CAPíTULO 1

TEORÍA BÁSICA DE CONJUNTOS

Cualquier colección de objetos o individuos se denomina *conjunto*. El término conjunto no tiene una definición matemática, sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Córdoba y de los peces en los océanos. Nuestro objetivo será estudiar aquellos conjuntos que están relacionados con el campo de la matemática, especialmente los conjuntos numéricos. La teoría de conjuntos es fundamental en matemática y de suma importancia en informática, donde encuentra aplicaciones en áreas tales como inteligencia artificial, bases de datos y lenguajes de programación.

1. Conjuntos y pertenencia

Un *conjunto* es una colección de elementos diferentes. Los objetos que integran un conjunto se llaman *elementos* de ese conjunto. Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

- El conjunto de los números enteros.
- El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
- El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la Fa.M.A.F.
- El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.

En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee *a pertenece a A* o *a es un elemento de A*. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$ y se lee *a no pertenece a A* o *a no es elemento de A*. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros.
$\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales.
$\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales.

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más simple, pero que no siempre es posible, es por *extensión*, es decir listando todos los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves:

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5, \pi\}, \qquad U = \{\text{a, e, i, o, u}\}, \qquad M = \{\text{Talleres, Instituto, Belgrano}\}.$$

El orden en el cual se enumeran los elementos del conjunto es irrelevante, y los elementos se consideran una sola vez.

EJEMPLO 1.1. $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$ y $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ describen al mismo conjunto.

En algunos casos no se listan *todos* los elementos, pero se nombran los suficientes y se usan los puntos suspensivos "... "para sugerir los elementos faltantes:

EJEMPLO 1.2. $B = \{3, 5, 7, \dots\}$, $C = \{2, 4, \dots, 2^5\}$.

Sin embargo esta forma de nombrarlos es siempre ambigua, no puede saberse de antemano qué elementos son los que se han omitido. Por ejemplo, B podría ser el conjunto de los números impares, o podría ser el conjunto de los números primos mayores que 2. Del mismo modo, C podrían ser todos los pares entre 2 y 2^5 o bien todas las potencias de 2 comprendidas en el intervalo natural $[2, 2^5]$.

Otra forma de describir un conjunto es *por comprensión*, es decir enunciando una propiedad de los elementos que lo integran:

$$A = \{x \mid x \text{ cumple la propiedad } P\}.$$

Esto se lee: "el conjunto de los x tales que x cumple la propiedad P.

EJEMPLO 1.3. El conjunto

$$B = \{x \mid x \text{ es natural e impar y } x \geq 3\}$$

está formado por todos los números naturales impares mayores o iguales a 3. En este caso se trata de un conjunto con un número infinito de elementos, y por lo tanto no podemos definirlo por extensión.

EJEMPLO 1.4. El conjunto

$$C = \{x \mid x \text{ es natural y } 2 \leq x \leq 2^6 \text{ y } x \text{ es potencia de } 2\}$$

es el conjunto formado por los elementos 2, 4, 8, 16, 32 y 64. El conjunto C se define también por extensión como

$$C = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}.$$

El *conjunto vacío* es un conjunto sin elementos. Se lo denota con el símbolo $\emptyset$ o $\{\ \}$.

EJEMPLO 1.5. El conjunto $A = \{x \mid x > 0 \text{ y } x < 0\}$ no tiene elementos, ya que ningún número es positivo y además negativo. Por lo tanto A es un conjunto vacío, y lo denotamos

$$A = \emptyset \qquad \text{o} \qquad A = \{\ \}.$$

1.1. Diagramas de Venn. Es frecuente utilizar ciertos diagramas, llamados diagramas de Venn, para representar a los conjuntos. Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. Por ejemplo, el diagrama de Venn para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ es

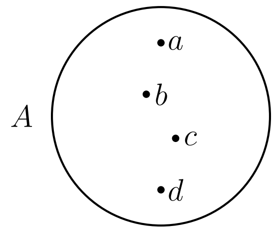

FIGURA 1. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

2. Subconjuntos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5\}, \qquad \text{y} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Como podemos ver, los elementos de A: 1, 2 y 3, también son elementos de B. Decimos entonces que A es un *subconjunto* de B, o que A está *incluido en* B.

> Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B.
> Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está *incluido* o *contenido* en B.

En particular, todo conjunto está incluído en sí mismo.

