributiva se obtiene

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x + y)(x + y)\\ &= (x + y)x + (x + y)y\\ &= xx + xy + yx + yy\\ (x + y)^3 &= (x + y)(xx + xy + yx + yy)\\ &= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx\\ &\quad + yxy + yyx + yyy\end{aligned}$$

(a) Desarrolle $(x + y)^5$ aplicando sólo la propiedad distributiva.

(b) Escriba juntos todos los términos en x^2y^3. Son todos los términos que contienen dos x y tres y.

(c) Observe que las dos x aparecen en todas las posiciones posibles. Así, el número de términos en x^2y^3 es $C(5, 2)$.

(d) En general, explique por qué $\binom{n}{r}$ en el teorema del binomio, es igual a $C(n, r)$.

11.3 PROBABILIDAD

Si lanza un par de dados, ¿qué probabilidades tiene de obtener el doble seis? ¿Cuál es la propabilidad de ganar en una lotería? Se inventó el tema de la probabilidad para obtener respuestas precisas a preguntas como éstas. Hoy es una herramienta indispensable en la toma de decisiones, en campos tan diversos como son administración, ma-

La teoría matemática de las probabilidades se inició en 1654, en una serie de cartas entre Pascal y Fermat. Su correspondencia se debió a una pregunta del Caballero de Méré, jugador empedernido. Al caballero le interesaba determinar la distribución equitativa de las apuestas de un juego de azar interrumpido.

nufactura, psicología, genética y en muchas ciencias más. Con la probabilidad se determina la eficacia de nuevas medicinas, se evalúa un precio equitativo para una aseguradora, se determina la probabilidad que tiene un candidato de ganar la elección, se evalúa la opinión de muchas personas sobre cierto tema, sin entrevistar a todos, y se contestan muchas preguntas más donde interviene medir la incertidumbre.

Para describir la probabilidad comenzaremos definiendo algunos términos. Un **experimento** es un proceso, como puede ser arrojar una moneda o un dado, con el que se obtienen **resultados** definidos. En el caso de tirar una moneda, los resultados posibles son "cara" "cruz"; cuando se tira un dado, un resultado posibles es 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El **espacio de muestreo** o **espacio muestral** de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles. Si se representa "cara" por H y "cruz" por T, el espacio muestral del experimento de arrojar una moneda es

$$S = \{H, T\}$$

El espacio muestral cuando se tira un dado es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sólo nos ocuparemos de experimentos en los que todos los resultados sean "igualmente probables." Ya tenemos una idea intuitiva de lo que ello significa. Cuando se arroja una moneda perfectamente equilibrada, los resultados cara y cruz son igualmente probables, en el sentido que si se repite muchas veces el experimento, cabe esperar que una mitad de los resultados sean caras, y la otra cruces.

En cualquier experimento es frecuente que sólo interese un conjunto de resultados. Nos podría interesar obtener un número par al tirar un dado, o sacar un as de un mazo de cartas. Cualquier conjunto particular de resultados es un subconjunto del espacio muestral. Esto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE UN EVENTO

Si S es el espacio muestral de un experimento, un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

EJEMPLO 1 ■ Eventos en un espacio muestral

Si un experimento consiste en tirar tres veces una moneda y anotar los resultados en orden, el espacio muestral es

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

El evento E que consiste en sacar "exactamente dos caras" es el subconjunto de S formado por todos los resultados con dos caras. Así,

$$E = \{HHT, HTH, THH\}$$

El evento F que consiste en sacar "cuando menos dos caras" es

$$F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

y el evento que consiste en "no sacar caras" es $G = \{TTT\}$. ■

Ya podemos definir la noción de probabilidad. En forma intuitiva, sabemos que al tirar un dado se obtendrá cualquiera de seis resultados igualmente probables, por lo que la probabilidad de determinado resultado particular es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par? De los seis resultados igualmente probables, tres son números pares. Así, es razonable decir que la probabilidad de sacar un número par es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Este razonamiento es la base intuitiva de la siguiente definición de la probabilidad.

Persi Diaconis nació en Nueva York en 1945, y en la actualidad es profesor de estadística en la Universidad Stanford, California. Como provenía de una familia de músicos, estudió violín hasta los 14 años. A esa edad dejó su casa y se hizo mago (aprendiz y maestro) durante 10 años. Todavía la magia es su gran amor, y si hubiera algún grado de magia, con seguridad calificaría. Su interés en los trucos con cartas lo condujo a estudiar la probabilidad y la estadística. Hoy es uno de los principales estadísticos del mundo. Con estos antecedentes se acerca a las matemáticas con innegable elegancia. Dice "la estadística es la física de los números. Parece que los números surgen al mundo en una forma ordenada. Cuando examinamos el mundo, aparecen una y otra vez las mismas regularidades". Entre sus abundantes contribuciones a las matemáticas, se encuentra un estudio probabilista de barajar perfecto las cartas.

DEFINICIÓN DE LA PROBABILIDAD

Sea S el espacio muestral de un experimento, y sea E un evento. La probabilidad de E se representa por $P(E)$ y es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{número de elementos en } E}{\text{número de elementos en } S}$$

Vemos que $0 \leqslant n(E) \leqslant n(S)$, por lo que la probabilidad $P(E)$ de un evento es un número entre 0 y 1, esto es,

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

Mientras más se aproxima a 1 la probabilidad de un evento, es más probable que suceda; cuanto más se acerque a 0, es menos probable que suceda. Si $P(E) = 1$, se dice que E es un **evento seguro**, y si $P(E) = 0$, se dice que E es un **evento imposible**.

EJEMPLO 2 ■ Cálculo de la probabilidad de un evento

Se arroja tres veces una moneda, y se anotan los resultados. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente dos caras? ¿Cuándo menos dos caras? ¿No sacar caras?

SOLUCIÓN De acuerdo con los resultados del ejemplo 1, el espacio muestral S de este experimento contiene ocho resultados, y el evento E de obtener "exactamente dos caras" contiene tres resultados, $\{HHT, HTH, THH\}$ y entonces, según la definición de probabilidad:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

De manera parecida, el evento F de sacar "cuando menos dos caras" tiene cuatro resultados, $\{HHH, HHT, HTH, THH\}$, por lo que

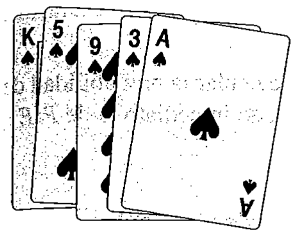
$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

El evento G, de "no sacar caras" tiene un elemento, así que

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$ ■

Para determinar la probabilidad de un evento no necesitamos hacer una lista de todos los elementos del espacio muestral y del evento. Todo lo que se necesita es *el número* de elementos que tienen esos conjuntos. Para ello son muy útiles las técnicas de conteo que aprendimos en las secciones anteriores.

EJEMPLO 3 ■ Cálculo de la probabilidad de un evento



Se saca una mano de cinco cartas de póquer, de un mazo normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco cartas sean espadas?

SOLUCIÓN En este caso, el experimento consiste en escoger cinco cartas de la baraja, y el espacio muestral S consiste en todas las manos posibles de cinco cartas. Por consiguiente, el número de elementos en el espacio muestral es

$$n(S) = C(52,5) = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2{,}598{,}960$$

El evento E que nos interesa consiste en escoger cinco espadas. Como la baraja sólo contiene 13 espadas, el número de formas de sacar cinco espadas es

$$n(E) = C(13,5) = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287$$

Por consiguiente, la probabilidad de sacar cinco espadas es

La tradición es escribir las probabilidades sin cero a la izquierda del punto decimal.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1287}{2{,}598{,}960} \approx .0005$$ ■

¿Qué nos dice la respuesta del ejemplo 3? Como $.0005 = \frac{1}{2{,}000}$, quiere decir que si alguien juega póquer muchas, muchas veces, en promedio tendrá una mano formada sólo por espadas, una vez cada 2,000 manos.

EJEMPLO 4 ■ Cálculo de la probabilidad de un evento

Una bolsa contiene 20 pelotas de tenis, de las cuales cuatro son defectuosas. Si se sacan al azar dos pelotas de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean defectuosas?

SOLUCIÓN El experimento consiste en escoger dos pelotas entre 20, por lo que la cantidad de elementos en el espacio muestral S es $C(20, 2)$. Ya que hay cuatro pelotas defectuosas, la cantidad de maneras de escoger dos pelotas defectuosas es $C(4, 2)$. Así, la probabilidad del evento E de sacar dos pelotas defectuosas es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(4,2)}{C(20,2)} = \frac{6}{190} \approx .032$$ ■

El **complemento** de un evento E es el conjunto de resultados, en el espacio muestral, que no están en E. Al complemento de un evento E los representaremos con E'. Podemos calcular la probabilidad de E', mediante la definición y aprovechando que $n(E') = n(S) - n(E)$:

$$P(E') = \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{n(S) - n(E)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} - \frac{n(E)}{n(S)} = 1 - P(E)$$

PROBABILIDAD DEL COMPLEMENTO DE UN EVENTO

Sea S el espacio muestral de un experimento, y sea E un evento. Entonces

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Es un resultado muy útil, porque con frecuencia es difícil calcular la probabilidad de un evento E, pero es fácil calcular la de E', y a partir de ella, de inmediato la de $P(E)$, aplicando esa fórmula.

EJEMPLO 5 ■ Cálculo de la probabilidad del complemento de un evento

Una urna contiene 10 bolas negras y 15 bolas blancas. De ella se sacan seis bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando menos una bola sea negra?

SOLUCIÓN Sea E el evento de sacar cuando menos una bola negra. Es tedioso contar todas las maneras posibles en las que una o más de las bolas sacadas es roja. Por consiguiente, examinemos a E', el complemento de este evento, que es que ninguna de las bolas sacadas es negra. La cantidad de formas de sacar seis bolas blancas entre las 15 que hay es $C(15, 6)$; la cantidad de formas de sacar seis bolas de las 25 que hay es $C(25, 6)$. Entonces

$$P(E') = \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{C(15,6)}{C(25,6)} = \frac{5005}{177,100} = \frac{13}{460}$$

Ya que

$$P(E') = 1 - P(E)$$

entonces

$$P(E) = 1 - P(E')$$

De acuerdo con la fórmula del complemento de un evento,

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{13}{460} = \frac{447}{460} \approx .97$$ ■

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Dos eventos que no tienen resultados en común se llaman **mutuamente excluyentes** (véase la figura 1). Por ejemplo, al sacar una carta de una baraja, los eventos

E: La carta es un as

F: La carta es una reina

son mutuamente excluyentes, porque una carta no puede ser as y reina al mismo tiempo.

Si E y F son eventos mutuamente excluyentes, ¿cuál es la probabilidad de que suceda E o F? La palabra *o* indica que se desea conocer la probabilidad de la *unión* de esos eventos, esto es, $E \cup F$. Como E y F no tienen elemento alguno en común,

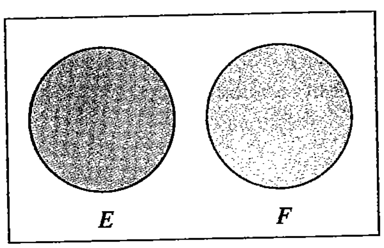


FIGURA 1

$$n(E \cup F) = n(E) + n(F)$$

Así,

$$P(E \cup F) = \frac{n(E \cup F)}{n(S)} = \frac{n(E) + n(F)}{n(S)} = \frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(F)}{n(S)} = P(E) + P(F)$$

Hemos demostrado la fórmula siguiente.

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Si E y F son eventos mutuamente excluyentes en un espacio muestral S, la probabilidad de E *o de* F es

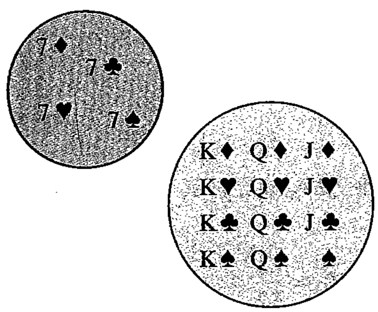
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Hay una extensión natural de esta fórmula para cualquier número de eventos mutuamente excluyentes: Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$$

EJEMPLO 6 ■ Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Se saca una carta al azar, de un mazo normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea siete o una figura?



SOLUCIÓN Sean E y F los siguientes eventos:

E: La carta es un siete

F: La carta es una figura

Como una carta no puede ser a la vez un siete y una figura, los eventos son mutuamente excluyentes. Se desea conocer la probabilidad de tener E *o* F; en otras palabras, la probabilidad de $E \cup F$. Según la fórmula,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{4}{52} + \frac{12}{52} = \frac{4}{13}$$

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE DOS EVENTOS

Si dos eventos E y F no son mutuamente excluyentes, entonces comparten resultados. El caso se describe en la figura 2. El traslape de los dos conjuntos es su intersección, esto es, $E \cap F$. De nuevo, nos interesa el evento E *o bien* F, por lo que debemos contar los elementos en $E \cup F$. Si sumáramos simplemente los elementos en E y los elementos en F, estaríamos contando dos veces los elementos en el traslape: una vez cuando contamos E y otra cuando contamos F. Por consiguiente, para llegar al total correcto, debemos restar la cantidad de elementos en $E \cap F$. Así,

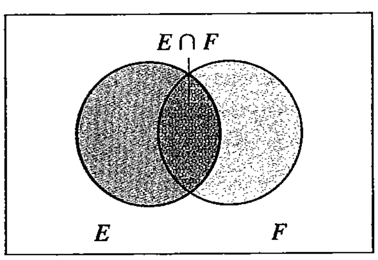


FIGURA 2

$$n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$$

Al aplicar la fórmula para calcular la probabilidad, obtenemos

$$P(E \cup F) = \frac{n(E \cup F)}{n(S)} = \frac{n(E) + n(F) - n(E \cap F)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(F)}{n(S)} - \frac{n(E \cap F)}{n(S)}$$

$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Hemos demostrado lo siguiente:

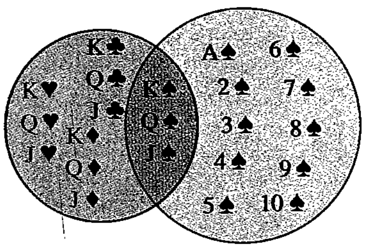
PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE DOS EVENTOS

Si E y F son eventos en un espacio muestral S, la probabilidad de E *o* de F es

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

EJEMPLO 7 ■ Probabilidad de la unión de eventos

¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta, al azar, de un mazo normal de 52 cartas, y que sea una figura o bien una espada?



SOLUCIÓN Si representamos por E y F a los siguientes eventos:

E: La carta es una figura

F: La carta es una espada.

Hay 12 figuras y 13 espadas en una baraja normal de 52 cartas, y así

$$P(E) = \frac{12}{52} \qquad \text{y} \qquad P(F) = \frac{13}{52}$$

Como hay tres cartas que son figuras y espadas a la vez,

$$P(E \cap F) = \frac{3}{52}$$

Así, de acuerdo con la fórmula de la probabilidad de unión de dos eventos:

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} = \frac{11}{26} \end{aligned}$$

■

INTERSECCIÓN DE EVENTOS INDEPENDIENTES

Hemos examinado la probabilidad de eventos unidos por la palabra *o*, esto es, la unión de eventos. Ahora estudiaremos la probabilidad de eventos unidos por la palabra *y*; en otras palabras, la intersección de eventos.

Cuando la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de otro, se dice que esos eventos son **independientes**. Por ejemplo, si se arroja una moneda equilibrada, la probabilidad de que salga cara en el segundo volado es $\frac{1}{2}$, independientemente del resultado del primer volado. Es así que dos volados cualquiera con una moneda son independientes.

PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE EVENTOS INDEPENDIENTES

Si E y F son eventos independientes en un espacio muestral S, entonces

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

EJEMPLO 8 ■ Probabilidad de eventos independientes

Un frasco contiene cinco bolas rojas y cuatro bolas negras. Se saca al azar una bola y a continuación se reemplaza; después se saca otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?

SOLUCIÓN Los eventos son independientes. La probabilidad de que la primera bola sea roja es $\frac{5}{9}$. La probabilidad de que la segunda sea roja, también es $\frac{5}{9}$. Por consiguiente, la probabilidad de que las dos bolas sean rojas es

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{81} \approx .31$$ ■

EJEMPLO 9 ■ El problema del cumpleaños

¿Cuál es la probabilidad de que, en una clase con 35 alumnos, cuando menos dos tengan la misma fecha de cumpleaños?

SOLUCIÓN Es razonable suponer que los 35 nacimientos fueron independientes, y que cada día de los 365 del año tiene la misma probabilidad de ser fecha de nacimiento. No tendremos en cuenta el 29 de febrero.

Sea E el evento de que dos de los alumnos tengan la misma fecha de cumpleaños. Es tedioso hacer una lista de todas las formas posibles en las que al menos dos de los alumnos coincidan en su fecha de cumpleaños. Por tanto, examinaremos el evento complementario E, esto es, que *no hay* dos alumnos que tengan la misma fecha de cumpleaños. Para calcular esta probabilidad, examinamos los alumnos uno por uno. La probabilidad de que el primer alumno tenga fecha de nacimiento es 1, la de que la del segundo sea distinta fecha de la del primero es $\frac{364}{365}$, la de que la del tercero sea distinta de las dos primeras es $\frac{363}{365}$, y así sucesivamente. Entonces

$$P(E') = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{331}{365} \approx .186$$

Por consiguiente $\qquad P(E) = 1 - P(E') \approx 1 - .186 = .814$ ■

Número de personas en un grupo	Probabilidad de que haya cuando menos dos que tengan la misma fecha de cumpleaños
5	.02714
10	.11695
15	.25290
20	.41144
22	.47569
23	.50730
24	.53834
25	.56870
30	.70631
35	.81438
40	.89123
50	.97037

La mayoría de las personas consideran sorprendente que la probabilidad del ejemplo 9 sea tan alta. Por este motivo, a este problema se le llama a veces la "paradoja del cumpleaños". La tabla en el margen muestra las probabilidades de que dos personas en un grupo tengan la misma fecha de cumpleaños, para grupos de varios tamaños.

11.3 EJERCICIOS

1. En un experimento se arroja una moneda dos veces.
   (a) Describa el espacio muestral.
   (b) Calcule la probabilidad de sacar cara las dos veces.
   (c) Calcule la probabilidad de sacar cara cuando menos una vez.
   (d) Calcule la probabilidad de sacar cara exactamente una vez.

2. Un experimento consiste en arrojar una moneda y lanzar un dado.
   (a) Describa el espacio muestral.
   (b) Calcule la probabilidad de sacar cara y un número par.
   (c) Calcule la probabilidad de sacar cara y un número mayor que 4.
   (d) Calcule la probabilidad de sacar cruz y un número impar.

3-4 ■ Se tira un dado. Calcule la probabilidad del evento que se describe.

3. (a) El número obtenido es 6.
   (b) El número obtenido es par.
   (c) El número obtenido es mayor que 5.

4. (a) El número obtenido es 2 o 3.
   (b) El número obtenido es impar.
   (c) El número obtenido es divisible entre 3.

5-6 ■ Se saca una carta al azar, de una baraja normal de 52 cartas. Calcule la probabilidad del evento que se describe.

5. (a) La carta es un rey.
   (b) La carta es una figura.
   (c) La carta no es una figura.

6. (a) La carta es un corazón.
   (b) La carta es un corazón o una espada.
   (c) La carta es un corazón, un diamante o una espada.

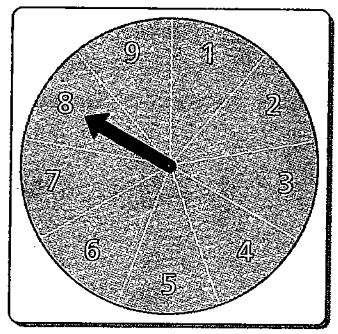
7-8 ■ Se saca una bola al azar de un frasco que contiene cinco bolas rojas, dos blancas y una amarilla. Calcule la probabilidad de cada evento.

7. (a) Se saca una bola roja.
   (b) La bola que se saca no es amarilla.
   (c) La bola que se saca es negra.

8. (a) Se saca una bola que no es blanca ni amarilla.
   (b) Se saca una bola roja, blanca o amarilla.
   (c) La bola que se saca no es blanca.

9. Un cajón contiene un conjunto desordenado de 18 calcetines, de los que tres pares son rojos, dos pares son blancos y cuatro pares son negros.
   (a) Si se saca del cajón un calcetín, al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea rojo?
   (b) Una vez que se saca el calcetín y se determina que es rojo, ¿cuál es la probabilidad de sacar otro calcetín rojo para formar un par rojo?

10. Un juego infantil tiene una flecha giratoria, como se ve en la figura. Calcule la probabilidad de cada evento.
   (a) Que la flecha se detenga en un número par.
   (b) Que la flecha se detenga en un número impar, o que sea mayor que 3.



11. Se toma al azar una letra de la palabra *EXTRATERRESTRE*. Calcule la probabilidad de cada evento.
   (a) Tomar la letra T.
   (b) Tomar una vocal.
   (c) Tomar una consonante.

12-15 ■ Una mano de póquer, formada por cinco cartas, se toma de una baraja con 52 cartas. Calcule la probabilidad de que la mano sea de las cartas mencionadas.

12. Cinco corazones.

13. Cinco cartas del mismo palo.

14. Cinco figuras.

15. Un as, un rey, una reina, una sota y un 10, todas del mismo palo (corrida y flor imperial).

16. Se tiran dos dados, y se observan los números que salen.
   (a) Haga una lista del espacio muestral para este experimento.
   (b) Calcule la probabilidad de obtener una suma de 7.

(c) Calcule la probabilidad de obtener una suma de 9.
(d) Calcule la probabilidad de que en los dos dados salga el mismo número.
(e) Calcule la probabilidad de que en los dos dados salgan números distintos.
(f) Calcule la probabilidad de obtener una suma de 9 o mayor.

17. Una pareja planea tener cuatro hijos. Suponga que es igualmente probable tener un niño o una niña.
(a) Haga una lista del espacio muestral para este experimento.
(b) Calcule la probabilidad de que la pareja sólo tenga niños.
(c) Calcule la probabilidad de que la pareja tenga dos niños y dos niñas.
(d) Calcule la probabilidad de que la pareja tenga cuatro hijos del mismo sexo.
(e) Calcule la probabilidad de que la pareja tenga cuando menos dos niñas.

18. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de 13 cartas sean del mismo palo?

19. Una ruleta americana tiene 38 ranuras: dos tienen los números 0 y 00, y las demás están numeradas del 1 al 36. Calcule la probabilidad de que la bola llegue a una ranura de número impar.

20. Un niño tiene cubos de madera con las letras *C, E, F, H, N* y *R*. Calcule la probabilidad de que ordene los cubos en el orden indicado.
(a) Formando la palabra *FRENCH*.
(b) En orden alfabético.

21. En el juego de lotería de seis números de 49, un participante escoge seis números del 1 al 49. ¿Cuál es la probabilidad de escoger los seis números ganadores?

22. El presidente de una gran empresa selecciona a seis empleados que van a recibir un bono especial. Dice que se escogerán al azar, entre los 30 empleados, de los cuales 19 son mujeres y 11 son hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna mujer sea elegida?

23. Un examen tiene 10 preguntas de verdadero-falso. Un alumno que no ha estudiado las contesta todas al azar. Calcule la probabilidad de que el alumno conteste bien la siguiente cantidad de preguntas.
(a) Las 10 preguntas.
(b) Exactamente siete preguntas.

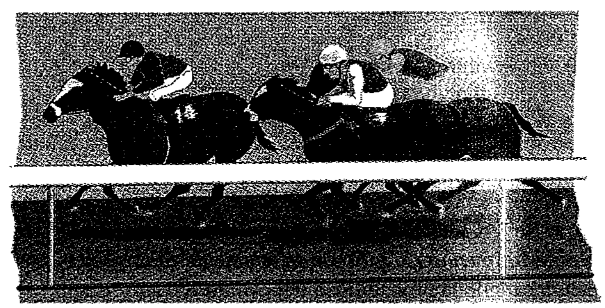
24. Para controlar la calidad de sus productos, la empresa Foco Brillante inspecciona tres unidades de cada lote de 10 fabricados. Si se encuentra un foco defectuoso, se desecha el lote. Suponga que un lote contiene dos focos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el lote?

25. Un ejemplo muy común de un evento con probabilidad extremadamente baja, es que un mono escriba a máquina la obra *Hamlet* de Shakespeare al golpear al azar las teclas. Suponga que la máquina de escribir tiene 48 teclas, incluyendo la barra espaciadora, y que el mono oprime cualquiera de ellas con igual probabilidad.
(a) Calcule la probabilidad de que el mono teclee en forma correcta tan sólo el título en su primera palabra.
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el mono teclee la frase "To be or not to be" como sus primeras palabras?

26. Se enseña a un mono ordenar cubos de madera en línea recta. A continuación se le dan seis bloques con las letras *A, E, H, L, M* y *T*. ¿Cuál es la probabilidad de que los arregle y muestren la palabra *HAMLET*?

27. Se enseña a un mono a ordenar cubos de madera en línea recta. A continuación se le dan 11 cubos con las letras *A, B, B, I, I, L, O, P, R, T* y *Y*. ¿Cuál es la probabilidad de que el mono arregle los cubos formando la palabra *PROBABILITY?*

28. Se inscriben ocho caballos en una carrera. Usted pronostica determinado orden en que llegarán a la meta. ¿Qué probabilidad hay de que su pronóstico sea certero?



29. Muchos rasgos genéticos son controlados por dos genes, uno dominante y uno recesivo. En los experimentos originales de Gregorio Mendel con guisantes, los genes que controlan la altura de la planta se representan por A (alto) y por a (bajo). El gen A es dominante, por lo que una planta con el genotipo (composición genética) AA o Aa es alta, mientras que la del genotipo aa es baja. Mediante un análisis estadístico con los descendientes, en sus experimentos, Mendel llegó a la conclusión que los descendientes heredan un gen de cada progenitor, y que es igualmente probable cada combinación posible de los dos genes. Si cada progenitor tiene el genotipo Aa, entonces la siguiente tabla muestra los genotipos posibles de la descendencia.

		Progenitor 2	
		A	**a**
Progenitor 1	**A**	AA	Aa
	a	Aa	aa

Calcule la probabilidad de que determinado descendiente de esos progenitores sea (a) alto o (b) bajo.

30. Vea el ejercicio 29. Haga una tabla de los genotipos posibles del descendiente si un padre tiene el genotipo Aa y el otro aa. Calcule la probabilidad de que determinado descendiente sea (a) alto, o (b) bajo.

31-32 ■ Determine si los eventos E y F del experimento dado son mutuamente excluyentes.

31. El experimento consiste en seleccionar una persona al azar.
(a) E: La persona es hombre.
F: La persona es mujer.
(b) E: La persona es alta.
F: La persona es rubia.

32. El experimento consiste en elegir al azar un alumno de su clase.
(a) E: El alumno es mujer.
F: El alumno usa lentes.
(b) E: El alumno tiene el cabello largo.
F: El alumno es hombre.

33-34 ■ Se lanza un dado y se observa el número que sale. Determine si los eventos E y F son mutuamente excluyentes. A continuación calcule la probabilidad del evento $E \cup F$.

33. (a) E: El número es par
F: El número es impar.
(b) E: El número es par
F: El número es mayor que 4.

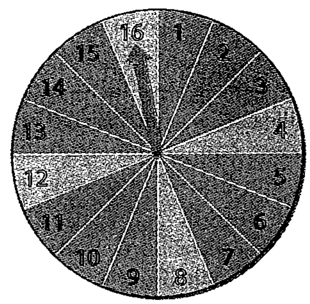
34. (a) E: El número es mayor que 3.
F: El número es menor que 5.
(b) E: El número es divisible entre 3.
F: El número es menor que 3.

35-36 ■ Se toma una carta al azar de un mazo normal de 52 cartas. Determine si los eventos son mutuamente excluyentes. A continuación calcule la probabilidad del evento $E \cup F$.

35. (a) E: La carta es una figura.
F: La carta es una espada.
(b) E: La carta es un corazón.
F: La carta es una espada.

36. (a) E: La carta es un trébol.
F: La carta es un rey.
(a) E: La carta es un as.
F: La carta es una espada.

37-38 ■ Vea la flecha giratoria de la figura. Calcule la probabilidad de cada evento.



37. (a) La flecha se detiene en azul.
(b) La flecha se detiene en un número par.
(c) La flecha se detiene en azul o en un número par.

38. (a) La flecha se detiene en rosa.
(b) La flecha se detiene en un número impar.
(c) La flecha se detiene en rosa o en un número impar.

39. Una ruleta americana tiene 38 ranuras: dos de ellas tienen los números 0 y 00, y el resto se numera del 1 al 36. Calcule la probabilidad de que la bola se detenga en una ranura impar, o en una que tenga un número mayor que 31.

40. Se adiestra a un mono para que ordene cubos de madera en línea recta. A continuación se le dan bloques con las letras *A*, *E*, *H*, *L*, *M* y *T*. ¿Cuál es la probabilidad de que los arregle para que forme una de las palabras *HAMLET* o *THELMA*?

41. Se elige un comité de cinco personas, al azar, de un grupo de seis hombres y ocho mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté formado sólo por hombres o sólo por mujeres?

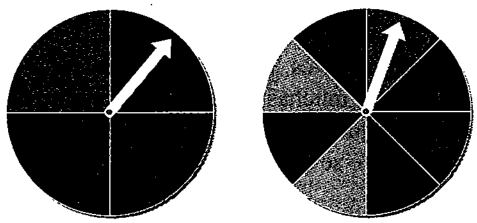
42. En la lotería 6/49, un participante selecciona seis números del 1 al 49. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione cuando menos cinco de los seis números ganadores?

43. Un frasco contiene seis canicas rojas, numeradas del 1 al 6, y 10 canicas azules, numeradas del 1 al 10. Del frasco se saca una canica al azar. Calcule la probabilidad de que suceda cada evento.
(a) Que la canica sea roja.
(b) Que la canica tenga número impar.
(c) Que la canica sea roja o impar.
(d) Que la canica sea azul o par.

44. Se arroja dos veces una moneda. Sea E el evento "la primera vez sale cara" y F el evento "la segunda vez sale cara."
(a) ¿Son independientes los eventos E y F?
(b) Calcule la probabilidad de que salga cara las dos veces.

45. Se tira dos veces un dado. Sea E el evento "la primera vez sale 6" y F el evento "la segunda vez sale 6".
(a) ¿Son independientes los eventos E y F?
(b) Calcule la probabilidad de que salga 6 en las dos tiradas.

46-47 ■ Las flechas giratorias A y B de la figura se ponen a girar al mismo tiempo.



Flecha A Flecha B

46. (a) ¿Son independientes los eventos "la flecha A se detiene en la zona rosa" y "la flecha B se detiene en la amarilla?
(b) Calcule la probabilidad de que la flecha A se detenga en la zona rosa, y la flecha B se detenga en zona amarilla.

47. (a) Calcule la probabilidad de que ambas flechas se detengan en la zona morada.
(b) Calcule la probabilidad de que ambas flechas se detengan en la zona azul.

48. Se tira dos veces un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga uno en ambas tiradas?

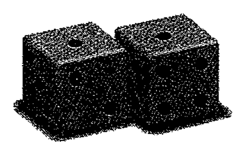
49. Se tira dos veces un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga uno en la primera tirada, y que salga un número par en la segunda?

50. Se saca una carta de una baraja, se repone, y a continuación se saca una segunda carta.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean ases?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea as y la segunda una espada?

51. Una rueda de ruleta tiene 38 ranuras: dos de ellas tienen los números 0 y 00, y el resto los números del 1 al 36. Un jugador coloca una apuesta a un número que está entre 1 y 36, y gana si una canica arrojada a la ruleta al dar vueltas se detiene en la ranura del número que aportó. Calcule la probabilidad de ganar en dos tiradas sucesivas de la ruleta.

52. Un investigador dice que ha logrado enseñar a un mono a deletrear la palabra *MONKEY* con cinco cubos de madera con las letras E, O, K, M, N y Y. Si en realidad el mono no ha aprendido nada, y tan sólo se concreta a formar los cubos en línea, ¿cuál es la probabilidad de que forme la palabra bien tres veces consecutivas?

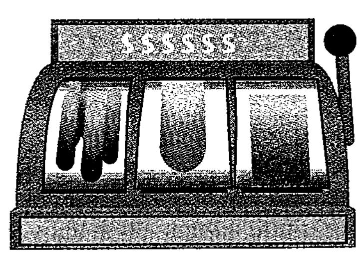
53. ¿Cuál es la probabilidad de sacar "ojos de víbora" (doble uno) tres veces consecutivas con un par de dados?



54. En la lotería 6/49, un participante selecciona seis números del 1 al 49, y gana si selecciona los seis números ganadores. ¿Cuál es la probabilidad de ganar la lotería dos veces seguidas?

55. El frasco A contiene tres bolas rojas y cuatro bolas blancas. El frasco B contiene cinco bolas rojas y dos bolas blancas. ¿Cuál de las siguientes maneras de seleccionar bolas al azar da la máxima probabilidad de sacar dos bolas rojas?
(i) Sacar dos bolas del frasco B.
(ii) Sacar una bola de cada frasco.
(iii) Poner todas las bolas en un frasco y a continuación sacar dos bolas.

56. Una máquina de apuestas tiene tres ruedas. Cada rueda tiene 11 posiciones: un guión y los dígitos 0, 1, 2, . . ., 9. Cuando se tira de la palanca, las tres ruedas giran en forma indepen-



diente y luego se detienen. Calcule la probabilidad de que las ruedas se detengan en las siguientes posiciones.

(a) Tres guiones.

(b) El mismo número en cada rueda.

(c) Al menos un guión.

57. Calcule la probabilidad de que en un grupo de ocho alumnos haya al menos dos con la misma fecha de cumpleaños.

58. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de seis alumnos haya al menos dos con sus cumpleaños en el mismo mes?

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

59. La paradoja "del segundo hijo" La señora Pérez dice: "Tengo dos hijos, y el mayor se llama Guillermo". La señora Báez responde: "Uno de mis dos hijos también se llama Guillermo". Para cada señora haga una lista del espacio muestral de los géneros de sus hijos, y calcule la probabilidad de que su otro hijo también sea hombre. Explique por qué esas dos probabilidades son distintas.

60. El fenómeno de "hijo o hija mayor" Haga una encuesta en su clase para determinar cuántos de sus compañeros hombres son los mayores en sus familias, y cuántas de sus compañeras mujeres son las mayores en sus familias. Lo más probable es que sean mayoría en la clase. Explique por qué un individuo seleccionado al azar tiene una gran probabilidad de ser el hijo o la hija mayor en su familia.

11.4 VALOR ESPERADO

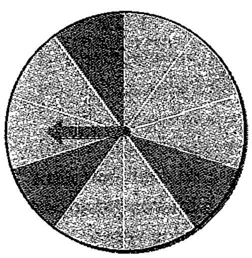


FIGURA 1

En el juego de la figura 1, usted paga \$1 por hacer girar la flecha. Si la flecha se detiene en una región rosa, gana \$3 (el \$1 que pagó más otros \$2). En cualquier otro caso pierde lo que pagó. Si juega usted muchas veces esta ruleta, ¿cuánto espera ganar o perder? Para contestar la pregunta examinemos las probabilidades de ganar y de perder. Como tres de las regiones son rosas, la probabilidad de ganar es $\frac{3}{10} = .3$, y de perder es $\frac{7}{10} = .7$. Recuerde que esto quiere decir que si juega así muchas veces, debe esperar ganar "en promedio" tres veces de cada 10. Así, suponga que juega 1,000 veces. Espera ganar 300 veces y perder 700 veces. Como se gana \$2 o se pierde \$1 en cada juego, la ganancia esperada después de 1,000 juegos es

$$2(300) + (-1)(700) = -100$$

Es decir, el ingreso promedio esperado por juego es $\frac{-100}{1{,}000} = -0.1$. En otras palabras, esperamos perder, en promedio, 10 centavos por juego. Otra forma de concebir este promedio es dividir entre 1,000 cada lado de la ecuación anterior. Si E representa al resultado, entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{2(300) + (-1)(700)}{1{,}000} \\ &= 2\left(\frac{300}{1{,}000}\right) + (-1)\frac{700}{1{,}000} \\ &= 2(.3) + (-1)(.7) \end{aligned}$$

Así, el rendimiento esperado, o *valor esperado* por juego es

$$E = a_1 p_1 + a_2 p_2$$

en donde a_1 es el pago que se obtiene con probabilidad p_1 y a_2 es el pago que se obtiene con probabilidad p_2. Este ejemplo nos conduce a la siguiente definición del valor esperado.

DEFINICIÓN DE VALOR ESPERADO

Un juego da pagos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$. El **valor esperado (o esperanza)** E de este juego es

$$E = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n$$

El valor esperado es una esperanza promedio por juego, si se juega muchas veces. En general, E no necesita ser uno de los pagos posibles. En el ejemplo anterior, el valor esperado es -10 centavos, pero es imposible perder exactamente 10 centavos cada vez que se juegue.

EJEMPLO 1 ■ Cálculo de un valor esperado

Se lanza un dado y se obtiene \$1 por cada punto que aparece. ¿Cuál es la esperanza?

SOLUCIÓN Cada cara del dado tiene la probabilidad $\frac{1}{6}$ de salir. Por consiguiente, se obtiene \$1 con probabilidad $\frac{1}{6}$, \$2 con probabilidad $\frac{1}{6}$, \$3 con probabilidad $\frac{1}{6}$ y así sucesivamente. Entonces, el valor esperado es

$$E = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{21}{6} = 3.5$$

Esto quiere decir que si se juega muchas veces así a los dados, uno ganará, en promedio, \$3.50 cada juego. ■

EJEMPLO 2 ■ Cálculo de un valor esperado

En Monte Carlo, el juego de la ruleta es una rueda con ranuras numeradas 0, 1, 2, . . ., 36. Se hace girar la rueda y se deja caer en ella una bola, que tiene igual probabilidad de quedar en cualquiera de las ranuras. Para jugar se apuesta \$1 a cualquier número distinto de cero. (Por ejemplo, puede usted apostar \$1 al número 23.) Si la bola se detiene en su ranura, usted gana \$36 (el \$1 que apostó más \$35.) Calcule el valor esperado de ese juego.

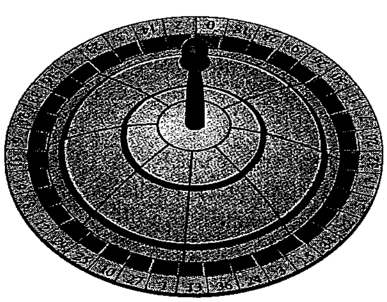


FIGURA 2

SOLUCIÓN Usted gana \$35 con probabilidad de $\frac{1}{37}$, y pierde \$1 con probabilidad $\frac{36}{37}$. Así,

$$E = (35)\frac{1}{37} + (-1)\frac{36}{37} \approx -0.027$$

En otras palabras, si juega usted muchas veces, cabe esperar que pierda 2.7 centavos de cada \$1 que apueste, en promedio. En consecuencia, la casa espera ganar 2.7 centavos de cada \$1 que se apueste. Este valor esperado es lo que hace que los juegos de azar sean muy redituables para la casa, y muy desfavorables para el jugador. ■

11.4 EJERCICIOS

1-10 ■ Calcule el valor esperado (o esperanza) del juego descrito.

1. Miguel gana \$2 si al arrojar una moneda sale cara, y \$1 si sale cruz.

2. Juana gana \$10 si al tirar un dado sale 6, y pierde \$1 en cualquier otro caso.

3. El juego consiste en sacar una carta de una baraja. Usted gana \$100 si saca el as de espadas, o pierde \$1 si saca cualquier otra carta.

4. Tomás gana \$3 si al arrojar una moneda sale cara, o \$2 si sale cruz.

5. Carolina gana \$3 si al tirar un dado sale 6, y gana \$0.50 en cualquier otro caso.

6. Se arroja dos veces una moneda. Alberto gana \$2 por cada cara que sale, y debe pagar \$1 por cada cruz.

7. Se tira un dado. Tomás gana \$2 si sale un número par, y paga \$2 en cualquier otro caso.

8. Se saca una carta de una baraja. Usted gana \$104 si la carta es un as, \$26 si es una figura y \$13 si es el 8 de diamantes.

9. Una bolsa contiene dos monedas de plata de un dólar (\$1) y 8 de bronce, de igual tamaño. Usted paga 50¢ por meter la mano y sacar una moneda, que puede conservar. Las de bronce no valen nada.

10. Una bolsa contiene ocho bolas blancas y dos bolas negras. Juan saca al azar dos bolas de la bolsa, y gana \$5 si no saca bola negra.

11. En el juego de la ruleta, tal como se acostumbra en Las Vegas, la rueda tiene 38 ranuras: dos tienen los números 0 y 00 y el resto los números del 1 al 36. Una apuesta de \$1 en cualquier número distinto del 0 o del 00 gana \$36 (\$35 más el \$1 que apostó) en caso de salir el número. Calcule el valor esperado de este juego.

12. Una rifa ofrece un primer premio de \$1,000,000, un segundo premio de \$100,000 y un tercer premio de \$10,000. Suponga que participan dos millones de personas, y que se sacan tres nombres al azar, los ganadores de los tres premios. El boleto cuesta \$1.
    (a) Calcule las ganancias esperadas de una persona que participe en esa lotería.
    (b) ¿Vale la pena pagar \$1 para entrar en esa lotería?

13. Una caja contiene 100 sobres. Diez de ellos contienen \$10 cada uno, 10 contienen \$5 cada uno, dos "desafortunados" y el resto están vacíos. Un jugador saca un sobre de la caja y guarda lo que haya en él. Sin embargo, si una persona saca un sobre desafortunado, debe pagar \$100. ¿Cuál es la esperanza de una persona que entre a este juego?

14. Un portafolio con 1 millón de dólares se guarda en una caja fuerte. Usted paga \$1 por cada intento de acertar a la combinación de 6 dígitos. Si abre la caja, puede quedarse con el millón de dólares. Cuál es la esperanza?

15. Un inversionista compra 1,000 acciones de gran riesgo, a \$5 cada una. Estima que la probabilidad de que su valor aumente a \$20 por acción es .1, y la de que baje a \$1 por acción es .9. Si el único criterio para comprar estas acciones fuera el valor esperado de sus ganancias, ¿es buena esa inversión?

16. Una máquina tragamonedas tiene tres ruedas, y cada una tiene 11 posiciones: los dígitos 0, 1, 2, . . ., 9 y la figura de una sandía. Cuando se introduce una moneda de 25¢ y se acciona la palanca, las tres ruedas giran en forma independiente y se paran. Cuando salen las tres sandías, el premio es \$5; en cualquier otro caso no hay premio. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

17. En una lotería 6/49 un participante paga \$1 y escoge seis números, del 1 al 49. Cualquier jugador que escoja los seis números ganadores obtiene un premio de \$1,000,000. Suponiendo que es la única forma de ganar, ¿cuál es el valor esperado de este juego?

18. Una bolsa contiene dos dólares de plata y seis imitaciones de cobre. Un juego consiste en meter la mano a la bolsa y sacar una moneda, que se puede conservar. Determine el "precio equitativo" para participar en este juego, esto es, el precio al cual el jugador puede esperar salir tablas si participa muchas veces (Es decir, el precio en el que su esperanza es cero).

19. Un juego consiste en sacar una carta de una baraja. Usted gana \$13 si saca un as. ¿Cuál es el "precio equitativo" para participar en el juego? (Véase el ejercicio 18.)

DESCUBRIMIENTO • ANÁLISIS

20. **Valor esperado en una rifa** Una tienda de revistas organiza una rifa para vender suscripciones. Si usted tiene el número premiado, gana \$1,000,000. La probabilidad de ganar es de 1 en 20 millones, pero la única aportación de entrar a la rifa es el de una estampilla de \$0.50 para mandar por correo el comprobante. Calcule su ganancia neta esperada cuando participa en esa rifa. ¿Vale la pena entrar?

11 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué dice el principio fundamental de conteo?

2. (a) ¿Qué es una permutación de un conjunto de objetos distintos?
   (b) ¿Cuántas permutaciones hay con n objetos?
   (c) ¿Cuántas permutaciones hay con n objetos tomados de r en r?
   (d) ¿Qué cantidad de permutaciones distinguibles hay con n objetos, si hay k clases distintas de objetos: n_1 objetos son de la primera clase, n_2 son de la segunda, y así sucesivamente?

3. (a) ¿Qué es una combinación de r elementos de un conjunto?
   (b) ¿Cuántas combinaciones hay con n elementos tomados de r en r?
   (c) ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?

4. Para resolver un problema donde se toman r objetos de n objetos, ¿cómo sabe usted si usar permutaciones o combinaciones?

5. (a) ¿Qué quiere decir espacio muestral de un experimento?
   (b) ¿Qué es un evento?
   (c) Defina la probabilidad de un evento E en un espacio muestral S.
   (d) ¿Cuál es la probabilidad del complemento de E?

6. (a) ¿Qué son eventos mutuamente excluyentes?
   (b) Si E y F son eventos mutuamente excluyentes, ¿cuál es la probabilidad de la unión de E y F? ¿Y si E y F no son mutuamente excluyentes, cuál es la probabilidad de esa unión?

7. (a) ¿Qué son eventos independientes?
   (b) Si E y F son eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de la intersección de E y F?

8. Suponga que un juego de pagos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, con las probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

EJERCICIOS

1. Se arrojan una moneda y un dado y se toma una carta de una baraja. ¿Cuántos resultados posibles tiene este experimento?

2. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si
   (a) se permite repetir dígitos?
   (b) no se permite repetir dígitos?

3. (a) ¿Cuántos subconjuntos diferentes de dos elementos tiene el conjunto $\{A, E, I, O, U\}$?
   (b) ¿Cuántas "palabras" diferentes de 2 letras se pueden formar con las letras del conjunto de la parte (a)?

4. Una aerolínea sobrevende cierto vuelo, y siete pasajeros son "expulsados" de él. Si para este vuelo hay 120 pasajeros, ¿de cuántas maneras puede elegir la aerolínea a los siete pasajeros que va a dejar en tierra?

5. Un cuestionario tiene 10 preguntas con respuesta verdadero-falso. ¿Cuántas formas distintas hay de obtener exactamente 70% en ese cuestionario?

6. Un examen tiene 10 preguntas de verdadero-falso, y cinco de opción múltiple con cuatro opciones cada una, ¿De cuántas maneras se puede contestar ese examen?

7. Si sólo debe usted contestar ocho preguntas de las 10 que hay en una prueba, ¿cuántas formas tiene de elegir las preguntas que no contestará?

8. Una nevería ofrece 15 sabores de helados. Su especialidad es *banana split* con cuatro bolas de helado. Si cada bola debe ser de distinto sabor, ¿cuántos *banana splits* se pueden pedir?

9. Una empresa usa una clave de seguridad de 3 letras, distinta para cada uno de sus empleados. ¿Cuál es la cantidad máxima de claves que pueden generarse en este sistema?

10. Un grupo de alumnos dice que pueden formar una fila, para la foto de su generación, de 120 maneras distintas. ¿Cuántos alumnos hay en esa generación?

11. Se arroja una moneda 10 veces. ¿De cuántas maneras distintas se puede llegar al resultado de tres caras y siete cruces?

12. En el territorio canadiense de Yukón se usa un sistema de numeración de placas de vehículos que consiste en 2 letras

seguidas por 3 números. Explique cómo se puede saber que en Yukón hay menos de 700,000 vehículos registrados.

13. Un grupo de amigos tienen una cancha de tenis. Ven que hay 10 maneras distintas en las que dos de ellos pueden jugar singles en esa cancha. ¿Cuántos amigos hay en este grupo?

14. Una pizzería anuncia 2,048 tipos de pizza distintos. ¿Cuántos aderezos ofrece esa pizzería?

15. En la clave Morse, cada letra se representa con una serie de puntos y rayas, y se permite repetir. ¿Cuántas letras distintas se pueden representar en la clave Morse, si se usan tres símbolos o menos?

16. El código genético se forma en base a los cuatro nucleótidos adenina (A), citosina (C), guanina (G) y tiamina (T). Esos cuatro se unen en hileras largas formando moléculas de ADN. Por ejemplo, una secuencia podría ser CAGTGGTACC. . . . El código usa "palabras", todas de la misma longitud, formadas por los nucleótidos A, C, G y T. Se sabe que existen al menos 20 palabras distintas. ¿Cuál es la longitud mínima de la palabra, necesaria para generar 20 palabras?

17. Dados 16 temas de donde elegir, ¿de cuántas maneras puede escoger un alumno un campo de estudio como sigue?
(a) Uno general y una especialidad.
(b) Una especialidad, uno elemental y uno de introducción.
(c) Una especialidad y dos generales.

18. (a) ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con 0, 1, . . ., 9? (Recuerde que un número de 3 dígitos no puede tener el 0 al principio.)
(b) Si se toma un número al azar del conjunto {0, 1, 2, . . ., 1000}, ¿cuál es la probabilidad de que ese número sea de tres dígitos?

19-20 ■ Un **anagrama** de una palabra es una permutación de sus letras. Por ejemplo, entre los anagramas de la palabra *triángulo* están *griántulo*, *olugnáirt* y *tinuorágl*.

19. ¿Cuántos anagramas se forman con la palabra *TRIANGULO*?

20. ¿Cuántos anagramas se forman con la palabra *MISSISSIPPI*?

21. Un anaquel tiene 10 libros: dos de misterio, cuatro de romance y cuatro textos de matemáticas. Si usted selecciona un libro al azar para llevárselo a la playa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de matemáticas?

22. Un frasco contiene 10 bolas rojas identificadas con 0, 1, 2, . . ., 9, y 5 bolas blancas, identificadas con 0, 1, 2, 3 y 4. Si se saca una bola del frasco, calcule la probabilidad de cada evento.
(a) La bola sea roja.
(b) La bola tenga número par.
(c) La bola sea blanca y tenga número impar.
(d) La bola sea roja o tenga número impar.

23. Una moneda se arroja al aire tres veces seguidas, y se anotan los resultados obtenidos.
(a) Defina el espacio muestral para este experimento.
(b) Calcule la probabilidad de obtener tres caras.
(c) Calcule la probabilidad de obtener dos o más caras.
(d) Calcule la probabilidad de obtener cruz en la primera vez.

24. Se lanza un dado y se saca una carta de una baraja normal de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado y la carta sean 6?

25. Calcule la probabilidad de sacar la carta indicada al azar, de una baraja de 52 cartas.
(a) Un as.
(b) Un as o una sota.
(c) Un as o una espada.
(d) Un as rojo.

26. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas, se lanza un dado y una moneda. Calcule la probabilidad de obtener los resultados indicados.
(a) El as de espadas, el 6 y cara.
(b) Una espada, el 6 y cara.
(c) Una figura, un número mayor que 3 y cara.

27. Se tiran dos dados. Calcule la probabilidad de cada resultado.
(a) Que salgan los mismos números.
(b) Que salgan números diferentes.

28. Se sacan cuatro cartas de una baraja normal de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que sean:
(a) póquer de reyes
(b) todas espadas
(c) del mismo color.

29. En la lotería "de números", un participante escoge un número de 3 dígitos (del 000 al 999), y si sale premiado, gana $500. Si es otro número con los mismos dígitos (en cualquier orden), gana $50. Juan juega con el número 159.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane $500?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que gane $50?

30. En un programa de TV, se le dan cinco tarjetas a una concursante, con distinto dígito en cada una, y se le pide ordenarlas para que muestren el precio de un coche nuevo. Si acierta al precio, gana el automóvil. ¿Cuáles son sus probabilidades de ganar, suponiendo que conoce el primer dígito, pero debe adivinar los otros cuatro?

31. Se tiran dos dados. Juan gana \$5 si muestran el mismo número, o paga \$1 si salen números distintos. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

32. Se tiran tres dados. Juan gana \$5 si muestran el mismo número, y paga \$1 en cualquier otro caso. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

33. María gana \$1,000,000 si puede decir los nombres de los 13 estados originales de la Unión Americana, en el orden en el que ratificaron la constitución de ese país. No sabe ese orden, por lo que debe adivinar. ¿Cuál es su esperanza?

34. Una pizzería ofrece 12 aderezos distintos, y uno de ellos es anchovetas. Si se pide una pizza al azar, ¿qué probabilidad hay de que uno de los aderezos sea de anchovetas?

35. En un cajón hay 50 calcetines desordenados; 20 son rojos y 30 azules. Suponga que se va la luz, por lo que Cati no puede ver si los calcetines hacen juego.
(a) ¿Cuál es la cantidad mínima de calcetines que debe sacar Cati del cajón para estar segura de tener un par del mismo color?
(b) Si se sacan del cajón dos calcetines al azar, ¿qué probabilidad hay de que el par sea del mismo color?

36. Un equipo de voleibol tiene nueve jugadores. ¿De cuántas formas se puede elegir una alineación inicial, si consta de dos delanteros y tres defensas?

37. Los códigos postales están formados por 5 dígitos.
(a) ¿Cuántos códigos postales distintos puede haber?
(b) ¿Cuántos códigos postales distintos se pueden leer cuando se voltea de cabeza el sobre? Un 9 de cabeza es 6, y 0, 1 y 8 son iguales cuando se leen de cabeza.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un código postal seleccionado al azar se pueda leer de cabeza?
(d) ¿Cuántos códigos postales se leen igual cuando están de cabeza y cuando están derechos?

38. En el sistema de código postal Número + 4, los códigos postales están formados por 9 dígitos.
(a) ¿Cuántos códigos postales de número + 4 puede haber?
(b) ¿Cuántos códigos postales de número + 4 son palindromas? (Un *palindroma* es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda).
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un código postal de número + 4, tomado al azar sea un palindroma?

39. Sea $N = 3{,}600{,}000$. (Tenga en cuenta que $N = 2^7 3^2 5^5$.)
(a) ¿Cuántos divisores tiene N?
(b) ¿Cuántos divisores pares tiene N?
(c) ¿Cuántos divisores de N son múltiplos de 6?
(d) ¿Cuál es la probabilidad de que un divisor de N, elegido al azar, sea par?

40. El Senado de Estados Unidos está formado por dos senadores por cada uno de los 50 estados. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de cinco senadores, si un estado no puede tener dos miembros en el comité?

11 EXAMEN

1. ¿Cuántas "palabras" de 5 letras se pueden formar con las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I y J, si la repetición de letras **(a)** se permite? **(b)** no se permite?

2. En un restorán se ofrecen cinco platillos principales, tres postres y cuatro bebidas. ¿De cuántas formas puede pedir un cliente sus alimentos, escogiendo uno de cada categoría?

3. Se debe elegir un consejo directivo de ocho miembros entre un grupo de 30 candidatos. Ese consejo estará formado por un director, un tesorero, un secretario y cinco vocales. ¿De cuántas formas se puede elegir el consejo directivo?

4. Un conductor debe viajar diariamente de Aurora a Crepúsculo. A las dos ciudades las unen cuatro carreteras. El conductor trata de variar el viaje tanto como sea posible, por lo que siempre va y regresa por un camino distinto. ¿De cuántas formas distintas puede hacer el viaje redondo?

5. Una pizzería ofrece cuatro tamaños y 14 aderezos distintos. Un cliente puede pedir cualquier cantidad de aderezos (o sin aderezo). ¿Cuántas pizzas distintas ofrece esta pizzería?

6. Un *anagrama* de una palabra es un rearreglo de sus letras.
(a) ¿Cuántos anagramas puede haber de la palabra *AMOR*?
(b) ¿Cuántos anagramas distintos puede haber de la palabra *BESOS*?

7. Se eligen al azar a tres personas de un grupo de cinco hombres y 10 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sean hombres?

8. Se lanzan dos dados. ¿Qué probabilidad hay de que salgan iguales?

9. Se saca una carta de una baraja. Calcule la probabilidad de cada evento.
(a) Que la carta sea roja.
(b) Que la carta sea un rey.
(c) Que la carta sea un rey rojo.

10. Un frasco contiene cinco bolas rojas, numeradas del 1 al 5, y ocho bolas blancas, numeradas del 1 al 8. Se saca una bola al azar de ese frasco. Calcule la probabilidad de cada evento.
(a) Que la bola sea roja.
(b) Que la bola tenga número par.
(c) Que la bola sea roja o tenga número impar.

11. Debe usted sacar una carta de una baraja. Si es un as, gana \$10; si es una figura, gana \$1; en cualquier otro caso, pierde \$0.50. ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

12. En un grupo de cuatro alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos sean del mismo signo astrológico?

APÉNDICE

NOCIONES DE LÓGICA Y CONJUNTOS

El conocimiento científico es un proceso de modelación del mundo real que alcanza mayores niveles de precisión y exactitud cuando los modelos que se construyen son de naturaleza matemática; esto se debe a que una de las principales características de estos modelos es la facilidad para hacer deducciones. Las matemáticas siguen, en general, un modelo deductivo de razonamiento; esto es, desde una colección inicial de verdades se van obteniendo, mediante reglas correctas de deducción, nuevas verdades. Es precisamente en este punto donde los conocimientos de la lógica entran en acción debido a que ésta tiene por objeto el estudio sistemático de las condiciones generales de validez de las deducciones. Para comprender un poco mejor el papel de la lógica es necesario precisar en forma general cómo se construyen o establecen las teorías matemáticas.

Para establecer una teoría matemática se debe partir teniendo en cuenta diversos elementos: *Nociones primitivas* y *axiomas*. Las *nociones primitivas* son dadas, no se desprenden de otras ni se deducen, porque ellas son las primeras. Son elaboradas por abstracción a partir de nociones intuitivas. Por ejemplo, de la noción intuitiva de colección nace la noción primitiva de conjunto con términos primitivos como elemento y pertenencia; la igualdad es considerada en muchas teorías como un término primitivo. *Las nociones derivadas* son los ensamblajes de términos primitivos mientras que *las expresiones matemáticas* son los ensamblajes que tienen significado en la teoría. No todos los ensamblajes de términos primitivos son permitidos y la teoría da las reglas que permiten decidir si lo es o no. Los *axiomas* son las reglas que describen los modos de empleo de los términos primitivos para formar términos derivados y expresiones matemáticas. Por ejemplo, en cualquier teoría la igualdad satisface los siguientes axiomas:

- Cualquiera sea el objeto matemático: $a = a$.
- Cualesquiera sean los objetos a y b: Si $a = b$ entonces $b = a$.
- Cualesquiera sean los objetos matemáticos a, b y c: Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

Los axiomas se formulan a partir de las propiedades de los objetos del mundo real que están representando e incluso a partir de las propiedades que éstos deberían tener. Los axiomas deben tener ciertas características:

- Deben ser *compatibles*, esto significa que de ellos no se pueden deducir expresiones que sean simultáneamente verdaderas y falsas;
- deben ser *independientes*, en el sentido de que ningún axioma debe ser deducido del resto, y
- deben ser *suficientes*, en el sentido de que toda propiedad que se entienda que satisface los objetos debe poder deducirse de los axiomas.

Una vez que se tienen los axiomas, las propiedades verdaderas (*teoremas*) se obtienen mediante deducciones lógicas (*demostraciones*) a partir de los axiomas o de otros teoremas previamente demostrados.

Los términos primitivos de una teoría son designados con el nombre de *objetos de la teoría*; las teorías matemáticas se apoyan y generan no sobre objetos particulares sino sobre conjuntos de objetos de los cuales se hacen abstracciones.

En una teoría se distinguen dos tipos de objetos: Se emplean letras como x, y, z para representar objetos no determinados cuya única restricción es ser elemento de un conjunto dado y se las llama *variables*. Por oposición, todo elemento determinado se llama *constante*. Desde el punto de vista de la significación a una variable se le puede asignar un valor determinado que se elige de un conjunto; este conjunto se llama *campo de la variable*. En cuanto a la utilización de una variable se trata y comporta como una constante. A una constante que sustituye una variable se la llama *valor de la variable*.

PROPOSICIONES

■ **Definición 1** *Toda expresión matemática a la cual se le pueda, sin ambigüedad, atribuir el valor verdadero (v) o falso (f) se denomina proposición.*

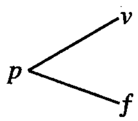
Las proposiciones son denotadas con letras minúsculas como p, q, r, s, etcétera. Esta noción puede ser ilustrada por toda frase del lenguaje que esté bien construida (sujeto, verbo y predicado), no interrogativa, ni exclamativa de la cual se pueda decidir si es falsa o verdadera. Por ejemplo: "Neptuno es uno de los planetas jobianos" es una proposición, mientras que "¡Qué maravilla!" o "¿Cúando lloverá?" no son proposiciones.

Un axioma de una teoría será toda proposición a la cual se le atribuye por convención el valor de verdadero y un teorema será toda proposición de la que debe demostrarse que es verdadera. Por ejemplo, "1 es un número natural" es una axioma y "si n es un número par entonces n^2 es un número par" es un teorema.

TABLA DE VERDAD

p
V
F

Tabla de verdad

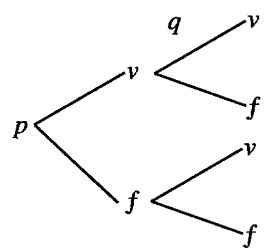


Árbol de elección

TABLA 1

Los posibles valores de elección para una proposición determinada p, no precisada, son verdadero (v) o falso (f). Estos valores se representan en una tabla de verdad o en un árbol de elección.

Para dos proposiciones p, q no precisadas, se puede elaborar el siguiente árbol de elección:

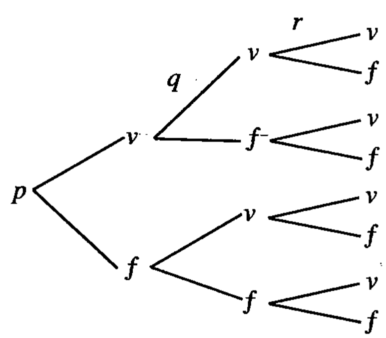


p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

TABLA 2

Note que en este caso, se tienen cuatro posibles combinaciones de valores de verdad, los cuales se pueden colocar en una tabla como la tabla 2.

Para tres proposiciones p, q, r determinadas pero no precisadas, el árbol de elección es el siguiente:



p	q	r
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

TABLA 3

Observe que si se tiene el árbol de elección para dos proposiciones p, q y se agrega una proposición r, por cada rama del árbol de elección para p y q se obtienen dos ramas adicionales en el árbol de elección de p, q y r. Así se tiene que para tres proposiciones p, q, r existen 2^3 valores de verdad posibles, los cuales pueden ser anotados en una tabla (tabla 3).

En general, si se tienen n proposiciones no precisadas existen 2^n posibles valores de verdad.

PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

■ **Definición 2** *Dos proposiciones* p *y* q *se dicen lógicamente equivalentes o sinónimas si ellas tienen el mismo valor de verdad. En tal caso se denotará por:* $p \equiv q$.

Por ejemplo, las proposiciones p: *Este año es bisiesto*, y q: *Este año tiene 366 días*, son lógicamente equivalentes.

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES

La negación es un operador sobre la colección de proposiciones, que asocia a toda proposición p una proposición notada $-p$, verdadera si p es falsa y falsa si p es verdadera. Este operador queda definido por la siguiente tabla de verdad:

p	$\neg p$
v	f
f	v

Si se piensa p y $-p$ como dos proposiciones no determinadas y se elabora la tabla de verdad, se tiene:

p	$\neg p$
v	v
v	f
f	v
f	f

Obsérvese que la primera y la última fila de esta tabla no aparecen en la tabla de definición del operador negación. Esto constituye axiomas de la teoría:

- **Principio de no contradicción:** p y $\neg p$ no pueden ser simultáneamente verdaderas.
- **Principio del tercero excluido**: Una de las dos proposiciones p ó $\neg p$ es verdadera.

Si una proposición se escribe con símbolos, su negación se escribe (por convención) con ayuda de una barra que tacha el símbolo, por ejemplo:

$$p:\ a = b$$
$$\neg p:\ a \neq b$$

CONECTIVOS LÓGICOS

En el lenguaje usual se construyen proposiciones más complejas con la ayuda de palabras como *y*, *o*, *si... entonces*. Si p y q son las proposiciones:

p: *María está riendo*
q: *Pablo está en clase*

Se pueden formar las proposiciones siguientes:

María está riendo *y* Pablo está en clase.

María está riendo *o* Pablo está en clase.

Si María está riendo *entonces* Pablo está en clase.

Esta última proposición no es apropiada en el lenguaje porque carece de sentido. Al trabajar con proposiciones del lenguaje se tiene que tener en cuenta que en el idioma una proposición tiene dos elementos:

- *sentido*, el cual es dado por el uso y
- *valor de verdad*,, es decir, se puede establecer si es verdadera o falsa.

En lógica sólo interesa el valor de verdad de las proposiciones.

A partir de dos proposiciones p y q se puede formar una nueva proposición compuesta por las dos, notada pq, determinando su valor de verdad en función de los valores de verdad de p y q. El símbolo se llama *conectivo lógico*.

Para el caso de dos proposiciones p y q existen cuatro formas de combinar sus valores de verdad, las cuales se han colocado en la siguiente tabla:

p	q	$p*q$
v	v	
v	f	
f	v	
f	f	

Al fijar una sucesión de los cuatro valores correspondientes a $p*q$, se obtiene exactamente el significado lógico del conector*.

Cada sucesión de valores se llama *evaluación*, así se tiene que: *Toda evaluación determina un conectivo lógico*. De esta manera para dos proposiciones p y q existen $2^4=16$ conectivos lógicos, los cuales quedarán definidos mediante su evaluación. Algunos de ellos son los más utilizados en el lenguaje natural y en el matemático y los llamaremos *conectivos lógicos usuales*, los cuales serán estudiados en detalle. Se deja como ejercicio para el lector el encontrar los 16 conectivos lógicos existentes.

CONECTIVOS LÓGICOS USUALES

Cada conectivo será definido mediante su evaluación utilizando una tabla de verdad.

■ **Definición 3** *La conjunción es el conectivo lógico* y *notado con el símbolo* $\wedge$ *y definido por:*

$p\wedge q$ se lee "p y q", su evaluación es: *vfff*.

p	q	$p\wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

■ **Definición 4** *Disyunción (inclusiva) es el conectivo lógico* o *notado por* $\vee$ *y definido por:*

$p\vee q$ se lee "p o q", su evaluación es: *vvvf*.

p	q	$p\vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

■ **Definición 5** *La implicación es el conectivo lógico* "Si... entonces..." *notado por* $\Rightarrow$ *y definido por:*

$p\Rightarrow q$ se lee "p implicación q", su evaluación es: *vfvv*.

p	q	$p\Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Observaciones

- Es importante aclarar que no existe en la implicación ninguna relación de causa-efecto entre las proposiciones p y q. Esta noción difiere de la idea de deducción, la cual se aclarará con precisión más adelante, por lo tanto, no se leerá $p\Rightarrow q$ por «p implica q». Por ahora sólo vale la pena anotar que la relación *p implica q* en el uso matemático se denota de igual forma por $p\Rightarrow q$, lo cual trae sin duda algunas confusiones, puesto que *p implica q* significa que *p implicación q es una proposición verdadera*, es decir, no sólo se están conectando las proposiciones p y q con el conectivo lógico implicación, sino que se está afirmando que la implicación es verdadera. En general, sólo se distinguirá el conectivo lógico de la relación por el contexto y el uso.
- Por otra parte, existen dos proposiciones asociadas a $p \Rightarrow q$,
    1. $q \Rightarrow p$ llamada el recíproco de $p \Rightarrow q$.
    2. $-q \Rightarrow -p$ llamada el contrarrecíproco de $p \Rightarrow q$.

  Estas dos proposiciones son de gran importancia en los desarrollos de las teorías matemáticas.

■ **Definición 6** *La biimplicación o doble implicación es el conectivo lógico "... si y sólo si..." notado por* $\Leftrightarrow$ *y definido por:*

$p \Leftrightarrow q$ se lee "p biimplicación q" o "p si y sólo si q", su evaluación es: *vffv*.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*f*
f	*f*	*v*

Al igual que en la implicación, aquí $\Leftrightarrow$ es sólo un conectivo lógico y por tanto no se debe pensar que existe una relación entre las proposiciones conectadas.

OTROS CONECTIVOS

■ **Definición 7** *La disyunción exclusiva es el conectivo lógico* o *notado* $\veebar$ *y definido por:*

p	q	$p \veebar q$
v	*v*	*f*
v	*f*	*v*
f	*v*	*v*
f	*f*	*f*

■ **Definición 8** *La* barra de Sheffer *o* incompatibilidad *es el conectivo notado* $\uparrow$ *y definido por:*

p	q	$p \uparrow q$
v	*v*	*f*
v	*f*	*v*
f	*v*	*v*
f	*f*	*v*

■ **Definición 9** *El conector de* tautología *notado* τ *y definido por:*

p	q	$p \tau q$
v	*v*	*v*
v	*f*	*v*
f	*v*	*v*
f	*f*	*v*

■ **Definición 10** *El conector de* antilogía, *notado por* α *y definido por:*

p	q	$p \alpha q$
v	*v*	*f*
v	*f*	*f*
f	*v*	*f*
f	*f*	*f*

PROPOSICIONES COMPUESTAS

Se suele asignar el nombre de *proposición atómica* a toda proposición que no contiene conectivos lógicos y *proposición compuesta* a toda proposición formada por proposiciones atómicas mediante el uso del operador negación o de los conectivos lógicos. Las proposiciones compuestas se notan con letras mayúsculas P, Q, R, S.

Dos proposiciones compuestas P y Q son *lógicamente equivalentes* si tienen la misma evaluación, es decir, si tienen los mismos valores de verdad. En tal caso escribiremos: $P \equiv Q$.

■ **Definición 11** *Se llama tautología a toda proposición compuesta cuya evaluación esté formada únicamente por valores de verdad* v. *Si* P *es una tautología se escribe* P ≡ V o *simplemente* V.
Toda tautología, proposición verdadera para todos los casos posibles, expresa una *ley lógica.*

Nótese que si P y Q son dos proposiciones lógicamente equivalentes entonces la proposición $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología. Se afirma, entonces, que: *Toda equivalencia lógica conduce a una ley lógica.*

■ **Definición 12** *Se llama antilogía o contradicción a toda proposición compuesta cuya evaluación está formada únicamente por valores de verdad* f. *Si* P *es una contradicción se escribe* P≡ F o *simplemente* F.

ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Las leyes lógicas son tautologías que se expresan por medio de equivalencias lógicas que se demuestran por simple constatación de la igualdad de las evaluaciones construyendo tablas de verdad. Estas leyes expresan propiedades de los conectivos lógicos y nos dan las reglas para la manipulación algebraica de las proposiciones.

■ PROPIEDADES DEL OPERADOR NEGACIÓN

Para toda proposición P se tiene:

1. $\neg\,(-P) \equiv P$. (El operador negación es involutivo)
2. $P \wedge (-P) \equiv F$. (Principio de no contradicción)
3. $P \vee (-P) \equiv V$. (Principio del tercero excluído)

■ PROPIEDADES DE LA CONJUNCIÓN

Para toda proposición P, Q y R se tiene:

1. $P \wedge P \equiv P$. (La conjunción es idempotente)
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$. (La conjunción es conmutativa)
3. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$. (La conjunción es asociativa)
4. $P \wedge V \equiv P$. (V es neutro para la conjunción)
5. $P \wedge F \equiv F$. (F es absorbente para la conjunción)

■ PROPIEDADES DE LA DISYUNCIÓN

Para toda proposición P, Q y R se tiene:

1. $P \vee P \equiv P$. (La disjunción es idempotente)
2. $P \vee Q \equiv Q \vee P$. (La disjunción es conmutativa)

3. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$. (La disyunción es asociativa)
4. $P \vee F \equiv P$. (F es neutro para la disyunción)
5. $P \vee V \equiv V$. (V es absorbente para la disyunción)

■ LEYES DISTRIBUTIVAS

Para toda proposición P, Q y R se tiene:

1. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
2. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

■ LEYES DE D'MORGAN

Para toda proposición P y Q se tiene:

1. $\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
2. $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

■ LEYES DE ABSORCIÓN

Para toda proposición P y Q se tiene:

1. $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$.
2. $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

Observación *Dualidad*

Las leyes de D'Morgan y de absorción se deducen formalmente la una de la otra reemplazando el conectivo "$\wedge$" por el conectivo "$\vee$" y viceversa. Igual ocurre con las demás leyes reemplazando además la tautología V por la contradicción F y viceversa. Este hecho no es casual, corresponde al *principio de dualidad.*

■ **Definición 13** *Para toda proposición compuesta* P, *formada utilizando los conectivos* "$\wedge$" *y* "$\vee$", *se llama forma dual de* P *a la proposición* P' *obtenida reemplazando en* P $\wedge$ *por* $\vee$, $\vee$ *por* $\wedge$, V *por* F *y* F *por* V.
Si P' es dual a P entonces P es dual de P'. Se dice entonces que P y P' son duales (la una de la otra). Además se tiene que si $P \equiv Q$ entonces $P' \equiv Q'$.

■ PROPIEDADES DE LA IMPLICACIÓN

Para toda proposición P, Q y R se tiene:

1. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$. (Contrarrecíproca).
2. $(P \Rightarrow P) \equiv V$.
3. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$.
4. $\{[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)\} \equiv V$.

Utilizando tablas de verdad, se puede observar que la implicación es un conectivo lógico no conmutativo ni asociativo. Queda a cargo del lector resolver las tablas de verdad correspondientes.

■ PROPIEDADES DE LA BIIMPLICACIÓN

Para toda proposición P, Q y R se tiene:

1. $(P \Leftrightarrow Q) \equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$.
2. $(P \Leftrightarrow P) \equiv V$.
3. $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (Q \Leftrightarrow P)$.
4. $\{[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow R)\} \equiv V$.

EJEMPLO 1 ■ Demostración de la ley lógica $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (Q \Leftrightarrow P)$

Para demostrar una ley lógica es suficiente realizar la tabla de verdad de las proposiciones y mostrar que tienen la misma evaluación.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	f	v	f
f	v	f	v	f	f
f	f	v	v	v	v

Como la evaluación de $P \Leftrightarrow Q$ y la evaluación de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ es $vffv$ queda demostrada la equivalencia lógica.

EJEMPLO 2 ■ Demostración utilizando álgebra de proposiciones de la equivalencia lógica $\neg[P \wedge (Q \vee R)] \equiv [(P \Rightarrow (\neg Q)) \wedge (P \Rightarrow \neg R)]$.

Para demostrar una equivalencia lógica utilizando álgebra de proposiciones, se parte de un lado de la equivalencia por demostrar y se reemplazan las proposiciones por proposiciones equivalentes utilizando las propiedades de los conectivos hasta obtener la proposición del otro lado de la equivalencia por demostrar. Es necesario que cada paso sea justificado con la ley lógica aplicada.

El uso de signos de agrupación es necesario. Estos signos se pueden eliminar solamente en los casos que no se presten a confusión.

$$
\begin{aligned}
[P \wedge (Q \vee R)] &\equiv [(\neg P) \vee (\neg(Q \vee R))] \text{ (ley de D'Morgan)}.\\
&\equiv [(\neg P) \vee (\neg Q \wedge (-R))] \text{ (ley de D'Morgan)}.\\
&\equiv [((\neg P) \vee (\neg Q)) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))] \text{ (ley distributiva)}.\\
&\equiv [((P \Rightarrow (\neg Q)) \wedge (P \Rightarrow (\neg R))] \text{(ley } (P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)).
\end{aligned}
$$

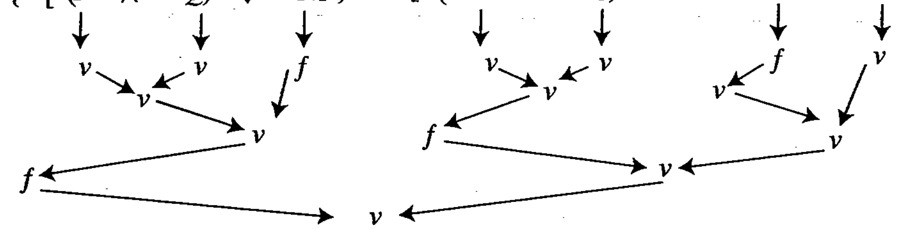
EJEMPLO 3 ■ Determinación del valor de verdad de la proposición $[\neg ((P \wedge Q) \vee R)] \Rightarrow [\neg (P \wedge Q) \vee ((\neg R) \wedge P)]$

si se sabe que P es verdadera, Q es verdadera y R es falsa.

En este caso se pide encontrar el valor de verdad de la proposición:
$[\neg ((P \wedge Q) \vee R)] \Rightarrow [\neg (P \wedge Q) \vee ((\neg R) \wedge P)]$ con los valores de verdad de las proposiciones P, Q y R determinados: P y Q son verdaderas y R es falsa; no hay más posibilidades. Para indicar el valor de verdad determinado para una proposición, se escribe (por convención), $P{:}v$, lo cual significa que a P se le asigna por definición el valor de verdad v. Se tiene entonces: $P{:}v$, $Q{:}v$ y $R{:}f$. Para calcular el valor de verdad se utiliza un diagrama, el cual consiste en colocar debajo de cada proposición atómica su valor de verdad e ir encontrando el valor de las proposiciones compuestas que intervienen, utilizando la definición de los conectivos. El valor de verdad de las proposiciones que

contienen un conectivo se coloca debajo del símbolo del conectivo correspondiente, como se ilustra en el siguiente diagrama de verdad:

$$\{\neg[(P \wedge Q) \vee R]\} \Rightarrow [\neg(P \wedge Q) \vee ((\neg R) \wedge P]$$



Se concluye, entonces, que la proposición es verdadera.

NOCIONES CONJUNTISTAS

Las nociones de conjunto, elemento y pertenencia son las nociones primitivas de la teoría de conjuntos. La noción de conjunto surge de la noción intuitiva de colección. Los conjuntos se notan con letras mayúsculas A, B, C, D, etcétera. Los elementos de un conjunto se notan por letras minúsculas a, b, c, etcétera. La expresión *"a es elemento de A"* es una proposición. Si es verdadera se escribe: $a \in A$, si es falsa se escribe $a \notin A$. "$\in$" es el símbolo de la relación de pertenencia.

Un conjunto E se dice definido por extensión si se da la lista completa de sus elementos. Los elementos de un conjunto definido por extensión se colocan entre llaves separados por coma (,) tal cual se muestra en el siguiente ejemplo: $E = \{1,2,3,4\}$. Esta forma de definir un conjunto se justifica por el axioma de extensión.

Axioma de extensión

Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos; en tal caso se escribe $A = B$; en caso contrario, $A \neq B$.

Dados $A=\{a,b,c,d\}$ y $B=\{a, a,b,c,d\}$ se tiene $A=B$, lo cual significa que los elementos repetidos en un conjunto no tienen importancia.

Dados $C=\{a,b,c\}$ y $D=\{b,a,c\}$ se tiene $C = D$. En un conjunto no importa el orden en que se encuentren sus elementos.

Axioma de existencia

Cualquiera sea el objeto a, *existe un conjunto notado $\{a\}$ el cual tiene* a *por elemento: $a \in \{a\}$.*

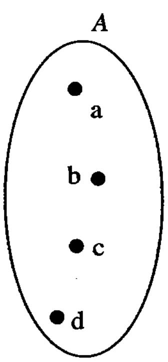


FIGURA 1

FIGURA 2

■ DIAGRAMA DE VENN-EULER

Los elementos de un conjunto suelen ser representados por puntos situados en una región plana interior a una curva simple (sin intersecciones) tal como se muestra en la figura 1. Si el conjunto tiene un gran número de elementos el conjunto se representa como toda la región en el interior de la curva (véase la figura 2).

Este tipo de representación es llamado diagrama de Venn-Euler o diagrama de Venn.

■ RELACIÓN DE INCLUSIÓN O CONTENENCIA

Un conjunto A está contenido o incluido en un conjunto B si todo elemento de A es elemento de B. En tal caso se nota: $A \subseteq B$, y se lee: "A está contenido en B" o "A es un subconjunto de B".

Nótese que las proposiciones: $A = B$ y $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ son lógicamente equivalentes. Por tanto, la proposición: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ es una tautología.

■ FORMAS PROPOSICIONALES Y AXIOMA DE COMPRENSIÓN

Una expresión que involucra una variable x no es una proposición. Por ejemplo: "x es par"; pero al darle valores a la variable x se obtiene una proposición. Si se supone que x toma valores en los números enteros se tiene que, al reemplazar el valor de x por 16, la proposición "16 es par" es verdadera y al remplazar por 5 el valor de x la proposición: "5 es par" es falsa.

Cada vez que se defina una expresión que contenga una variable debe ser especificado el campo de dicha variable.

■ **Definición 14** *Dado un conjunto* E *(denominado referencial) se llama forma proposicional en una variable definida sobre* E *a toda expresión que contiene una variable* x *y que conduce a una proposición para cada valor* b *que se le asigne a* x *en* E. *Una forma proposicional se denotará por* p(x).

Para definir una forma proposicional se debe precisar:

- Un conjunto referencial E (el campo de la variable) y
- una expresión que contenga una variable y tome valores en E.

Dada una forma proposicional $p(x)$ definida sobre un conjunto E, al asignar un valor b a x se genera una proposición $p(b)$, la cual puede ser verdadera o falsa. Si $p(b)$ es verdadera se dice que b verifica la forma proposicional. Por ejemplo, si se tiene $E = \{1,2,3,4,5\}$ y $p(x)$: *x es par,* al darle valores a x en E se obtienen las proposiciones:

$p(1)$: 1 *es par*, $p(2)$: 2 *es par*, $p(3)$: 3 *es par*, $p(4)$: 4 *es par* y $p(5)$: 5 *es par*. Las proposiciones $p(2)$ y $p(4)$ son verdaderas; así los elementos de E que verifican $p(x)$ son 2 y 4.

A toda forma proposicional $p(x)$ definida sobre un conjunto E se le asocia un conjunto formado por aquellos elementos de E que verifican $p(x)$; esto constituye el axioma de comprensión.

Axioma de comprensión

Si p(x) *es una forma proposicional definida sobre un conjunto* E, *existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de* E *que verifican* p(x).

Se designa este subconjunto de E *por* E_p

$$E_p = \{x \in E / : p(x)\}$$

y se lee: E sub p *es el conjunto de los* x *que pertenecen a* E, *tales que* p(x).

Obsérvese que para todo $a \in E_p$, la proposición $p(a)$ es verdadera y para todo $a \notin E_p$, la proposición es falsa. Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el conjunto asociado a la forma proposicional $p(x)$:*x es menor que* 6 es el conjunto (finito) $E_p = \{1,2,3,4,5\}$ y el conjunto asociado a la forma proposicional $q(x)$:*x es múltiplo de* 5 es un conjunto infinito $E_q = \{5,10,15,20,... ,5n,...\}$.

Un subconjunto A de E, asociado a una forma proposicional $p(x)$, se dice definido por comprensión: $A = E_p = \{x \in E \mid p(x)\}$.

Observe que a toda forma proposicional $p(x)$ definida sobre E le corresponde un subconjunto de E, e inversamente, a todo subconjunto A de E, dado por extensión, le corresponde la forma proposicional $p(x){:}x \in A$.

Por otra parte, note que dos formas proposicionales $p(x)$ y $q(x)$ pueden determinar el mismo subconjunto de E. Esto ocurre si para cada valor a dado a x, se tiene que $p(a) \equiv q(a)$. En este caso se dice que las *formas proposicionales son equivalentes en* E. Así $p(x)$ y $q(x)$ son equivalentes en E si y sólo si $E_p = E_q$.

La noción de forma proposicional es muy poderosa, ya que por una parte sirve para definir todos aquellos conjuntos que no se pueden dar por extensión: conjuntos infinitos y el conjunto vacío; por otra parte, es interesante porque el álgebra de proposiciones es aplicable a las formas proposicionales.

ÁLGEBRA DE FORMAS PROPOSICIONALES

Sean $p(x)$ y $q(x)$ formas proposicionales definidas sobre un mismo conjunto referencial E, para cada valor a dado a x, se obtienen las proposiciones $p(a)$ y $q(a)$ a las cuales se les puede aplicar el álgebra de proposiciones.

Las proposiciones $\neg p(a)$, $p(a) \vee q(a)$, $(p(a) \wedge q(a)$, $p(a) \Rightarrow q(a)$ son verdaderas o falsas dependiendo del valor que tome a en E y determinan las formas proposicionales: $\neg p(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $(p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \Rightarrow q(x)$ definidas sobre E, que a su vez determinan los subconjuntos de E cuyos elementos verifican estas formas proposicionales.

Los conectivos de las formas proposicionales están definidos para todos los valores de verdad atribuidos a las proposiciones que se forman, al igual que las leyes lógicas, ya que éstas son verdaderas independientemente de los valores de verdad de las proposiciones involucradas. Por tanto, considerando las proposiciones $\neg p(a)$, $p(a) \vee q(a)$, $(p(a) \wedge q(a)$, $p(a) \Rightarrow q(a)$ el álgebra de proposiciones es aplicable a las formas proposicionales definidas sobre un conjunto.

Por ejemplo, considere las formas proposicionales, $p(x){:}x \leq 2$, $q(x){:}x^2 \leq 10$ y $\neg[p(x) \Rightarrow q(x)]$ definidas sobre el conjunto de los números naturales N. Observe que: $p(a)$ es verdadera para todo $a \in N_p = \{1,2\}$, $q(a)$ es verdadera para todo $a \in \mathbb{N}_q = \{1,2,3\}$ y $\neg[p(a) \Rightarrow q(a)]$ es verdadera para todo $a \in \mathbb{N}_q$ y todo $a \in \mathbb{N}_p$. Luego $\mathbb{N}_{\neg[p \Rightarrow q]}$ es un conjunto sin elementos.

Ahora, considere las formas proposicionales anteriores pero definidas en el conjunto de los números enteros. Note que $p(a)$ es verdadera para todo $a \in \mathbb{Z}_p = \{\ldots,-n,\ldots,-1,0,1,2\}$, $q(a)$ es verdadera para todo $a \in \mathbb{Z}_q = \{-3,-2-10,1,2,3\}$ y $-[p(a) \Rightarrow q(a)]$ es verdadera para todo $\mathbb{Z}_{[p \Rightarrow q]} = \{\ldots,-n,\ldots,-6,-5,-4\}$.

Definición 15 *(Conjunto vacío)*
Sea E un conjunto referencial, a la forma proposicional p(x): x $\notin$ E *se le asocia, de acuerdo con el axioma de comprensión, un conjunto. Este conjunto no tiene elementos, por lo que se denomina conjunto vacío. Se nota por* $\varnothing$.

$$\varnothing = \{x \in E \,/\, x \notin E\} = \{\}$$

Definición 16 *(Complemento de un conjunto)*
Sea A un subconjunto de un conjunto E. El complemento de A *en* E *es el conjunto asociado a la forma proposicional* p(x): x $\notin$ A. *Existen varias formas en que se suele denotar el complemento de un conjunto; las más frecuentes son:* A^c, A *y* $C_E A$.

Evidentemente, este conjunto depende tanto de A como del referencial E.

$$A^c = \{x \in E \,/\, x \notin A\}.$$

El conjunto A^c está representado en la figura 3 utilizando un diagrama de Venn-Euler.

E

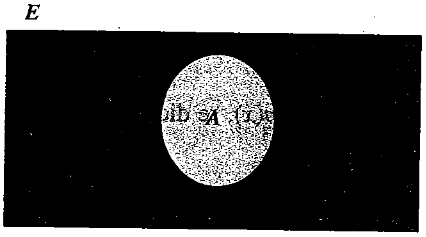


FIGURA 3

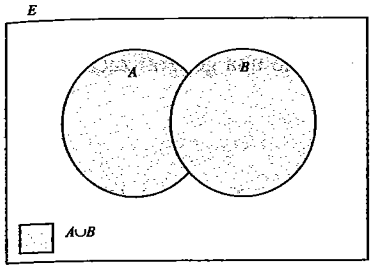


FIGURA 4

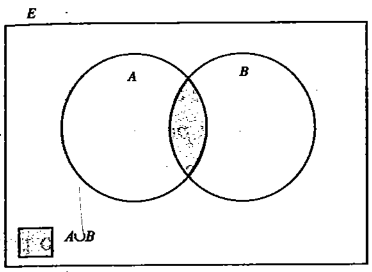


FIGURA 5

■ **Definición 17** *(Unión de conjuntos)*
Si E y F son dos conjuntos, existe un conjunto llamado la unión de E y F, *formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos. Se nota por* $E \cup F$ *y se lee:* E unión F.

Si A y B son dos subconjuntos de un referencial E, entonces $A \cup B$ es el conjunto asociado a la forma proposicional $(x \in A) \vee (x \in B)$ definida en E.

$$A \cup B = \{x \in E \,/\, (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

El conjunto $A \cup B$ está representado en la figura 4 utilizando un diagrama de Venn-Euler.

■ **Definición 18** *(Intersección de conjuntos)*
Si E *y* F *son dos conjuntos, existe un conjunto llamado la intersección de* E y F, *formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. Se nota por* $E \cap F$ *y se lee: E intersección F.*

Si A y B son dos subconjuntos de un referencial E, entonces $A \cap B$ es el conjunto asociado a la forma proposicional $(x \in A) \wedge (x \in B)$ definida en E.

$$A \cap B = \{x \in E \,/\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

El conjunto $A \cap B$ está representado en la figura 5 utilizando un diagrama de Venn-Euler.

■ **Definición 19** *(Conjunto de partes)*
Para todo conjunto E, existe un nuevo conjunto llamado el conjunto de partes de E, cuyos elementos son todos los subconjuntos de E. Se nota por $\wp(E)$ *y se lee: conjunto de partes de E.*

Sea $E=\{a,b,c\}$, los subconjuntos de E son: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ y $\{a,b,c\}$. El conjunto de partes de E es:

$$\mathcal{P}(E)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Es importante observar que el mismo objeto matemático es simultáneamente considerado como conjunto y como elemento.

Si A es un subconjunto de E, a un elemento de A y b un elemento de E, las siguientes proposiciones son verdaderas: $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $a \in A$, $\{b\} \subseteq E$, $\{b\} \in \mathcal{P}(E)$ y $b \in E$; mientras que $A\ C\ \mathcal{P}(E)$ y $b \in \mathcal{P}(E)$ son proposiciones falsas.

■ CUANTIFICADORES

Dada la forma proposicional $p(x)$ definida sobre $\mathbb{N}$ por $p(x)$:*x es múltiplo de* 5, observe que las expresiones *Todos los x en* $\mathbb{N}$ *son múltiplos de 5* y *existe un x en* $\mathbb{N}$ *tal que x es múltiplo de 5* ya no son formas proposicionales sino proposiciones, debido a que se puede determinar con precisión su valor de verdad.

■ **Definición 20** *(Cuantificador universal)*
Sea p(x) *una forma proposicional definida sobre un conjunto referencial* E, *si para cada valor* a *de* E *se tiene que* p(a) *es verdadera se escribe*

$$(\forall x \in E)(p(x))$$

y se lee: Para todo x *en* E, p(x) *o cualquiera sea* x *en* E, p(x). *El símbolo* $\forall$, *que transforma en una proposición la forma proposicional* p(x), *se denomina cuantificador universal.*

$\forall$: cuantificador universal
Se lee: para todo.

Nótese, en primer lugar, que la proposición $(\forall\ x \in E)\ (p(x))$ es lógicamente equivalente a $E_p = E$ y, en segundo lugar, que en el caso en que E sea un conjunto finito $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ entonces $(\forall x \in E)(p(x)) \equiv (p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n))$.

De esta manera, el cuantificador universal $\forall$ aparece como una generalización de la conjunción para conjuntos infinitos.

∃: cuantificador existencial

Se lee: existe al menos un.

■ **Definición 21** *(Cuantificador existencial)*

Sea p(x) *una forma proposicional definida sobre un conjunto referencial* E, *si para al menos un valor* a *de* E, p(a) *es verdadera, se escribe*

$$(\exists\, x \in E)\ (p(x))$$

y se lee: Existe un x *en* E *tal que* p(x) *o para algún* x *en* E, p(x). *El símbolo ∃, que transforma la forma proposicional p(x) en una proposición, se denomina cuantificador existencial.*

Observe que la proposición $(\exists\, x \in E)\ (p(x))$ es lógicamente equivalente a $E_p \neq \varnothing$ y si E es un conjunto finito $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces $(\exists x \in E)(p(x)) \equiv (p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n))$

Así, el cuantificador universal $\exists$ aparece como una generalización de la disyunción para conjuntos infinitos.

En el caso en el que el conjunto referencial E esté determinado y sea el mismo para todas las formas proposicionales, se abreviará $(\forall\ x \in E)$ por $(\forall x)$ y $(\exists\ x \in E)$ por $(\exists x)$.

Los cuantificadores son de gran utilidad para definir en forma precisa conjuntos o traducir enunciados matemáticos que expresan las propiedades de los objetos en una teoría matemática. Por ejemplo, el conjunto de los múltiplos de 3 en $\mathbb{N}$, notado $3\mathbb{N}$ queda correctamente determinado por $3\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N}\ /(\exists\ n \in \mathbb{N})\ (x = 3n)\}$.

La inclusión o contenencia de un conjunto A en un conjunto B (en el mismo referencial E) se expresa por:

$$A \subseteq B \equiv (\forall\ x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

■ Negación de proposiciones con cuantificadores

La negación de la proposición $(\forall\ x \in E)\ (p(x)$ es $(\exists\ x \in E)\ (\neg p(x)$. En efecto, si se tiene la proposición $(\forall x \in E)(p(x)$, su negación es «No es verdad que para cada a en E, $p(a)$ se verifique»; entonces debe existir al menos un a en E para el cual $p(a)$ es falsa, pero si $p(a)$ es falsa $\neg p(a)$ es verdadera, por tanto $(\exists\ x \in E)\ (\neg p(x)$.

$$\neg\ [(\forall\ x \in E)\ (p(x)] \equiv (\exists\ x \in E)(\neg p(x).$$

La negación de $(\exists\ x \in E)\ (p(x)$ es $(\forall\ x \in E)\ (-p(x)$; se invita al lector a explicar este resultado.

$$\neg\ [(\exists\ x \in E)\ (p(x)] \equiv (\forall\ x \in E)\ (\neg p(x).$$

Si $p(x)$ y $q(x)$ son formas proposicionales sobre un mismo conjunto referencial E, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $[(\forall\ x \in E)\ (p(x) \wedge q\ (x))] \equiv [(\forall\ x \in E)\ (p(x)) \wedge (\forall\ x \in E)\ (q(x))]$.
2. $[(\exists\ x \in E)\ (p(x) \vee q\ (x))] \equiv [(\exists\ x \in E)\ (p(x)) \vee (\exists\ x \in E)\ (q(x))]$.

Una manera de verificar que estas dos proposiciones son verdaderas consiste en deducirlas, aplicando las propiedades de los conectivos lógicos, para el caso particular en el que el conjunto E sea finito y a continuación generalizarlas para el caso en que E sea infinito.

Además, las siguientes implicaciones son verdaderas:

1. $[(\forall x \in E)\ (p(x)) \vee (\forall x \in E)\ (q(x))] \Rightarrow [(\forall x \in E)\ (p(x) \vee q\ (x))]$.
2. $[(\exists x \in E)\ (p(x) \wedge q\ (x))] \Rightarrow [(\exists x \in E)\ (p(x)) \wedge (\exists x \in E)\ (q(x))]$.

ÁLGEBRA EN EL CONJUNTO DE PARTES

Sea E un conjunto referencial y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de partes de E.

■ PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO

Para cada A, B en $\wp(E)$ se tienen las siguientes propiedades:

1. $(A^c)^c{=}A$ (el operador complemento es involutivo).

   En efecto, si $(A^c)^c = \{x \in E / \neg(x \in A^c)\} = \{x \in E / \neg(-(x \notin A))\}$. Utilizando las propiedades de la negación se tiene que $\neg(\neg(x \in A)) \equiv x \in A$, de donde se concluye que $(A^c)^c{=}A$.
2. Si $A^c{=}B^c \Rightarrow A{=}B$.

   Si $A^c{=}B^c$ entonces $(A^c)^c{=}(B^c)^c$. Aplicando la propiedad anterior se deduce $A{=}B$.
3. $E^c{=}\varnothing$ y $\varnothing^c{=}E$ y $E^c{=}\{x{\in}E/\ x{\in}E\}{=}$ y

   $\varnothing^c{=}\{x{\in}E/(x{\in}E)\}{=}\{x{\in}E/x{\in}E\}{=}E$.

■ PROPIEDADES DE LA UNIÓN

Si A y B son dos subconjuntos de E, $p(x)$ y $q(x)$ las formas proposicionales y x pertenece a A y a B, respectivamente, observe que $A \cup B{=}E_{p \vee q}$, lo cual implica que de las leyes lógicas de la disyunción se deducen las propiedades de la unión de conjuntos.

Para cada A, B, C en $\wp(E)$ se tienen las siguientes propiedades:

1. $A \cup \varnothing = A$.
2. $A \cup A^c{=}E$.
3. $A \cup A = A$ (idempotencia).
4. $A \cup B = B \cup A$ (conmutativa).
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociativa).