EJEMPLO 1.6. $A = \{1, 3, 5\}$ está incluido en A, y lo escribimos $A \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si los elementos de A son elementos de B, y viceversa. Es decir, si $A \subseteq B$ y también $B \subseteq A$.

Dos conjuntos A y B son *distintos* si no son iguales.

Es posible que la definición de conjuntos iguales y distintos resulta un tanto obvia, sin embargo es necesaria y no siempre es tan sencillo detectar la igualdad de dos conjuntos.

EJEMPLO 1.7. Consideremos los conjuntos $A = \{1, -3\}$ y $B = \{n \mid n^2 - 4n = -3\}$.

En principio A y B están definidos de manera diferente, por lo cual no podemos asegurar si son iguales o distintos.

Los elementos de A son 1 y -3. Notemos que 1 y -3 verifican la propiedad que define a B. En efecto

$$1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 \qquad \text{y} \qquad 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3.$$

Luego podemos afirmar que

$$A \subseteq B.$$

Además, los elementos de B son los números que satisfacen la ecuación

$$n^2 - 4.n + 3 = 0,$$

y esta ecuación tiene exactamente como raíces a 1 y -3. Por lo tanto también es cierto que todo elemento de B es un elemento de A, es decir

$$B \subseteq A.$$

Concluimos entonces que $A = B$.

Notemos que dos conjuntos pueden ser distintos pero tener uno o más elementos en común. Por ejemplo, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 4, 6\}$ son distintos pero el 4 es un elemento de ambos conjuntos.

Dos conjuntos se dicen *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común.

EJEMPLO 1.8. Los conjuntos $C = \{2, 4, 6\}$ y $D = \{1, 3, 5, 7\}$ son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B, pero distinto de B, se dice que A es un *subconjunto propio* de B. La notación $A \subseteq B$ es correcta, pero si queremos resaltar que A y B son distintos, escribimos

$$A \subset B \qquad \text{o} \qquad A \subsetneq B.$$

EJEMPLO 1.9. Consideremos los conjuntos $A = \{x \mid x \text{ es un natural par y } x < 10\}$, y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

En este caso, todo elemento de A es un elemento de B, y por lo tanto A es un subconjunto de B: $A \subseteq B$.

Además se cumple que 10 pertenece a B pero no pertenece a A, por lo cual A y B no son los mismos conjuntos. Decimos entonces que A es un subconjunto propio de B y lo escribimos $A \subsetneq B$ o $A \subset B$.

EJEMPLO 1.10. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y se escribe $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Además $\mathbb{N}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$, ya que existen números enteros que no son naturales. Denotamos esto escribiendo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ o $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos[1]. Es decir que para todo conjunto A se verifica que $\emptyset \subseteq A$.

Si además A no es el conjunto vacío, podemos afirmar que $\emptyset \subsetneq A$.

2.1. Intervalos de números reales. Un *intervalo* de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}$, que se identifica en la recta real con un segmento o una semirrecta, con o sin sus extremos.

EJEMPLO 1.11. El conjunto

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 8\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como un segmento con extremos 2 y 8.

[1]Se sigue de las reglas de la implicación lógica, que veremos más adelante.

EJEMPLO 1.12. El conjunto

$$\{x \mid x > -5\}$$

es un intervalo, que se representa en la recta real como una semirrecta, con origen en -5, sin contar este extremo.

Para los intervalos se utiliza una notación específica, y se los clasifica además en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

El intervalo cerrado $[a, b]$, con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

En particular, a y b son elementos de $[a, b]$.

El intervalo abierto (a, b), con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

En este caso, a y b no son elementos de (a, b).

Los subconjuntos de la forma $\{x \mid x > a\}$ y $\{x \mid x < a\}$, también se llaman intervalos abiertos, y para éstos se utiliza la notación (a, ∞) y $(-\infty, a)$, respectivamente. Al símbolo ∞ se lo denomina *símbolo de infinito*. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un intervalo abierto, que se denota $(-\infty, \infty)$.

Por último, los intervalos semiabiertos se denotan de la forma $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, a]$, siendo a y b números reales. Se definen por comprensión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \\ [a, \infty) &= \{x \mid x \geq a\} \\ (-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.13. Si $a = -2$, y $b = 3$, entonces $[-2, 3) = \{x \mid -2 \leq x < 3\}$, y $(-2, 3] = \{x \mid -2 < x \leq 3\}$.