Se deja como ejercicio al lector el identificar la ley lógica de la cual se desprende cada una de las propiedades anteriores, así como su interpretación utilizando diagramas de Venn-Euler.

■ PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

Si A y B son dos subconjuntos de E, $p\ (x) : x \in A$ y $q(x) : x \in B$ formas proposicionales definidas sobre E, se tiene

$$A \cap B{=}\{x{\in}E/p(x) \wedge q(x)\}{=}E_{p \wedge q}$$

Por tanto, de las leyes lógicas de la conjunción se deducen las siguientes propiedades de la intersección.

Para cada A, B, C en $\wp(E)$

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2. $A \cap A^c = \emptyset$.
3. $A \cap E = A$.
4. $A \cap A = A$ (idempotencia).
5. $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa).
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativa).

Se deja como ejercicio al lector el identificar la ley lógica de la cual se desprende cada una de las propiedades anteriores, así como su interpretación utilizando diagramas de Venn-Euler.

■ RELACIÓN ENTRE COMPLEMENTO, UNIÓN E INTERSECCIÓN

Para cada A, B, C en $\wp(E)$ se tienen las siguientes propiedades:

1. Leyes distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Leyes de D'Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

3. Leyes de absorción:

$$A \cup (A \cap B) = A.$$
$$A \cap (A \cup B) = A.$$

■ PROPIEDADES DE LA RELACIÓN DE CONTENENCIA

Si A y B son subconjuntos de E, $A \subseteq B$ se define por la proposicón

$$(\forall\, x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Para cada A, B, C en $\mathcal{P}(E)$ se tienen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq A$ (reflexiva).
2. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$ (antisimétrica).
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$ (transitiva).
4. $A \subseteq B$ si y sólo si $B^c \subseteq A^c$

■ DIFERENCIA Y DIFERENCIA SIMÉTRICA

■ **Definición 22** *La diferencia de* A *con* B *es el conjunto notado* A-B *(leído* A *diferencia* B*) definido por:*

$$A - B = \{x \in E \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

Note que por definición: $A - B = A \cap B^c$.

■ **Definición 23** *La diferencia simétrica de* A *con* B *es el conjunto notado* A△B *(leído* A *diferencia simétrica* B*) definido por:*

$$A\triangle B = \{x \in E \,/\, x \in A \,\underline{\vee}\, x \in B\}$$

Para cada A, B, C en $\wp(E)$ se tienen las siguientes propiedades:

1. $A\triangle\varnothing = A$.
2. $A\triangle E = A^C$.
3. $A\triangle A = \varnothing$.
4. $A\triangle B = BA$ (Conmutativa).
5. $A\triangle(BC) = (AB)C$ (Asociativa).
6. $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\,(A\cap C)$ (Distributiva).

Se deja como ejercicio al lector el identificar la ley lógica de la cual se desprende cada una de las propiedades anteriores, así como su interpretación utilizando diagramas de Venn-Euler.

■ MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Las proposiciones matemáticas y en especial las de carácter más general tienen habitualmente la forma: "Si... entonces" ($P \Rightarrow Q$), es decir, son implicaciones. Cuando se enuncia una proposición matemática de este tipo se debe entender su verdadero significado: "$P \Rightarrow Q$ es verdadera". De este modo, P y Q no son elementos cualesquiera, sino que existe una relación de causa efecto entre ellas; el símbolo $\Rightarrow$ ya no denota un conectivo lógico (la implicación), sino una relación en el conjunto de proposiciones. En este contexto: $P \Rightarrow Q$ se leerá: P implica Q.

En una proposición matemática de la forma "P implica Q" ($P \Rightarrow Q$ es verdadera), P se denomina *antecedente o hipótesis* y Q *consecuente o conclusión.* Como ejemplo, considere el siguiente teorema de la aritmética de números reales: *Si* x *es un número real positivo, entonces* 2x *es un número real positivo*". La hipótesis es "x *es un número real positivo*" la cual se supone como verdadero para obtener la conclusión "2x *es un número real positivo*".

En algunos textos de matemática no es fácil distinguir con claridad este tipo de proposiciones ya que la hipótesis y la conclusión no se encuentran ligadas con el giro "Si... entonces", sino de otra manera, sin que ello altere su sentido. El teorema anterior puede encontrarse enunciado de las siguientes formas:

- De ser x un número real positivo, se deduce que $2x$ también lo es.
- La hipótesis de ser x un número real positivo lleva como consecuencia que $2x$ es un número real positivo.
- La condición de que $2x$ sea un número real positivo es necesaria para que x sea un número real positivo.
- Para que x sea un número real positivo, es necesario que $2x$ sea un número real positivo.
- Para que $2x$ sea un número real positivo, es suficiente que x sea un número real positivo.
- La condición de que x sea un número real positivo es suficiente para que $2x$ sea un número real positivo.

Así, en lugar de afirmar una proposición condicional $P \Rightarrow Q$ utilizando el giro "Si... entonces", puede aseverarse:

1. La hipótesis P lleva como consecuencia la conclusión Q.

2. La hipótesis P es una condición suficiente para la conclusión Q.
3. La conclusión Q se sigue de la hipótesis P o que es una condición necesaria para ésta. (La conclusión Q es condición necesaria para la hipótesis P.)

Por otra parte, cuando en matemática se enuncia un teorema o propiedad, la proposición que se utiliza siempre está cuantificada. Esto es, se da una forma proposicional válida en un dominio indicado (conjunto referencial) y tácitamente se entiende que se satisface para todos los elementos del dominio, a menos que se indique explícitamente lo contrario. El teorema anterior es de la forma:

$$T\text{: } (\forall\, x \in R)\ (x\text{:}\textit{es positivo} \Rightarrow 2x\text{: }\textit{es positivo}).$$

El objetivo será siempre el mismo, demostrar la validez o falsedad de una proposición T. Para establecer la verdad de la proposición anterior T, se deben utilizar las propiedades básicas de los números reales, las definiciones de la teoría de números reales, otras proposiciones ya demostradas en la teoría (teoremas ya demostrados) y, por supuesto, las leyes lógicas y sus reglas de deducción o inferencia.

A su vez, es usual encontrar algunas proposiciones matemáticas expresadas utilizando términos que no pertenecen estrictamente al dominio de la lógica como, por ejemplo: ecuación, polinomio, sistema, etcétera. Para ilustrar esto, considere el siguiente teorema del álgebra de números reales: Si $a \neq 0$, la ecuación $ax+b = 0$ siempre tiene solución; el cual puede expresarse lógicamente, en forma más correcta, mediante la proposición $a \in \mathbb{R}$ - $\{0\} \Rightarrow (\exists\, x \in R)\ (ax+b=0)$ y el uso de cuantificadores, y queda escrita como:

$$(\forall\, a \in \mathbb{R}\,)\ (\forall\, b \in \mathbb{R}\,)\ ((a \in R\text{-}\{0\}) \Rightarrow (\exists\, x \in \mathbb{R}\,)\ (ax+b = 0)).$$

Para terminar la discusión sobre la manera como se pueden presentar las proposiciones en matemática, considérese el teorema siguiente de la teoría de conjuntos: $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B^c = \varnothing$, en la que la proposición dada es una proposición de la forma "P biimplica Q", pero que significa que "$P \Leftrightarrow Q$ es verdadera". Ya que $P \Leftrightarrow Q$ es lógicamente equivalente a: $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$; afirmar "$P \Leftrightarrow Q$ es verdadera" significa que tanto "$P \Rightarrow Q$ es verdadera" como "$Q \Rightarrow P$ es verdadera", lo cual se expresa diciendo: "P implica Q" y "Q implica P". Así, cuando un enunciado tiene el giro "...si y sólo si ...", las proposiciones dadas no son cualesquiera, sino que existe una relación entre las dos: son causa y efecto la una de la otra; en tal caso el símbolo ya no denota un conectivo lógico (la biimplicación) sino una relación.

Los teoremas que se enuncian utilizando una proposición bicondicional $P \Leftrightarrow Q$ se pueden encontrar expresados de las formas siguientes:

- La proposición P es equivalente a la proposición Q.
- La proposición P es una condición suficiente y necesaria para la proposición Q.
- La proposición Q es una condición necesaria y suficiente para la proposición P.

El uso del giro "...si y sólo si..." en el lenguaje de la matemática va en dos direcciones:

1. Enunciar definiciones: Toda definición de objetos o conceptos nuevos en una teoría se establecen en general utilizando una proposición que incluye el giro "...si y sólo si...". Por ejemplo, en la teoría de conjuntos se define la igualdad de dos conjuntos de la siguiente manera:

$$(\forall A \in \wp(E))\ \forall B \in \wp(E)\ ((A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B\ \wedge B \subseteq A)$$

2. Enunciar teoremas, como ya fue ilustrado anteriormente.

Ya sea que un teorema esté dado en la forma condicional o bicondicional, lo que siempre se desea es asegurar su validez. Lo que subyace a este problema es el concepto de deducción matemática y los métodos de demostración que permiten establecer la validez de los enunciados matemáticos.

■ DEDUCCIÓN

■ **Definición 24** *En una teoría* T, *cualquiera sea, la formación de un enunciado verdadero* C *a partir de un enunciado verdadero* H *se llama deducción de* C *a partir de* H.

En el lenguaje descriptivo, H es la hipótesis y C la conclusión. Se dice que H infiere C. El hecho de que C se pueda deducir de H puede resumirse diciendo que en T la implicación $H \Rightarrow C$ es verdadera. Que una proposición P sea verdadera en una teoría T se indicará simplemente por P y se leerá P es verdadera en T.

Una inferencia $H \Rightarrow C$ en una teoría T se dice justificada si existen reglas lógicas que aseguren la formación de C a partir de H en T por medio de enunciados verdaderos. Las reglas lógicas (o de inferencia) traducen la manera como se pueden generar enunciados verdaderos de otros ya existentes utilizando las leyes lógicas. En otras palabras nos indican la forma en que las leyes lógicas se deben aplicar. Recuerde que las leyes lógicas expresan tautologías.

■ MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Si se desea intentar la edificación o entendimiento de una teoría determinada, se deben distinguir claramente los términos primitivos (objetos o conceptos fundamentales no definidos), los cuales se aplican sin aclarar su significado. Al mismo tiempo, se acepta como principio no utilizar ninguna expresión adicional (concepto deducido o expresiones deducidas), sin antes haber determinado su significación con la ayuda de las nociones primitivas o aquellos conceptos deducidos cuya significación ya esté aclarada previamente. Las proposiciones que nos dan la determinación de la significación se llaman definiciones y los conceptos deducidos se suelen denominar conceptos definidos.

Del mismo modo, se procede con las proposiciones de la teoría considerada; se eligen algunas de ellas por convención (las que parezcan más evidentes) como axiomas o proposiciones fundamentales y se aceptan como verdaderas sin fundamentarlas de modo alguno. En cambio se obliga a fundamentar todas las demás proposiciones deducidas o teoremas antes de reconocer su certeza. La fundamentación de los teoremas matemáticos se denomina demostración y debe apoyarse en los axiomas, en las definiciones y en los teoremas que ya han sido fundamentados (demostrados) con anterioridad.

La lógica matemática es edificada de acuerdo con los principios anteriormente citados. Si se intenta construir otra teoría (como la teoría de conjuntos) siguiendo los mismos principios, es necesario apoyarse en la lógica, es decir: suponer la lógica. Al intentar formular teoremas y definiciones, en cualquier teoría se utilizan los conectivos lógicos sin definir su significado y para la demostración de los teoremas se aplican las leyes lógicas y las reglas de inferencia sin fundamentarlas dentro de la teoría particular. Para la creación de algunas teorías no sólo es conveniente suponer la lógica, sino otras teorías matemáticas previamente establecidas. Así, por ejemplo, en la teoría de probabilidad es necesario suponer la lógica y la teoría de conjuntos entre otras.

Para el entendimiento del pensamiento deductivo y la construcción de las diversas teorías matemáticas, es necesario analizar algunos de los métodos utilizados para la deducción o fundamentación de los teoremas.

■ Demostración por implicación

Los métodos de demostración consisten usualmente en establecer que una forma proposicional presentada en la forma $P \Rightarrow Q$, sobre un referencial E, es una tautología. Para esto se utilizan las reglas de inferencia siguientes:

1. **Regla del modus ponens.** Es fácil demostrar que la proposición
$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$$
es una tautología. La regla lógica asociada a está tautología es el modus ponens, el cual se puede enunciar de la siguiente manera: Si en una teoría T, P es verdadera y $P \Rightarrow Q$ es verdadera, entonces Q es verdadera. Por ejemplo, considere el siguiente razonamiento, como $A \subseteq B$ implica $A \cap B = A$ y se sabe que $A \subseteq B$, entonces se concluye que $A \cap B = A$. Este razonamiento es válido ya que se ha llegado a la conclusión utilizando el modus ponens.
2. **Regla del modus tollens.** La implicación $(\neg Q \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Rightarrow P$ es una tautología y conlleva la segunda regla de inferencia denominada modus tollens, que se enuncia de la forma siguiente: Si en una teoría T $-Q$ es verdadera y $\neg P \Rightarrow Q$ es verdadera, entonces P es verdadera en T. Por ejemplo, considere el siguiente razonamiento: si un número no es par, es impar. Se determinó que el número no es impar, por tanto se concluye que debe ser par.
3. **Regla de la disyunción de casos.** La implicación $[(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$ es una tautología y conduce a la tercera regla de inferencia conocida como la regla de disyunción de casos, la cual se expresa por: Si en una teoría T, $P \Rightarrow Q$ es verdadera y $\neg P \Rightarrow Q$ es verdadera, entonces Q es verdadera en T.
4. **Regla de contraposición.** De la ley lógica $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (-Q \Rightarrow \neg P)$ y del modus ponens se obtiene la siguiente regla llamada ley de contraposición. Si en una teoría T, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ es verdadera, entonces $P \Rightarrow Q$ es verdadera en T.
5. **Regla de simplificación.** De la tautología $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ se obtiene la regla de simplificación, que se enuncia de la siguiente forma: Si en una teoría T, $P \wedge Q$ es verdadera, entonces P es verdadera en T. Obviamente esta regla también se puede enunciar así: Si en una teoría T, $P \wedge Q$ es verdadera, entonces Q es verdadera en T ya que $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$ es una tautología.
6. **Regla del silogismo hipotético.** De la tautología $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ se obtiene la regla del silogismo hipotético. Si en una teoría T, $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow R$ son verdaderas, entonces $P \Rightarrow R$ es verdadera en T.

■ Demostración por el absurdo

En una teoría un enunciado P es contradictorio si $P \wedge \neg P$ es verdadera y de acuerdo con el principio de no contradicción debe ser excluido. Además, en una teoría T si un enunciado P es contradictorio entonces todo enunciado Q es contradictorio. En efecto, si en T la proposición P es verdadera y $\neg P$ es verdadera, y si Q es cualquier otra proposición verdadera en T, la implicación $-P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ es una tautología; entonces de $\neg P$ se deduce $P \Rightarrow Q$. Así, $P \Rightarrow Q$ es verdadera y P es verdadera; entonces por aplicación del modus ponens, Q es verdadera en T. De modo análogo se obtiene que $\neg Q$ es verdadera en T; es decir, Q es un enunciado contradictorio en T.

Para demostrar un enunciado P en una teoría T, se supone que tanto P como $\neg P$ son verdaderas, si se establece que un enunciado Q es contradictorio en T, entonces $\neg P$ es contradictorio en T. Así, P y T no son compatibles. De acuerdo con el principio del tercero excluido P es verdadera en T. Un razonamiento como el anterior es denominado reducción al absurdo. Por ejemplo: suponga que en el álgebra de los números naturales se desea demostrar la siguiente proposición: "El elemento neutro de la adición es único". Si se supone que la proposición: "El elemento neutro de la adición no es único" es verdadera, existen al menos dos números a y b distintos que son elementos neutros para la adición de números naturales. Por tanto, se tiene que $a \neq b$ y para cada número natural x las igualdades siguientes son verdaderas:

$$a+x = x$$
$$b+x = x.$$

Aplicando las propiedades de la igualdad se concluye que

$$a+x = b+x,$$

lo cual implica a su vez que

$$a = b.$$

Esto lleva a una contradicción ya que al suponer $\neg P$ se tiene que las proposiciones $a \neq b$ y $a = b$ son ambas verdaderas. De este modo, lo supuesto es falso; $\neg P$ es falsa y por el principio del tercero excluido P es verdadera. Lo que completa la demostración.

Demostración por contraejemplo

Este método se utiliza para establecer que una forma proposicional $p(x)$ no es siempre verdadera sobre un referencial E. Dada $p(x)$, lo que se quiere demostrar es que la proposición $(\forall x \in E)$ $(p(x)$ es falsa, lo cual equivale a mostrar que $(\forall x \in E)$ $(p(x)$ es verdadera. Gracias a la ley lógica

$$-[(\forall x \in E)\ (p(x)] \equiv (\exists x \in E)\ (-p(x))$$

el problema se reduce a encontrar un $a \in E$ para el cual la proposición $p(a)$ sea falsa.

De esta manera, si en una teoría T se quiere demostrar que un enunciado P no se verifica en todo el conjunto referencial, es suficiente exhibir un ejemplo en el cual P no se satisfaga. Dicho en otras palabras, se debe dar un contraejemplo. Supongamos que en el álgebra de conjuntos se tiene el siguiente enunciado:

$$[(A \cap B) \subseteq (A \cap C)] \Rightarrow (B \subseteq C)$$

donde A, B y C son elementos de $\wp(E)$. Se desea determinar si este enunciado expresa una propiedad dentro de la teoría; esto es: determinar si la proposición es válida para cualquier tema de conjuntos A, B y C de $\wp(E)$. Se pueden utilizar diagramas de Venn-Euler para intuir el valor de verdad de la proposición dada, pero recuerde que un diagrama de Venn-Euler no demuestra la validez o falsedad de una proposición. Si se intuye que la proposición dada no es siempre válida, es necesario demostrarlo construyendo un contraejemplo (un caso particular en el cual la proposición dada sea falsa).

La proposición $[(A \cap B) \subseteq (A \cap C)] \Rightarrow (B \subseteq C)$ no expresa una propiedad. En efecto, si se consideran los conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,b,e,f,m\}$ y $C = \{a,b,c,e,g,h\}$, se tiene $A \cap B = \{a,b\}$, $A \cap C = \{a,b,c\}$; por tanto la proposición $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$ es verdadera pero $B \subseteq C$ es falsa. Como para este caso particular la proposición $[(A \cap B) \subseteq (A \cap C)] \Rightarrow (B \subseteq C)$ es falsa, se ha demostrado que no expresa una propiedad en la teoría de conjuntos.

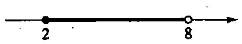
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES Y A LOS EXÁMENES DE LOS CAPÍTULOS

CAPÍTULO 1

Sección 1.1

1. Propiedad conmutativa de la suma
3. Propiedad asociativa de la suma
5. Propiedad distributiva **7.** Propiedad distributiva
9. $3x + 3y$ **11.** $8m$ **13.** $-8y$ **15.** $-5x + 10y$
17. **(a)** $\frac{7}{15}$ **(b)** $\frac{5}{18}$ **19.** **(a)** $\frac{4}{9}$ **(b)** $\frac{15}{2}$
21. **(a)** Falso **(b)** Verdadero **23.** **(a)** Falso **(b)** Verdadero
25. **(a)** $x > 0$ **(b)** $t < 4$ **(c)** $a \geqslant \pi$
(d) $-5 < x < \frac{1}{3}$ **(e)** $|p - 3| \leqslant 5$
27. **(a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ **(b)** $\{2, 4, 6\}$
29. **(a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ **(b)** $\varnothing$
31. **(a)** $\{x \mid x \leqslant 5\}$ **(b)** $\{x \mid -1 < x < 4\}$
33. $-3 < x < 0$

35. $2 \leqslant x < 8$

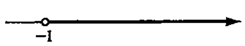


37. $x \geqslant 2$

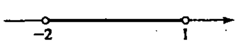
39. $(-\infty, 1]$

41. $(-2, 1]$

43. $(-1, \infty)$

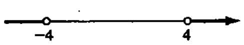


45.



47.

49.



51. **(a)** 100 **(b)** 73 **53.** **(a)** 2 **(b)** -1
55. $3|x + 3|$ **57.** $\frac{1}{2}|x - 5|$ **59.** $x^2 + 9$
61. **(a)** 15 **(b)** 24 **(c)** $\frac{67}{40}$
63. **(a)** $\frac{7}{9}$ **(b)** $\frac{13}{45}$ **(c)** $\frac{19}{33}$

Sección 1.2

1. **(a)** 16 **(b)** -16 **(c)** 1
3. **(a)** $\frac{625}{8}$ **(b)** 100,000 **(c)** 4096
5. **(a)** $\frac{2}{3}$ **(b)** 4 **(c)** $\frac{1}{2}$ **7.** **(a)** 6 **(b)** 4 **(c)** [illegible]
9. **(a)** $\frac{3}{2}$ **(b)** $\frac{9}{4}$ **(c)** $\frac{125}{512}$ **11.** $\sqrt[3]{4}$ **13.** $2\sqrt{5}$
15. t^5 **17.** $6x^7y^5$ **19.** $16x^{10}$ **21.** $4/b^2$
23. $64r^7s$ **25.** $648y^7$ **27.** $\dfrac{x^3}{y}$ **29.** $\dfrac{y^2z^9}{x^5}$
31. $\dfrac{s^3}{q^7r^6}$ **33.** $x^{13/15}$ **35.** $16b^{9/10}$ **37.** $\dfrac{1}{c^{2/3}d}$
39. $y^{1/2}$ **41.** $\dfrac{32x^{12}}{y^{16/15}}$ **43.** $\dfrac{x^{15}}{y^{15/2}}$ **45.** $\dfrac{4a^2}{3b^{1/3}}$
47. $\dfrac{3t^{25/6}}{s^{1/2}}$ **49.** $|x|$ **51.** $x\sqrt[3]{y}$ **53.** $ab\sqrt[5]{ab^2}$
55. $2|x|$ **57.** **(a)** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{3xy}}{3y}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$
59. **(a)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x}$
61. **(a)** 6.93×10^7 **(b)** 2.8536×10^{-5} **(c)** $1.2954 \times 10^{[illegible]}$
63. **(a)** 319,000 **(b)** 0.00000002670
(c) 710,000,000,000,000
65. **(a)** 5.9×10^{12} mi **(b)** 4×10^{-13} cm
(c) 3.3×10^{19} moléculas
67. 1.3×10^{-20} **69.** 1.429×10^{19} **71.** $7.4 \times 10^{-[illegible]}$
73. $8\frac{1}{3}$ min **75.** 41.3 mi

Sección 1.3

1. $6x + 6$ **3.** $3x^2 - 2x + 6$ **5.** $x^3 + 3x^2 - 6x + 11$
7. $-t^4 + t^3 - t^2 - 10t + 5$ **9.** $x^{3/2} - x$

11. $y^{7/3} - y^{1/3}$ **13.** $21t^2 - 29t + 10$
15. $3x^2 + 5xy - 2y^2$ **17.** $1 - 4y + 4y^2$
19. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 5$ **21.** $x^3 + x^2 - 2x$
23. $30y^4 + y^5 - y^6$ **25.** $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4$
27. $x^4 - a^4$ **29.** $1 + 3a^3 + 3a^6 + a^9$ **31.** $a - 1/b^2$
33. $x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ **35.** $1 - x^{2/3} + x^{4/3} - x^2$
37. $1 - 2b^2 + b^4$ **39.** $3x^4y^4 + 7x^3y^5 - 6x^2y^3 - 14xy^4$
41. $2x(1 + 6x^2)$ **43.** $3y^3(2y - 5)$ **45.** $(x + 6)(x + 1)$
47. $(x - 4)(x + 2)$ **49.** $(y - 3)(y - 5)$
51. $(2x + 3)(x + 1)$ **53.** $9(x - 2)(x + 2)$
55. $(3x + 2)(2x - 3)$ **57.** $3(x - 1)(x + 2)$
59. $y^4(y + 2)^3(y + 1)^2$ **61.** $(a + 1)(a - 1)(b + 2)(b - 2)$
63. $(t + 1)(t^2 - t + 1)$ **65.** $(2t - 3)^2$ **67.** $x(x + 1)^2$
69. $(2x + y)^2$ **71.** $x^2(x + 3)(x - 1)$
73. $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$ **75.** $(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$
77. $(y + 2)(y - 2)(y - 3)$ **79.** $(2x^2 + 1)(x + 2)$
81. $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
83. $x^{1/2}(x + 1)(x - 1)$ **85.** $x^{-3/2}(x + 1)^2$
87. $(x^2 + 3)(x^2 + 1)^{-1/2}$
89. $(a + 2)(a - 2)(a + 1)(a - 1)$
91. $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$
95. $(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)$

Sección 1.4 ■

1. $\dfrac{x+1}{x+3}$ **3.** $\dfrac{-y}{y+1}$ **5.** $\dfrac{x(2x+3)}{2x-3}$ **7.** $\dfrac{1}{t^2+9}$
9. $\dfrac{x+4}{x+1}$ **11.** $\dfrac{(2x+1)(2x-1)}{(x+5)^2}$ **13.** $x^2(x+1)$
15. $\dfrac{x}{yz}$ **17.** $\dfrac{3x+7}{(x-3)(x+5)}$ **19.** $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$
21. $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ **23.** $\dfrac{u^2+3u+1}{u+1}$ **25.** $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)}$
27. $\dfrac{2x+7}{(x+3)(x+4)}$ **29.** $\dfrac{x-2}{(x+3)(x-3)}$ **31.** $\dfrac{5x-6}{x(x-1)}$
33. $\dfrac{-5}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ **35.** $-xy$ **37.** $\dfrac{c}{c-2}$
39. $\dfrac{3x+7}{x^2+2x-1}$ **41.** $\dfrac{y-x}{xy}$ **43.** $\dfrac{-1}{a(a+h)}$
45. $\dfrac{-3}{(2+x)(2+x+h)}$ **47.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
49. $\dfrac{x+2}{(x+1)^{3/2}}$ **51.** $\dfrac{2x+3}{(x+1)^{4/3}}$ **53.** $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
55. $\dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$ **57.** $\dfrac{-4}{3(1+\sqrt{5})}$ **59.** $\dfrac{r-2}{5(\sqrt{r}-\sqrt{2})}$
61. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ **63.** Verdadero **65.** Falso **67.** Falso
69. Verdadero **71.** Falso

73. (a) $\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ **(b)** $\frac{20}{3} \approx 6.7$ ohms

Sección 1.5 ■

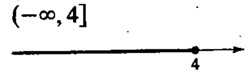
1. (a) Sí **(b)** No **3. (a)** No **(b)** Sí
5. $x = 4$ **7.** $w = -3$ **9.** $y = 12$ **11.** $x = -\frac{3}{4}$
13. $x = -\frac{1}{3}$ **15.** $t = \frac{8}{11}$ **17.** $t = -2$ **19.** $x = -\frac{4}{9}$
21. $x = \frac{29}{2}$ **23.** No hay solución **25.** $x = -4$
27. $x = \pm 3\sqrt{2}$ **29.** $-2, 3$ **31.** 2
33. $x = 2 \pm \sqrt{2}$ **35.** $x = \frac{3}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$ **37.** $-2, 4$
39. $-6 \pm 3\sqrt{7}$ **41.** $\dfrac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ **43.** $-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$
45. $\dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ **47.** $\dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$ **49.** $-50, 100$
51. -4 **53.** ± 2 **55.** $-1, 0, 2$ **57.** 4 **59.** 4
61. 21 **63.** $-1, 0, 3$ **65.** $\pm 2\sqrt{2}, \pm 3\sqrt{3}$
67. 27, 729 **69.** $-\frac{1}{2}$ **71.** ± 1.5 **73.** 3.99, 4.01
75. $x \approx 5.06$ **77.** 1.200, 1.250 **79.** $R = \dfrac{PV}{nT}$
81. $h = \dfrac{A - 2lw}{2l + 2w}$ **83.** $x = \dfrac{2d - b}{a - 2c}$
85. $r = \pm\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ **87.** $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$
89. $i = 100(-1 \pm \sqrt{A/P})$ **91.** 2 **93.** 1
95. $k = \pm 20$

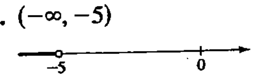
Sección 1.6 ■

1. $0.14x$ **3.** $50w$ **5.** $3s + 15$ **7.** 714
9. 111, 112, 113 **11.** 19 y 36
13. \$9,000 al $4\frac{1}{2}\%$ y \$3,000 al 4% **15.** $7\frac{1}{2}\%$
17. 45 pies **19.** 4 pulg **21.** 25 pies por 35 pies
23. 13 pulg por 13 pulg **25.** $1\frac{1}{2}$ h **27.** 450 mi
29. 4 h **31.** 50 mi/h (o 240 mi/h) **33.** 200 mL
35. 18 g **37.** 0.6 L **39.** 37 min 20 s **41.** 3 h
43. 3 h **45.** 200 m
47. (a) Después de 1 s y de $1\frac{1}{2}$ s **(b)** Nunca **(c)** 25 pies
(d) Después de $1\frac{1}{4}$ s **(e)** Después de $2\frac{1}{2}$ s
49. (a) Después de 17 años, el 1 de enero de 2014
(b) Después de 18.612 años, el 12 de agosto de 2015
51. 215,000 mi **53.** 49 pies, 168 pies y 175 pies
55. 8 h **57.** 7 años **59.** 300 mi **61.** 35 yd
63. 4.55 pies

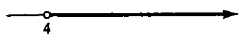
Sección 1.7 ■

1. $\{-1, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$ **3.** $\{-1, 2\}$
5. $(-\infty, 4]$ **7.** $(-\infty, -5)$



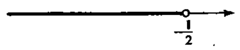


9. $(4, \infty)$

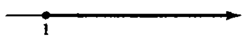


11. $(-\infty, 2]$

13. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

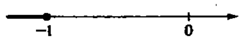


15. $[1, \infty)$

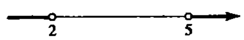


17. $[-1, \infty)$

19. $(-\infty, -1]$

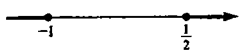


21. $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$

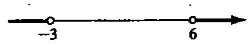


23. $[-3, 6]$

25. $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

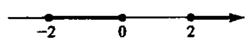


27. $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$

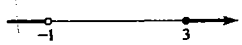


29. $(-2, 2)$

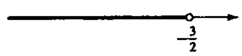
31. $[-2, 0] \cup [2, \infty)$



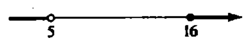
33. $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$



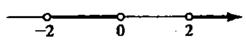
35. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$



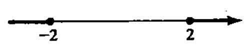
37. $(-\infty, 5) \cup [16, \infty)$



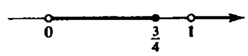
39. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$



41. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



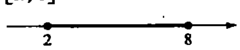
43. $\left(0, \frac{3}{4}\right] \cup (1, \infty)$



45. $\left[-8, -\frac{5}{2}\right)$

47. $(-2, 2)$

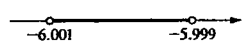
49. $[2, 8]$



51. $(-7, -3)$

53. $[1.3, 1.7]$

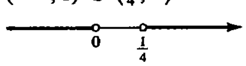
55. $(-6.001, -5.999)$



57. $(2, 6)$

59. $(0, 1]$

61. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$



63. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

65. $68 \leqslant F \leqslant 86$

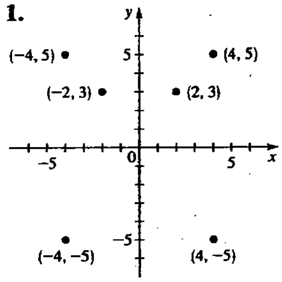
67. **(a)** $T = 20 - \dfrac{h}{100}$ **(b)** 20 °C a −30 °C

69. 0 s a 3 s **71.** Distancias mayores que 30 m

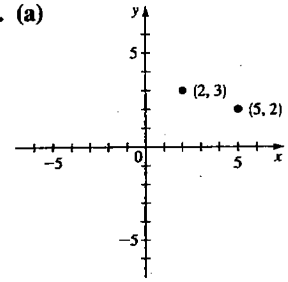
73. $x \geqslant \dfrac{c(a+b)}{ab}$

Sección 1.8

1.



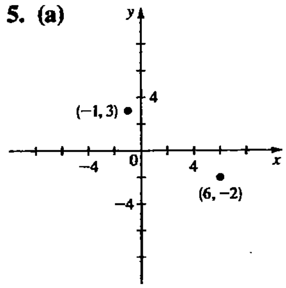
3. **(a)**



(b) $\sqrt{10}$

(c) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

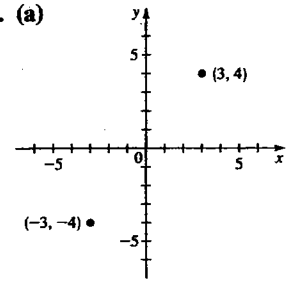
5. **(a)**



(b) $\sqrt{74}$

(c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

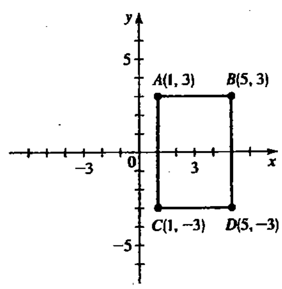
7. **(a)**



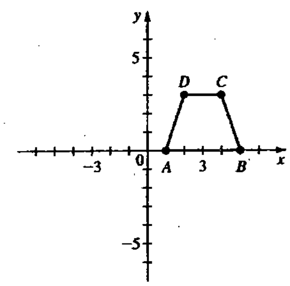
(b) 10

(c) $(0, 0)$

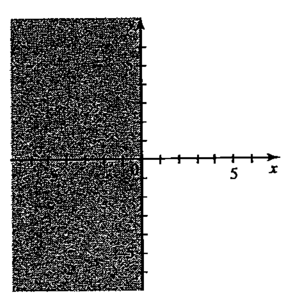
9. 24



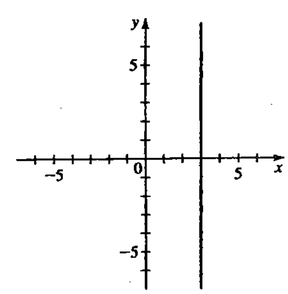
11. Trapezoide, área = 9



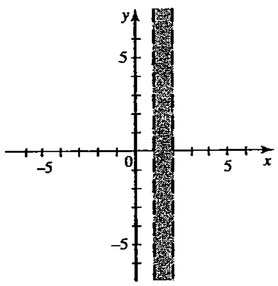
13.



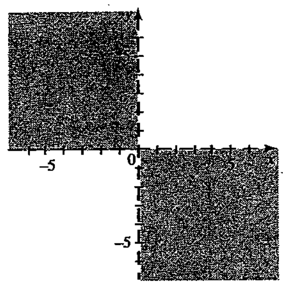
15.



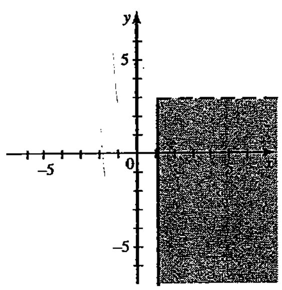
17.



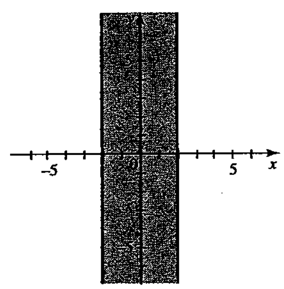
19.



21.

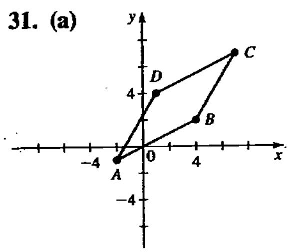


23.



25. $A(6, 7)$ **29. (b)** 10

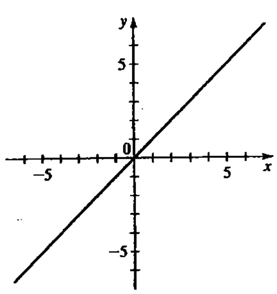
31. (a)



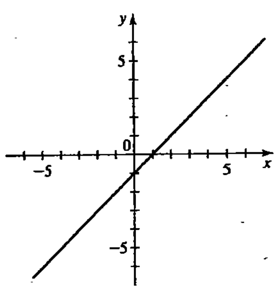
(b) $(\frac{5}{2}, 3)$, $(\frac{5}{2}, 3)$

33. (a) $(8, 5)$
(b) $(a + 3, b + 2)$
(c) $A'(-2, 1)$, $B'(0, 4)$, $C'(5, 3)$

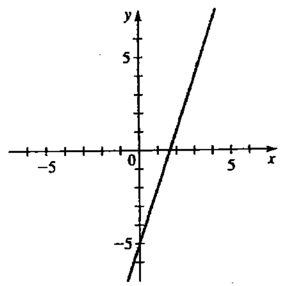
35. intersección en x 0, intersección en y 0, simetría respecto al origen



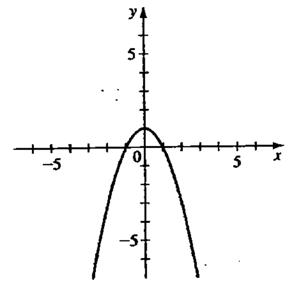
37. intersección en x 1, intersección en y -1, no hay simetría



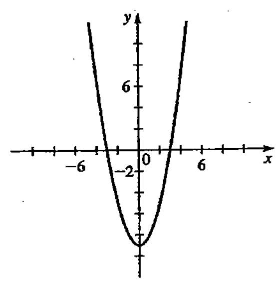
39. intersección en x $\frac{5}{3}$, intersección en y -5, no hay simetría



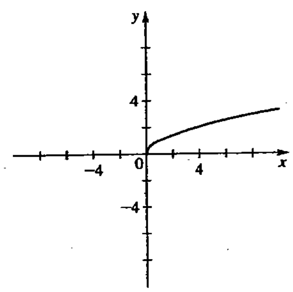
41. intersecciones en x 1, intersección en y 1, simetría respecto al eje y



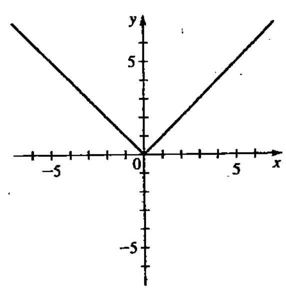
43. intersecciones en x 3, intersección en y -9, simetría respecto al eje y



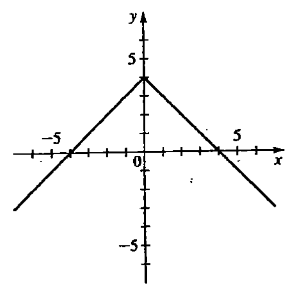
45. intersección en x 0, intersección en y 0, no hay simetría



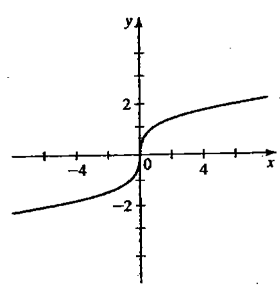
47. intersección en x 0, intersección en y 0, simetría respecto al eje y



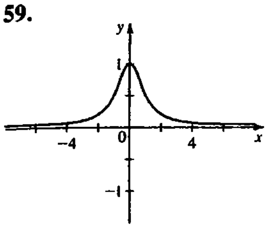
49. intersecciones en x 4, intersección en y 4, simetría respecto al eje y



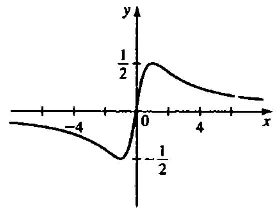
51. intersección en x 0, intersección en y 0, simetría respecto al origen



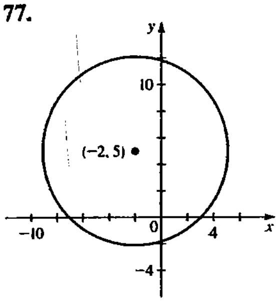
53. Simetría respecto al eje y **55.** Simetría respecto al origen
57. Simetría respecto al origen
59.



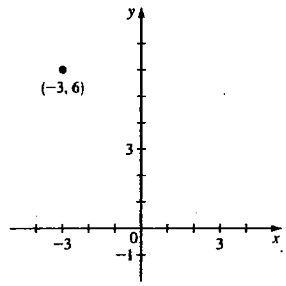
61.



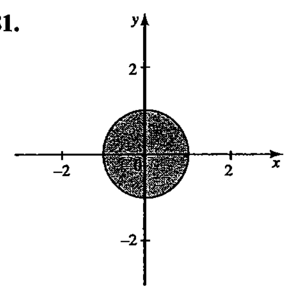
63. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ **65.** $x^2+y^2=65$
67. $(x-3)^2+(y+1)^2=32$
69. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ **71.** $(1,-2)$, 2
73. $(2,-5)$, 4 **75.** $\left(-\frac{1}{4},0\right)$, $\frac{1}{4}$
77.



79.



81.

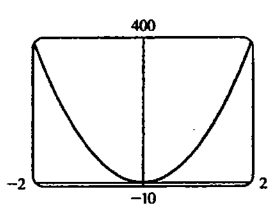


83. 12π

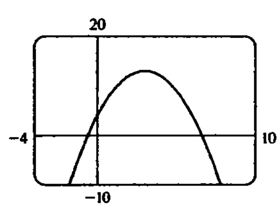
85. $a^2+b^2>4c$, $\left(-\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}b\right)$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

Sección 1.9 ■

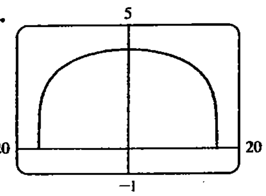
1. (c) **3.** (c) **5.** (c)
7.



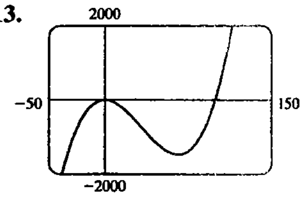
9.



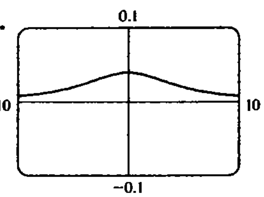
11.



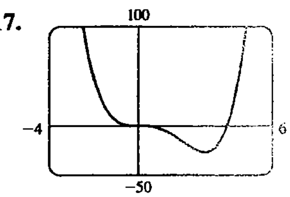
13.



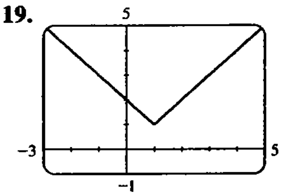
15.



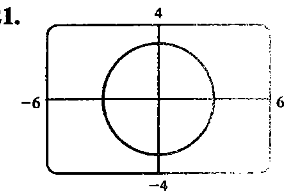
17.



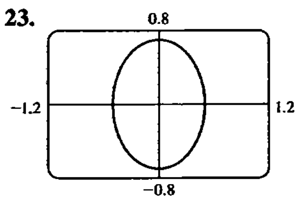
19.



21.



23.

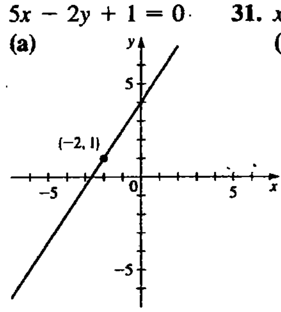


25. 3.0, 4.0
27. 1.0, 2.0, 3.0
29. 1.62
31. −1.0, 0, 1.0
33. $[-2.0, 5.0]$
35. $(-\infty, 1.0] \cup [2.0, 3.0]$

37. $(-1.0, 0) \cup (1.0, \infty)$ **39.** $(-\infty, 0)$

Sección 1.10 ■

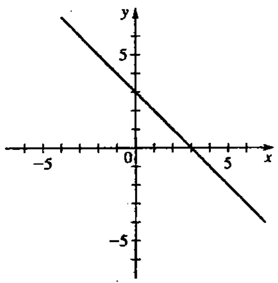
1. 4 **3.** $-\frac{9}{2}$ **5.** 1 **7.** $-2, \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{4}$
9. $x+y-4=0$ **11.** $3x-2y-6=0$
13. $x-y+1=0$ **15.** $2x-3y+19=0$
17. $5x+y-11=0$ **19.** $3x-y-2=0$
21. $3x-y-3=0$ **23.** $y=5$
25. $x+2y+11=0$ **27.** $x=-1$
29. $5x-2y+1=0$ **31.** $x-y+6=0$
33. **(a)**



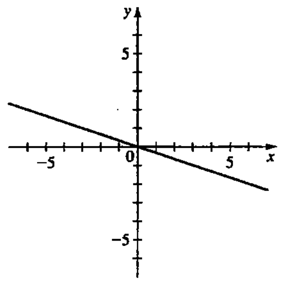
(b) $3x-2y+8=0$

35. Todas las rectas pasan por (3, 2)

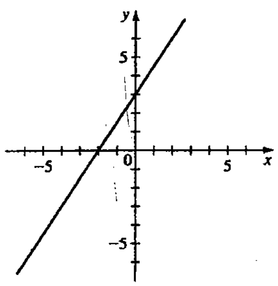
37. $-1, 3$



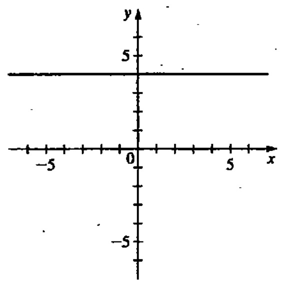
39. $-\frac{1}{3}, 0$



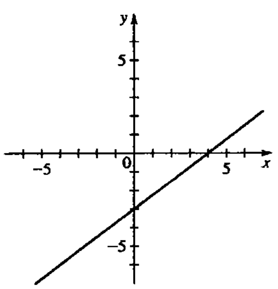
41. $\frac{3}{2}, 3$



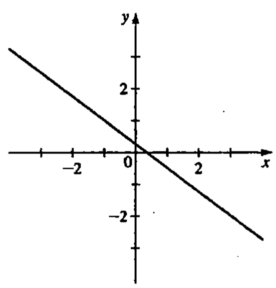
43. $0, 4$



45. $\frac{3}{4}, -3$



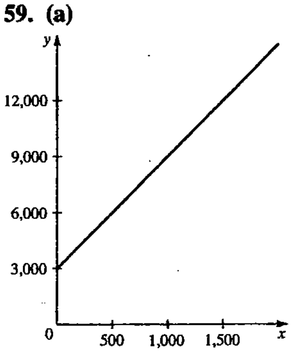
47. $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$



53. $x - y - 3 = 0$ **55.** **(b)** $4x - 3y - 24 = 0$

57. 16,667 pies

59. **(a)**



(b) La pendiente representa el costo de producción por tostador; la intersección en *y* la representa el costo mensual fijo.

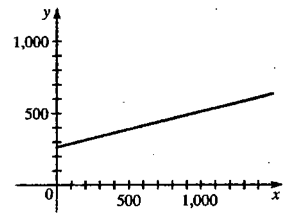
61. **(a)** $t = \frac{5}{24}n + 45$ **(b)** 76 °F

63. **(a)** $P = 0.434d + 15$, siendo P la presión en lb/pulg^2 y d la profundidad en pies **(b)** 196 pies

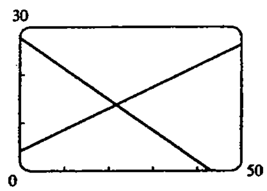
65. **(a)** $C = \frac{1}{4}d + 260$ **(b)** \$635

(c) La pendiente representa el costo por milla.

(d) La intersección en *y* representa el costo anual fijo.



67. **(a)**



(b) (21.82, 13.82)

(c) Precio \$21.82, cantidad 13.82

Repaso del capítulo 1 ■

1. Propiedad conmutativa de la suma

3. Propiedad distributiva

5. $-1 < x \leq 3$

7. $(2, \infty)$

9. 6 **11.** $\frac{1}{6}$ **13.** 11 **15.** 4 **17.** $12x^5y^4$

19. $9x^3$ **21.** x^2y^2 **23.** $\dfrac{x(2 - \sqrt{x})}{4 - x}$ **25.** $\dfrac{4r^{5/2}}{s^7}$

27. 7.825×10^{10} **29.** 1.65×10^{-32}

31. $3xy^2(4xy^2 - y^3 + 3x^2)$ **33.** $(x - 2)(x + 5)$

35. $(4t + 3)(t - 4)$ **37.** $(5 - 4t)(5 + 4t)$

39. $x^{-1/2}(x - 1)^2$ **41.** $y(a + b)(a - b)$

43. $2x^3(x - 3)(x - 6)$ **45.** $6x^2 - 21x + 3$

47. $4a^4 - 4a^2b + b^2$ **49.** $2x^{3/2} + x - x^{1/2}$

51. $\dfrac{x - 3}{2x + 3}$ **53.** $\dfrac{x + 1}{x - 4}$ **55.** $\dfrac{1}{x + 1}$ **57.** $-\dfrac{1}{2x}$

59. $\dfrac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$ **61.** 4 **63.** $\frac{15}{2}$ **65.** -30

67. 2, 7 **69.** $-1, \frac{1}{2}$ **71.** $\dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ **73.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

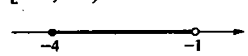
75. 20 lb de pasas, 30 lb de nueces **77.** 4:00 P. M.

79. 1 h 50 min

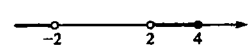
81. $(-3, \infty)$

83. $[\frac{10}{3}, \infty)$

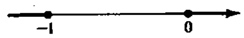
85. $[-4, -1)$



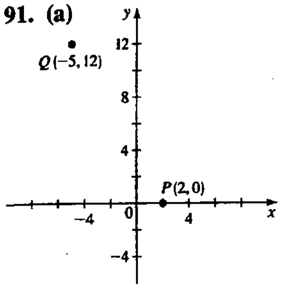
87. $(-\infty, -2) \cup (2, 4]$



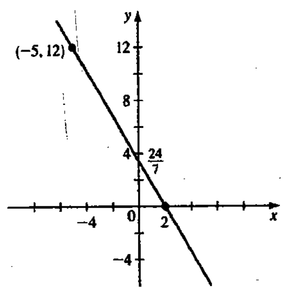
89. $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

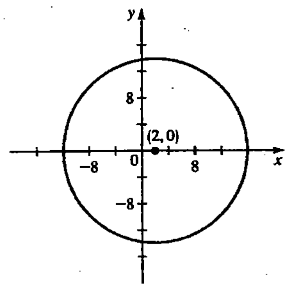


91. **(a)**

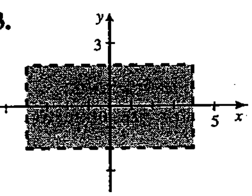


(b) $\sqrt{193}$ **(c)** $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$
(d) $y = -\frac{12}{7}x + \frac{24}{7}$ **(e)** $(x-2)^2 + y^2 = 193$

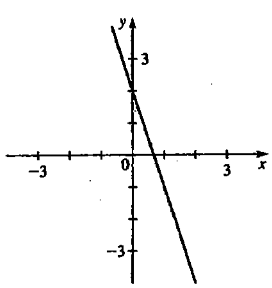


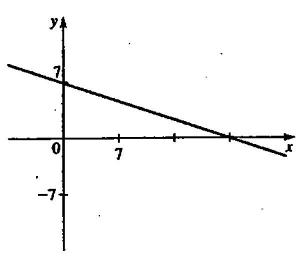


93.

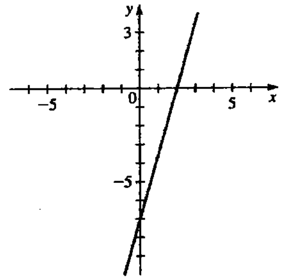


95. *B* **97.** $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 26$
99. Círculo, centro en (−1, 3), radio 1
101. No hay gráfica **103.** $2x - 3y - 16 = 0$
105. $3x + y - 12 = 0$ **107.** $x + 5y = 0$
109. $x^2 + y^2 = 169$, $5x - 12y + 169 = 0$
111. No hay simetría **113.** No hay simetría

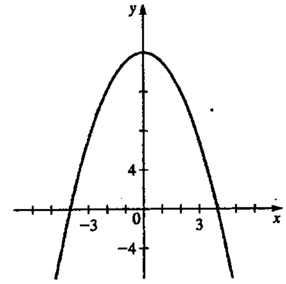




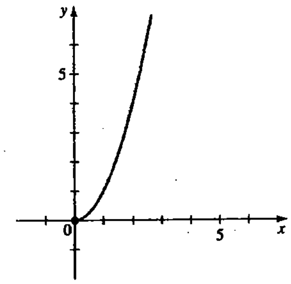
115. No hay simetría



117. Simetría respecto al eje *y*



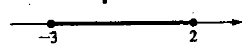
119. No hay simetría



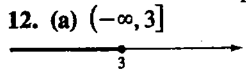
121. $x = -1.53, -0.35, 1.88$
123. $x \leq 1.03$

Examen del capítulo 1 ■

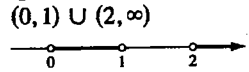
1. **(a)**



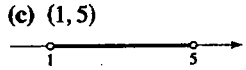
(b) $(-\infty, 5)$; $[-2, 1]$ **(c)** 53
2. **(a)** 81 **(b)** $5^6 = 15{,}625$ **(c)** 2 **(d)** $\frac{1}{8}$
3. **(a)** $8\sqrt{2}$ **(b)** $54a^6b^{14}$ **(c)** $\dfrac{8x^{1/4}}{y}$
(d) $\dfrac{x+2}{x-2}$ **(e)** $\dfrac{1}{x-2}$
4. **(a)** 3.25×10^{11} **(b)** 8.931×10^{-6}
5. **(a)** $2x^2 - 7x - 15$ **(b)** $x - y$
(c) $9t^2 + 24t + 16$
6. **(a)** $(3x-5)(3x+5)$ **(b)** $(3x+5)(2x-1)$
(c) $(x^2-3)(x-4)$ **(d)** $x(x+3)(x^2-3x+9)$
(e) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$
7. $\dfrac{x(\sqrt{x}+2)}{x-4}$ **8.** $\dfrac{V}{2h(2h+1)}$
9. **(a)** −10 **(b)** 1 **(c)** −3, 4 **(d)** No hay solución
(e) $0, \frac{1}{2}, 1$ **(f)** $0, -3$
10. 120 mi **11.** 50 pies por 120 pies
12. **(a)** $(-\infty, 3]$



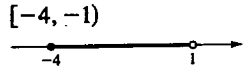
(b) $(0, 1) \cup (2, \infty)$



(c) $(1, 5)$



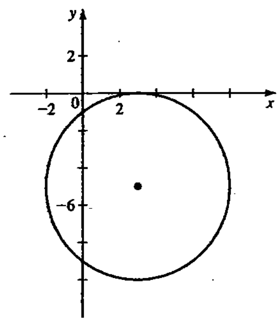
(d) $[-4, -1)$



13. 41 °F a 50 °F

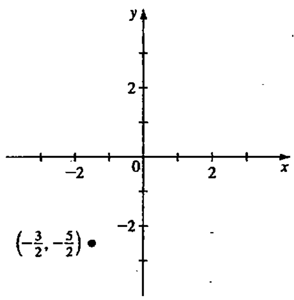
14. **(a)** 20 **(b)** $(-1, -4)$ **(c)** $4x + 3y + 16 = 0$
(d) $3x - 4y - 13 = 0$ **(e)** $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

15. **(a)**



$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$

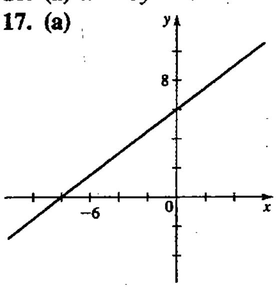
(b)



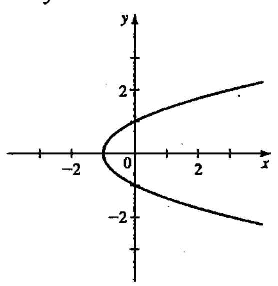
$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 0$

16. **(a)** $x + 3y - 7 = 0$ **(b)** $4x - y + 12 = 0$

17. **(a)**



(b)



CAPÍTULO 2

Sección 2.1 ■

1. *Ventajas*: Se pueden analizar las diferentes perturbaciones o modificaciones que sufriría un objeto (o una situación), bajo ciertas condiciones sin necesidad de alterar dicho objeto (o situación) y por tanto el modelo da un marco de referencia para el análisis lógico y coherente del objeto (o situación) permitiendo colocarse en diferentes escenarios, analizando las consecuencia de cada uno de ellos sin modificar en absoluto al objeto (o situación). *Desventaja*: Un modelo es una representación de la realidad y por tanto puede que omita factores relevantes del objeto o situación, sobre todo cuando el objeto sea muy complejo.
3. Modelos de objetos microscópicos.
5. Modelo concreto.
7. Modelo analógico.
9. Modelo analógico.
11. Modelo analógico.
13. Modelo simbólico.
15. Verdadero.
17. Falso.
19. Verdadero.
21. Falso.
23. Falso.
25. Falso.
27. b.
29. c.
31. c. y d.
33. Concretos: Modelos a escala de un muelle, una fotografía y una reproducción
    Analógicos: El barómetro, los planos de una maquinaria y gráficos estadísticos.
    Cuantitativos: modelos para el crecimiento de poblaciones, modelos financieros y económicos, modelos de conexión de redes.
35. La explicación queda a consideración de los alumnos.

Sección 2.2 ■

1. Modelo del gasto familiar mensual, modelo de diseño de rutas desde la casa a a universidad, modelos de presupuesto para un evento.
3. *Medida de desempeño*: C: costo total en bencina
   Parámetros: d: distancia entre las dos ciudades (km); c_l: precio del litro de bencina ($); r: promedio de rendimiento del automóvil a usar (km/litro)
   Restricciones: $d > 0, c_l > 0, r > 0$
   Relaciones del modelo: .
5. $n(M \cap F \cap C^c) = 37$, $n(M \cap F^c \cap C) = 25$, $n(M^c \cap F \cap C) = 48$, $n(M^c \cap F^c \cap C) = 57$, $n(M^c \cap F \cap C^c) = 67$, $n(M \cap F^c \cap C^c) = 88$, $n(M) = 500$, $n(F) = 502$, $n(C) = 480$, $n(M^c) = 450$, $n(F^c) = 448$, $n(M \cap F) = 387$, $n(M^c \cap F) = 115$, $n(M^c \cap F^c) = 335$, $n(F \cap C) = 398$, $n(F^c \cap C) = 82$, v, $n(M \cap C) = 375$, $n(M^c \cap C) = 105$, $n(M \cap C^c) = 125$, $n(M^c \cap C^c) = 345$ mas los 6 datos de la situación.
7. Modelo descriptivo conjuntista. *Conjunto referencial*: R: Conjunto de técnicos de la empresa; *Categorías*: H: técnicos que hablan correctamente español; S: Técnicos solteros; P: Técnicos que pueden conseguir un reemplazo para su cargo. El objetivo del modelo es determinar $n(H \cap S \cap P)$ para elegir 20 de ellos.

9. *Medida de desempeño*: C: cantidad total de combustible liberado desde el hundimiento.
Variable de decisión: n: número de días trascurridos desde el hundimiento.
Restricciones: $n \geq 0$
Relaciones del modelo: $C = 25n^2 + 2{,}975n$

11. *Medida de desempeño*: V: volumen de la barra de chocolate.
Variable de decisión: h: cantidad reducida en el largo y ancho
Restricciones: $0 < h < 5$
Relaciones del modelo: $V = 2h^2 - 30h + 100$

13. *Medida de desempeño*: P: Cantidad a producir en un tiempo determinado.
Variable de decisión: d: cantidad demandada en este tiempo.
Restricciones: $d \in IN$
Relaciones del modelo: $P = n + 1$ donde $n \in IN$ tal que $n - 1 < 1.031d \leq n$

Sección 2.3 ■

1. $C_t = 82{,}000 + 3{,}850x$ el costo de fabricar 100 sillas de estilo al día es $467,000.
3. a) $C_t = 485{,}000 + 565x$ b) $I = 1{,}250x$ c) $C_t = 1{,}530{,}250$ $I = 2{,}312{,}500$.
5. $C_t = 150{,}000 + 3{,}775x$, el costo de fabricar 33 artículos a la semana es $274,575.
7. $C = 2{,}500x + 15{,}000$.
9. (45,60).
11. a) $x = 27.58 \approx 28$ b) Si el precio de venta se mantiene, el equilibrio se obtiene, en este caso, al producir $33.98 \approx 34$ artículos, no siendo ventajoso en este momento.
13. a) 13,000 toneladas al mes b) 2,200 toneladas.
15. En el año anterior se vendieron aproximadamente 19,179 artículos y en este año aproximadamente 21,179 artículos.
17. a) Aproximadamente 4,706 libros. b) Una perdida de U$12,000. c) Debe cobrar U$23. d) Una ganancia de U$11,800.
19. $7{,}550{,}000 - 604{,}000t$. Después de 4 años el valor es de $5,334,000.
21. 18.33%.
23. El valor en el fondo al final de 8 años es de U$31,846.22, el valor en libros al final de 8 años es de U$48,153,78, la depreciación que debe cargarse al final de décimo año es U$5,706.54.

Repaso ■

1. F
3. V
5. F
7. F
9. F
11. V
13. Los datos son resultados de experiencias que no describen las relaciones entre variables.
19. *Medida de desempeño*: G: gastos totales de hospedaje.
Variable de decisión: n: número total de días de hospedaje.
Restricciones: $n \in N$
Relaciones del modelo: $G = 1{,}175 + 22{,}325n$
21. (a) T: Número de trabajadores a contratar (b) d: días de plazo (c) $T \in N, d \in N$ (d) $T = \dfrac{3000}{d}$
23. *Medida de desempeño*: C: Gasto total en publicidad.
Variable de decisión: x: tiempo de publicidad en radio; y: tiempo de publicidad en televisión
Restricciones: $x \geq 0, y \geq 0$
Relaciones del modelo: $C = 262{,}500x + 564{,}375y$
$$y = \frac{3}{4}x$$
114.8 minutos en radio y 86.1 minutos en televisión.
25. (a) Hipótesis: El crecimiento de la población de insectos depende del crecimiento de la población de las hembras. Es apropiado en vista que las hembras son las que depositan los huevos.
(b) *Medidas de desempeño*: x_n:Número total de hembras menores después de n años; y_n:Número total de hembras jovenes después de n años; z_n:Número total de hembras adultas después de n años.
Variable de decisión: n: número de años trascurridos desde el inicio del estudio.
Restricciones: $n \in N$
Relaciones del modelo: $x_n = 4y_{n-1} + 3z_{n-1}$; $y_n = \frac{1}{2}x_{n-1}$; $z_n = \frac{1}{4}y_{n-1}$
27. *Medidas de desempeño*: x:Número total de bacterias de la cepa B_1; y:Número total de bacterias de la cepa B_2; z: Número total de bacterias de la cepa B_3.
Variable de decisión: C_1:Cantidad de unidades de alimento A_1 colocadas en el tubo diariamente; C_2:Cantidad de unidades de alimento A_2 colocadas en el tubo diariamente; C_3:Cantidad de unidades de alimento A_3 colocadas en el tubo diariamente.
Restricciones: $C_1, C_2, C_3 \in N \cup \{0\}, x, y, z \in N \cup \{0\}$
Relaciones del modelo: $2x + 2y + 4z = C_1$; $x + 2y = C_2$; $x + 3y + z = C_3$.
29. *Medidas de desempeño*: h: altura del edificio.
Variable de decisión: s: longitud de la sombra; θ: medida del ángulo del sol con la horizontal
Restricciones: $s \geq 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
Relaciones del modelo: $h = s \tan\theta$:

31. *Medidas de desempeño*: A: Cantidad acumulada de dinero después de n años.
Variable de decisión: P y n
Parámetro: r
Relaciones del modelo:
(a) $A=P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}$ (b) $A=P\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$ (c) $A=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$

33. (a) *Objetivo del modelo:* Estimar el tiempo que tarde una rata blanca en aprender el camino de salida de un laberinto (atravesar un laberinto dependiendo del número de veces que sea sometida al experimento). *Medida de desempeño*: T_n Tiempo en que tarda la rata en atravesar el laberinto en el n-ésimo intento.*Variable de decisión: n:* Número de intentos o veces que la rata es sometida al experimento. *Restricción*: $n \geq 1$ y $n \in IN$. *Ecuaciones del modelo:*

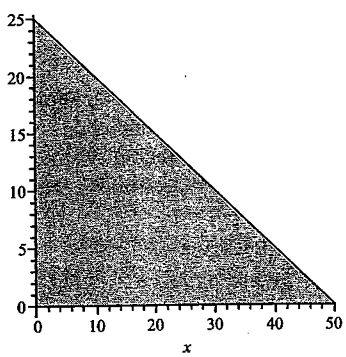
$$T_n = \frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n}$$

(b) (i) 3.043 minutos (ii) 20 (iii) No.

35. $y = 10 - 2x$ donde x, y es la cantidad que el consumidor puede comprar de cada artículo.

37. (a)Si x: Número de chips ensamblados, $x \in IN$; I: El ingreso total por x chips; C_1: El costo total de ensamblar x chip utilizando la alternativa 1; C_2: El costo total de ensamblar x chips utilizando la alternativa 2. $I = 28.5x$, $C_1 = 44{,}000 + 161x$, $C_2 = 152{,}000 + 9x$ (b) Sin importar la alternativa, el negocio será rentable si se ensamblan 7,795 chips o más (es decir, a partir de 7,795 chips). (c) (0,15428) la alternativa 1 es más rentable que la 2 y (15429,18000) la alternativa 2 es más rentable que la 1.

39. (a) Si x: cantidad de motores de automóvil e y: cantidad de motores de automóvil producidos. $y = -\frac{1}{2}x + 25$ b) x es un entero entre 0 y 50 e y un entero entre 0 y 25
c)



41. x: Cantidad de unidades de producto A; y: cantidad de unidades de producto B
$6x + 6y = 110$, $3x + 6y = 150$, $4x + 2y = 60$

43. \$7,877,500

45. \$13,125,000

47. $d = \frac{1}{169}(777{,}400 - 20p)$; aumentarían a 3351 estanterías aproximadamente.

49. $s = 8p - 2{,}800$

51. (a) $d = -\frac{52}{3}p + 46{,}400$ (b) p = 2,497.30, total gastado: \$7,775,368.52

Examen del capítulo 2

2. *Medida de desempeño: C*:cantidad de clientes. *Variables de decisión*: P: precio por masaje. *Restricciones:* $C \in$; ; $0 < P \leq 12{,}500$. *Relaciones del modelo*: $C = \sqrt{\frac{112{,}500 - 9P}{5}}$ ·

3. Un modelo de probabilidades. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego?

4. x: desplazamiento horizontal; y: desplazamiento vertical. $x = \frac{k}{y^2}$.

5. (a) *Medida de desempeño*: *U*:Utilidad total. *Variables de decisión*: x: Número de participantes *Restricciones:* $x \in \mathbb{N}$; *Relaciones del modelo*: $U = 126{,}000x - 2{,}520{,}000$. (b) \$1,260,000 (c) 20 participantes.

6. (a) 600 y 100 respectivamente. (b) $I = 800p - \frac{2}{105}p^2$, restricciones $10{,}500 \leq p \leq 36{,}750$ (c) p = 21,000 (d) $d = 400$ unidades $I = \$8{,}400{,}000$

7. *Medida de desempeño*: r: interés anual. *Variables de decisión*: P: Capital inicial, A: monto final a 3 años, n: número de veces que se capitalizan los intereses en un año. *Restricciones:* $P > 0$, $A > P$, $n \in$, *Relaciones del modelo*:$r = n\left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{3n}} - n$,(a) $r = 0.5326$ (b) $r = 0.435$ (en la realidad jamás se podrá obtener el monto deseado).

8. *Medida de desempeño*: C: costo total de matriales. *Variables de decisión*: l: longitud del lado de la base; V: capacidad deseada. *Restricciones:* $l > 0$, $V > 0$ *Relaciones del modelo* $C = 5{,}250l^2 + 21{,}000\frac{V}{l}$.

9. (a) *Medida de desempeño*: C: cantidad de calcio de la persona. *Variables de decisión*: d: número de días trascurridos desde comenzó a perder calcio. *Restricciones:* $d \in \mathbb{N}$

Relaciones del modelo $C = 18 - 0.0003d$. (b) 6,667 días aproximadamente.

10. (a) x: calificación escala inicial; y: calificación en la escala final. $y = \frac{5x+42}{11}$. (b) $x = 0.84$.

11. *Medida de desempeño*: *VP*: cantidad prestada. *Variables de decisión*: m: monto a pagar por periodo; n: número de pagos por año; t: tiempo en años del préstamo *Parámetros*: r: tasa anual del préstamo. *Restricciones:* $m > 0, n \in ;, t > 0$. Relaciones del modelo $VP = \frac{mn}{r}\left[1-\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}\right]$. Puede pedir prestado: $837,684.90

CAPÍTULO 3

Sección 3.2 ■

1. $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{7}{27}, a_4 = \frac{5}{27}$.

3. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 5$.

5. $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16$.

7. $a_1 = \sqrt{2}-1, a_2 = \sqrt{3}-\sqrt{2}, a_3 = 2-\sqrt{3}, a_4 = \sqrt{5}-2$.

9. $a_1 = 2, a_{10} = 2.5937, a_{50} = 2.6916, a_{100} = 2.7048, a_{200} = 2.7115$.

11. Si $x \neq 1$ $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$. Si $x = 1$ el resultado es n.

13. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

15. $-\frac{1}{3}2^{n+1}5^{-n} + \frac{1}{4}5^{-n} + \frac{5}{12}$

17. Es una P.G. y la suma es

19. $d = 3$.

23. $\frac{10!}{3!(7)!}\left(\frac{a}{3}\right)^3 (9b)^7$

25. 1365, -1365, 0.

27. 455.

29. $a_k = -4+5k$, $-4n+5\frac{n(n+1)}{2}$.

31. $a_k = -5+2k$, $-5n+n(n+1)$.

33. $a_k = -3+3k$, $-3n+3\frac{n(n+1)}{2}$.

35. U$ 294,000.

37. 324.

39. ¾

41. $a^{\frac{3}{2}}$

43. $a_k = 13 \cdot 3^{k-3}$, $\frac{13}{9} \cdot \frac{3^{10}-1}{2}$.

45. $a_k = -3\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$, $\frac{10}{3} \cdot \left(\left[\frac{1}{10}\right]^{10} - 1\right)$

47. aprox. $10,950.

49. $1 - \frac{1}{n+1}$.

51. 2^{21}.

53. 705,432.

Sección 3.3 ■

1. $(1,\infty)$ $(-\infty,0)$, 1, No existe, 0, 1.

3. $(4,\infty)$, $(-\infty,1)$, 4, No existe, 1, 4.

5. No tiene, No tiene, no existe, no existe, no existe, no existe.

7. Converge a 0.

9. Diverege.

11. converge a $\frac{1}{1-a}$ solo si a < 1.

13. Converge a 1/2.

15. Límite 1.

17. Límite $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

21. Límite $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

43. Existe y vale x.

45. Es Falsa.

Sección 3.4 ■

1. Verdadera.

3. Falsa.

5. Falsa.

7. Falsa.

11. e^2

13. $e^{-1/2}$

Repaso

11. Si en el lugar 11, No, Si en el lugar 23, No.

13. No existe, 5/3, no existe, 5/3, monótona creciente.

15. 1/2, no existe, 1/2, no existe, monótona decreciente.

19. No es monótona ni acotada. No es monótona pero está entre 1 y -1

21. Es acotada.

23. Una sucesión no acotada inferiormente.

25. 99.

27. aprox. 63,736.

29. 5566 / 7503.

31. $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

33. -4.

35. 1/6.

37. e.

39. 0.

41. $7a^2 + 7b^2 + 70ab$.

43. 9.

45. $x^2 - 6x - 13$ ó $-x^2 + 6x + 13$.

47. 9, 12, 15.

49. 2,334,267.

51. $x^2 + 4x + 1$.

53. $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$

55. $9{\cdot}4^4, 9{\cdot}4^5$.

57. $\dfrac{29 \pm 5\sqrt{409}}{32}$

59. $75582y^8x^{11}$.

61. No existe.

Examen

1. $r = -3, d = -84$.

2. Constante.

4. $9\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right], (-1)^{n+1}$.

5. 38, 840.

7. 2^8.

9. $\frac{4}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{21}\right) + \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{22}\right)$.

10. a) $a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$.

b) $a_n = \frac{1}{n}$.

11. a) (0,3) b) Si. c) Mínimo es 0. No tiene máximo. d) Supremo es 3 y el ínfimo es 0.

12. a) 1, b) ½ c) e.

13. b) límite es $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. $0 \le a \le 2$.

14. a) Verdadera. b) Verdadera.

CAPÍTULO 4

Sección 4.1

1. $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 3x+1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = (x+2)^2 \end{aligned}$$

5. Dividir por 3 y a continuación restar 5.

7. Elevar al cuadrado, multiplicar por 2 y finalmente restar 3.

9. $$\begin{array}{ccc} f_1: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} & f_2: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} & f_3: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} \\ a \mapsto a & a \mapsto a & a \mapsto b \\ b \mapsto b, & b \mapsto c, & b \mapsto a \\ c \mapsto c & c \mapsto b & c \mapsto c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_4: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} & f_5: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} & f_6: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} \\ a \mapsto b & a \mapsto c & a \mapsto c \\ b \mapsto c, & b \mapsto a, & b \mapsto b \\ c \mapsto a & c \mapsto b & c \mapsto a \end{array}$$

11. $$\begin{aligned} a: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ (r,h) &\mapsto a(r,h) = 2\pi r(h+r) \end{aligned}$$. Conjunto de partida: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

Conjunto de llegada: $\mathbb{R}_+$.

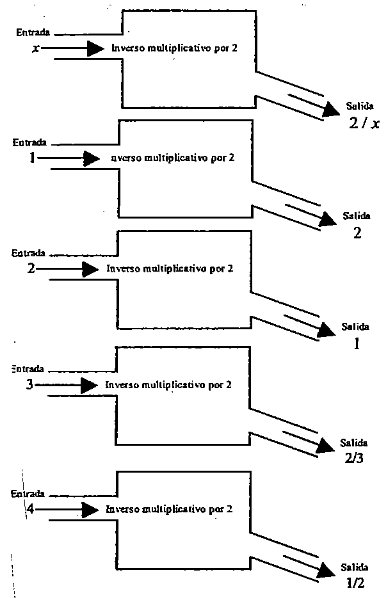
13. Si $P_1 = (a)$ y $P_2 = (b)$ entonces

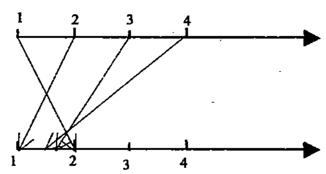
$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ (P_1, P_2) &\mapsto d(P_1, P_2) = |a-b| \end{aligned}$$

15. Si $P_1 = (a,b,c)$ y $P_2 = (d,e,f)$ entonces

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ (P_1, P_2) &\mapsto d(P_1, P_2) = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2} \end{aligned}$$

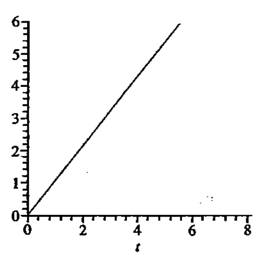
17.





19. a) $\begin{array}{llll} d: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & t & \mapsto & d(t)=1{,}080t \end{array}$ nde d es la distancia entre usted y la tormenta, t la longitud del intervalo de tiempo.

b) la constante k = 1,080 es aproximadamente la rapidez del sonido (en pies/s)



c) 8,640 pies.

21. $\begin{array}{llll} c: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & c(x)=\begin{cases} 4{,}500x & \text{si } 1\le x\le 9 \\ 4{,}250x & \text{si } \quad x\ge 10 \end{cases} \end{array}$,

23. $\begin{array}{llll} c_T: & \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & (x,y) & \mapsto & c_T(x,y)=x+2y \end{array}$, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$

25.

Número de hijos	Frecuencia relativa
0	24
1	36
2	22
3	12
4	4
5	2

27.

Nivel de azúcar	Frecuencia
4.0-4.8	24
4.9-5.7	36
5.8-6.6	22
6.7-7.5	12
7.6-8.4	4
8.5-9.3	2

29. $\begin{array}{llll} p: & \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (b,h) & \mapsto & p(b,h)=2b+2h \end{array}$ Conjunto de partida: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Conjunto de llegada: $\mathbb{R}_+$.

31. $a=6\sqrt[3]{v^2}$.

33. $\begin{array}{llll} L: & \mathbb{R}_+\cup\{0\} & \to & \mathbb{R}_+\cup\{0\} \\ & d & \mapsto & L(d)=\dfrac{5d}{7} \end{array}$

35. $\begin{array}{llll} v: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & v(x)=(12-2x)(20-2x)x \end{array}$

37. $\begin{array}{llll} A: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & h & \mapsto & A(h)=2h\sqrt{r^2-h^2} \end{array}$

39. a) $\begin{array}{llll} c: & \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (p,n) & \mapsto & c(p,n)=kpn \end{array}$, k constante de proporcionalidad. Conjunto de partida: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, conjunto de llegada: $\mathbb{R}_+$

b) $\begin{array}{llll} c: & \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (p,n) & \mapsto & c(p,n)=\dfrac{1}{8}pn \end{array}$

41. a) $\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}_+\cup\{0\} & \to & \mathbb{R}_+\cup\{0\} \\ & x & \mapsto & F(x)=kx \end{array}$, k constante de proporcionalidad. Conjunto de partida: $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$, conjunto de llegada: $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$.

b) 8 c) 32N

43. a) $T: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$d \mapsto T(d) = \sqrt{kd^3}$

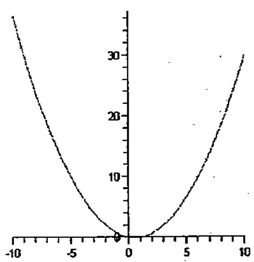
b) $k = \dfrac{365^2}{(9.3\times10^7)^3} \cong 1.65629\times10^{-19}$ c) 59,976 días aprox. 164 años

Sección 4.2 ■

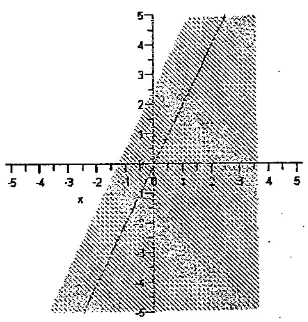
1. a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$ $\text{Rang}(f) \subseteq \wp(\mathbb{N})$ b) $f(17) = \{1,17\}$ $f(30) = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}, f(124) = \{1,2,4,31\}$ c) $G_f = \{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N} \wedge f(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divide a } n\}\} \subseteq \mathbb{N} \times \wp(\mathbb{N})$

3. Es función en x: $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{3}$. $Dom(f) = \mathbb{R}$,

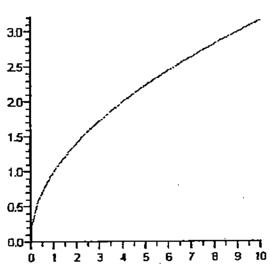
$\text{Rang}(f) = [-\dfrac{1}{12}, +\infty)$



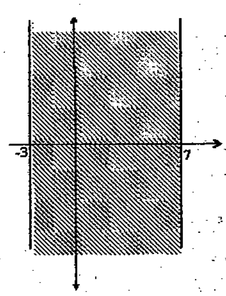
5. No es función.



7. Es función: $g(x) = \sqrt{x}$ $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \text{Rang}(g) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$



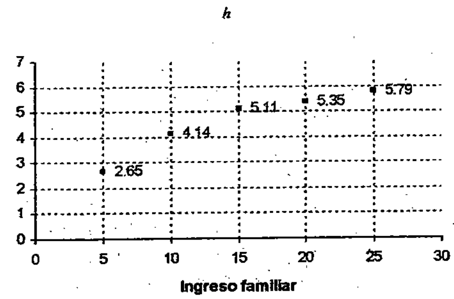
9. No es función.



11. $f(5,1925) = 2.59$, $f(10,2200) = 3.94$, $f(20,1650) = 5.35$, $f(25,1925) = 5.77$. Cantidad de kilos de carne consumidos a la semana por familia según ingreso anual.

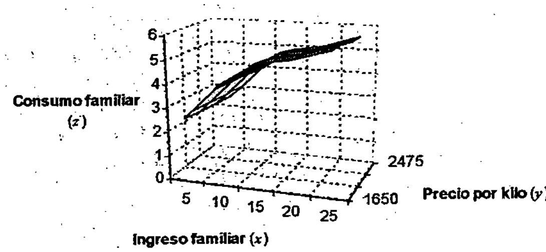
13.

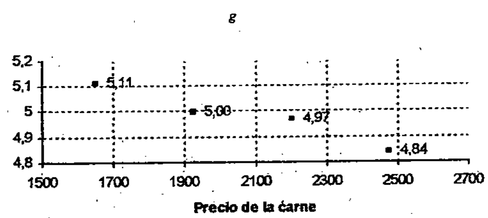
x	5	10	15	20	25
$h(x)$	2.65	4.14	5.11	5.35	5.79



Consumo de carne (kilos por semana) según ingreso familiar cuando el precio por kilo se fija en $1,650 el kilo.

15.

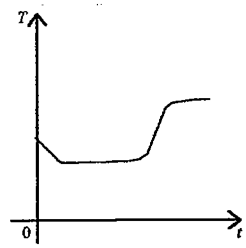




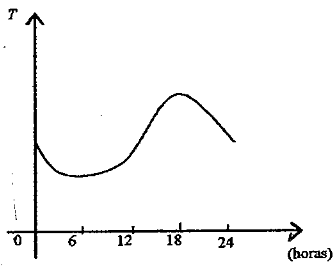
Los puntos en la gráfica de la función f tienen tres componentes (x, y, z) donde x representa el ingreso familiar, y el precio del kilo de carne y z el consumo semanal de carne. La gráfica de h corresponde a la intersección de la gráfica de f con un plano paralelo al plano YZ que pasa por $y = 1,650$ y la gráfica de g corresponde a la intersección de la gráfica de f con un plano paralelo al plano XZ que pasa por $x = 15$.

17. El peso de esta persona aumenta a medida que crece; después continúa creciendo mas lentamente; entonces, posiblemente la persona se apega a una dieta estricta cuando tiene 30 años y su peso disminuye bruscamente; después vuelve a ganar peso, y al final la ganancia de peso se nivela.

19.

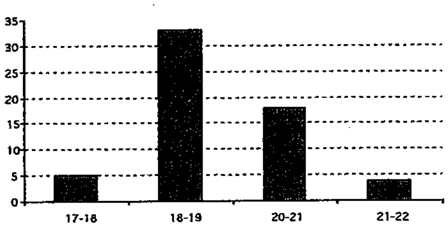


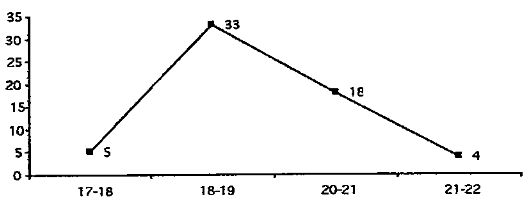
21.



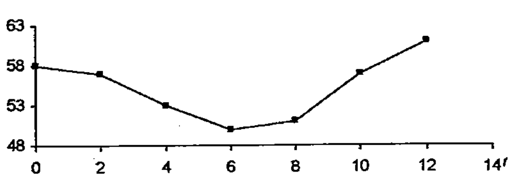
23. a) *Dom(f)* = {L, Ma, Mc, J, V, S, D} (los días de la semana) Rang(*f*) = {26, 28, 28.5, 30, 32} b) Entre el sábado y el domingo c) Entre el lunes y el martes.

25. La función *f* asigna el número de estudiantes de un curso universitario dependiendo de su edad. $\text{Dom}(f)=\{[17,18),[18,19],[20,21),[21,22)\}$. $\text{Rang}(f)=\{4,5,18,33\}$ b) 55% c) 36.6% d)





27.



29. $+:\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a,b) \mapsto +(a,b)=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

$\text{Dom}(+)=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, $\text{Rang}(+)=\mathbb{R}^2$

31.
$$\begin{aligned} s(a,b) &= s((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \\ &= (a_1+b_1,a_2+b_2) \\ &= (b_1+a_1,b_2+a_2) \\ &= s((b_1,b_2),(a_1,a_2)) \\ &= s(b,a) \end{aligned}$$

Conmutatividad de la suma

33. Si $a=(a_1,a_2)$, sea $a^*=(-a_1,-a_2)$.

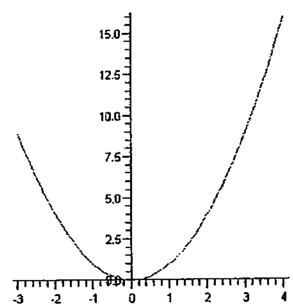
$s(a,a^*)=s((a_1,a_2),(-a_1,-a_2))=(a_1-a_1,a_2-a_2)=(0,0)=e$

Existencia de inversos aditivos.

35. a)

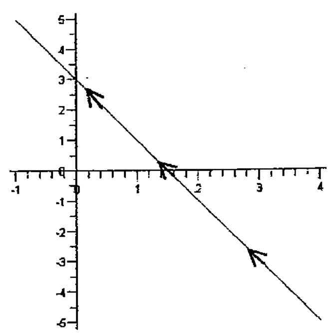
t	x	y	
-3	-3	9	(-3,9)
-2	-2	4	(-2,4)
-1	-1	1	(-1,1)
0	0	0	(0, 0)
1	1	1	(1, 1)
2	2	4	(2, 4)
3	3	9	(3, 9)
4	4	16	(4, 16)

b)

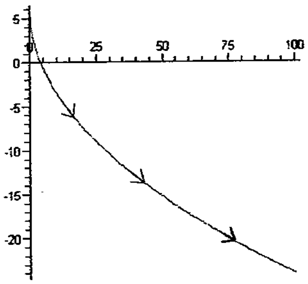


No es la representación gráfica de la función α, ya que la gráfica de la función α es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y no de $\mathbb{R}^2$

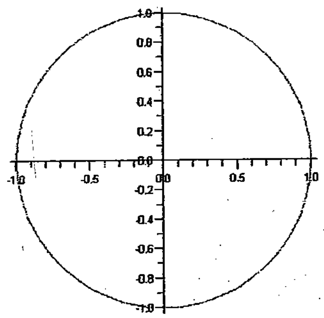
37.



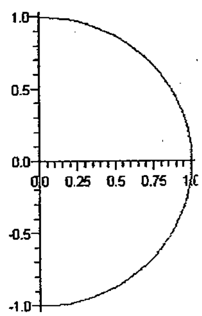
39.



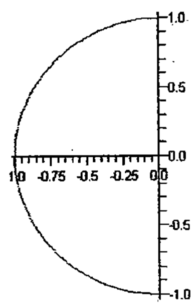
41.



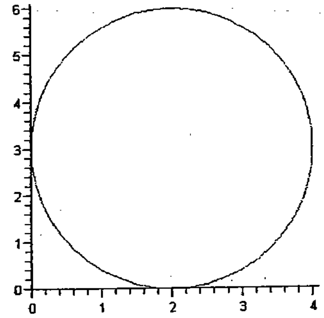
43.



45.



47.



Sección 4.3

1. (a) 2,0,2,3 (b) [−3,3], [0,3]

3. (a) 3, 2, −2, 1, 0 (b) [−4,4], [−2,3]

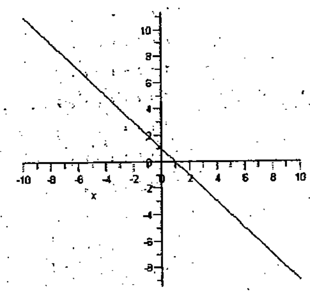
5. (a) $f(0)$ (b) $g((-3)$ (c) −2, 2

7. (a) Si (b) No (c) Si (d) No

9. Función, dominio [−3,2], rango [−2,2]

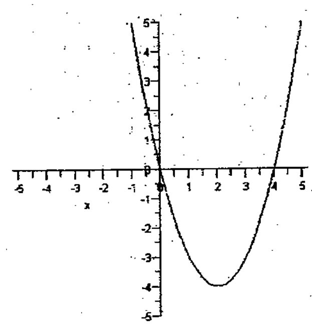
11. No es una función.

13. (a)



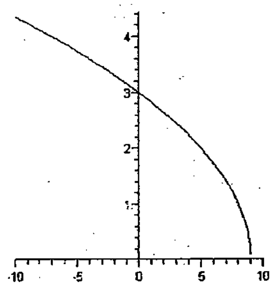
(b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

15. (a)



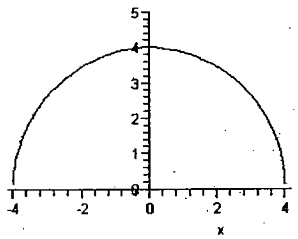
(b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

17. (a)



(b) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 9]$

19. (a)



(b) $\text{Dom}(f) = [-4, 4]$

21. $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$, $\text{Rang}(f) = (0, +\infty)$.

23. $\text{Dom}(h) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, $\text{Rang}(h) = [0, +\infty)$.

25. $\text{Dom}(t) = [-2, 3) \cup (3, +\infty)$, $\text{Rang}(t) = \mathbb{R}$

27. $\text{Dom}(z) = (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$, $\text{Rang}(z) = [0, +\infty)$.

29. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\text{Rang}(g) = \{-1, 1\}$

31. $\text{Dom}(p) = (-1, 1]$, $\text{Rang}(p) = \{0, 1\}$

33. $5, -3, 2a + 2b + 1, 2a + 2b + 2$

35. Para todo x en $\mathbb{R}$.

37. Para todo x y h en $\mathbb{R}$.

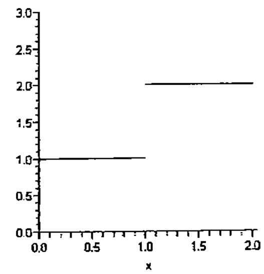
39. Para todo t en $\mathbb{R}$.

41. Para todo x en $[-2, 2]$.

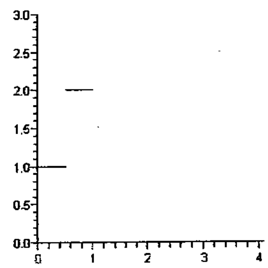
43. Para todo y en $[-1, 1]$.

45. Para todo s en $[-4, 4]$.

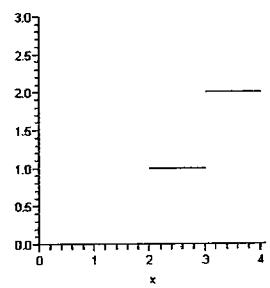
47. (a)



(b) $\text{Dom}(g) = [0,1]$

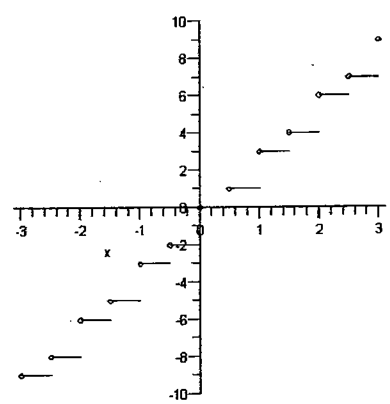


(c) $\text{Dom}(h) = [2,4]$

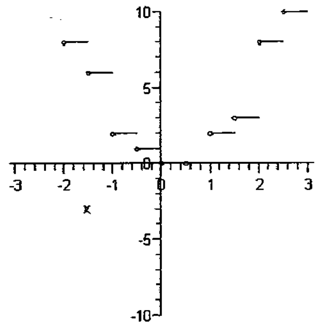


(d) $\text{Dom}(k) = \varnothing$

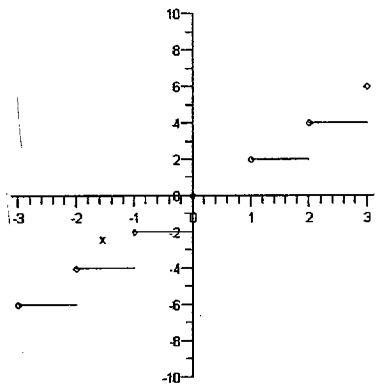
49. (a)



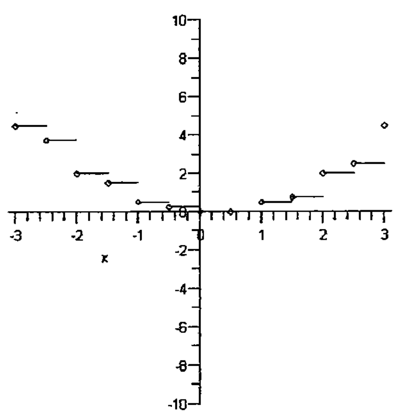
(b)



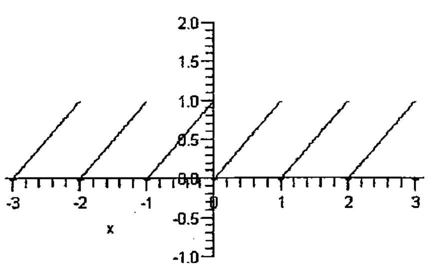
(c)



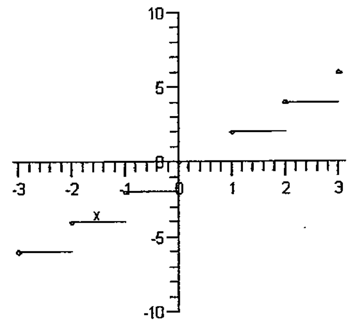
(d)



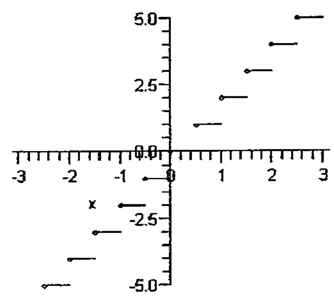
51.



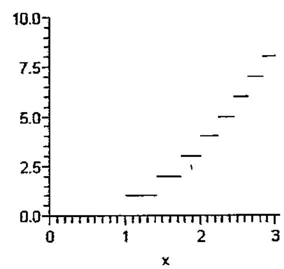
53.



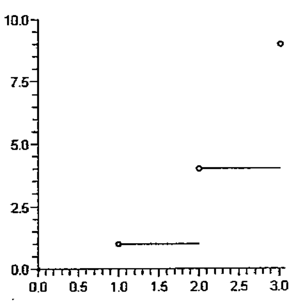
55.



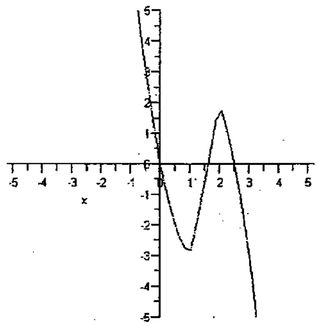
57.



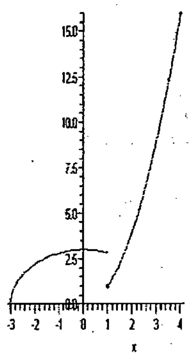
59.



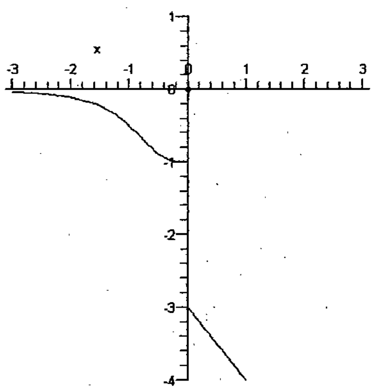
65. $\mathrm{Dom}(s)=\mathbb{R}$, $\mathrm{Rang}(s)=\mathbb{R}$ ·



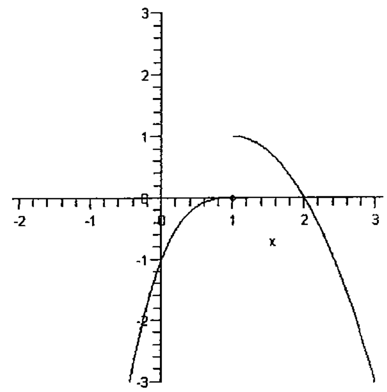
67. $\mathrm{Dom}(g)=[-3,4]$, $\mathrm{Rang}(g)=[0,16]$ ·



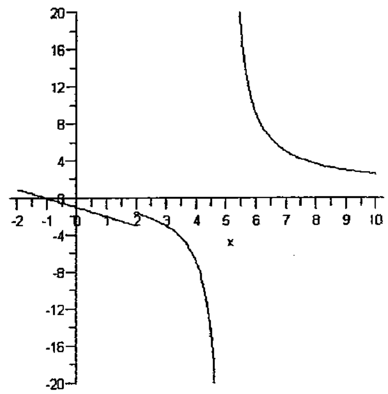
69. $\mathrm{Dom}(i)=\mathbb{R}-\{0\}$, $\mathrm{Rang}(i)=(-\infty,-3)\cup(-1,0)$ ·



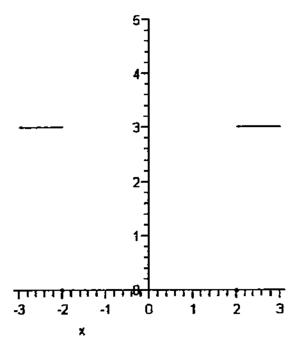
71. $\mathrm{Dom}(k)=\mathbb{R}$, $\mathrm{Rang}(k)=(-\infty,1)$



73. $\mathrm{Dom}(m)=\mathbb{R}-\{5\}$, $\mathrm{Rang}(m)=\mathbb{R}$

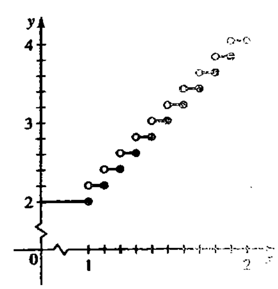


75. $\mathrm{Dom}(p)=\mathbb{R}$, $\mathrm{Rang}(p)=\{0,3\}$ ·



77.

$$C(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 2.2 & \text{si} \quad 1<x\le 1.1 \\ 2.4 & \text{si} \quad 1.1<x\le 1.2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ 4.0 & \text{si} \quad 1.9<x\le 2 \end{cases}$$



79. (a) $E_y=[1,4)$ (b) $E_y=\left[\frac{1}{3},1\right)$ (c) $E_y=\left(\frac{\sqrt{11}}{2},\sqrt{3}\right]$

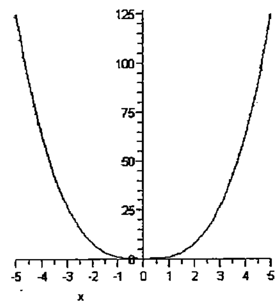
81. (a) 0,1 (b) $(0,1)$ (c) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

85. $f(x)=-\frac{7}{6}x-\frac{4}{3}$, $-2\le x\le 4$

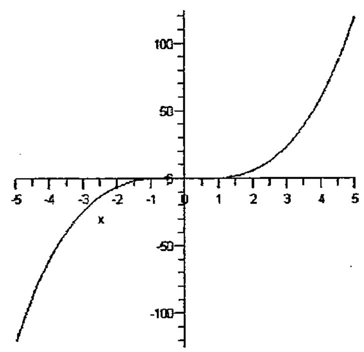
87. $f(x)=1+\sqrt{1-x}$, $x\le 1$

Sección 4.4

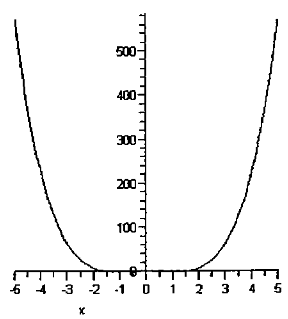
1. Par



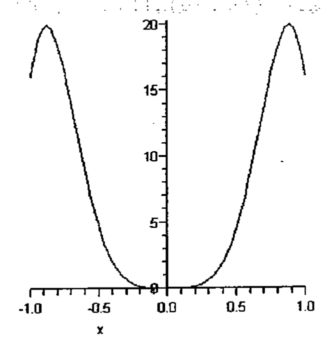
3. Impar.



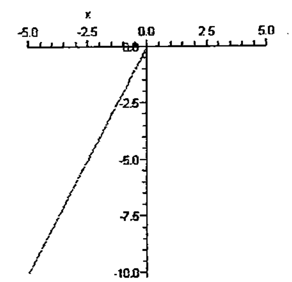
5. Par



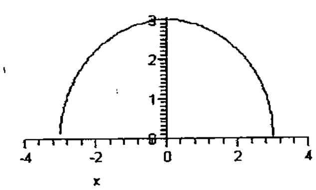
7. Par



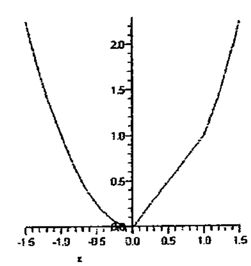
9. $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, $\text{Rang}(f)=(-\infty,0]$, no es par, ni impar, ni periódica.



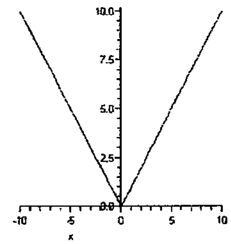
11. $\text{Dom}(f)=[-3,3]$, $\text{Rang}(f)=[0,3]$, es par.



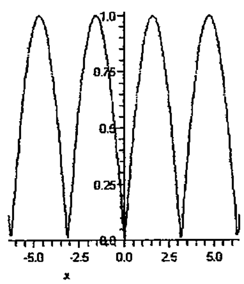
13. $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, $\text{Rang}(f)=[0,+\infty)$, no es par, ni impar, ni peródica.



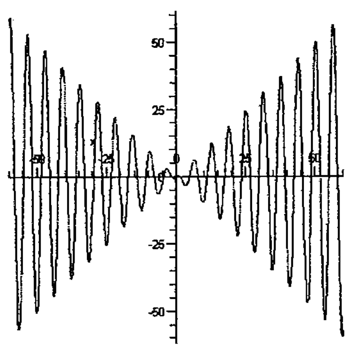
15. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rang}(f) = [0, +\infty)$, es par.



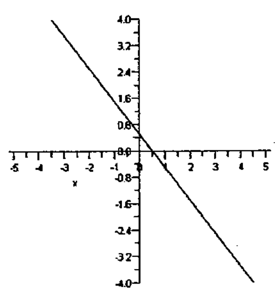
17. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rang}(f) = [0,1]$. Par y periódica de periodo π



19. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$. No es par, ni impar, ni periódica.



21. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$. No es par, ni impar, ni periódica.



23. Decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, creciente en $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$. En $x = \frac{1}{4}$ la función tiene un valor mínimo.

25. Decreciente en $(3, +\infty)$, creciente en $(-\infty, 3)$

27. Decreciente en $(4,6)$ $(6,7)$, creciente en $(3,4)$

29. Desplazamiento de la gráfica de f hacia la derecha 4 unidades.

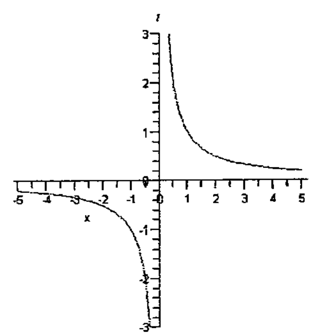
31. Desplazamiento de la gráfica de f hacia la izquierda 5 unidades.

33. Alargue de la gráfica de f vertical por un factor de 3.

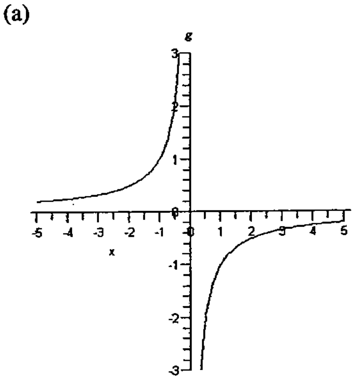
35. Reflexión de la gráfica de f en el eje Y.

37. Contracción horizontal de la gráfica de f por un factor de 1/2.

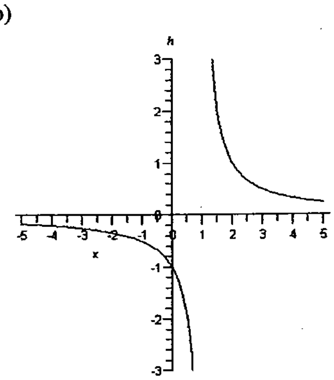
39.



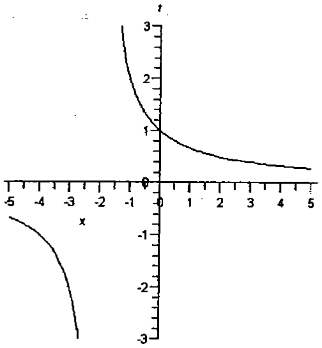
(a)



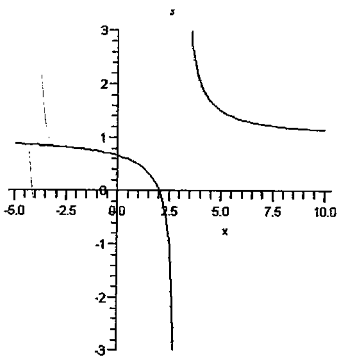
(b)



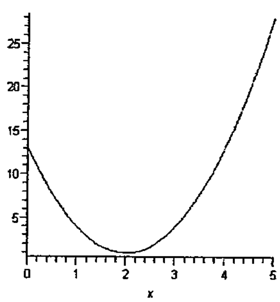
(c)



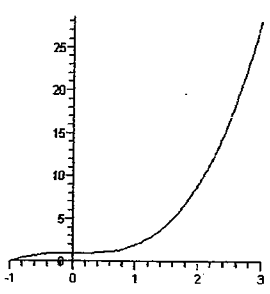
(d)



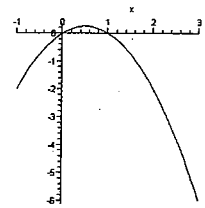
41. Decreciente en $(-\infty, 2)$, creciente en $(2, +\infty)$. Mínimo en $x = 2$.



43. Creciente en todo su dominio: $[-1,3]$. Mínimo en $x = -1$, máximo en $x = 3$.



45. Creciente en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, decreciente en $\left(\frac{1}{2},3\right)$. Mínimo en $x = 3$ y máximo en $x=\frac{1}{2}$.



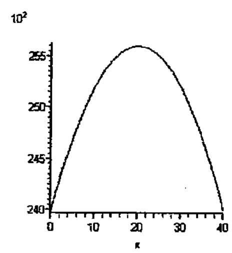
49. 30 veces.

51. $x = y = 50$

53. 1,200 m por 600 m.

55. 650 pesos

57. $p(x) = 24{,}000 + 160x - 4x^2$



80 árboles.

Sección 4.5

1. $(f+g)(x)=x^2+5$, $(f-g)(x)=x^2-2x-5$, $(fg)(x)=x^3+4x^2-5x$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-x}{x+5}$. $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f-g)=\mathrm{Dom}(fg)=\mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(\frac{f}{g})=\mathbb{R}-\{-5\}$

3. $(f+g)(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, $(f-g)(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$, $(fg)(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$. $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f-g)=\mathrm{Dom}(fg)=[-1,1]$, $\mathrm{Dom}(\frac{f}{g})=[-1,1)$

5. $(f+g)(x)=\begin{cases} x+4 & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x+3}+x+5 & \text{si } x>3 \end{cases}$,

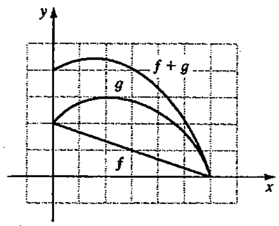
$(f-g)(x)=\begin{cases} -x-6 & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x+3}-x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$,

$(fg)(x)=\begin{cases} -x-5 & \text{si } x<3 \\ \left(\sqrt{x+3}\right)(x-5) & \text{si } x>3 \end{cases}$,

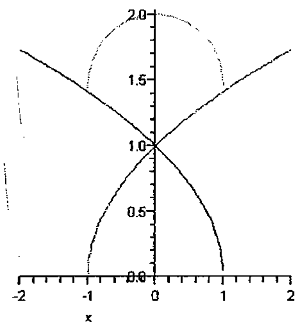
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x+5} & \text{si } x<3 \\ \frac{\sqrt{x+3}}{x+5} & \text{si } x>3 \end{cases}$.

$\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f-g)=\mathrm{Dom}(fg)=\mathbb{R}-\{3\}$,
$\mathrm{Dom}(\frac{f}{g})=\mathbb{R}-\{-5,3\}$.

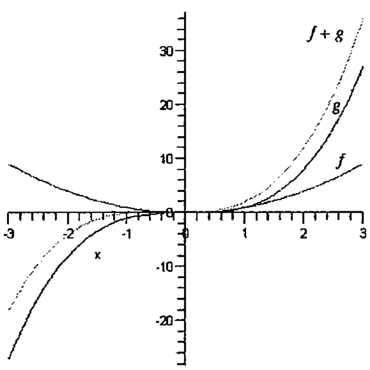
7.



9.



11.



13. a) $f(g(0))=-1$ y $g(f(0))=4$
b) $f(f(2))=119$ y $g(g(3))=0$
c) $(g\circ f)(-2)=340$ y $(f\circ g)(-2)=79$
d) $(g\circ f)(x)=64x^2-40x+4$, $(g\circ f)(x)=8x^2-24x-1$
e) $(g\circ g)(x)=x^4-6x^3+6x^2+9x$, $(f\circ f)(x)=64x-9$
f) $x^4-6x^3+70x^2-31x+4$

15. 5

17. 3

19. -2

13. $(f\circ g)(x)=8x+1$, $(g\circ f)(x)=8x+11$, $(g\circ g)(x)=16x-5$ y $(f\circ f)(x)=4x+9$
$\mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}$

23. $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x^3+2x}$, $\mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$,
$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x}$, $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$,
$(g\circ g)(x)=x^9+6x^7+12x^5+10x^3+4x$, $\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}$ y
$(f\circ f)(x)=x$, $\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

25. $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x-2}+2$, $\mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}-\{2\}$,
$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\quad-\{0\}$, $(g\circ g)(x)=\dfrac{x-2}{5-2x}$,
$\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ y $(f\circ f)(x)=x+4$, $\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}$.

27. $(f\circ g)(x)=\dfrac{2x+4}{x}+2$, $\mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$,
$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}-\{-1\}$,
$(g\circ g)(x)=\dfrac{x}{3x+4}$, $\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ y
$(f\circ f)(x)=x$, $\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

29. $(f\circ g)(x)=\sqrt{-x}$, $\mathrm{Dom}(f\circ g)=(-\infty,0]$, $(g\circ f)(x)=\sqrt{1-\sqrt{x^2-1}}$,
$\mathrm{Dom}(g\circ f)=$ $(g\circ g)(x)=\dfrac{x}{3x+4}$, $\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ y
$(f\circ f)(x)=x$, $\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

31. $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$, $\mathrm{Dom}(f\circ g)=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$,
$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}_+$,
$(g\circ g)(x)=x^4-8x^3+12x^2+16x$, $\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}$ y
$(f\circ f)(x)=\sqrt[4]{x}$, $\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$.

33. $(f\circ g)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & \text{si } x<-6\\ (x+3)^2 & \text{si } x>-6\end{cases}$ $\mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}-\{-6\}$

$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+3 & \text{si } x<-3\\ x^2+3 & \text{si } x>-3\end{cases}$ $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}-\{-3\}$

$(g\circ g)(x)=x+6$, $\mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}$

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<-3\\ x^4 & \text{si } x>-3\end{cases}$ $\mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}-\{-3\}$

35. $(f\circ g)(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<0\\ 2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$

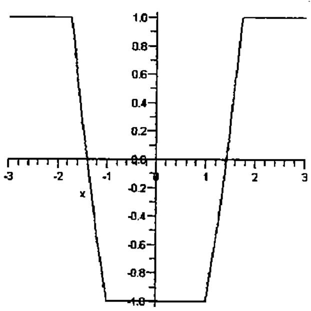
$(g\circ f)(x)=1 \quad \mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$(g\circ g)(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom}(g\circ g)=\mathbb{R}-\{0\}$

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^4+3x^2+1}{(x^2+1)x} & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{x^4+3x^2+1}{(x^2+1)x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom}(f\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$

37. $(a-1)d=b(c-1)$

39. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\le -\sqrt{3}\\ x^2-2 & \text{si} \quad -\sqrt{3}\le x\le -1\\ -1 & \text{si} \quad -1\le x\le 1\\ x^2-2 & \text{si} \quad 1\le x\le \sqrt{3}\\ 1 & \text{si} \quad x\ge \sqrt{3}\end{cases}$



41. $v(t)=\dfrac{4}{3}\pi t^2$

45. Si

47. No

49. Si

51. No

53. Si

55. (a) $[0,2)\cup(2,+\infty)\to(-\infty,0)\cup\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

(b) $(3,+\infty)\to(0,+\infty)$ (c) $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)\to[0,+\infty)$

(d) $[0,+\infty)\to\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ (e) $[-4,+\infty)\to[0,+\infty)$

59. g es una restricción de f

61. Ninguna de las dos

63. $g:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$; $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$

65. $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$

67. $f^{-1}(x)=6-x$

69. $f^{-1}(x)=\dfrac{3-x}{5}$

71. $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+2}{1-x}$

73. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{5-x}{4}}$

75. $f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4x}$

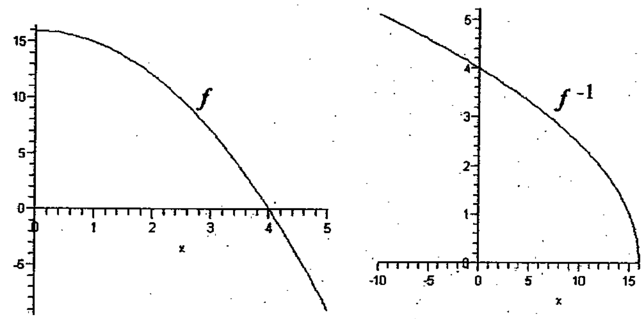
77. $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$

79. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2-x^{1/5}}$

81. $f^{-1}(x)=\sqrt{9-x^2}$

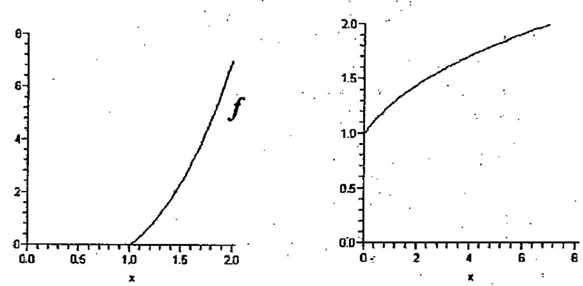
83. $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}$

85.



$f^{-1}(x)=\sqrt{16-x}$

87.



$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$

89. $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$

91. $f(x)=x^2-2$

Repaso

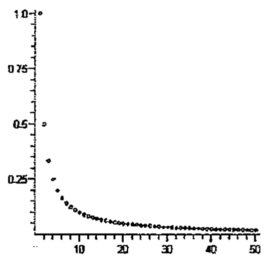
1. (a) $\frac{1}{25}$ unidades de temperatura (b) $f(x)=t(x,0)=\frac{1}{|x|}$,

$\mathrm{Dom}(f)=(0,50]$ (c) $g(y)=t(0,y)=\frac{1}{|y|}$, $\mathrm{Dom}(g)=(0,30]$

(d) $h(x)=t(x,x)=\frac{\sqrt{2}}{2|x|}$, $\mathrm{Dom}(h)=(0,30]$.

3. (a) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{N}$ (b) $Rang(f)=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq(0,1]$

(c) $G_f=\left\{(n,\frac{1}{n})\mid n\in\mathbb{N}\right\}$



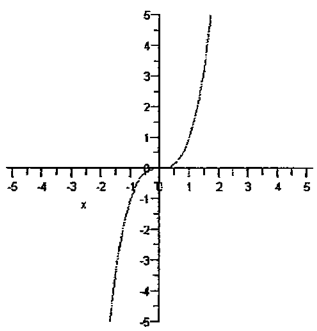
(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Examen

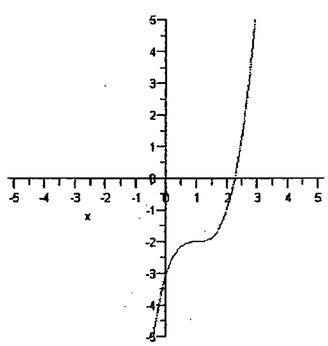
(a), (b) son gráficas de funciones (a) es inyectiva

1. $[0,1)\cup(1,+\infty)$

2. (a)



(b)



3. (a) Desplazar 3 unidades hacia la izquierda, reflejar en el eje y y luego desplazar 2 unidades hacia arriba.
(b) Reflejar en el eje x y después en el eje y.

4. (a) $f(-2)=-3, f\left(\frac{1}{2}\right)=-1, f(3)=7$ (b) No

5. (a) gráfica a) f, gráfica b) j, gráfica c) k

(b) No es inyectiva, $\begin{array}{llll} g: & (-\infty,0] & \to & (-\infty,1] \\ & x & \mapsto & g(x)=x^2+1 \end{array}$,

$\begin{array}{llll} g^{-1}: & (-\infty,1] & \to & (-\infty,0] \\ & x & \mapsto & g^{-1}(x)=-\sqrt{1-x} \end{array}$

(c) $-\sqrt{2},\sqrt{2}$

6. (a) $(f+g)(x)=\begin{cases} 4-x^2+2x & \text{si} \quad x<-\frac{1}{2} \\ 2-x^2-2x & \text{si} \quad x\geq-\frac{1}{2} \end{cases}$, $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathbb{R}$

(b) $(fg)(x)=\begin{cases} 4+4x-2x^2-2x^3 & \text{si} \quad x<-\frac{1}{2} \\ -4x+2x^3 & \text{si} \quad x\geq-\frac{1}{2} \end{cases}$, $\mathrm{Dom}(fg)=\mathbb{R}$

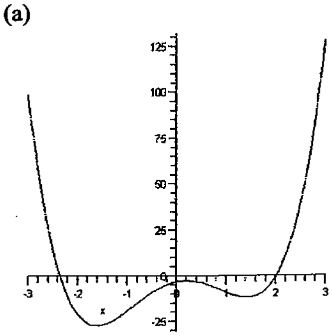
(c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \frac{2+2x}{x^2-2} & \text{si} \quad x<-\frac{1}{2} \\ \frac{2x}{x^2-2} & \text{si} \quad x\geq-\frac{1}{2} \end{cases}$, $\mathrm{Dom}(fg)=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

(d) $(f\circ g)(x)=\begin{cases} 6-2x^2 & \text{si} \quad x<-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ 2x^2-4 & \text{si} \quad -\frac{\sqrt{10}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{10}}{2} \\ 6-2x^2 & \text{si} \quad x>\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

(e) $(g\circ f)(x)=\begin{cases} -2-8x-4x^2 & \text{si} \quad x<-\frac{1}{2} \\ 2-4x^2 & \text{si} \quad x\geq-\frac{1}{2} \end{cases}$

1. (a) $A(x)=400x-2x^2$ (b) 200 pies por 100 pies

2. (a)



(b) No (c) Mínimo local ≈ -27.18 cuando $x \approx -1.61$; Maximo local ≈ -2.55 cuando $x \approx 0.18$; Mínimo local ≈ -11.93 cuando $x \approx -1.43$

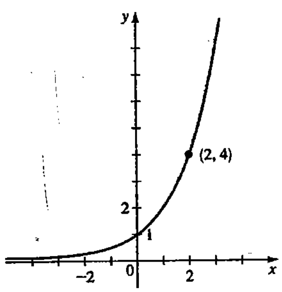
(d) $[-27.18, +\infty)$

(c) Creciente en $[-1.61, 0.18] \cup [1.43, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1.61] \cup [0.18, 1.43]$

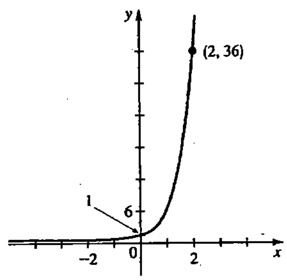
CAPÍTULO 5

Sección 5.1

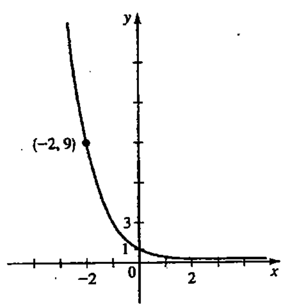
1.



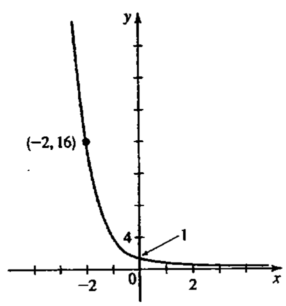
3.



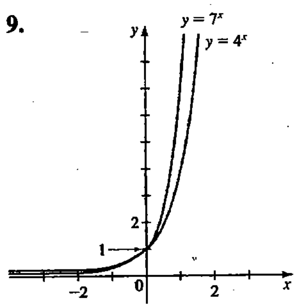
5.



7.



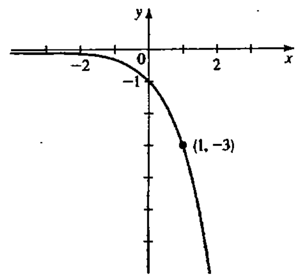
9.



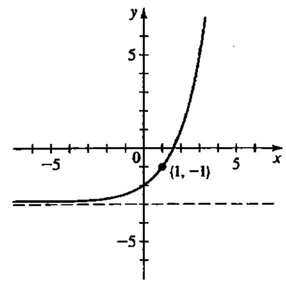
11. $f(x) = 3^x$ **13.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

15. III **17.** I **19.** II

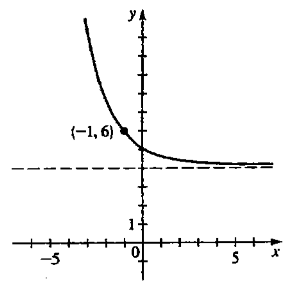
21. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 0)$, $y = 0$



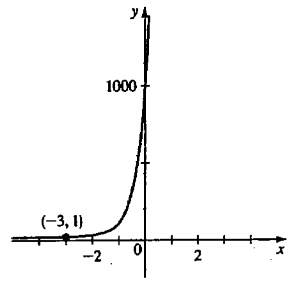
23. $\mathbb{R}$, $(-3, \infty)$, $y = -3$



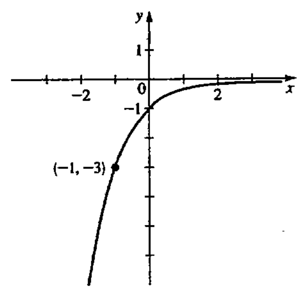
25. $\mathbb{R}$, $(4, \infty)$, $y = 4$



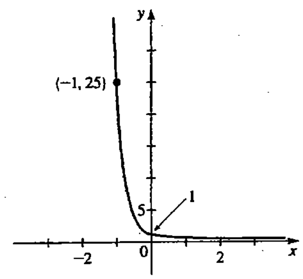
27. $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$



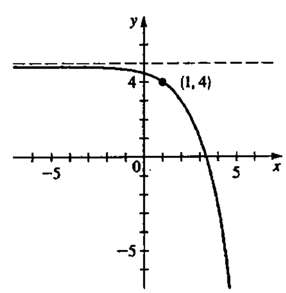
29. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 0)$, $y = 0$



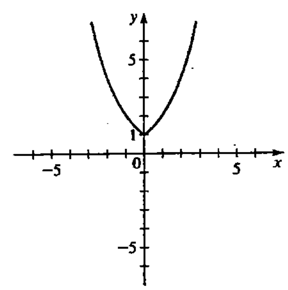
31. $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$



33. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 5)$, $y = 5$

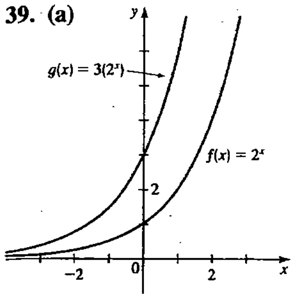


35. $\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, no tiene asíntota



37. $y = 3(2^x)$

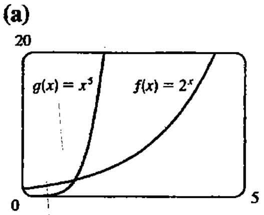
39. **(a)**



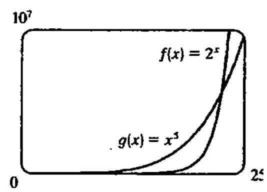
(b) La gráfica de g tiene mayor pendiente que la de f.

43. **(a)**

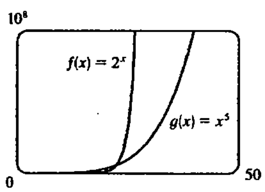
(i)



(ii)



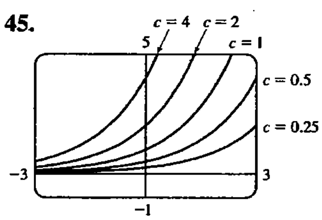
(iii)



La gráfica de f aumenta al final con mucha mayor rapidez que la de g.

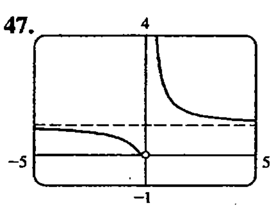
(b) 1.2, 22.4

45.



Cuanto mayor es el valor de c, la gráfica aumenta con mayor rapidez.

47.



Asíntota vertical: $x = 0$, asíntota horizontal: $y = 1$

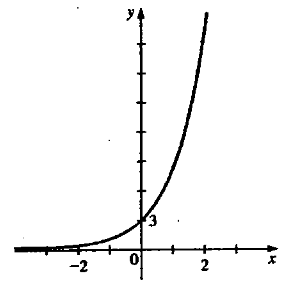
49. Mínimo local en $\approx (0.37, 0.69)$

51. **(a)** Creciente en $(-\infty, 0.50]$, decreciente en $[0.50, \infty)$
(b) $(0, 1.78]$

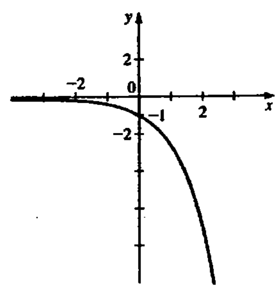
Sección 5.2

1.

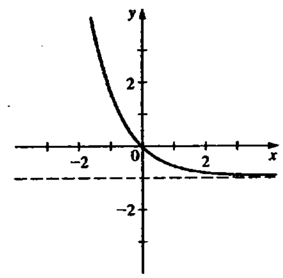
x	$f(x) = 3e^x$
−2	0.4
−1.5	0.7
−1	1.1
−0.5	1.8
0	3
0.5	4.9
1	8.2
1.5	13.4
2	22.2



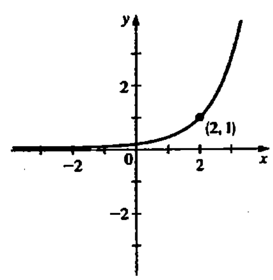
3. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 0)$, $y = 0$



5. $\mathbb{R}$, $(-1, \infty)$, $y = -1$



7. $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$



9. **(a)** \$16,288.95 **(b)** \$26,532.98 **(c)** \$43,219.42

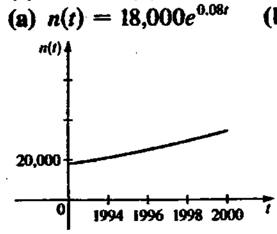
11. **(a)** \$4,615.87 **(b)** \$4,658.91 **(c)** \$4,697.04 **(d)** \$4,703.11 **(e)** \$4,704.68 **(f)** \$4,704.93 **(g)** \$4,704.94

13. (i) **15.** \$7,678.96

17. **(a)** 45% **(b)** 500 **(c)** 4744

19. **(a)** $n(t) = 18{,}000e^{0.08t}$ **(b)** 34,137

(c)



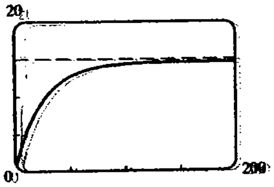
21. **(a)** 233 millones **(b)** 181 millones

23. 5,870 billones **25.** **(a)** Unos 500 **(b)** 361,000

27. **(a)** 6 g **(b)** 1 g

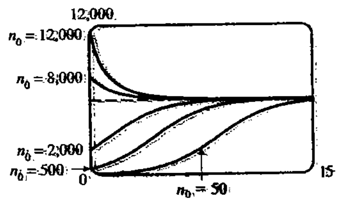
29. **(a)** 2.7 lb **(b)** 4.9 lb

(c)



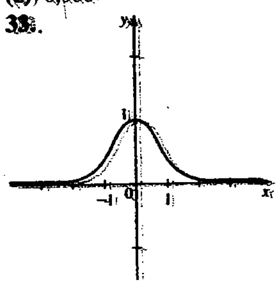
(d) 15 lb

31. **(a)** 5164 **(b)**

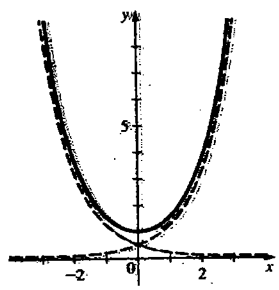


(c) 6,000

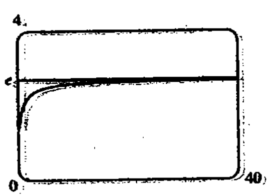
33.



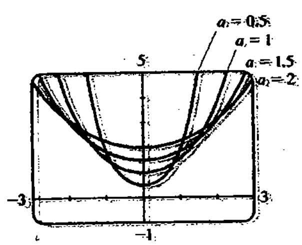
35.



41.



43. **(a)**



(b) Mientras mayor es el valor de a, la gráfica tiene menos pendiente y su valor mínimo es menor

45. Máximo local en (1.00, 0.37)

Sección 5.3

1. **(a)** $2^5 = 32$ **(b)** $5^0 = 1$

3. **(a)** $4^{1/2} = 2$ **(b)** $2^{-4} = \frac{1}{16}$

5. **(a)** $e^x = 5$ **(b)** $e^5 = y$

7. **(a)** $\log_2 8 = 3$ **(b)** $\log_{10} 0.001 = -3$

9. **(a)** $\log_4 0.125 = -\frac{3}{2}$ **(b)** $\log_7 343 = 3$

11. **(a)** $\ln 2 = x$ **(b)** $\ln y = 3$

13. **(a)** 4 **(b)** 3 **(c)** 1 **15.** **(a)** 2 **(b)** 2 **(c)** 10

17. **(a)** -3 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** -1

19. **(a)** 37 **(b)** 8 **(c)** $\sqrt{5}$

21. **(a)** $-\frac{2}{3}$ **(b)** 4 **(c)** -1 **23.** **(a)** 32 **(b)** 4

25. **(a)** 100 **(b)** 25 **27.** **(a)** 2 **(b)** 4

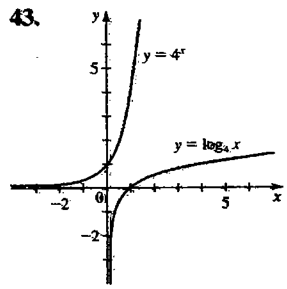
29. **(a)** 0.3010 **(b)** 1.5465 **(c)** -0.1761

31. **(a)** 1.6094 **(b)** 3.2308 **(c)** 1.0051

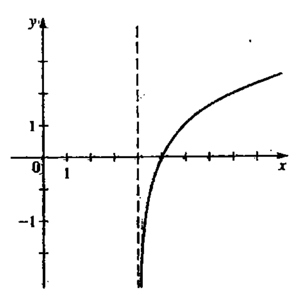
33. $y = \log_5 x$ **35.** $y = \log_9 x$

37. II **39.** III **41.** VI

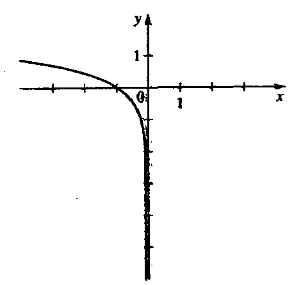
43.



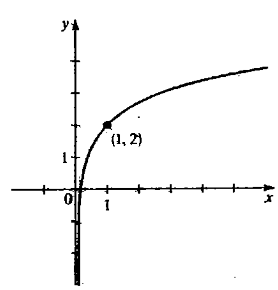
45. $(4, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 4$



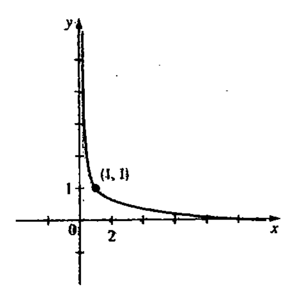
47. $(-\infty, 0)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$



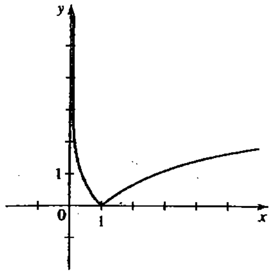
49. $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$



51. $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$

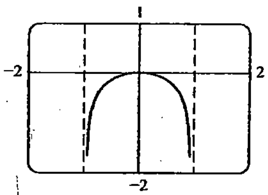


53. $(0, \infty)$, $[0, \infty)$, $x = 0$



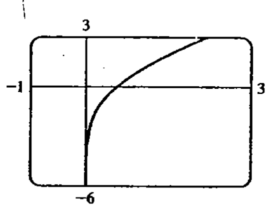
55. $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$ **57.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **59.** $(0, 2)$

61.



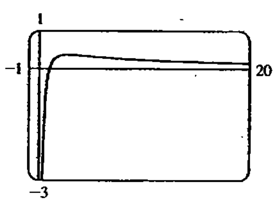
dominio = $(-1, 1)$
asíntotas verticales:
$x = 1, x = -1$
máximo local en $(0, 0)$

63.



dominio = $(0, \infty)$
asíntota vertical: $x = 0$
no tiene máximo ni mínimo

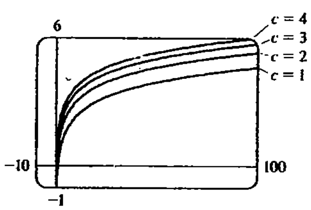
65.



dominio = $(0, \infty)$
asíntota vertical: $x = 0$
asíntota horizontal: $y = 0$
máximo local en $(2.72, 0.37)$

67. La gráfica de f aumenta con menos rapidez que la de g.

69. **(a)**



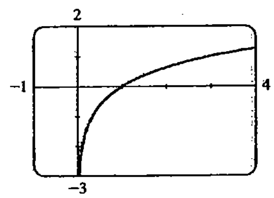
(b) La gráfica de $f(x) = \log(cx)$ es la de $f(x) = \log x$ desplazada $\log c$ unidades hacia arriba.

71. **(a)** $(1, \infty)$ **(b)** $f^{-1}(x) = 10^{2^x}$

73. **(a)** $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{1 - x}\right)$ **(b)** $(0, 1)$

Sección 5.4

1. $\log_2 x + \log_2(x - 1)$ **3.** $23 \log 7$
5. $\log_2 A + 2 \log_2 B$ **7.** $\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y$
9. $\frac{1}{3} \log_5(x^2 + 1)$ **11.** $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$
13. $3 \log x + 4 \log y - 6 \log z$
15. $\log_2 x + \log_2(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \log_2(x^2 - 1)$
17. $\ln x + \frac{1}{2}(\ln y - \ln z)$ **19.** $\frac{1}{4} \log(x^2 + y^2)$
21. $\frac{1}{2}[\log(x^2 + 4) - \log(x^2 + 1) - 2 \log(x^3 - 7)]$
23. $\frac{1}{2} \ln x + 4 \ln z - \frac{1}{3} \ln(y^2 + 6y + 17)$
25. $\frac{3}{2}$ **27.** 1 **29.** 3 **31.** $\ln 8$ **33.** 16
35. $\log_3 160$ **37.** $\log_2(AB/C^2)$ **39.** $\log\left[\dfrac{x^4(x - 1)^2}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}\right]$
41. $\ln[5x^2(x^2 + 5)^3]$
43. $\log\left[\sqrt[3]{2x + 1}\sqrt{(x - 4)/(x^4 - x^2 - 1)}\right]$
45. 2.807355 **47.** 2.182658 **49.** 0.655407
51. 4.165458
53.



Sección 5.5

1. 1.7227 **3.** −0.5850 **5.** 1.2040 **7.** 0.0767
9. 0.2524 **11.** 1.9349 **13.** −43.0677
15. 2.1492 **17.** 6.2126 **19.** −2.9469
21. −2.4423 **23.** 14.0055 **25.** ± 1 **27.** $0, \frac{4}{3}$
29. $\ln 2 \approx 0.6931, 0$ **31.** $\frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.5493$
33. $e^{10} \approx 22026$ **35.** 0.01 **37.** $\frac{95}{3}$
39. $3 - e^2 \approx -4.3891$ **41.** 5 **43.** 5 **45.** $\frac{13}{12}$
47. 6 **49.** $\frac{3}{2}$ **51.** $1/\sqrt{5} \approx 0.4472$ **53.** 13 días
55. **(a)** $t = -\frac{5}{13} \ln\left(1 - \frac{13}{60} I\right)$ **(b)** 0.218 s
57. 2.21 **59.** 0.00, 1.14 **61.** −0.57 **63.** 0.36
65. $2 < x < 4$ o $7 < x < 9$ **67.** $\log 2 < x < \log 5$
69. 101, 1.1 **71.** $\log_2 3 \approx 1.58$

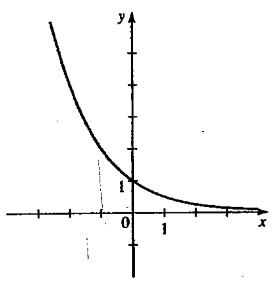
Sección 5.6

1. **(a)** \$12,870.19 **(b)** 8.24 años **3.** 5 años
5. 8.15 años **7.** 8.30%
9. **(a)** 500 **(b)** 45% **(c)** 1,929 **(d)** 6.66 h
11. **(a)** $n(t) = 112{,}000e^{0.04t}$ **(b)** Más o menos 142,000 **(c)** 2,008
13. **(a)** 20,000 **(b)** $n(t) = 20{,}000e^{0.1096t}$
(c) Más o menos 48,000 **(d)** 2004
15. **(a)** $n(t) = 8600e^{0.1508t}$ **(b)** Más o menos 11,600 **(c)** 4.6 h
17. **(a)** 2029 **(b)** 2049 **19.** 22.85 h
21. **(a)** $n(t) = 10e^{-0.0231t}$ **(b)** 1.6 g **(c)** 70 años

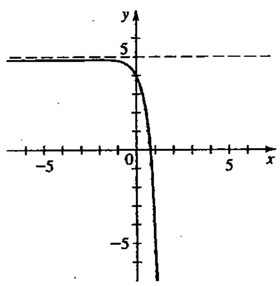
23. 16 años **25.** 149 h **27.** 3560 años
29. (a) 210 °F (b) 153 °F (c) 28 min
31. (a) 137 °F (b) 116 min
33. (a) 2.3 (b) 3.5 (c) 8.3
35. (a) 10^{-3} M (b) 3.2×10^{-7} M **37.** $4.8 \leq \text{pH} \leq 6.4$
39. $\log 20 \approx 1.3$ **41.** Doble intensidad **43.** 8.2
45. 6.3×10^{-3} W/m^2 **47.** (b) 106 dB

Repaso del capítulo 5

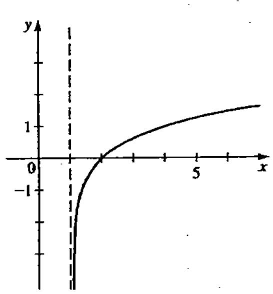
1. $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$



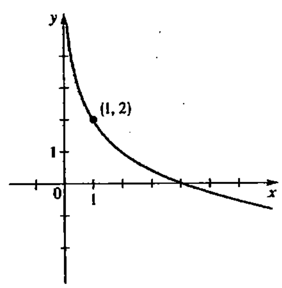
3. $\mathbb{R}$, $(-\infty, 5)$, $y = 5$



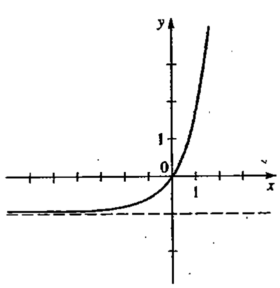
5. $(1, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 1$



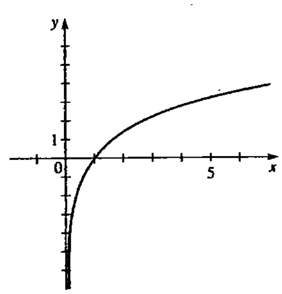
7. $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$



9. $\mathbb{R}$, $(-1, \infty)$, $y = -1$

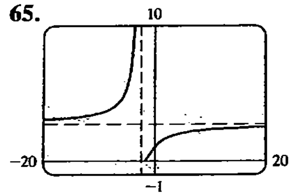


11. $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$



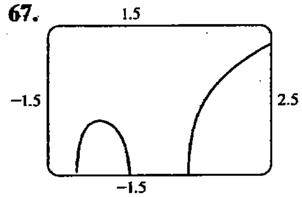
13. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ **15.** $2^{10} = 1024$ **17.** $10^y = x$
19. $\log_2 64 = 6$ **21.** $\log 74 = x$ **23.** 7 **25.** 45
27. 6 **29.** -3 **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** 2 **35.** 92 **37.** $\frac{2}{3}$
39. $\log A + 2\log B + 3\log C$
41. $\frac{1}{2}[\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)]$

43. $2\log_5 x + \frac{3}{2}\log_5(1 - 5x) - \frac{1}{2}\log_5(x^3 - x)$
45. $\log 96$ **47.** $\log_2\left[\frac{(x - y)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2}\right]$ **49.** $\log\left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$
51. -15 **53.** $\frac{1}{3}(5 - \log_5 26) \approx 0.99$
55. $\frac{4}{3}\ln 10 \approx 3.07$ **57.** 3 **59.** -4, 2 **61.** 0.430618
63. 2.303600
65.



asíntota vertical
$x = -2$
asíntota horizontal
$y = 2.72$
sin máximo ni mínimo

67.

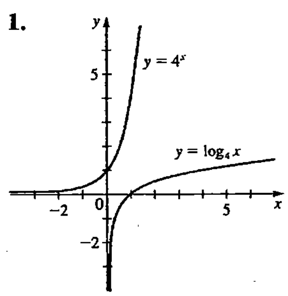


asíntotas verticales:
$x = -1, x = 0, x = 1$
máximo local en
$(-0.58, -0.41)$

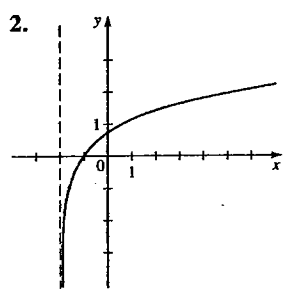
69. 2.42 **71.** $0.16 < x < 3.15$
73. Creciente en $(-\infty, 0]$ y en $[1.10, \infty)$, decreciente en $[0, 1.10]$
75. 1.953445 **77.** $\log_4 258$
79. (a) \$16,081.15 (b) \$16,178.18 (c) \$16,197.64 (d) \$16,198.31
81. (a) $n(t) = 30e^{0.15t}$ (b) 55 (c) 19 años
83. (a) 9.97 mg (b) 1.39×10^5 años
85. (a) $n(t) = 150e^{-0.0004359t}$ (b) 97.0 mg (c) 2,520 años
87. (a) $n(t) = 1500e^{0.1515t}$ (b) 7940 **89.** 7.9, básica
91. 8.0

Examen del capítulo 5

1.



2.



$(-2, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = -2$

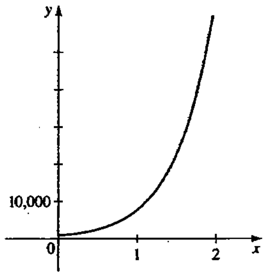
3. (a) $\frac{3}{2}$ (b) 3 (c) $\frac{2}{3}$ (d) 2
4. $\frac{1}{2}[\log(x^2 - 1) - 3\log x - 5\log(y^2 + 1)]$

5. $\ln\left[\dfrac{x\sqrt{3-x^4}}{(x^2+1)^2}\right]$

6. (a) 4.32 (b) 0.77 (c) 5.39 (d) 2

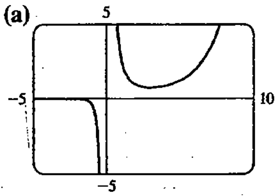
7. (a) $n(t) = 1{,}000e^{2.07944t}$ (b) 22,627 (c) 1.3 h

(d)



8. 8.33 años 9. $\left(-4, \frac{8}{5}\right)$

10. (a)



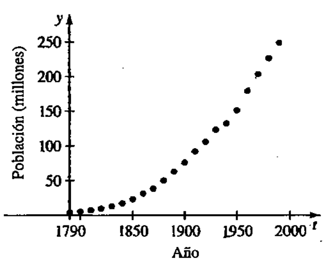
(b) $x = 0, y = 0$

(c) Mínimo local en (3.00, 0.74)

(d) $(-\infty, 0) \cup [0.74, \infty)$ (e) −0.85, 0.96, 9.92

ENFOQUE EN MODELADO

1. (a)

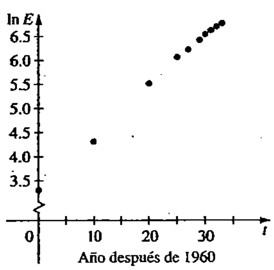


(b) $y = ab^t$, siendo $a = 4.041807 \times 10^{-16}$ y $b = 1.021003194$, y y es la población en el año t, en millones.

(c) 457.9 millones (d) 221.2 millones (e) No

3. (a) Sí

(b) Sí, la gráfica de dispersión parece ser lineal



(c) $\ln E = 3.30161 + 0.10769t$, siendo t años a partir de 1960 y E el gasto en miles de millones de dólares.

(d) $E = 27.15633e^{0.10769t}$

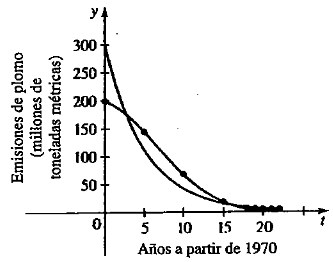
(e) 1,310,900 billones de dólares

5. (a) $y = ab^t$, siendo $a = 301.813054$, $b = 0.819745$ y t la cantidad de años a partir de 1970

(b) $y = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$, siendo $a = -0.002430$, $b = 0.135159$, $c = -2.014322$, $d = -4.055294$, $e = 199.092227$, y t la cantidad de años a partir de 1970

(c) En las gráficas se ve que el modelo de polinomio de cuarto grado es mejor.

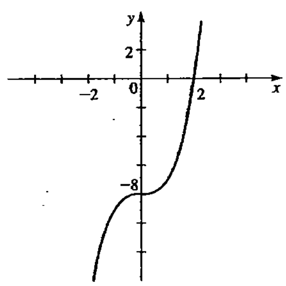
(d) 202.8, 27.8; 184.0, 43.5



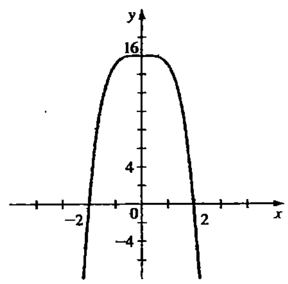
CAPÍTULO 6

Sección 6.1

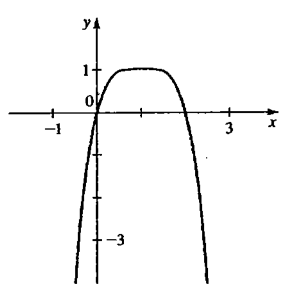
1.



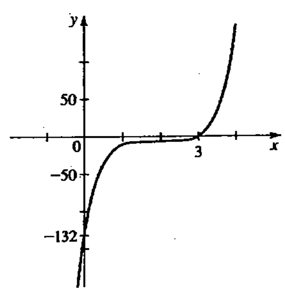
3.



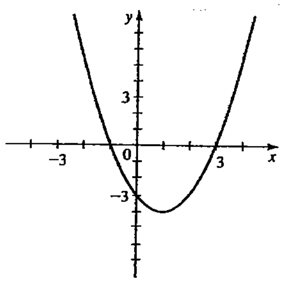
5.



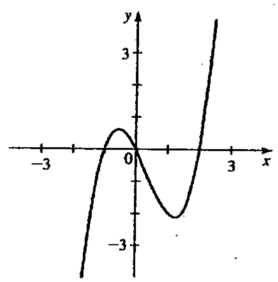
7.



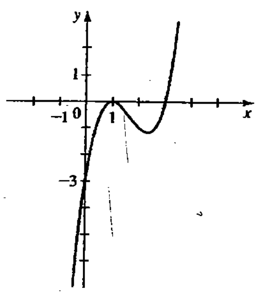
9.



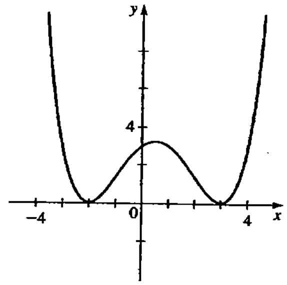
11.



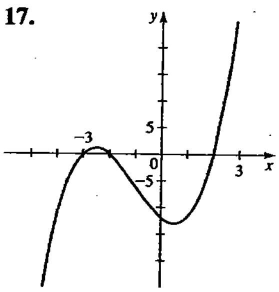
13.



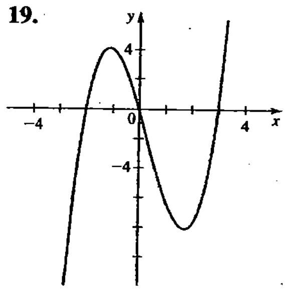
15.



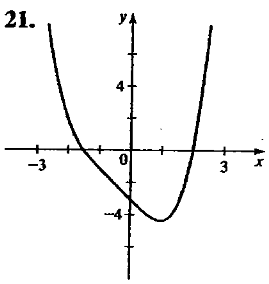
17.



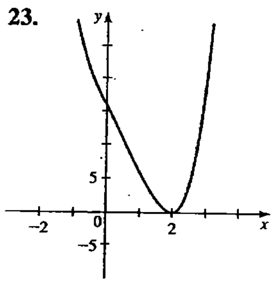
19.



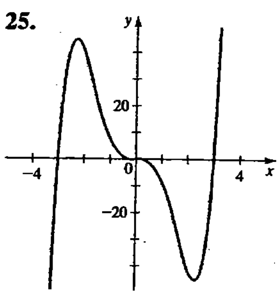
21.



23.

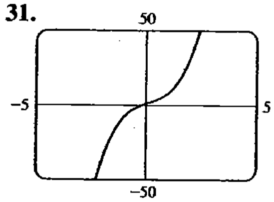


25.



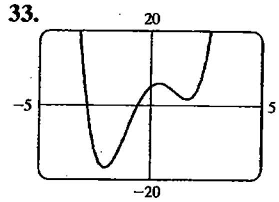
27. III **29.** IV

31.



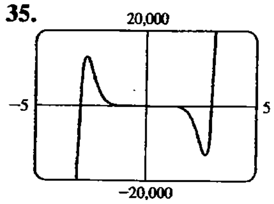
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

33.



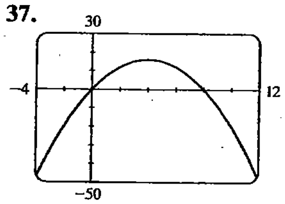
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$

35.



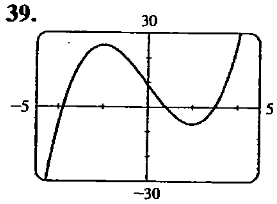
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

37.



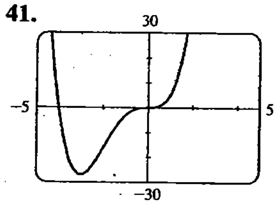
intersecciones en x 0, 8
intersección en y 0
máximo local en (4, 16)

39.



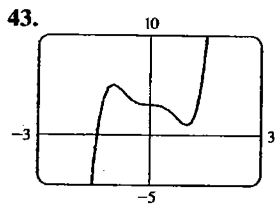
intersecciones en x −3.79, 0.79, 3
intersección en y 9
máximo local en (−2, 25)
mínimo local en (2, −7)

41.



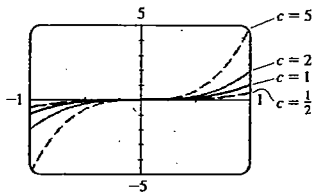
intersecciones en x −4, 0
intersección en y 0
mínimo local en (−3, −27)

43.



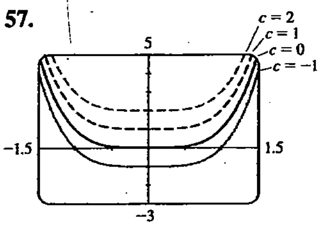
intersecciones en x −1.42
intersección en y 3
máximo local en (−1, 5)
mínimo local en (1, 1)

45. Máximo local en $(0.75, 6.13)$□
47. Máximo local en $(-0.33, 0.19)$,□
mínimo local en $(1.00, -1.00)$□
49. Máximo local en $(0, 4)$;□
mínimos locales en $(-1.58, -2.25)$, $(1.58, -2.25)$□
51. No hay extremos□
53. Máximo local: $(0.44, 0.33)$;□
mínimos locales en $(1.09, -1.15)$, $(-1.12, -3.36)$
55.



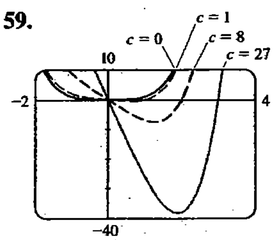
Al aumentar el valor de c la gráfica se alarga verticalmente.

57.



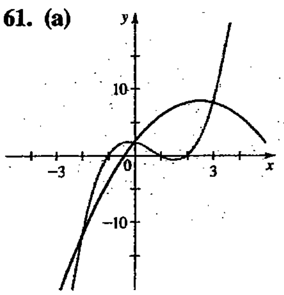
Al aumentar el valor de c la gráfica se mueve hacia arriba.

59.



Al aumentar el valor de c hay una bajada más pronunciada en el 4o. cuadrante y la intersección en x positiva se recorre hacia la derecha.

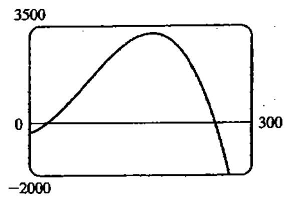
61. **(a)**



(b) Tres
(c) $(0, 2)$, $(3, 8)$, $(-2, -12)$

63. **(g)** $P(x) = P_O(x) + P_E(x)$, siendo
$P_O(x) = x^5 + 6x^3 - 2x$ y $P_E(x) = -x^2 + 5$

65.



(a) 26 licuadoras
(b) La utilidad máxima es \$3,276.22 cuando se producen 166 licuadoras

67. **(a)** Máximo local en $(1.8, 2.1)$,
mínimo local en $(3.5, -0.6)$
(b) Máximo local en $(1.8, 7.1)$, mínimo local en $(3.5, 4.4)$

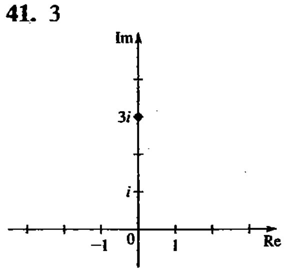
Sección 6.2

En las respuestas 1 a 11, el primer polinomio que aparece es el cociente, y el segundo es el residuo.

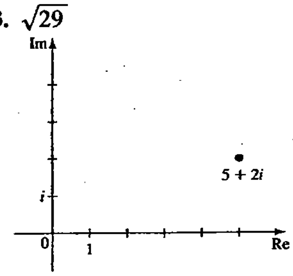
1. $x^2 + 2, -3$ **3.** $x^2 - 3x + 1, -1$
5. $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 4, -2$ **7.** $x + 2, 8x - 1$
9. $3x + 1, 7x - 5$ **11.** $2x^2 + 4x, 1$ **13.** -3
15. 12 **17.** -483 **19.** $\frac{7}{3}$ **21.** $\pm 1, \pm 3$
23. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ **25.** $-2, 2, 3$
27. $-1, 2, 3$ **29.** $1, 2, 4$ **31.** -1 **33.** $\pm 1, \pm 2$
35. $1, -1, -2, -4$ **37.** $\pm 2, \pm\frac{3}{2}$ **39.** $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1$
41. $-1, \pm\frac{1}{2}$ **43.** $-1, \pm 2, 3$ **47.** $x^3 - 3x^2 - x + 3$
49. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$
51. 1 positivas, 2 o 0 negativas; 3 o 1 reales
53. 0 positivas, 4, 2 o 0 negativas; 4, 2 o 0 reales
55. 5, 3 o 1 positivas, 2 o 0 negativas; 7, 5, 3 o 1 reales
61. $3, -2$ **63.** $3, -1$ **65.** $-2, \frac{1}{2}, \pm 1$
67. $\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{5}$ **69.** $-2, 1, 3, 4$ **71.** $-2, 2, 3$
73. $-\frac{3}{2}, -1, 1, 4$ **75.** 5.15 **77.** 0.67
79. $-1.00, 1.50$ **81.** -1.50 **83.** 11.3 pies
85. **(a)** Comenzó a nevar otra vez. **(b)** No
(c) Justo antes de la medianoche del sábado
87. 2.76 m **89.** 88 pulg (o 3.21 pulg)

Sección 6.3

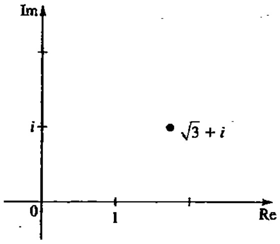
1. Parte real 3, parte imaginaria -5
3. Parte real 0, parte imaginaria 6
5. Parte real $\sqrt{2}$, parte imaginaria $\sqrt{3}$
7. $9 + i$ **9.** $12 + i$ **11.** $-19 + 4i$ **13.** $-4 + 8i$
15. $30 + 10i$ **17.** $-33 - 56i$ **19.** $-i$ **21.** $\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$
23. $-5 + 12i$ **25.** $-4 + 2i$ **27.** $-i$ **29.** 1
31. $5i$ **33.** -6 **35.** $(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})i$ **37.** 2
39. $-i\sqrt{2}$
41. 3



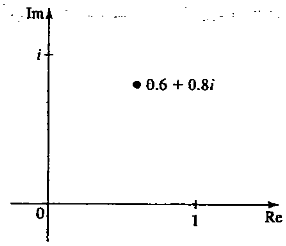
43. $\sqrt{29}$



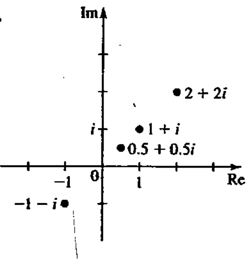
45. 2



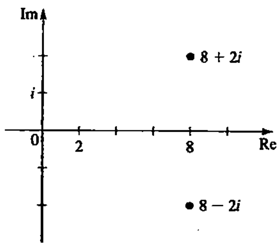
47. 1



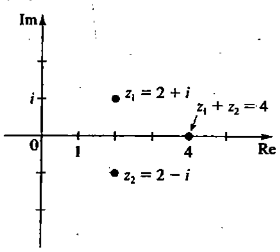
49.



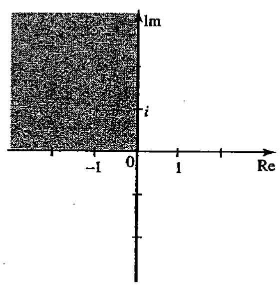
51.



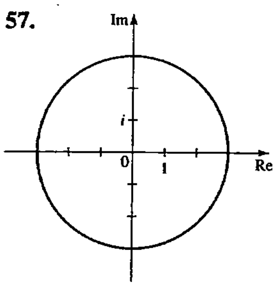
53.



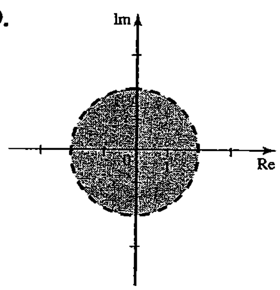
55.



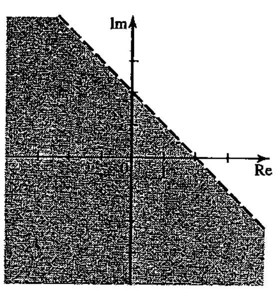
57.



59.



61.



Sección 6.4

1. $\pm 4i$ **3.** $-1 \pm i$ **5.** $-2 \pm 2i$ **7.** $\dfrac{5 \pm i\sqrt{23}}{6}$

9. $4 \pm i$ **11.** $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$ **13.** $\pm 1, \pm i$

15. $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$ **17.** $\pm 2, \pm 2i$ **19.** $\pm 3, \dfrac{\pm 3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$

21. $\pm i\sqrt{5}$ **23.** $x^3 - 2x^2 + x - 2$

25. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5$

27. $6x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 12$ **29.** $-2, \pm 2i$

31. $1, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ **33.** $2, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ **35.** $-2, 1, \pm 3i$

37. $(x + 3)\left(x - \dfrac{3 + 3\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x - \dfrac{3 - 3\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

39. $(x + 2)(x - 1)(x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3}) \cdot \left(x + \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$

41. $(x - 2)(x + 1 + i\sqrt{2})(x + 1 - i\sqrt{2})$

43. $(x - 2)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i)$

45. 0 positivas, 2 o 0 negativas; 4 o 2 imaginarias

47. 1 positivas, 2 o 0 negativas; 4 o 2 imaginarias

49. (a) 4 reales **(b)** 2 reales, 2 imaginarias **(c)** 4 imaginarias

Sección 6.5

1. Intersección en x 6, intersección en y −6

3. Intersección en x 0, intersección en y 0

5. Intersección en x 3, intersección en y 3 vertical en $x = 2$, horizontal en $y = 2$

7. Vertical en $x = -3$, horizontal en $y = 0$

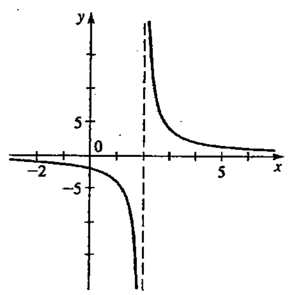
9. Vertical en $x = 3$ y $x = -2$; horizontal en $y = 1$

11. Horizontal en $y = 0$

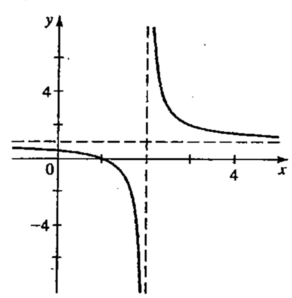
13. Vertical en $x = 1$; inclinada $y = x + 1$

15. Vertical en $x = -3$

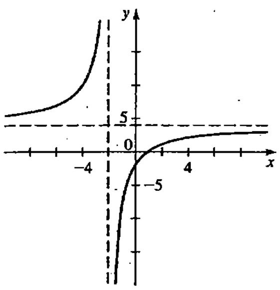
17.



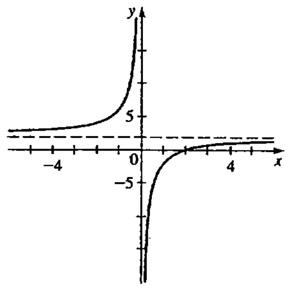
19.



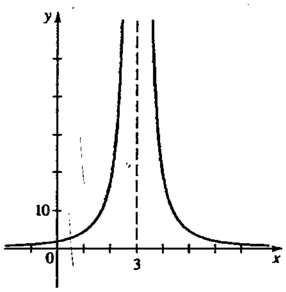
21.



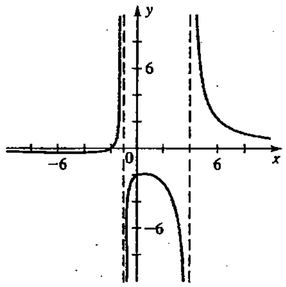
23.



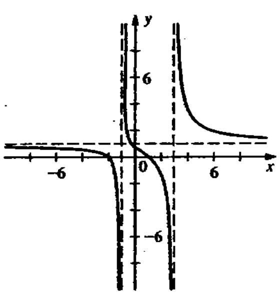
25.



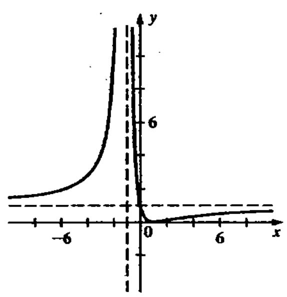
27.



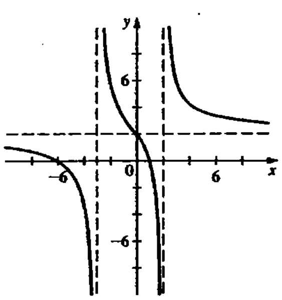
29.



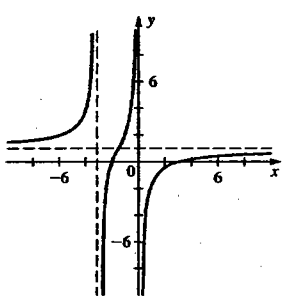
31.



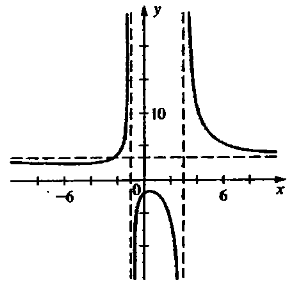
33.



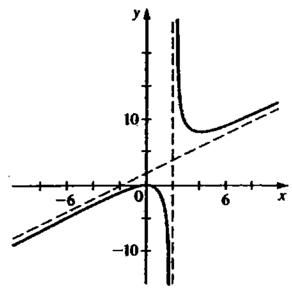
35.



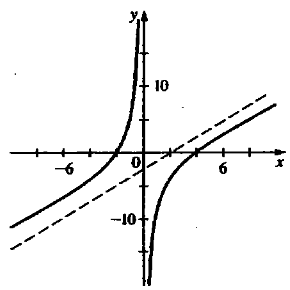
37.



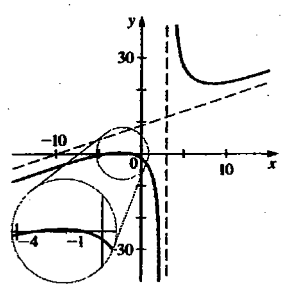
39.



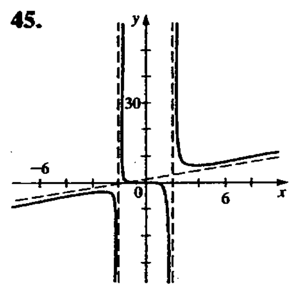
41.



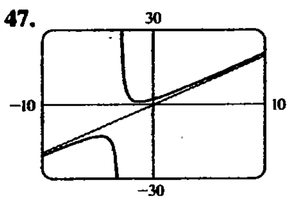
43.



45.

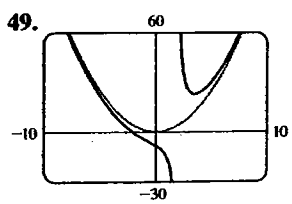


47.



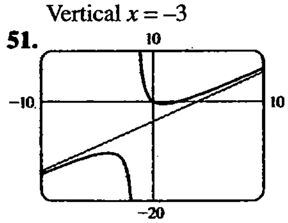
Vertical $x = -3$

49.



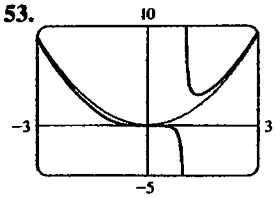
Vertical $x = 2$

51.



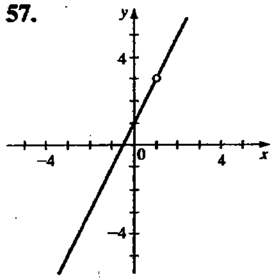
vertical $x = -1.5$
intersección en x 0, 2.5
intersección en y 0
máximo local $(-3.9, -10.4)$
mínimo local $(0.9, -0.6)$
comportamiento en extremos: $y = x - 4$

53.

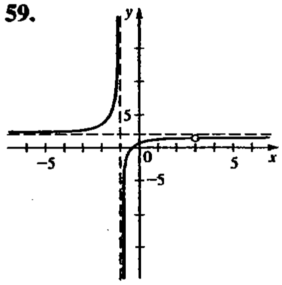


vertical $x = 1$
intersección en x 0
intersección en y 0
mínimo local (1.4, 3.1)
comportamiento en extremos: $y = x^2$

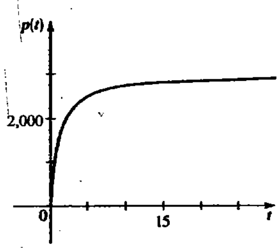
57.



59.



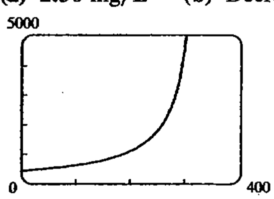
61. **(a)**



(b) Se nivela en 3,000

63. **(a)** 2.50 mg/L **(b)** Decrece a 0 **(c)** 16.61 h

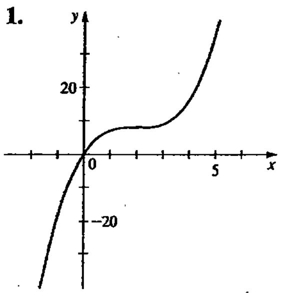
65.



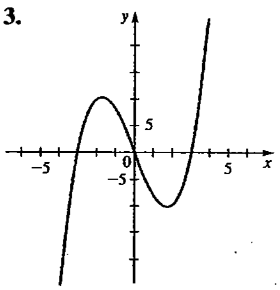
Si la rapidez del tren se acerca a la rapidez del sonido, el tono o altura aumenta indefinidamente (un estruendo sónico)

Repaso del capítulo 6

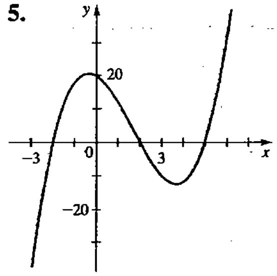
1.



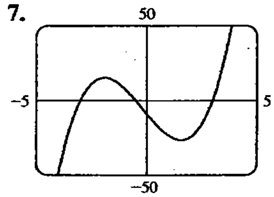
3.



5.

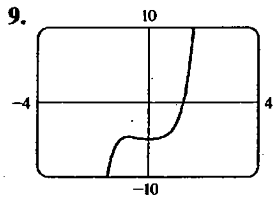


7.



intersecciones en x: −3, −0.5, 3
intersección en y: −9
máximo local: (−1.9, 15.1)
mínimo local: (1.6, −27.1)
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

9.



intersección en y: 1.3
intersección en y: −5
máximo local: (−0.7, −4.7)
mínimo local: (0, −5)
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

En las respuestas 11 a 17, el primer polinomio que aparece es el cociente y el segundo es el residuo.

11. $x^2 + 2x + 7, 10$ **13.** $x - 3, -9$

15. $x^3 - 5x^2 + 4, -5$

17. $x^3 + (\sqrt{3} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}, 2$

19. 3 **23.** 8 **25.** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

27. $-3 - 9i$ **29.** $19 + 40i$ **31.** $(-5 - 12i)/13$

33. i **35.** $(2 + 2\sqrt{3}) + (2 - 2\sqrt{3})i$

37. $4x^3 - 18x^2 + 14x + 12$

39. No; ya que los complejos conjugados de ceros imaginarios también son ceros, el polinomio tendría 8 ceros, contraviniendo el requisito que debe tener el grado 4.

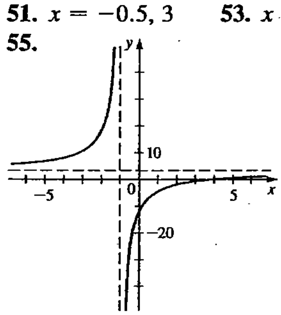
41. $-3, 1, 5$ **43.** $-1 \pm 2i, -2$ (multiplicidad 2)

45. 2, 1 (multiplicidad 3) **47.** $\pm 2, \pm 1 \pm i\sqrt{3}$

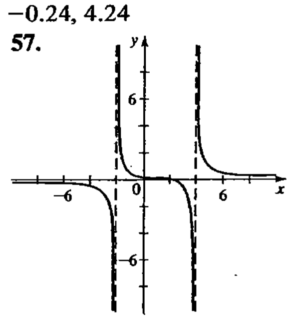
49. $1, 3, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

51. $x = -0.5, 3$ **53.** $x \approx -0.24, 4.24$

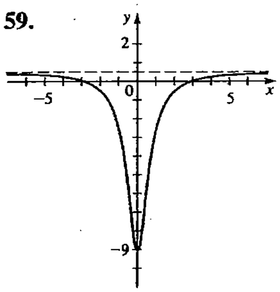
55.



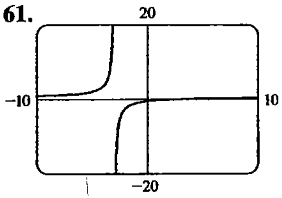
57.



59.

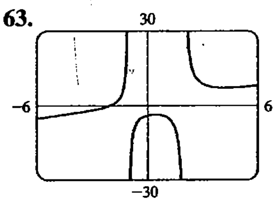


61.



abscisa al origen 3
ordenada al origen −0.5
vertical: $x = -3$
horizontal: $y = 0.5$
no hay extremos locales

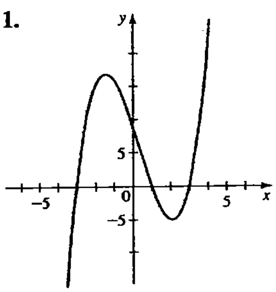
63.



intersección en x −2
intersección en y −4
vertical en $x = -1$, $x = 2$
inclinada $y = x + 1$
máximo local en (0.425, −3.599)
mínimo local en (4.216, 7.175)

Examen del capítulo 6

1.



2. cociente: $x^3 + 2x^2 + 2$
residuo: 9

3. **(a)** $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3$
(b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)(x + 1)(x - 3)$ **(c)** $-1, \frac{1}{2}, 1, 3$

4. **(a)** $\frac{6}{13} - \frac{22}{13}i$ **(b)** $2 - 11i$ **(c)** i

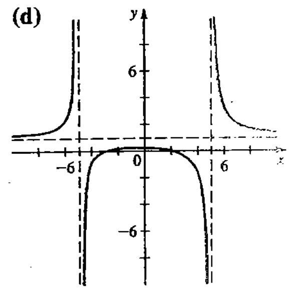
5. $-1, 2, -1 \pm i$

6. **(a)** Para P y Q: con el teorema de los ceros racionales; para R: con la regla de Descartes **(b)** No, según la regla de Descartes **(c)** Dos (una positiva y una negativa); con la regla de Descartes **(d)** Los únicos ceros racionales posibles son 1 y −1, y ninguno de ellos es cero

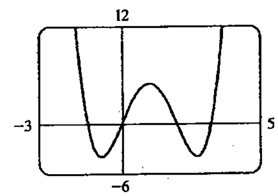
7. $x^4 + 2x^2 + 8x + 5$

8. **(a)** 4, 2 o 0 raíces reales positivas; 0 raíz real negativa

9. **(a)** r, u **(b)** s **(c)** s **(d)**



10.

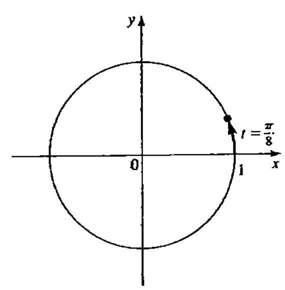


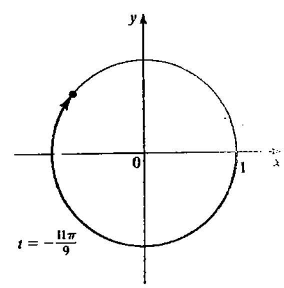
intersecciones en x: −1.24, 0, 2, 3.24
máximo local en (1, 5)
mínimos locales en (−0.73, −4), (2.73, −4)

CAPÍTULO 7

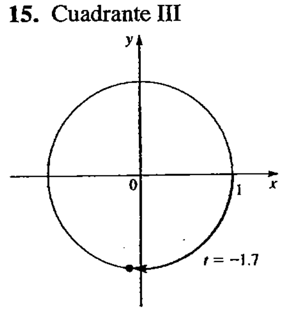
Sección 7.1

5. $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **7.** $P\left(\frac{2}{3}, -\sqrt{5}/3\right)$ **9.** $P\left(\sqrt{2}/3, -\sqrt{7}/3\right)$
11. Cuadrante I **13.** Cuadrante II





15. Cuadrante III



17. $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$
19. $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
21. $(-1, 0)$

23. $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **25.** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
27. **(a)** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **(b)** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(c)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(d)** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

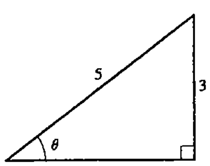
29. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/3$ **(d)** $\pi/6$
31. **(a)** $\pi/5$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $\pi/3$ **(d)** $\pi/6$
33. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
35. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$
37. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
39. **(a)** $\pi/6$ **(b)** $(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$
41. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$
43. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$ **45.** $(0.5, 0.8)$
47. $(0.5, -0.9)$

Sección 7.2 ■

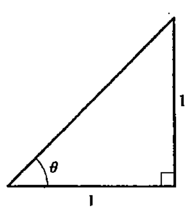
1. $2\pi/9 \approx 0.698$ rad **3.** $2\pi/5 \approx 1.257$ rad
5. $\pi/4 \approx 0.785$ rad
7. $-630°$
9. $360°/\pi \approx 114.6°$ **11.** $40°$ **17.** $36°$
15. $660°, 1020°, -60°, -420°$
13. $7\pi/4, 15\pi/4, -9\pi/4, -17\pi/4$
17. Sí **19.** Sí
21. $63°$ **23.** $280°$
25. π **41.** $\pi/4$ **27.** $55\pi/9 \approx 19.2$ **29.** 4
31. 4 mi **33.** 2 rad $\approx 114.6°$ **35.** $36/\pi \approx 11.459$ m
37. $330\pi \approx 1037$ mi **39.** 1.6 millones de millas **41.** 1.15 mi
43. 50 m^2 **45.** 4 m **47.** 6 cm^2

Sección 7.3 ■

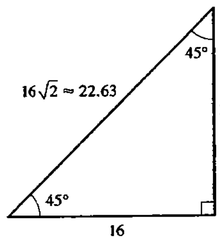
1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$
3. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{7}$, $\cos\theta = \sqrt{33}/7$, $\tan\theta = 4\sqrt{33}/33$, $\csc\theta = \frac{7}{4}$, $\sec\theta = 7\sqrt{33}/33$, $\cot\theta = \sqrt{33}/4$
5. **(a)** $2\sqrt{13}/13, 2\sqrt{13}/13$ **(b)** $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ **(c)** $\sqrt{13}/3, \sqrt{13}/3$
7. $\frac{25}{2}$ **9.** $13\sqrt{3}/2$ **11.** 16.51658
13. $x = 28\cos\theta$, $y = 28\operatorname{sen}\theta$
15. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$



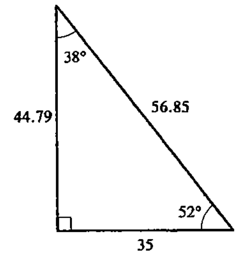
17. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2$, $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, $\tan\theta = 1$, $\csc\theta = \sqrt{2}$, $\sec\theta = \sqrt{2}$



21. $(1 + \sqrt{3})/2$ **23.** 1 **25.** $\frac{1}{2}$
27.



29.



31. $\operatorname{sen}\theta \approx 0.45$, $\cos\theta \approx 0.89$, $\tan\theta \approx 0.50$, $\csc\theta \approx 2.24$, $\sec\theta \approx 1.12$, $\cot\theta \approx 2.00$
33. 1,026 pies **35.** **(a)** 2,100 mi **(b)** No **37.** 19 pies
39. 38.7° **41.** 345 pies **43.** 415 pies, 152 pies
45. 2,570 pies **47.** 5,808 pies **49.** 91.7 millones de mi
51. 3,960 mi **53.** 230.9 **55.** 63.7
57. $a = \operatorname{sen}\theta$, $b = \tan\theta$, $c = \sec\theta$, $d = \cos\theta$

Sección 7.4 ■

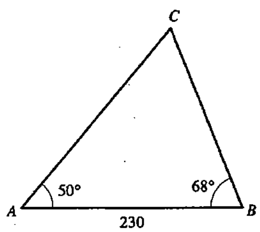
1. **(a)** 0 **(b)** 1 **3.** **(a)** 0 **(b)** -1
5. **(a)** 1 **(b)** -1 **7.** **(a)** 0 **(b)** 0
9. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** 2 **11.** **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{1}{2}$
13. **(a)** $\sqrt{3}/3$ **(b)** $-\sqrt{3}/3$ **15.** **(a)** 2 **(b)** $-2\sqrt{3}/3$
17. $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\tan 0 = 0$, $\sec 0 = 1$, los otros están indefinidos
19. $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\tan\pi = 0$, $\sec\pi = -1$, los otros están indefinidos
21. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$ **23.** $-\sqrt{13}/7, \frac{6}{7}, -\sqrt{13}/6$ **25.** $\frac{9}{41}, \frac{40}{41}, \frac{9}{40}$
27. $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{12}{5}$ **29.** **(a)** 0.8 **(b)** 0.84147
31. **(a)** 0.9 **(b)** 0.93204 **33.** **(a)** 1 **(b)** 1.02964
35. **(a)** -0.6 **(b)** -0.57482 **37.** Positivo
39. Negativo **41.** II **43.** II
45. $\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$
47. $\operatorname{sen} t = -\sqrt{1 - 1/\sec^2 t} = -\sqrt{\sec^2 t - 1} / \sec t$.
49. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t / \cos^2 t = 1/\cos^2 t - 1$.
51. $\operatorname{sen} t = -3/5$, $\tan t = 3/4 \sec t = -5/4$, cosc $t = -5/3$.
53. $\cos t = 1/3$, $\operatorname{sen} t = -2/3\sqrt{2}$, $\tan t = -2\sqrt{2}$, $\cot t = -\sqrt{2}/4$, $\csc t = -3/4\sqrt{2}$.
55. $\operatorname{sen} t = -\sqrt{221}/17$, $\cos t = -4\sqrt{17}/17$, $\cot t = 4$, $\sec t = -\sqrt{17}/4$, $\csc t = \sqrt{221}/12$.
57. $\operatorname{sen} t = 4\sqrt{17}/17$, $\cos t = -\sqrt{221}/17$, $\cot t = -1/4$, $\sec t = -\sqrt{221}/13$, $\cos t = \sqrt{17}/4$.
59. Par.
61. Ninguna.
63. Par.
65. Par.

Sección 7.5

1. **(a)** 45° **(b)** 35° **(c)** 1°
3. **(a)** 25° **(b)** 85° **(c)** 15°
5. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $\pi - 3 \approx 0.14$
7. $\frac{1}{2}$ **9.** $\sqrt{2}/2$ **11.** $-\sqrt{3}/2$ **13.** 1 **15.** $-\sqrt{3}/2$
17. $\sqrt{3}/3$ **19.** $\sqrt{3}/2$ **21.** -1 **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** 2
27. -1 **29.** indefinido **31.** III **33.** IV
35. $\tan\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}/\cos\theta$ **37.** $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$
39. $\sec\theta = -\sqrt{1 + \tan^2\theta}$
41. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
43. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
45. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}/3$, $\sec\theta = 2\sqrt{3}/3$, $\cot\theta = \sqrt{3}$
47. $\operatorname{sen}\theta = 3\sqrt{5}/7$, $\tan\theta = -3\sqrt{5}/2$, $\csc\theta = 7\sqrt{5}/15$, $\sec\theta = -\frac{7}{2}$, $\cot\theta = -2\sqrt{5}/15$
49. **(a)** $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$ **(b)** $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}/4$ **(c)** $\frac{3}{4}$, 0.88967
51. 19.1 **53.** 66.1°

Sección 7.6

1. 21.5 **3.** 134.6



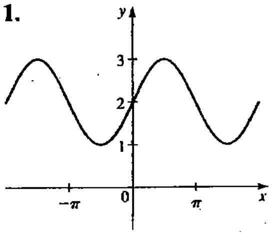
15. $\angle B \approx 30°$, $\angle C \approx 40°$, $c \approx 19$ **17.** No hay solución
19. $\angle A_1 \approx 125°$, $\angle C_1 \approx 30°$, $a_1 \approx 49$; $\angle A_2 \approx 5°$, $\angle C_2 \approx 150°$, $a_2 \approx 5.6$
21. No hay solución **23.** 219 pies
25. **(a)** 1018 mi **(b)** 1017 mi **27.** 155 m
29. **(a)** $d\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$ **(c)** 2,350 pies **31.** 48.2°

Sección 7.7

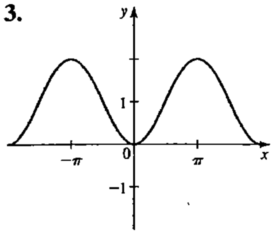
1. 13 **3.** 29.89°
5. $\angle A \approx 39.4°$, $\angle B \approx 20.6°$, $c \approx 24.6$
7. a = 57,15, B ≈ 80° y C ≈ 30°.
9. A ≈ 38°, B ≈ 49° y C ≈ 123°.

Sección 7.8

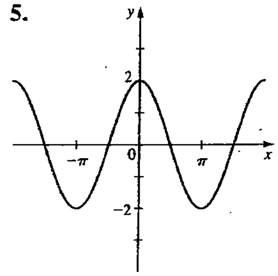
1.



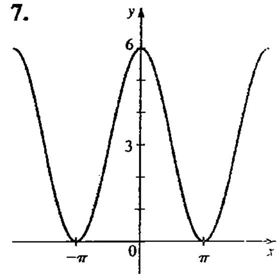
3.



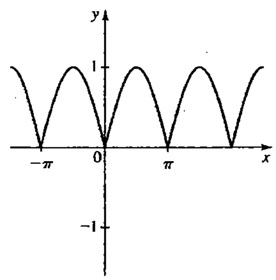
5.



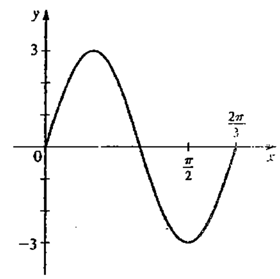
7.



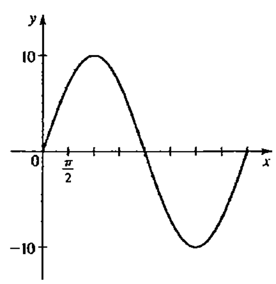
9.



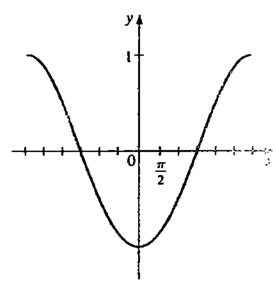
11. 3, $2\pi/3$



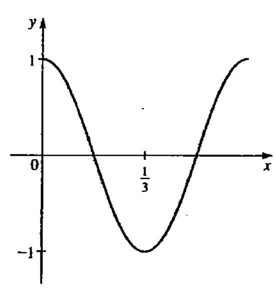
13. 10, 4π



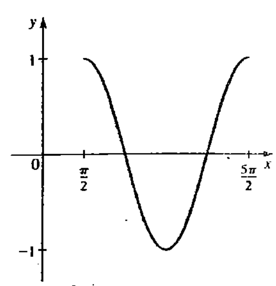
15. 1, 6π



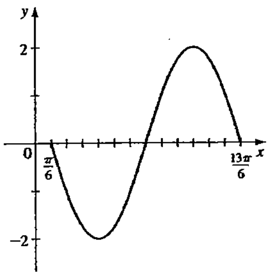
17. 3, $\frac{2}{3}$



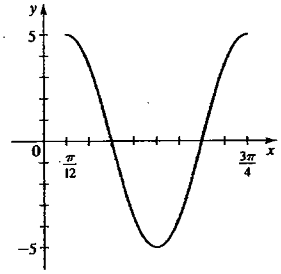
19. 1, 2π, $\pi/2$



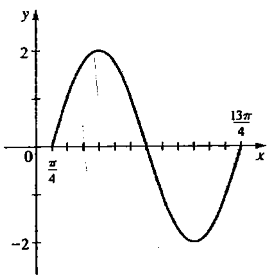
21. 2, 2π, $\pi/6$



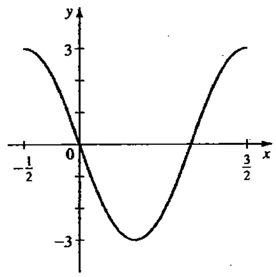
23. 5, $2\pi/3$, $\pi/12$



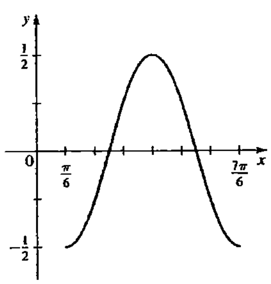
25. 2, 3π, $\pi/4$



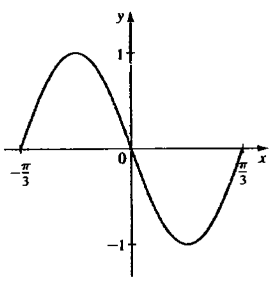
27. 3, 2, $-\frac{1}{2}$



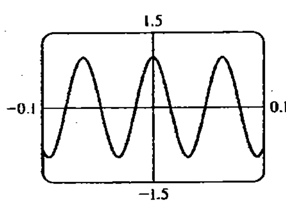
29. $\frac{1}{2}$, π, $\pi/6$



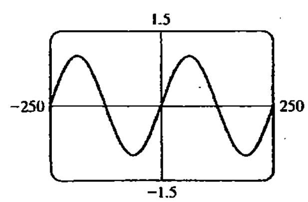
31. 1, $2\pi/3$, $-\pi/3$



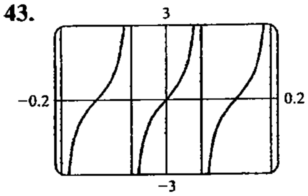
33. **(a)** 4, 2π, 0 **(b)** $y = 4 \operatorname{sen} x$
35. **(a)** 3, 4π, 0 **(b)** $y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$
37. **(a)** $\frac{1}{2}$, π, $-\pi/3$ **(b)** $y = -\frac{1}{2}\cos 2(x + \pi/3)$
39.



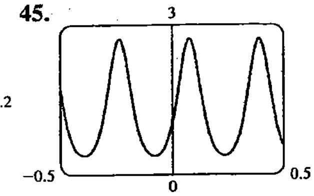
41.



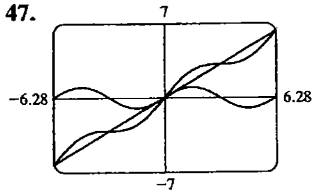
43.



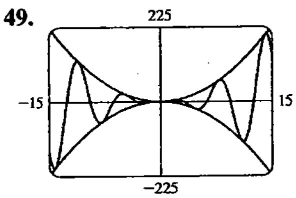
45.



47.

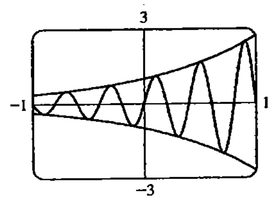


49.



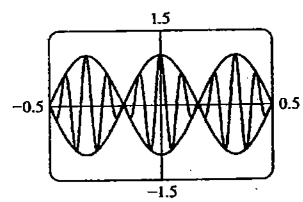
$y = x^2 \operatorname{sen} x$ es una curva seno que está entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$

51.



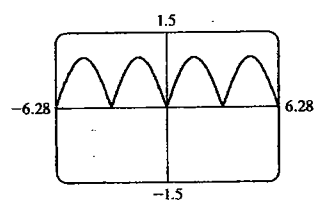
$y = e^x \operatorname{sen} 5\pi x$ es una curva seno que está entre las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$

53.



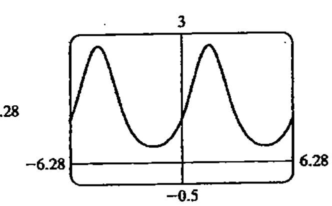
$y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$ es una curva coseno que está entre las gráficas de $y = \cos 3\pi x$ y $y = -\cos 3\pi x$

55. **(a)**



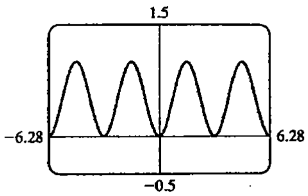
(b) Periodo π **(c)** Par

57. **(a)**



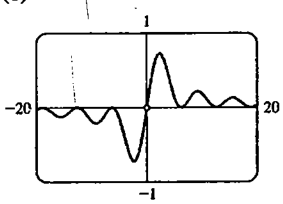
(b) Periodo 2π **(c)** Par

59. (a)



(b) Periodo π
(c) Par

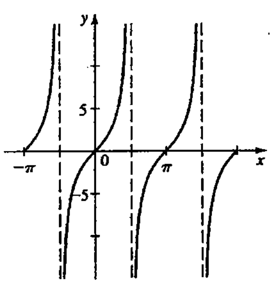
61. Valor máximo 1.76 cuando x 0.94; valor mínimo −1.76 cuando x −0.94 (Los mismos valores máximos y mínimos se presentan en una cantidad infinita de otros valores de x.)
63. Valor máximo 3.00 cuando $x = 1.57$, valor mínimo −1.00 cuando $x = -1.57$ (Los mismos valores máximos y mínimos ocurren en un número infinito de otros valores de x.)
65. 1.16 **67.** 0.34, 2.80
69. (a) Impar **(b)** $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$
(c)



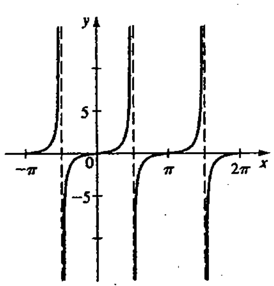
(d) $f(x)$ tiende a 0
(e) $f(x)$ tiende a 0

Sección 7.9 ■

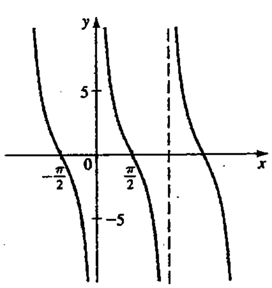
1. π



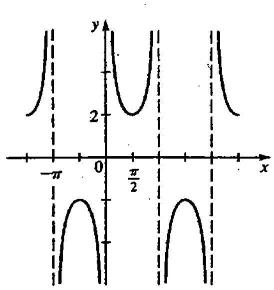
3. π



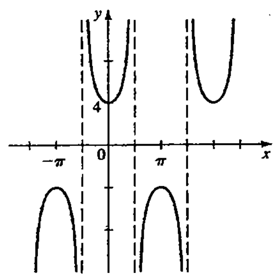
5. π



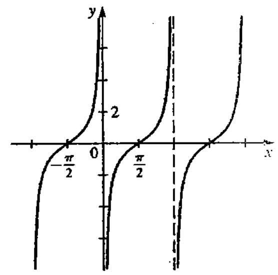
7. 2π



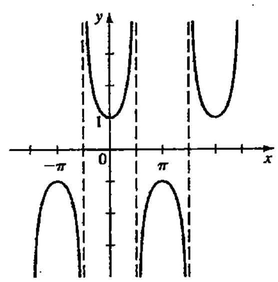
9. 2π



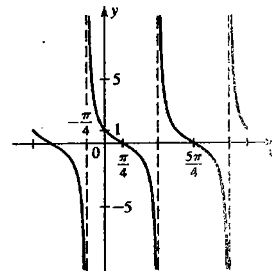
11. π



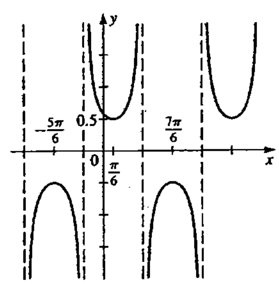
13. 2π



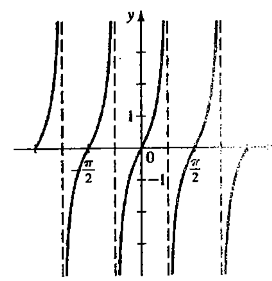
15. π



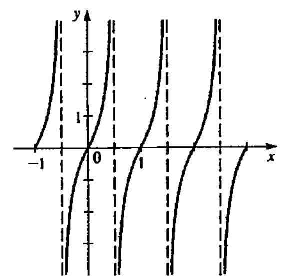
17. 2π



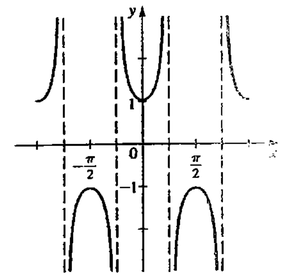
19. $\pi/2$



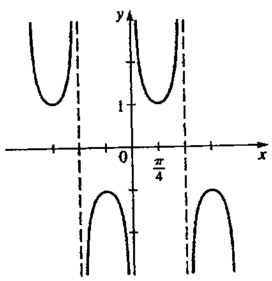
21. 1



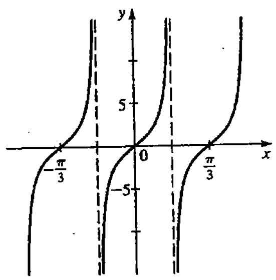
23. π



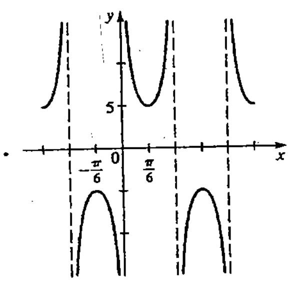
25. π



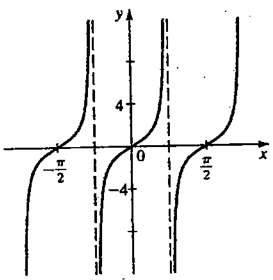
27. $\pi/3$



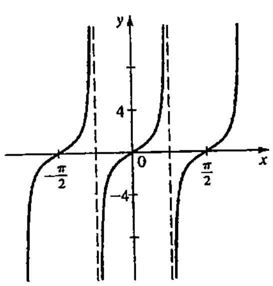
29. $2\pi/3$



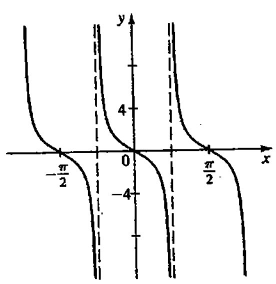
31. $\pi/2$



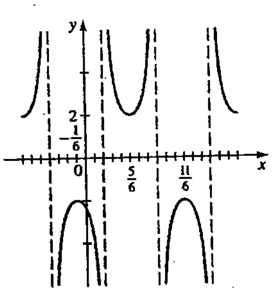
33. $\pi/2$



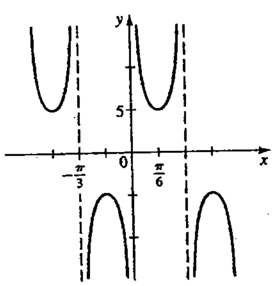
35. $\pi/2$



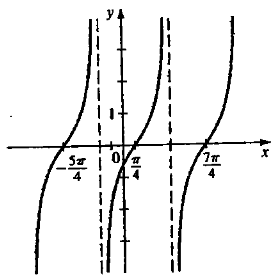
37. 2



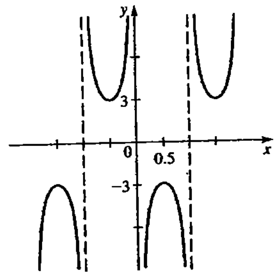
39. $2\pi/3$



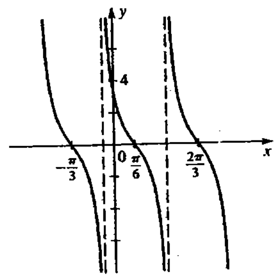
41. $3\pi/2$



43. 2



45. $\pi/2$



Repaso del capítulo 7 ■

1. (b) $\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$

3. (a) $\pi/3$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **(c)** $\operatorname{sen} t = \sqrt{3}/2, \cos t = \frac{1}{2}$, $\tan t = \sqrt{3}, \csc t = 2\sqrt{3}/3, \sec t = 2, \cot t = \sqrt{3}/3$

5. (a) 0.89121 **(b)** 0.45360

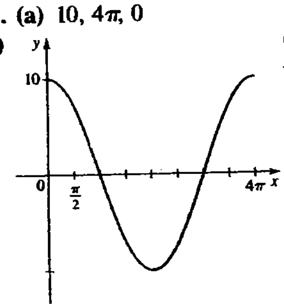
7. $(\operatorname{sen} t)/(1 - \operatorname{sen}^2 t)$

9. $\tan t = -\frac{5}{12}, \csc t = \frac{13}{5}, \sec t = -\frac{13}{12}, \cot t = -\frac{12}{5}$

11. $(16 - \sqrt{17})/4$

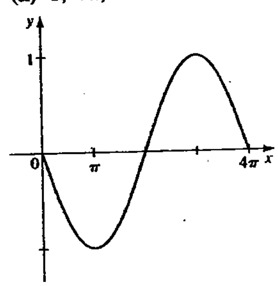
13. (a) $10, 4\pi, 0$

(b)



15. (a) $1, 4\pi, 0$

(b)



17. $y = 5 \operatorname{sen} 4x$

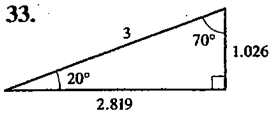
19. (a) $7\pi/18 \approx 1.22$ **(b)** $7\pi/3 \approx 7.33$
(c) $-4\pi/3 \approx -4.19$ **(d)** $-2\pi/9 \approx -0.70$

21. 8 m **23.** 82 pies **25.** 0.619 rad $\approx 35.4°$

27. 18,151 pies^2

29. $\operatorname{sen}\theta = 5/\sqrt{74}, \cos\theta = 7/\sqrt{74}, \tan\theta = \frac{5}{7}$, $\csc\theta = \sqrt{74}/5, \sec\theta = \sqrt{74}/7, \cot\theta = \frac{7}{5}$

31. $x \approx 3.83, y \approx 3.21$

33. 

35. 48 m 37. 1,076 mi
39. $-\sqrt{2}/2$ 41. 1

43. $-\sqrt{3}/3$ 33. $-\sqrt{2}/2$

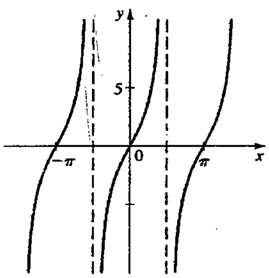
45. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$

47. 60° 49. $\tan\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}/\cos\theta$

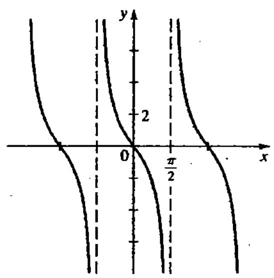
51. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{7}/4$, $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = 4\sqrt{7}/7$, $\cot\theta = 3\sqrt{7}/7$

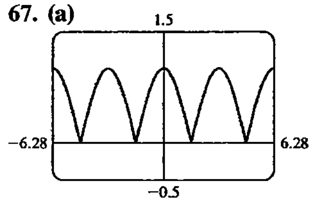
53. $-\sqrt{5}/5$ 55. 1 57. 5.32

63. π

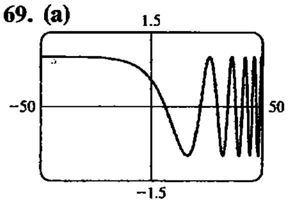


65. π

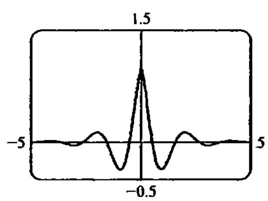


67. (a) 

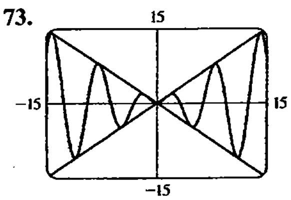
(b) Periodo π
(c) Par

69. (a) 

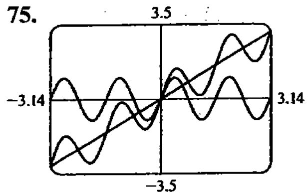
(b) No es periódica
(c) Ninguna de las dos

71. (a) 

(b) No es periódica
(c) Par

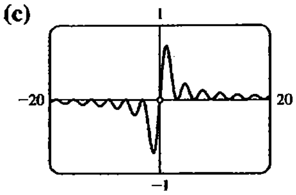
73. 

$y = x \operatorname{sen} x$ es una función seno cuya gráfica está entre las de $y = x$ y $y = -x$.

75. 

Las gráficas se relacionan mediante suma.

77. 1.76, −1.76 79. 0.30, 2.84

81. (a) Impar (b) 0, $\pm\pi$, $\pm2\pi$, ...
(c) 

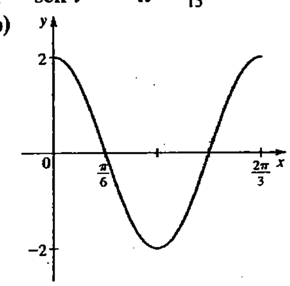
(d) $f(x)$ tiende a 0
(e) $f(x)$ tiende a 0

Examen del capítulo 7 ■

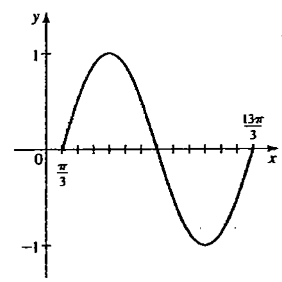
1. $y = -\frac{5}{13}$ 2. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $-\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$

3. $\tan t = -(\operatorname{sen} t)/\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$ 4. $-\frac{2}{15}$

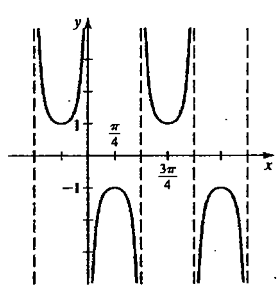
5. (a) 2, $2\pi/3$, 0 (b)



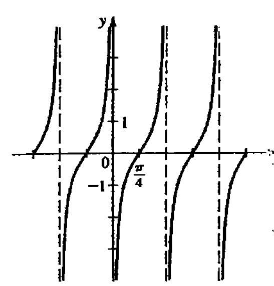
6. (a) 1, 4π, $\pi/3$



7. π

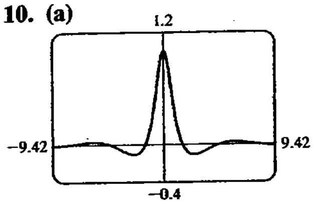


8. $\pi/2$



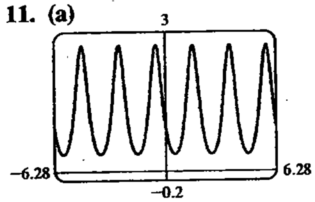
9. $y = 2\operatorname{sen} 2(x + \pi/3)$

10. (a)



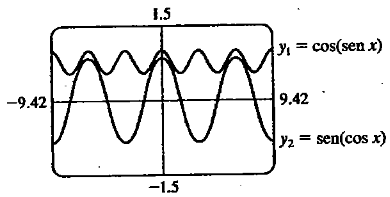
(b) Par
(c) Valor mínimo −0.11 cuando x 2.54, valor máximo 1 cuando $x = 0$

11. (a)



(b) Ninguna de las dos
(c) Valor mínimo 0.37, valor máximo 2.72 (Ambos valores se alcanzan en una cantidad infinita de valores de x.)

12. (a)



(b) y_1 tiene el periodo π, y_2 tiene el periodo 2π
(c) $\operatorname{sen}(\cos x) < \cos(\operatorname{sen} x)$

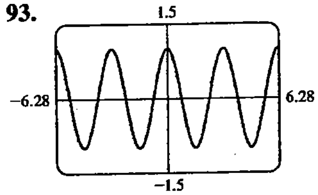
13. $5\pi/3, -\pi/10$ **14.** 150°, 137.5°
15. (a) $\sqrt{2}/2$ **(b)** $\sqrt{3}/3$ **(c)** 2 **(d)** 1
16. $(26 + 6\sqrt{13})/39$ **17.** $a = 24\operatorname{sen}\theta$, $b = 24\cos\theta$
18. $(4 - 3\sqrt{2})/4$ **7.** $-\frac{13}{12}$ **19.** $\tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1}$
20. 19.6 pies **21.** 9.1 **22.** 250.5 **23.** 8.4 **24.** 19.5
25. 15.3 m^2 **26.** 24.3 m **27.** 129.9° **28.** 44.9
29. 554 pies

CAPÍTULO 8

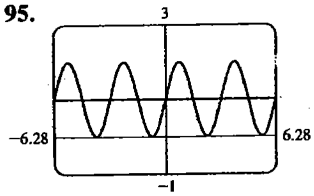
Sección 8.1 ■

1. $\operatorname{sen} x$ **3.** 1 **5.** $\sec u$ **7.** $\tan x$ **9.** $\operatorname{sen} y$
11. $\operatorname{sen}^2 x$ **13.** $\sec x$ **15.** $2\sec u$ **17.** $\cos^2 x$
19. $\cos\theta$ **83.** $\tan\theta$ **85.** $\tan\theta$ **87.** $3\cos\theta$

93. Sí



95. No



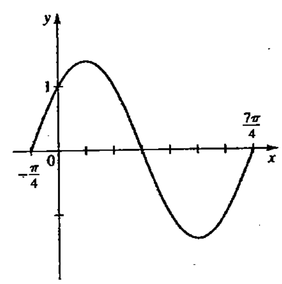
Sección 8.2 ■

1. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ **3.** $-2 - \sqrt{3}$ **5.** $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$

7. $\sqrt{2}/2$ **9.** $\sqrt{3}$ **33.** $2\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

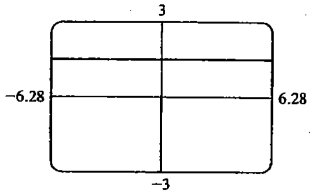
35. $5\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{7\pi}{4}\right)$

37. $f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$



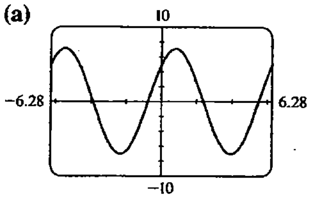
41. $\tan\gamma = \frac{17}{6}$

43. **(a)**



$\operatorname{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

45. **(a)**

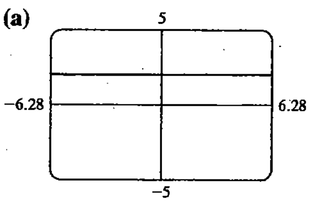


(b) $k = 5\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$

Sección 8.3 ■

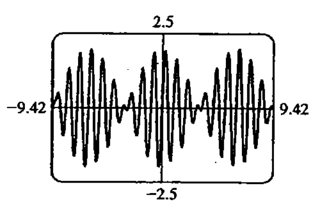
1. $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{120}{119}$ **3.** $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{24}{7}$ **5.** $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$
7. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)$
9. $\frac{1}{32}\left(\frac{3}{4} - \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 8x\right)$
11. $\frac{1}{16}\left(1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x\right)$
13. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ **15.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ **17.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
19. **(a)** $\operatorname{sen} 36°$ **(b)** $\operatorname{sen} 6\theta$
21. **(a)** $\cos 68°$ **(b)** $\cos 10\theta$ **23.** **(a)** $\tan 4°$ **(b)** $\tan 2\theta$
25. $\sqrt{10}/10, 3\sqrt{10}/10, \frac{1}{3}$
27. $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})/6}, \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})/6}, 3 + 2\sqrt{2}$
29. $\sqrt{6}/6, -\sqrt{30}/6, -\sqrt{5}/5$
31. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x)$ **33.** $\frac{3}{2}(\cos 11x + \cos 3x)$
35. $2 \operatorname{sen} 4x \cos x$ **37.** $2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x$
39. $-2\cos\frac{9}{2}x \operatorname{sen}\frac{5}{2}x$ **41.** $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/2$
43. $\frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)$ **45.** $\sqrt{2}/2$

69. **(a)**

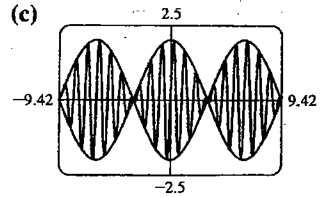


$\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

71. **(a)**



(c)

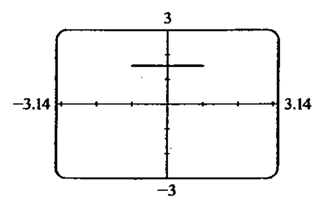


La gráfica de $y = f(x)$ está entre las otras dos gráficas.

75. **(a)** $P(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$
(b) $Q(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$

Sección 8.4 ■

1. **(a)** $\pi/6$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** No definida
3. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $-\pi/4$
5. **(a)** $\pi/2$ **(b)** 0 **(c)** π
7. **(a)** $\pi/6$ **(b)** $-\pi/6$ **(c)** No definida
9. **(a)** 0.87696 **(b)** 2.09601 **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** 10
15. $\pi/3$ **17.** $-\pi/6$ **19.** $-\pi/3$ **21.** $\sqrt{3}/3$ **23.** $\frac{1}{2}$
25. $\pi/3$ **27.** $\frac{4}{5}$ **29.** $\frac{12}{13}$ **31.** $\frac{13}{5}$ **33.** $\sqrt{5}/5$
35. $\frac{24}{25}$ **37.** 1 **39.** $\sqrt{1 - x^2}$ **41.** $x/\sqrt{1 - x^2}$
43. $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **45.** 0 **47.** $\theta = \tan^{-1}\dfrac{50}{s}$
49. **(b)** 17.1°, 29.7°, 19.7°
51. **(a)**



Conjetura: $y = \pi/2$ para $-1 \leq x \leq 1$
53. **(a)** 0.28 **(b)** $(-3 + \sqrt{17})/4$

Sección 8.5 ■

1. $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$ **3.** $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$
5. $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$
7. $\dfrac{(2k + 1)\pi}{4}$ **9.** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$
11. $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi$ **13.** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$
15. $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$ **17.** $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$
19. No hay solución **21.** $\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$
23. $4k\pi$ **25.** $\dfrac{k\pi}{3}$

27. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

29. $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

31. $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$

33. $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

35. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

37. $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

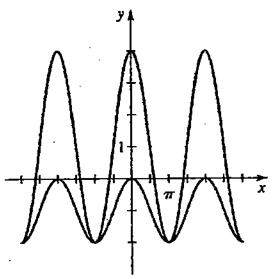
39. **(a)** 1.15928, 5.12391
(b) $1.15928 + 2k\pi, 5.12391 + 2k\pi$

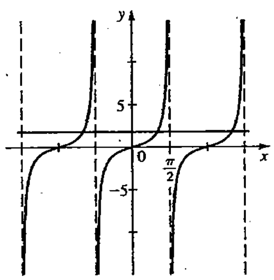
41. **(a)** 1.36944, 4.91375
(b) $1.36944 + 2k\pi, 4.91375 + 2k\pi$

43. **(a)** 0.46365, 2.67795, 3.60524, 5.81954
(b) $0.46365 + k\pi, 2.67795 + k\pi$

45. **(a)** 0.33984, 2.80176
(b) $0.33984 + 2k\pi, 2.80176 + 2k\pi$

47. $((2k + 1)\pi, -2)$ **49.** $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \sqrt{3}\right)$





51. $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

53. $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$

55. $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ **57.** 0 **59.** $\frac{k\pi}{2}$

61. $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

63. $0, \pm 0.95$ **65.** 1.92 **67.** ± 0.71

Sección 8.6 ■

1. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ **3.** $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

5. $4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$ **7.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

9. $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

11. $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$ **13.** $20(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$

15. $5[\cos(\tan^{-1}\frac{4}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\tan^{-1}\frac{4}{3})]$

17. $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

19. $8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

21. $\sqrt{5}\,[\cos(\tan^{-1}\frac{1}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\tan^{-1}\frac{1}{2})]$

23. $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

25. $z_1z_2 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi;\ \frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

27. $z_1z_2 = 14\left(\cos\frac{12\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{12\pi}{7}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{6\pi}{7}\right)$

29. $z_1z_2 = 100(\cos 350° + i\,\mathrm{sen}\,350°)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{25}(\cos 50° + i\,\mathrm{sen}\,50°)$

31. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$

$z_1z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

33. $z_1 = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_1z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right)$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{11\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

35. $z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = 4(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0)$

$z_1z_2 = 20\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

37. $z_1 = 20(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1z_2 = 40\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 10\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$$

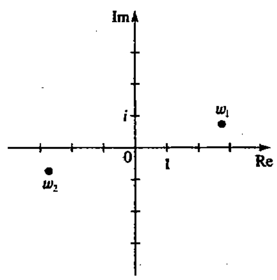
$$\frac{1}{z_1} = \tfrac{1}{20}(\cos\pi - i\,\text{sen}\,\pi)$$

39. $-1{,}024$ **41.** $512(-\sqrt{3} + i)$ **43.** -1

45. $4{,}096$ **47.** $8(-1 + i)$ **49.** $\frac{1}{2{,}048}(-\sqrt{3} - i)$

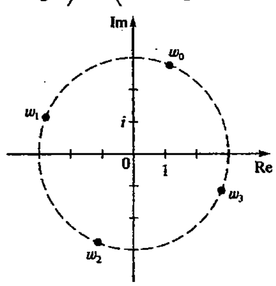
51. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$,

$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right)$

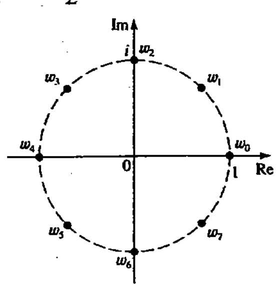


53. $3\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)$, $3\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right)$,

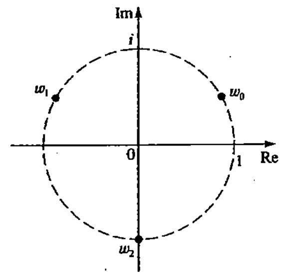
$3\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{8}\right)$, $3\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{15\pi}{8}\right)$



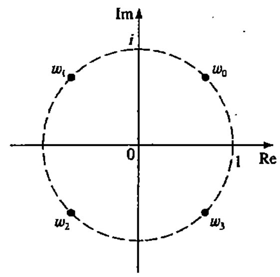
55. $\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$



57. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$



59. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$



61. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

63. $2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{18}\right)$, $2\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{18}\right)$,

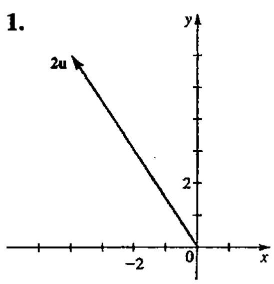
$2\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{25\pi}{18}\right)$

65. $2^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$, $2^{1/6}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right)$,

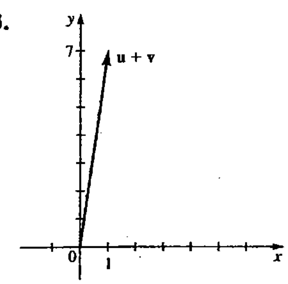
$2^{1/6}\left(\cos\frac{21\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{21\pi}{12}\right)$

Sección 8.7 ■

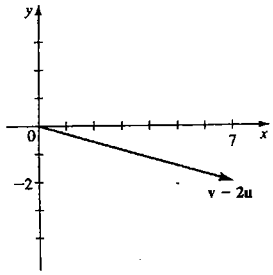
1.



3.



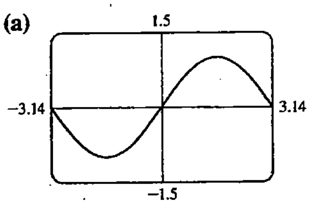
5.



7. $\langle 3,3\rangle$ **9.** $\langle 3,-1\rangle$ **11.** $\langle 5,7\rangle$ **13.** $\langle -4,-3\rangle$
15. $\langle 0,2\rangle$ **17.** $\langle 4,14\rangle, \langle -9,-3\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle -6,17\rangle$
19. $\langle 0,-2\rangle, \langle 6,0\rangle, \langle -2,-1\rangle, \langle 8,-3\rangle$
21. $4\mathbf{i}, -9\mathbf{i}+6\mathbf{j}, 5\mathbf{i}-2\mathbf{j}, -6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$
23. $\sqrt{5}, \sqrt{13}, 2\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{13}, \sqrt{26}, \sqrt{10}, \sqrt{5}-\sqrt{13}$
25. $\sqrt{101}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{101}, \sqrt{2}, \sqrt{73}, \sqrt{145}, \sqrt{101}-2\sqrt{2}$
27. $20\sqrt{3}\,\mathbf{i}+20\mathbf{j}$ **29.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
31. $4\cos 10^\circ\mathbf{i}+4\operatorname{sen}10^\circ\mathbf{j}\approx 3.94\mathbf{i}+0.69\mathbf{j}$
33. $15\sqrt{3}, -15$ **35.** $5, 53.13^\circ$ **37.** $13, 157.38^\circ$
39. $2, 60^\circ$
41. **(a)** $425\mathbf{i}+40\mathbf{j}$ **(b)** 427 mi/h, N84.6°E
43. 794 mi/h, N26.6°W
45. **(a)** $20\mathbf{i}+17.32\mathbf{j}$ **(b)** 26.5 mi/h, N49.1°E
47. 7.4 mi/h, 22.8 mi/h **49.** **(a)** $\langle 5,-3\rangle$ **(b)** $\langle -5,3\rangle$
51. **(a)** $-4\mathbf{j}$ **(b)** $4\mathbf{j}$
53. **(a)** $\langle -7.57, 10.61\rangle$ **(b)** $\langle 7.57, -10.61\rangle$
55. $\mathbf{T}_1\approx -56.5\mathbf{i}+67.4\mathbf{j}, \mathbf{T}_2\approx 56.5\mathbf{i}+32.6\mathbf{j}$

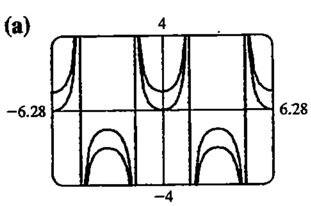
Repaso del capítulo 8 ■

23. **(a)**



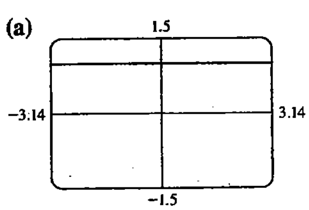
(b) Sí

25. **(a)**



(b) No

27. **(a)**

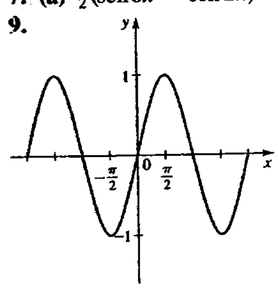


$2\operatorname{sen}^2 3x+\cos 6x=1$

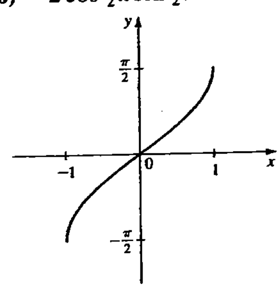
29. $0, \pi$ **31.** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **33.** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **35.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
37. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$
39. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ **41.** $\frac{\pi}{6}$ **43.** 1.18
45. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **47.** $\sqrt{2}-1$ **49.** $\sqrt{2}/2$
51. $\sqrt{2}/2$ **53.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ **55.** $2\frac{\sqrt{10}+1}{9}$
57. $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ **59.** $\sqrt{(3+2\sqrt{2})/6}$ **61.** $\pi/3$
63. $\frac{1}{2}$ **65.** $2/\sqrt{21}$ **67.** $\frac{7}{9}$ **69.** $x/\sqrt{1+x^2}$
71. $\theta=\cos^{-1}\frac{x}{3}$ **73.** $s=7{,}920\cos^{-1}\left(\frac{3{,}960}{h+3{,}960}\right)$
75. $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$
77. $\sqrt{34}\left[\cos(\tan^{-1}\frac{3}{5})+i\operatorname{sen}(\tan^{-1}\frac{3}{5})\right]$
79. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$ **81.** $8(-1+i\sqrt{3})$
83. $-\frac{1}{32}(1+i\sqrt{3})$ **85.** $\pm 2\sqrt{2}(1-i)$
87. $\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
89. $\sqrt{13}, \langle 6,4\rangle, \langle -10,2\rangle, \langle -4,6\rangle, \langle -22,7\rangle$
91. $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ **93.** $(10,-2)$
95. **(a)** $(4.8\mathbf{i}+0.4\mathbf{j})\times 10^4$
(b) 4.8×10^4 lb, N85.2°E

Examen del capítulo 8 ■

2. **(a)** $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(b)** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
3. 0.57964, 2.56195, 3.72123, 5.70355 **4.** $\tan\theta$
5. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **(c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$
6. $(10-2\sqrt{5})/15$
7. **(a)** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}8x-\operatorname{sen}2x)$ **(b)** $-2\cos\frac{7}{2}x\operatorname{sen}\frac{3}{2}x$ **8.** -2
9.



Dominio $\mathbb{R}$

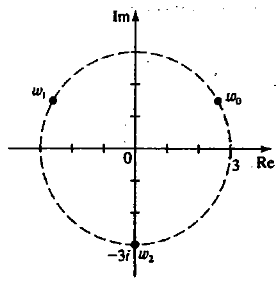


Dominio $[-1, 1]$

10. **(a)** $\theta=\tan^{-1}\frac{x}{4}$ **(b)** $\theta=\cos^{-1}\frac{3}{x}$ **11.** $\frac{40}{41}$
12. **(a)** $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** -512

13. $-8, \sqrt{3} + i$

14. $-3i, 3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$



15. **(a)** $-6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ **(b)** $2\sqrt{34}$

16. **(a)** $\langle 19, -3\rangle$ **(b)** $5\sqrt{2}$

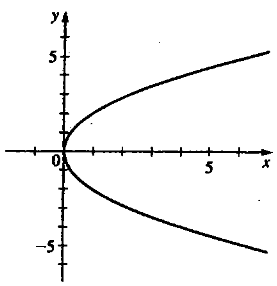
17. **(a)** $14\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\mathbf{j}$ **(b)** 17.4 mi/h, N53.4°E

CAPÍTULO 9

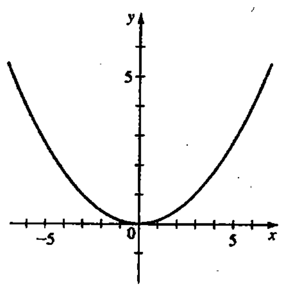
Sección 9.1 ■

Orden de las respuestas: foco, directriz, diámetro focal

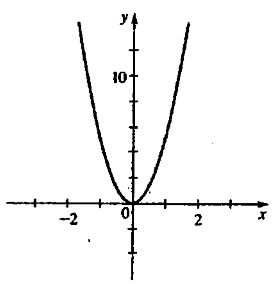
1. $F(1,0); x = -1; 4$



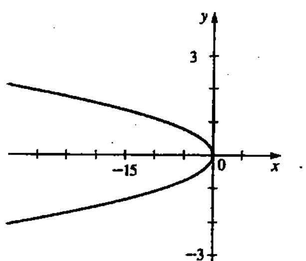
3. $F(0, \frac{9}{4}); y = -\frac{9}{4}; 9$



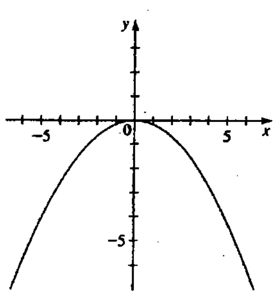
5. $F(0, \frac{1}{20}); y = -\frac{1}{20}; \frac{1}{5}$



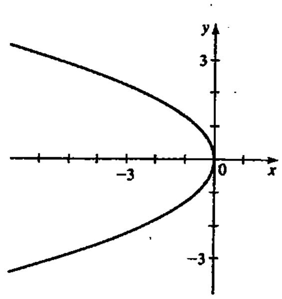
7. $F(-\frac{1}{32}, 0); x = \frac{1}{32}; \frac{1}{8}$



9. $F(0, -\frac{3}{2}); y = \frac{3}{2}; 6$



11. $F(-\frac{5}{12}, 0); x = \frac{5}{12}; \frac{5}{3}$



13. $x^2 = 8y$ **15.** $y^2 = -32x$

17. $y^2 = -8x$ **19.** $x^2 = 40y$

21. $y^2 = 4x$ **23.** $x^2 = 20y$

25. $x^2 = -12y$ **27.** $y^2 = -3x$

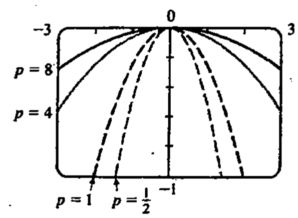
29. $x = y^2$ **31.** $x^2 = -4\sqrt{2}\,y$

33. **(a)** $y^2 = 12x$ **(b)** $8\sqrt{15} \approx 31$ cm

35. $x^2 = 600y$

37. **(a)** $x^2 = -4py, p = \frac{1}{2}, 1, 4,$ y 8

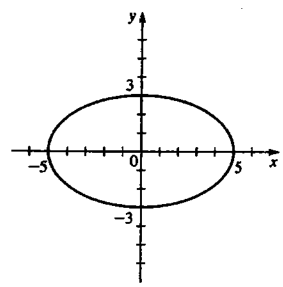
(b) Mientras más cercana está la directriz al vértice, la parábola es más cerrada.



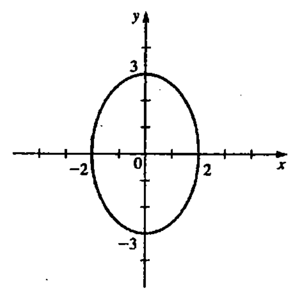
Sección 9.2 ■

Orden de las respuestas: vértices, focos, excentricidad, eje mayor y eje menor

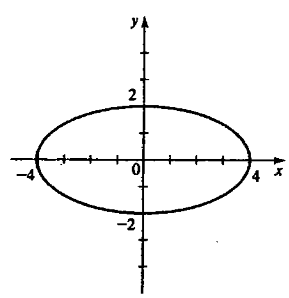
1. $V(\pm 5, 0); F(\pm 4, 0);$ $\frac{4}{5}; 10, 6$



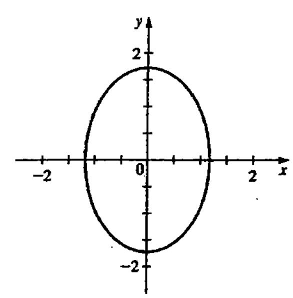
3. $V(0, \pm 3); F(0, \pm\sqrt{5});$ $\sqrt{5}/3; 6, 4$



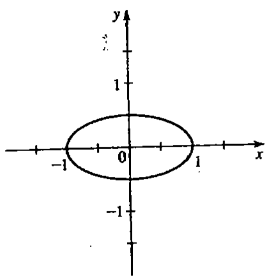
5. $V(\pm 4, 0); F(\pm 2\sqrt{3}, 0);$ $\sqrt{3}/2; 8, 4$



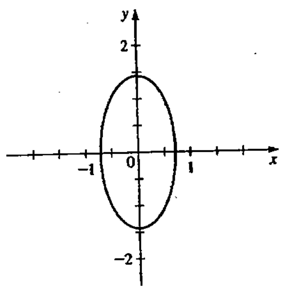
7. $V(0, \pm\sqrt{3}); F(0, \pm\sqrt{3/2});$ $1/\sqrt{2}; 2\sqrt{3}, \sqrt{6}$



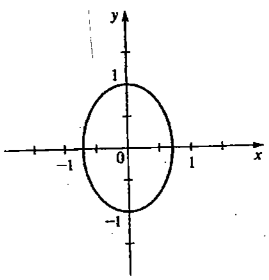
9. $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{3}/2, 0)$; $\sqrt{3}/2$; 2, 1



11. $V(0, \pm\sqrt{2})$; $F(0, \pm\sqrt{3/2})$; $\sqrt{3}/2$; $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$



13. $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm 1/\sqrt{2})$; $1/\sqrt{2}$; 2, $\sqrt{2}$



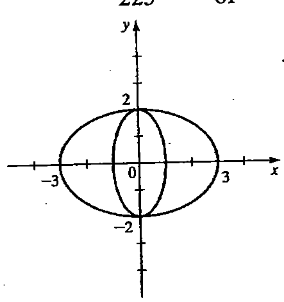
15. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **17.** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

19. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **21.** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

23. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{13} = 1$ **25.** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{91} = 1$

27. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ **29.** $\dfrac{64x^2}{225} + \dfrac{64y^2}{81} = 1$

31. $(0, \pm 2)$

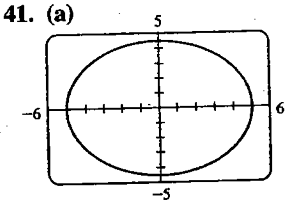


33. $\dfrac{x^2}{2.2500 \times 10^{16}} + \dfrac{y^2}{2.2497 \times 10^{16}} = 1$

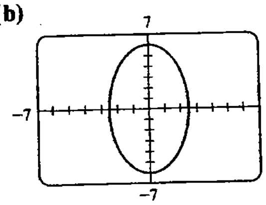
35. $\dfrac{x^2}{1{,}455{,}642} + \dfrac{y^2}{1{,}451{,}610} = 1$

37. $5\sqrt{39}/2 \approx 15.6$ pulg

41. **(a)**



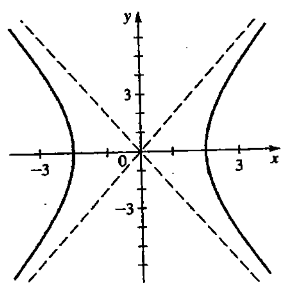
(b)



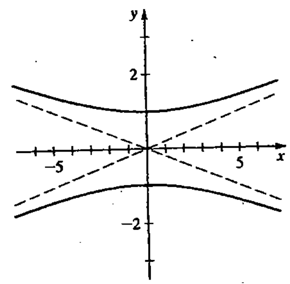
Sección 9.3

Orden de las respuestas: vértices, focos, asíntotas

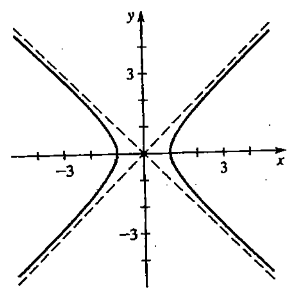
1. $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{5}, 0)$; $y = \pm 2x$



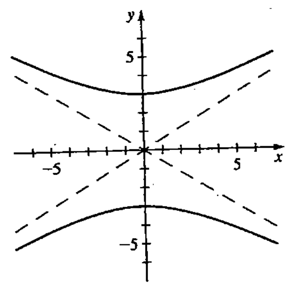
3. $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm\sqrt{26})$; $y = \pm \frac{1}{5}x$



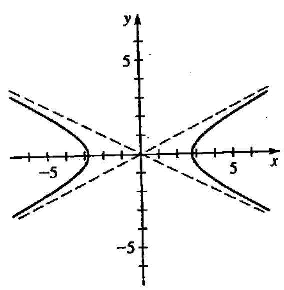
5. $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$; $y = \pm x$



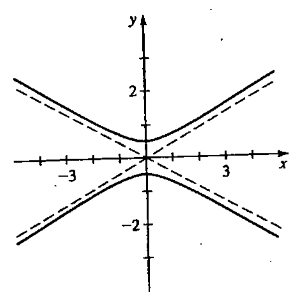
7. $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{34})$; $y = \pm \frac{3}{5}x$



9. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$; $F(\pm\sqrt{10}, 0)$; $y = \pm \frac{1}{2}x$



11. $V(0, \pm \frac{1}{2})$; $F(0, \pm\sqrt{5}/2)$; $y = \pm \frac{1}{2}x$



13. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ **15.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

17. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **19.** $y^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$

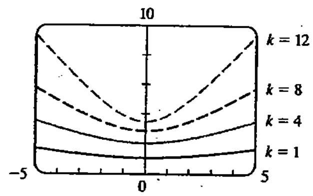
21. $x^2 - \dfrac{y^2}{25} = 1$ **23.** $\dfrac{5y^2}{64} - \dfrac{5x^2}{256} = 1$

25. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **27.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

29. **(b)** $x^2 - y^2 = c^2/2$

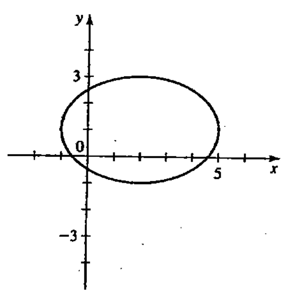
33. **(a)** 490 mi **(b)** $\dfrac{y^2}{60{,}025} - \dfrac{x^2}{2{,}475} = 1$ **(c)** 10.1 mi

35. **(b)**

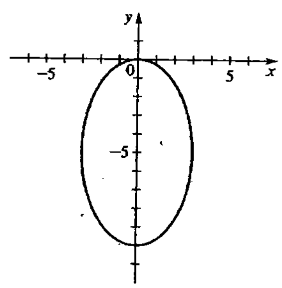


Sección 9.4 ■

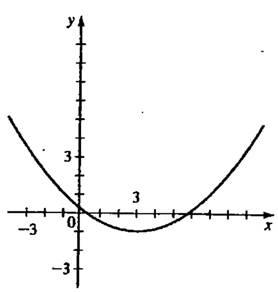
1. Centro $C(2, 1)$; focos $F(2\ \sqrt{5}, 1)$; vértices $V_1(-1, 1)$, $V_2(5, 1)$; eje mayor 6, eje menor 4



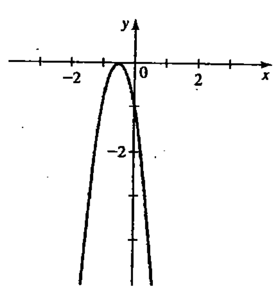
3. Centro $C(0, -5)$; focos $F_1(0, -1)$, $F_2(0, -9)$; vértices $V_1(0, 0)$, $V_2(0, -10)$; eje mayor 10, eje menor 6



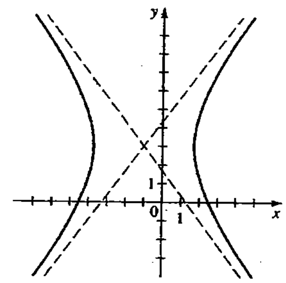
5. Vértice $V(3, -1)$; foco $F(3, 1)$; directriz $y = -3$



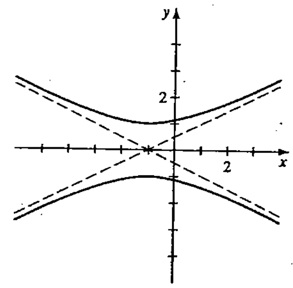
7. Vértice $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; foco $F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$; directriz $y = \frac{1}{16}$



9. Centro $C(-1, 3)$; focos $F_1(-6, 3)$, $F_2(4, 3)$; vértices $V_1(-4, 3)$, $V_2(2, 3)$; asíntotas
$y = \pm\frac{4}{3}(x + 1) + 3$



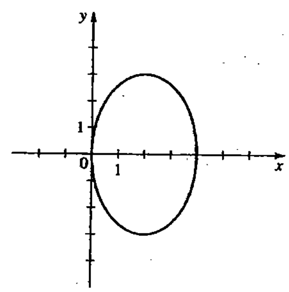
11. Centro $C(-1, 0)$; focos $F(-1,\ \sqrt{5})$; vértices $V(-1, 1)$; asíntotas
$y = \pm\frac{1}{2}(x + 1)$



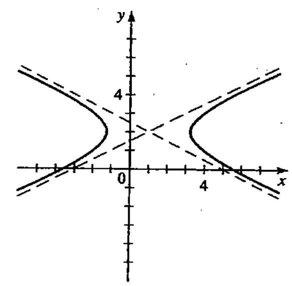
13. $x^2 = -\frac{1}{4}(y - 4)$ **15.** $\dfrac{(x - 5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

17. $(y - 1)^2 - x^2 = 1$

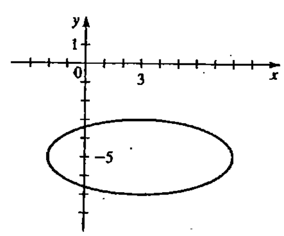
19. Elipse; $C(2, 0)$; $F(2, \pm\sqrt{5})$; $V(2, \pm 3)$; eje mayor 6, eje menor 4



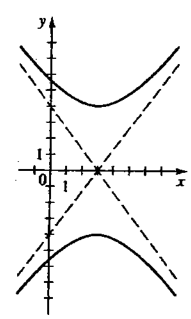
21. Hipérbola; $C(1, 2)$; $F_1\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $F_2\left(\frac{7}{2}, 2\right)$; $V(1 \pm \sqrt{5}, 2)$; asíntotas
$y = \pm\frac{1}{2}(x - 1) + 2$



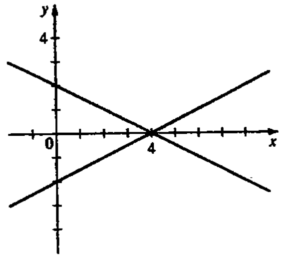
23. Elipse; $C(3, -5)$; $F(3 \pm \sqrt{21}, -5)$; $V_1(-2, -5)$, $V_1(8, -5)$; eje mayor 10, eje menor 4



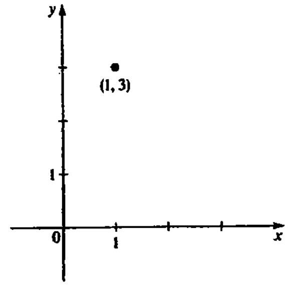
25. Hipérbola; $C(3, 0)$; $F(3, \pm 5)$; $V(3, \pm 4)$; asíntotas
$y = \pm\frac{4}{3}(x - 3)$



27. Cónica degenerada (par de rectas), $y = \pm\frac{1}{2}(x - 4)$

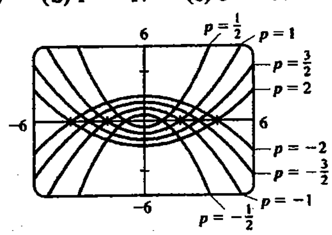


29. Punto $(1, 3)$



31. **(a)** $F < 17$ **(b)** $F = 17$ **(c)** $F > 17$

33. **(a)**



(c) Las parábolas se angostan.

Sección 9.5

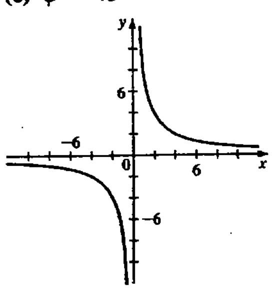
1. $(\sqrt{2}, 0)$ **3.** $(0, -2\sqrt{3})$ **5.** $(1.6383, 1.1472)$

7. $X^2 + Y^2 - 2XY - 3\sqrt{2}\,X + \sqrt{2}\,Y + 2 = 0$

9. $X^2 - Y^2 = 2$

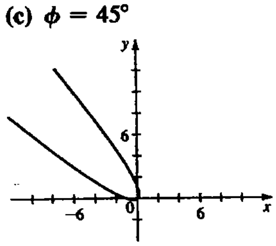
11. **(a)** Hipérbola **(b)** $X^2 - Y^2 = 16$

(c) $\phi = 45°$



13. **(a)** Parábola **(b)** $Y = \sqrt{2}\,X^2$

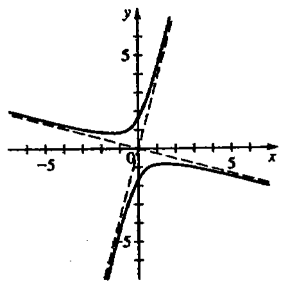
(c) $\phi = 45°$



15. **(a)** Hipérbola

(b) $Y^2 - X^2 = 1$

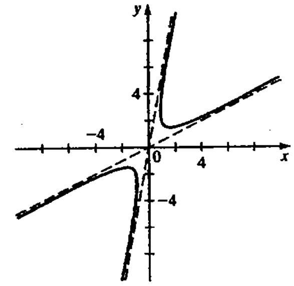
(c) $\phi = 30°$



17. **(a)** Hipérbola

(b) $\dfrac{X^2}{4} - Y^2 = 1$

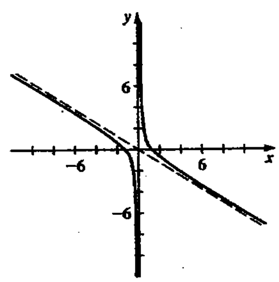
(c) $\phi \approx 53°$



19. **(a)** Hipérbola

(b) $3X^2 - Y^2 = 2\sqrt{3}$

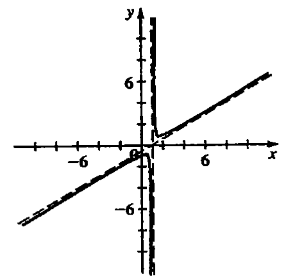
(c) $\phi = 30°$



21. **(a)** Hipérbola

(b) $(X - 1)^2 - 3Y^2 = 1$

(c) $\phi = 60°$

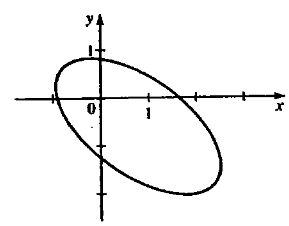


23. **(a)** Elipse

(b) $X^2 + \dfrac{(Y + 1)^2}{4} = 1$

(c) $\phi \approx 53°$

Véase la gráfica a la derecha



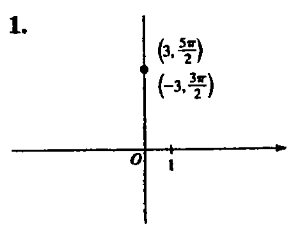
25. **(a)** $(X - 5)^2 - Y^2 = 1$

(b) Coordenadas XY: $C(5, 0)$; $V_1(6, 0)$, $V_2(4, 0)$; $F(5 \pm \sqrt{2}, 0)$; coordenadas xy: $C(4, 3)$; $V_1\left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$, $V_2\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$; $F\left(4 \pm \frac{4}{5}\sqrt{2}, 3 \pm \frac{3}{5}\sqrt{2}\right)$

(c) $Y = \pm(X - 5)$; $7x - y - 25 = 0$, $x + 7y - 25 = 0$

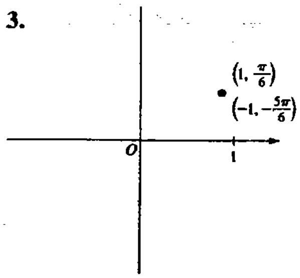
Sección 9.6

1.

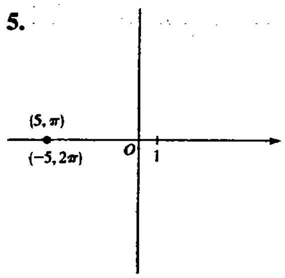


$\left(-3, \dfrac{3\pi}{2}\right), \left(3, \dfrac{5\pi}{2}\right)$

3.



5.



$\left(-1, -\dfrac{5\pi}{6}\right), \left(1, \dfrac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $(-5, 2\pi), (5, \pi)$

7. $(2\sqrt{3}, 2)$ **9.** $(1, -1)$ **11.** $(-5, 0)$

13. $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **15.** $\left(4, \dfrac{\pi}{4}\right)$

17. $(5, \tan^{-1}\frac{4}{3})$ **19.** $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

21. $r = \tan\theta \sec\theta$ **23.** $r = 4\sec\theta$

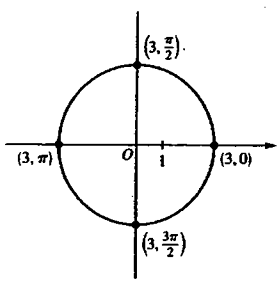
25. $x^2 + y^2 = 49$ **27.** $x = 6$

29. $x^2 + y^2 = \dfrac{y}{x}$ **31.** $y - x = 1$

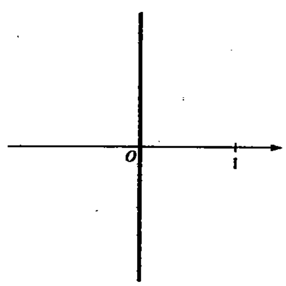
33. $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$

35. $x = 2$ **37.** $y = \pm\sqrt{3}\,x$

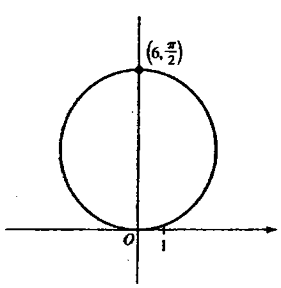
39.



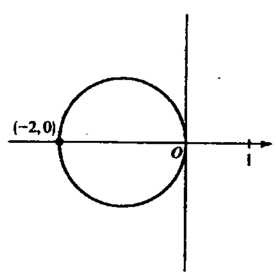
41.



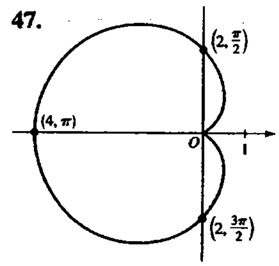
43.



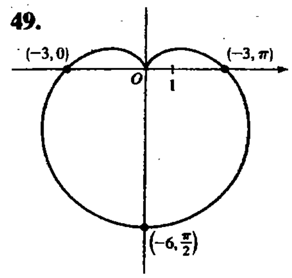
45.



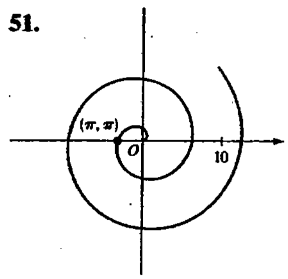
47.



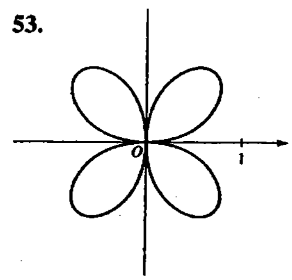
49.



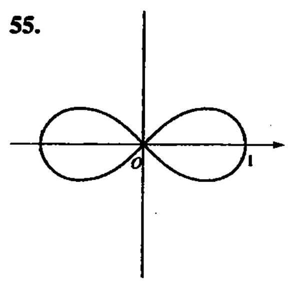
51.



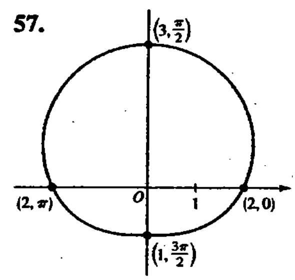
53.



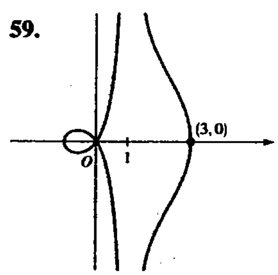
55.



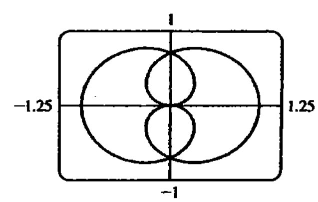
57.



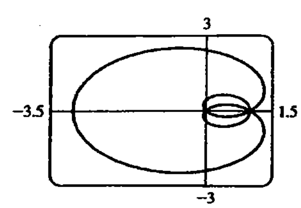
59.



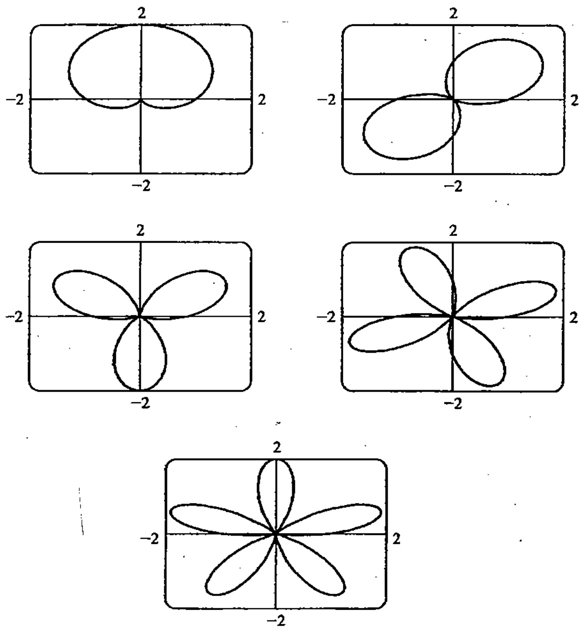
61. $0 \leq \theta \leq 4\pi$



63. $0 \leq \theta \leq 4\pi$



65.



La gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} n\theta$ tiene n bucles.

67. IV **69.** III **71.** **(b)** $\sqrt{10 + 6\cos(5\pi/12)} \approx 3.40$

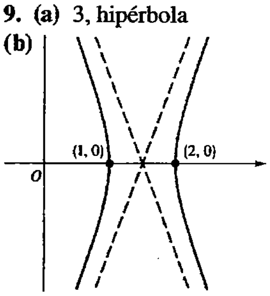
Sección 9.7

1. $r = 6/(3 + 2\cos\theta)$ **3.** $r = 2/(1 + \operatorname{sen}\theta)$

5. $r = 20/(1 + 4\cos\theta)$ **7.** $r = 10/(1 + \operatorname{sen}\theta)$

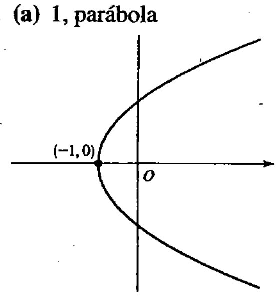
9. **(a)** 3, hipérbola

(b)



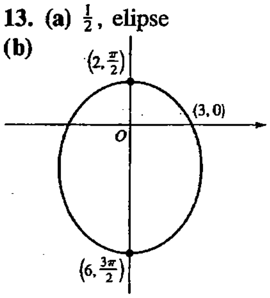
11. **(a)** 1, parábola

(b)



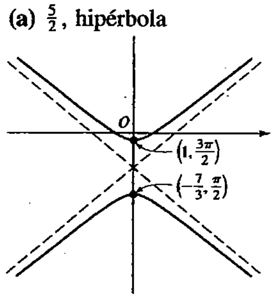
13. **(a)** $\frac{1}{2}$, elipse

(b)



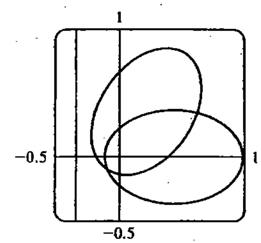
15. **(a)** $\frac{5}{2}$, hipérbola

(b)

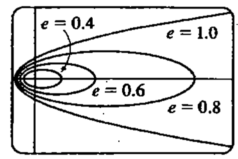


17. **(a)** $e = \frac{3}{4}$, directriz $x = -\frac{1}{3}$

(b) $r = \dfrac{1}{4 - 3\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)}$



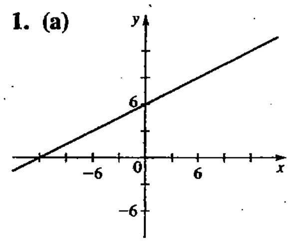
19. La elipse es casi circular cuando e es cercana a 0, y se vuelve más alargada a medida que $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva se transforma en parábola.



21. **(b)** $r = (1.49 \times 10^8)/(1 - 0.017\cos\theta)$ **23.** 0.25

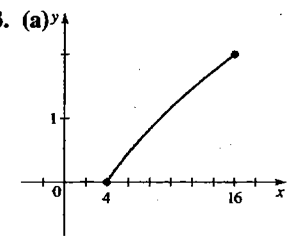
Sección 9.8

1. **(a)**



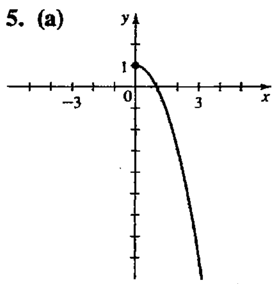
(b) $x - 2y + 12 = 0$

3. **(a)**



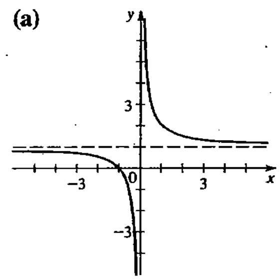
(b) $x = (y + 2)^2$

5. **(a)**



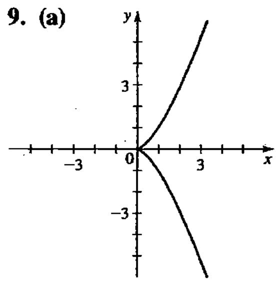
(b) $x = \sqrt{1 - y}$

7. **(a)**



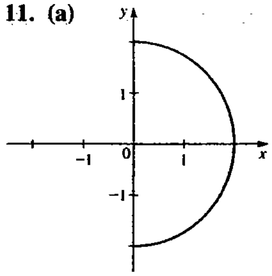
(b) $y = \dfrac{1}{x} + 1$

9. **(a)**



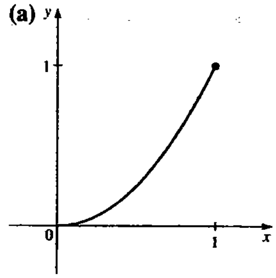
(b) $x^3 = y^2$

11. (a)



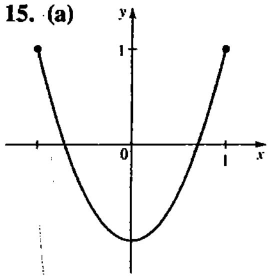
(b) $x^2 + y^2 = 4$

13. (a)



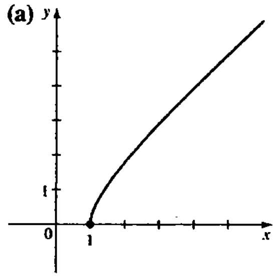
(b) $y = x^2$

15. (a)



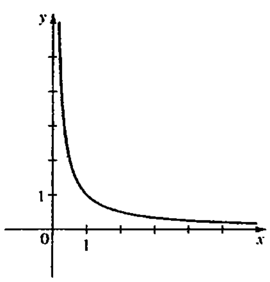
(b) $y = 2x^2 - 1$

17. (a)



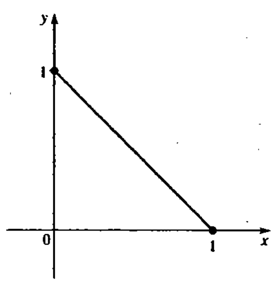
(b) $x^2 - y^2 = 1$

19. (a)



(b) $xy = 1$

21. (a)



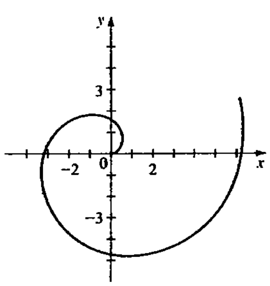
(b) $x + y = 1$

23. $x = 4 + t,\ y = -1 + \frac{1}{2}t$

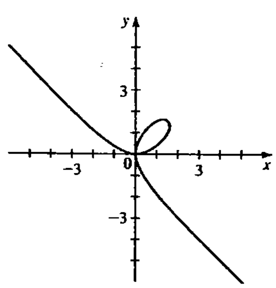
25. $x = 6 + t,\ y = 7 + t$

27. $x = a\cos t,\ y = a\,\mathrm{sen}\,t$

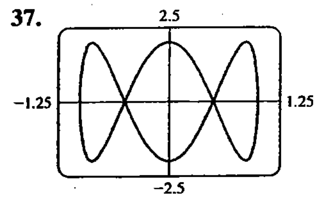
31.



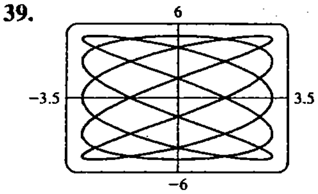
33.



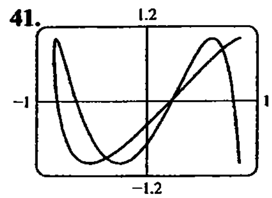
37.



39.

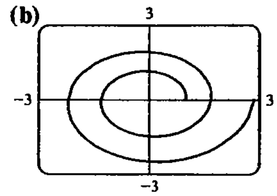


41.



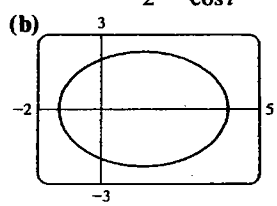
43. (a) $x = e^{t/12}\cos t,\ y = e^{t/12}\,\mathrm{sen}\,t$

(b)



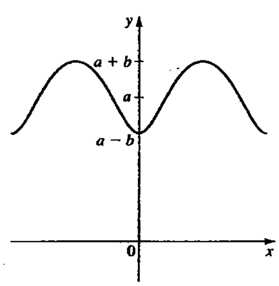
45. (a) $x = \dfrac{4\cos t}{2 - \cos t},\ y = \dfrac{4\,\mathrm{sen}\,t}{2 - \cos t}$

(b)

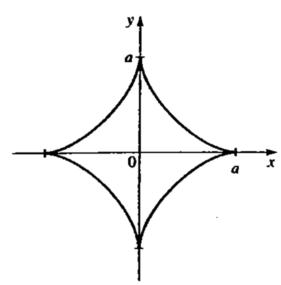


47. III 49. II

51.



53. (b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

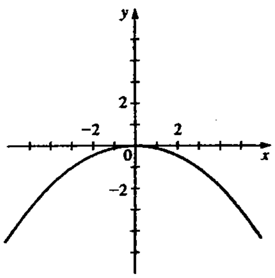


55. $x = a(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \cot\theta),\ y = a(1 + \mathrm{sen}^2\theta)$

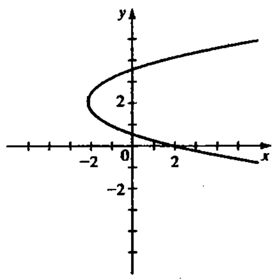
57. $y = a - a\cos\left(\dfrac{x + \sqrt{2ay - y^2}}{a}\right)$

Repaso del capítulo 9 ■

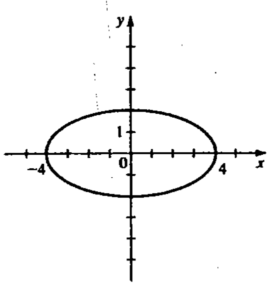
1. $V(0,0)$; $F(0,-2)$; $y = 2$



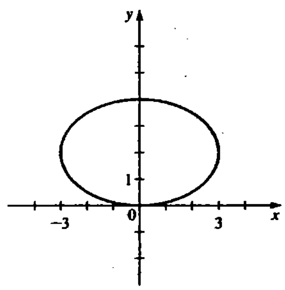
3. $V(-2,2)$; $F(-\frac{7}{4},2)$; $x = -\frac{9}{4}$



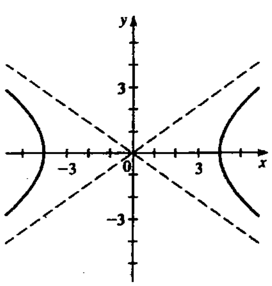
5. $C(0,0)$; $V(\pm 4,0)$; $F(\pm 2\sqrt{3},0)$; ejes 8, 4



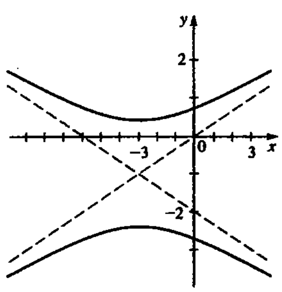
7. $C(0,2)$; $V(\pm 3,2)$; $F(\pm\sqrt{5},2)$; ejes 6, 4



9. $C(0,0)$; $V(\pm 4,0)$; $F(\pm 2\sqrt{6},0)$; asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$



11. $C(-3,-1)$; $V(-3,-1\pm\sqrt{2})$; $F(-3,-1\pm 2\sqrt{5})$; asíntotas $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x - 2$

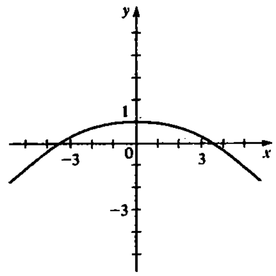


13. $y^2 = 8x$

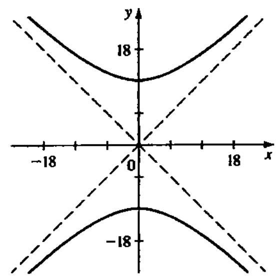
15. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

17. $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

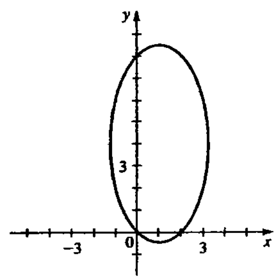
19. Parábola; $F(0,-2)$; $V(0,1)$



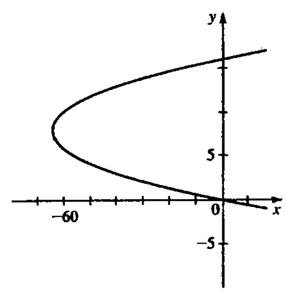
21. Hipérbola; $F(0,\pm 12\sqrt{2})$; $V(0,\pm 12)$



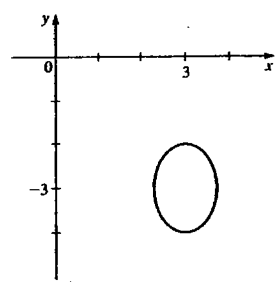
23. Elipse; $F(1,4\pm\sqrt{15})$; $V(1,4\pm 2\sqrt{5})$



25. Parábola; $F(-\frac{255}{4},8)$; $V(-64,8)$



27. Elipse; $F(3,-3\pm 1/\sqrt{2})$; $V_1(3,-4)$, $V_2(3,-2)$



29. No tiene gráfica **31.** $x^2 = 4y$ **33.** $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

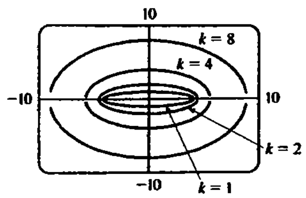
35. $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

37. $\dfrac{4(x-7)^2}{225} + \dfrac{(y-2)^2}{100} = 1$

39. $(x - 800)^2 = -200(y - 3{,}200)$

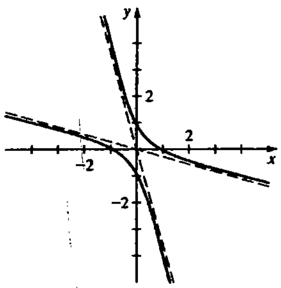
41. **(a)** 91,419,000 mi **(b)** 94,581,000 mi

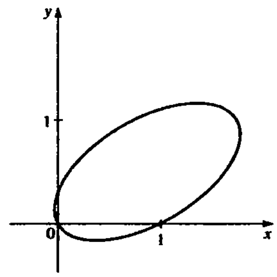
43. (a)



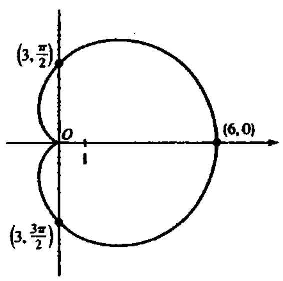
45. (a) Hipérbola
(b) $3X^2 - Y^2 = 1$
(c) $\phi = 45°$

47. (a) Elipse
(b) $(X - 1)^2 + 4Y^2 = 1$
(c) $\phi = 30°$



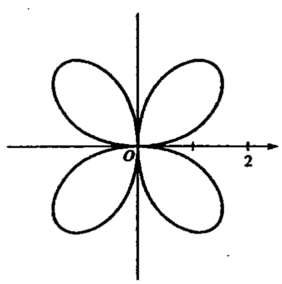


49. (a)



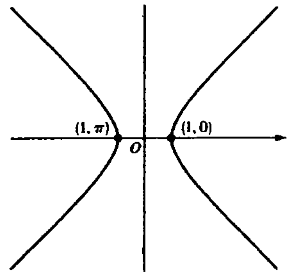
(b) $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

51. (a)



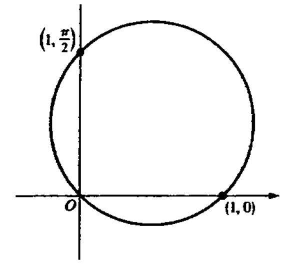
(b) $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$

53. (a)



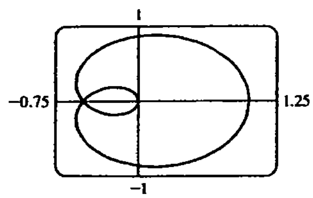
(b) $x^2 - y^2 = 1$

55. (a)

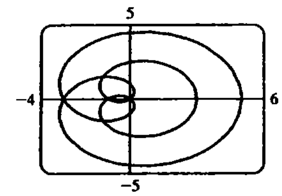


(b) $x^2 + y^2 = x + y$

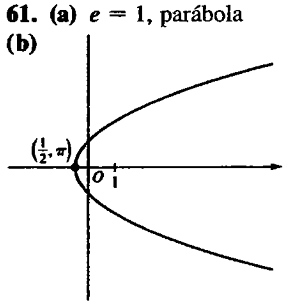
57. $0 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$



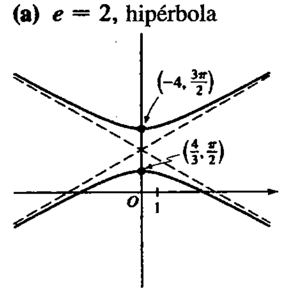
59. $0 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$



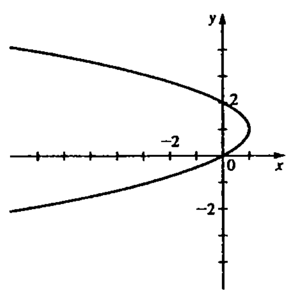
61. (a) $e = 1$, parábola
(b)



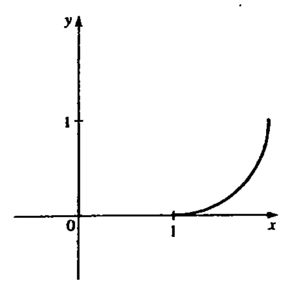
63. (a) $e = 2$, hipérbola
(b)



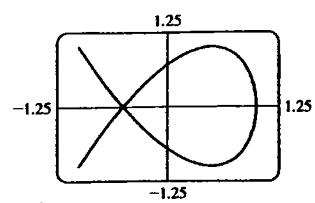
65. $x = 2y - y^2$



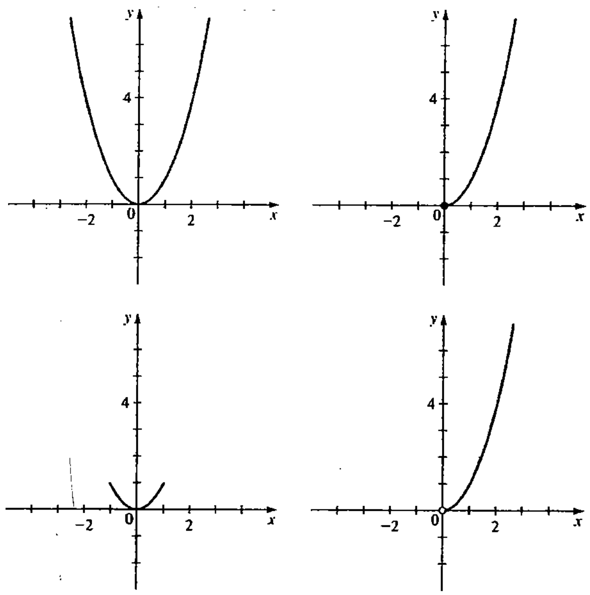
67. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$



69.



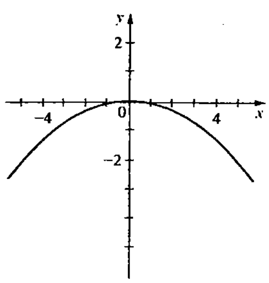
71. **(a)** $y = x^2$
(b)



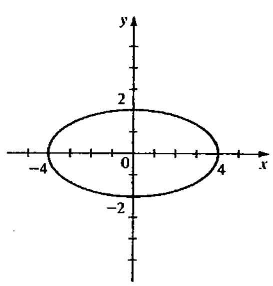
Las curvas son distintas partes de la parábola $y = x^2$.

Examen del capítulo 9

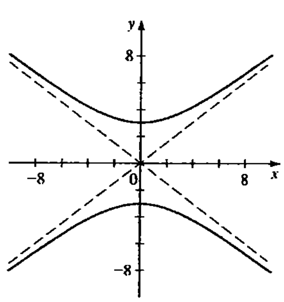
1. $F(0, -3)$, $y = 3$



2. $V(\pm 4, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; 8, 4



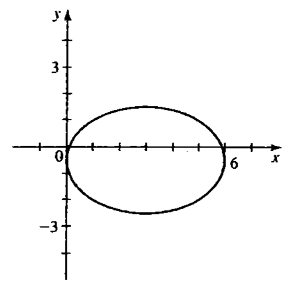
3. $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm 5)$; $y = \pm \frac{3}{4}x$



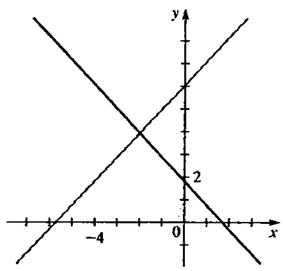
4. $y^2 = -x$ **5.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

6. $(x-2)^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

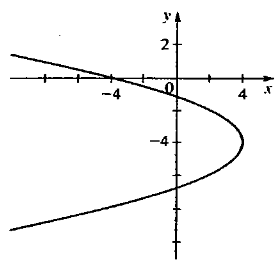
7. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{4} = 1$



8. $9(x+2)^2 - 8(y-4)^2 = 0$



9. $(y+4)^2 = -2(x-4)$

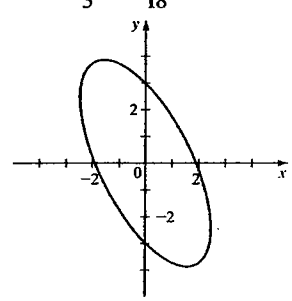


10. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ **11.** $x^2 - 4x - 8y + 20 = 0$

12. $\frac{3}{4}$ pulg

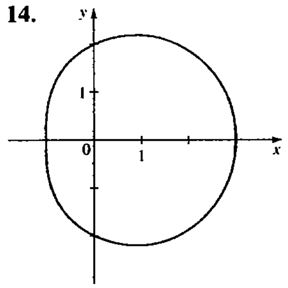
13. **(a)** Elipse **(b)** $\dfrac{X^2}{3} + \dfrac{Y^2}{18} = 1$

(c) $\phi \approx 27°$



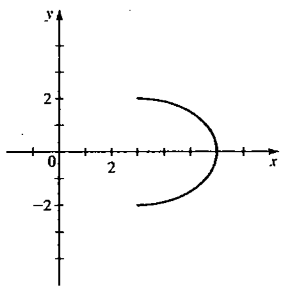
(d) $\left(-3\sqrt{2/5}, 6\sqrt{2/5}\right)$, $\left(3\sqrt{2/5}, -6\sqrt{2/5}\right)$

14.



15. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$, círculo

16. (a)



(b) $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

CAPÍTULO 10

Sección 10.1

1 -1
3. No existe
5. 5
7. no está bien enunciado, pero el resultado es -1
9. No existe
11. 0
13. No existe
15.1
17. No existe
25. No existe
27. 2, la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en x=1.
29. e^a
31. $\dfrac{a}{b}$
33. 20
35. No está bien enunciado

Sección 10.2

1. ∞
3. 0
5. 0
7. 1
9. $\dfrac{2}{3}$
11. 0
13. $x=0$ es asíntota vertical. $y=-2$ es asíntota horizontal.

Sección 10.3

1. Continua
3. $x=a$ es discontinuidad evitable para $a\neq 0$. Para $a=0$ discontinuidad esencial.
5. $x=0$ es discontinuidad esencial.
7. $x=0$ es discontinuidad evitable.
9. Continua.
11. Discontinuidad esencial para todos los valores x de la forma $x=\dfrac{p}{3}, p\in \mathbb{Z}$.
23. Si.
25. $c=2, d=0$
27. Verdader o.
29. Falso.

Repaso del capítulo 10

1. (a) 2, (b) 3, (c) no existe, (d) 4; (e) 4.
3. (a) -1, (b) 2, (c) no existe, (d) 0; (e) 2, (f) 1
7. [-4, -2) (-2, 2) [2, 4) (4, 6) (6,8)
9. 1
11. ∞
27. A.H. $y=2$, A.V. $x=1, x=-2$.
35. Es discontinua en $x=-2$ y en $x=-3$.

Examen del capítulo 10

5. (b) $x=0$ (evitable); $x=-1.2$ y $x=1.2$ (esencial); $x=0$ y $x=1$
6.
(a)

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x+|x|}{2} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x^2+|x^2|}{2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

(b) para todos los valores de x que pertenecen a los reales.

4. Para $a=1$ y $a=-1$ y los límites son 1/5 y -1/5.
5. (a) a/b, (b) 0

CAPÍTULO 11

Sección 11.1

1. 12 **3. (a)** 64 **(b)** 24 **5.** 1,024 **7.** 120
9. 144 **11.** 120 **13.** 32 **15.** 216 **17.** 480
19. No **21.** 158,184,000 **23.** 1,024 **25.** 8,192
27. No **29.** 24,360 **31.** 1,050
33. (a) 16,807 **(b)** 2,520 **(c)** 2,401 **(d)** 2,401
(e) 4,802
35. 936 **37. (a)** 1,152 **(b)** 1,152 **39.** 483,840
41. 6

Sección 11.2

1. 336 **3.** 7,920 **5.** 100 **7.** 2730 **9.** 151,200
11. 120 **13.** 24 **15.** 362,880 **17.** 997,002,000
19. 24 **21.** 60 **23.** 60 **25.** 15 **27.** 277,200
29. 2,522,520 **31.** 168 **33.** 56 **35.** 330
37. 100 **39.** 20 **41.** 210 **43.** 2,598,960
45. 120 **47.** 495 **49.** 2,035,800 **51.** 1,560,780
53. \$22,957,480 **55. (a)** 56 **(b)** 256 **57.** 1024
59. 2,025 **61.** 79,833,600 **63.** 131,072

Sección 11.3

1. (a) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ **(b)** $\frac{1}{4}$ **(c)** $\frac{3}{4}$ **(d)** $\frac{1}{2}$
3. (a) $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{1}{6}$ **5. (a)** $\frac{1}{13}$ **(b)** $\frac{3}{13}$ **(c)** $\frac{10}{13}$
7. (a) $\frac{5}{8}$ **(b)** $\frac{7}{8}$ **(c)** 0 **9. (a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** $\frac{5}{17}$
11. (a) $\frac{3}{14}$ **(b)** $\frac{5}{14}$ **(c)** $\frac{9}{14}$
13. $4C(13, 5)/C(52, 5) \approx .00198$
15. $4/C(52, 5) \approx 1.53908 \times 10^{-6}$
17. (b) $\frac{1}{16}$ **(c)** $\frac{3}{8}$ **(d)** $\frac{1}{8}$ **(e)** $\frac{11}{16}$ **19.** $\frac{9}{19}$
21. $1/C(49, 6) \approx 7.15 \times 10^{-8}$ **23. (a)** $\frac{1}{1{,}024}$ **(b)** $\frac{15}{128}$
25. (a) $1/48^6 \approx 8.18 \times 10^{-11}$ **(b)** $1/48^{18} \approx 5.47 \times 10^{-31}$
27. $4/11! \approx 1.00 \times 10^{-7}$ **29. (a)** $\frac{3}{4}$ **(b)** $\frac{1}{4}$
31. (a) Sí **(b)** No
33. (a) Mutuamente excluyentes; 1
(b) No son mutuamente excluyentes; $\frac{2}{3}$
35. (a) No son mutuamente excluyentes; $\frac{11}{26}$
(b) Mutuamente excluyentes; $\frac{1}{2}$
37. (a) $\frac{3}{4}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** 1 **39.** $\frac{21}{38}$ **41.** $\frac{31}{1{,}001}$
43. (a) $\frac{3}{8}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{11}{16}$ **(d)** $\frac{13}{16}$
45. (a) Sí **(b)** $\frac{1}{36}$ **47. (a)** $\frac{1}{16}$ **(b)** $\frac{1}{32}$
49. $\frac{1}{12}$ **51.** $\frac{1}{1{,}444}$ **53.** $\frac{1}{36^3} \approx 2.14 \times 10^{-5}$
55. (i) **57.** $1 - \frac{P(365, 8)}{365^8} \approx 0.07434$

Sección 11.4

1. \$1.50 **3.** \$0.94 **5.** \$0.92 **7.** 0 **9.** −\$0.30
11. −\$0.0526 **13.** −\$0.50
15. No, debe esperar perder \$2.10 por acción.
17. −\$0.93 **19.** \$1

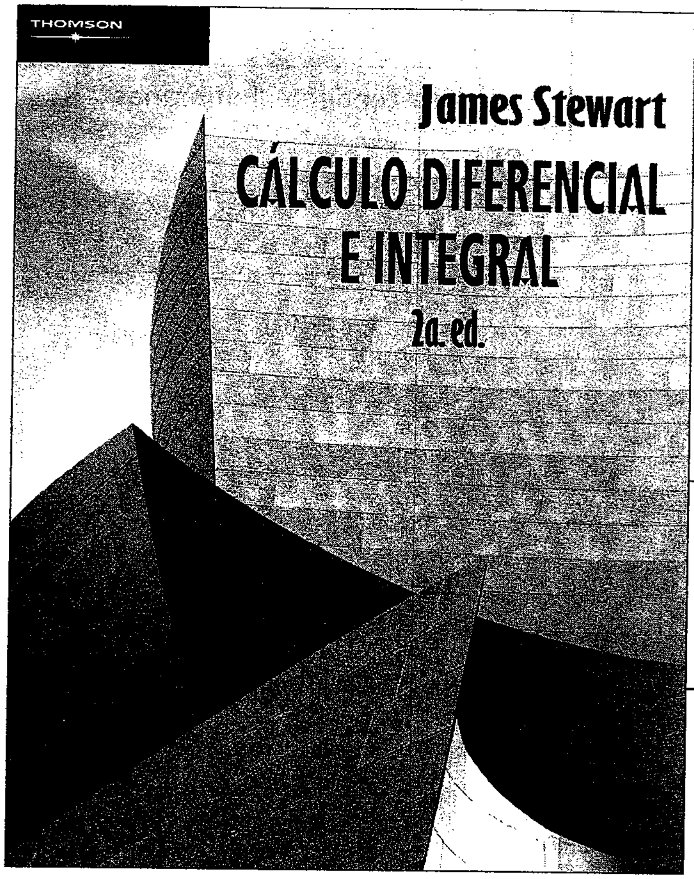
Repaso del capítulo 11

1. 624 **3. (a)** 10 **(b)** 20 **5.** 120 **7.** 45
9. 17,576 **11.** 120 **13.** 5 **15.** 14
17. (a) 240 **(b)** 3,360 **(c)** 1,680
19. 40,320 **21.** $\frac{2}{5}$
23. (a)
$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
(b) $\frac{1}{8}$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** $\frac{1}{2}$
25. (a) $\frac{1}{13}$ **(b)** $\frac{2}{13}$ **(c)** $\frac{4}{13}$ **(d)** $\frac{1}{26}$
27. (a) $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{5}{6}$ **29. (a)** $\frac{1}{1{,}000}$ **(b)** $\frac{1}{200}$ **31.** 0
33. \$0.00016 **35. (a)** 3 **(b)** .51
37. (a) 10^5 **(b)** 5^5 **(c)** $\frac{1}{32}$ **(d)** 75
39. (a) 144 **(b)** 126 **(c)** 84 **(d)** $\frac{7}{8}$

Examen del capítulo 11

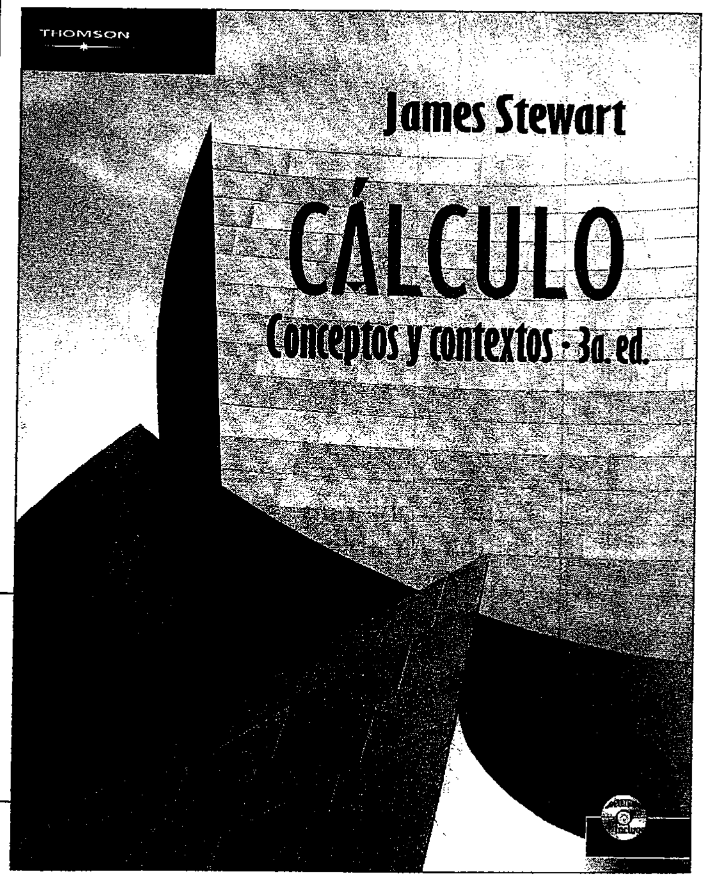
1. (a) 10^5 **(b)** 30,240 **2.** 60
3. $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot C(27, 5) = 1{,}966{,}582{,}800$
4. 12 **5.** $4 \cdot 2^{14} = 65{,}536$
6. (a) $4! = 24$ **(b)** $6!/3! = 120$
7. $C(5, 3)/C(15, 3) \approx .022$ **8.** $\frac{1}{6}$
9. (a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{1}{13}$ **(c)** $\frac{1}{26}$
10. (a) $\frac{5}{13}$ **(b)** $\frac{6}{13}$ **(c)** $\frac{9}{13}$
11. \$0.65 **12.** $1 - 1 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \approx .427$

Otros libros de
THOMSON



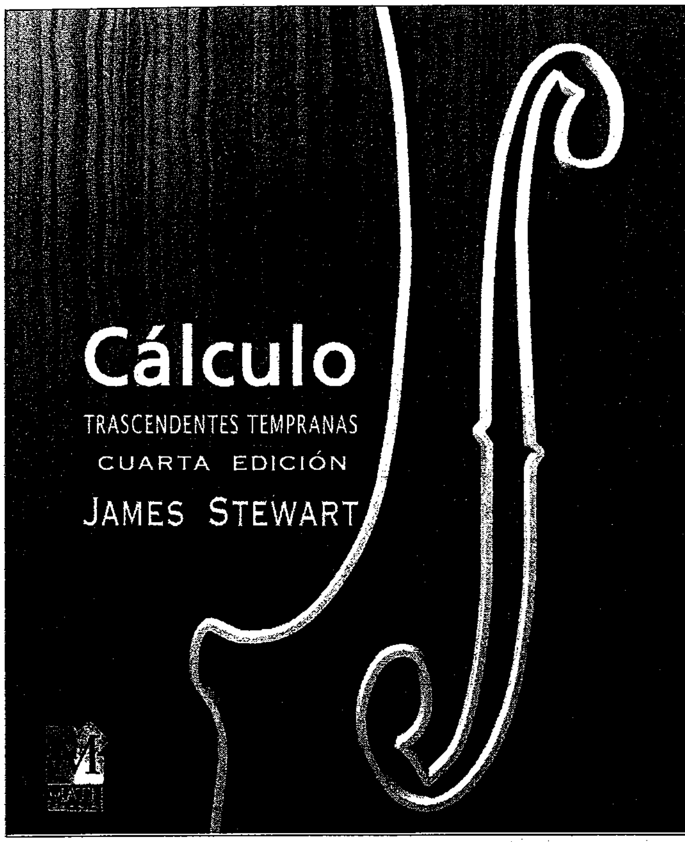
Titulo: Calculo diferencial e integral
Autor: James Stewart
Edición: 2 da edicion

ISBN: 9706865446



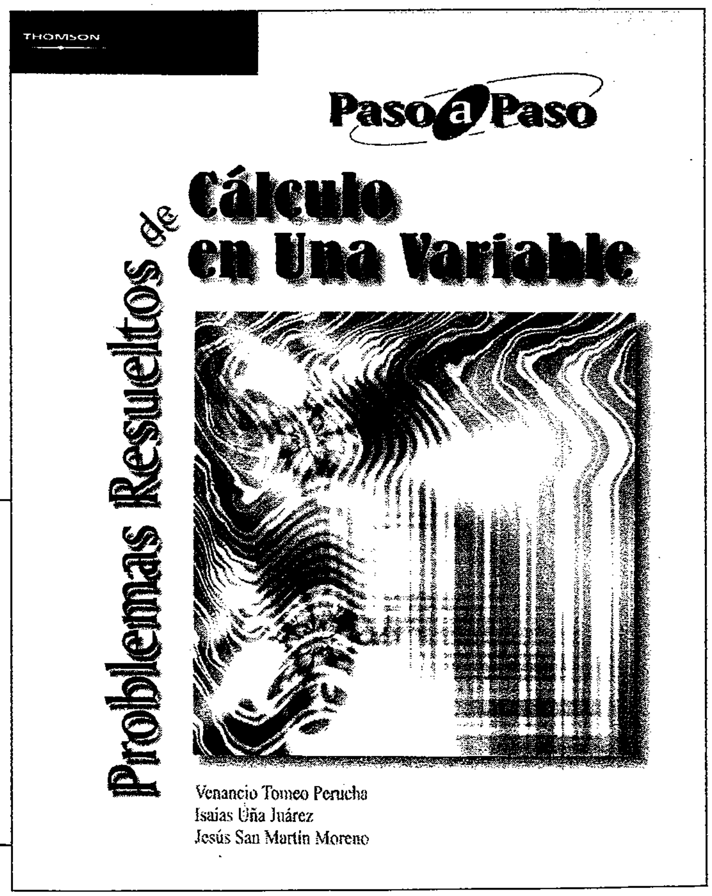
Titulo: Calculo Conceptos y Contextos
Autor: James Stewart
Edición: 3 ra edicion

ISBN: 9706865438



Titulo: Calculo Trascendente Tempranas
Autor: James Stewart
Edición: 4ta edicion

ISBN: 9706861270



Titulo: Problemas resueltos de Calculo de una variable
Autores:
Venancio Tomeo Perucha
Isaias Uña Juarez
Jesús San Martin Moreno
Edición: 1ra edicion

ISBN: 8497322894