EJEMPLO 1.14. Si tomamos $a = b$, por ejemplo $a = b = 5$, el intervalo cerrado $[5, 5]$ tiene un sólo elemento:

$$[5, 5] = \{x \mid 5 \leq x \leq 5\} = \{5\},$$

y este conjunto se representa como un punto en la recta real.

2.2. El conjunto Universal. No necesariamente los elementos de un conjunto son de la misma naturaleza, por ejemplo, *el conjunto C formado por la Torre Eiffel y el número* π es válido como conjunto. Sin embargo, es muy poco interesante en la teoría.

En general nos referiremos a conjuntos cuyos elementos tienen una propiedad en común.

EJEMPLO 1.15.

$$A = \{x \mid x \text{ es un natural par}\}, \qquad B = \{x \mid x \text{ es un natural mayor que } 4\}$$

$$\text{y } C = \{x \mid x \text{ es un natural menor que } 23\},$$

son conjuntos cuyos elementos son números naturales.

EJEMPLO 1.16. Los elementos de los conjuntos X, Y y Z,

$$X = \{\text{cuadrado, rectángulo, rombo}\}, \qquad Y = \{\text{triángulo, hexágono}\}$$

$$\text{y } Z = \{\text{ decágono, eneágono, octógono, heptágono}\}$$

tienen la propiedad de ser polígonos.

Resulta entonces conveniente considerar *un* conjunto que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina *conjunto universal*, y lo denotamos con la letra $\mathcal{U}$.

En el Ejemplo 1.15 todos los conjuntos son subconjuntos de $\mathbb{N}$, y podemos considerar a $\mathbb{N}$ como conjunto universal:

$$\mathcal{U} = \mathbb{N}.$$

Notemos que A, B y C son también subconjuntos del conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, por lo que también podría fijarse $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Por ello siempre debe dejarse expresado explícitamente el conjunto universal que se desee considerar.

EJEMPLO 1.17. Si denotamos con P al conjunto formado por todos los polígonos, entonces en el Ejemplo 1.16 podemos tomar $\mathcal{U} = P$. Pero también podemos considerar

$$\mathcal{U} = \{\text{cuadrado, rectángulo, rombo, triángulo, hexágono, decágono, eneágono,}$$

$$\text{octógono, heptágono}\}.$$

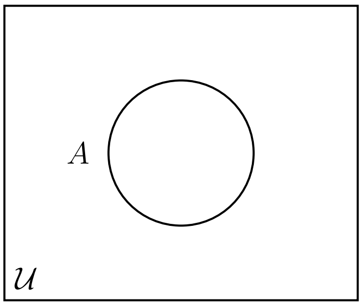

FIGURA 2. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

En un diagrama de Venn el conjunto universal se denota con un rectángulo, y el conjunto que nos interesa representar, digamos A, se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo. La Fig. 2 ejemplifica lo explicado.

Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma gráfica de visualizar las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura 3 representamos que todo elemento de B, es también elemento de A.

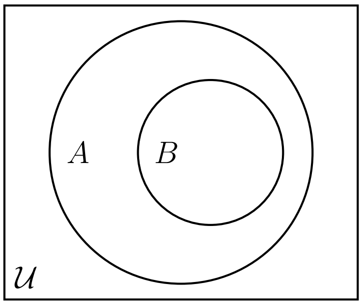

FIGURA 3. Los elementos de B también pertenecen a A.

Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto, es usual sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota.

2.3. Cardinalidad: Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un conjunto *finito* y llamaremos *cardinal de* A al número de elementos de A. El cardinal del conjunto vacío es 0, y si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos diremos que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito. En todos los casos, el cardinal del conjunto A se denota $|A|$ o también $\#A$.

EJEMPLO 1.18.

1. Si $A = \{a, b, c, 5, 4\}$, entonces $|A| = 5$.
2. Si $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 = 2\}$, entonces $|B| = 0$.
3. Si $C = \{a, a, b\}$, entonces $|C| = 2$.
4. $|\mathbb{Z}|$ es infinito.

2.4. El conjunto de partes. El *conjunto de partes* de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son *todos* los subconjuntos de A. Lo denotamos $\mathcal{P}(A)$.

EJEMPLO 1.19. $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}.$$

EJEMPLO 1.20. $B = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset,\ B\} = \{\emptyset,\ \{a\}\}$.

EJEMPLO 1.21. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\}, \ldots,\ \{1,2\},\ \{1,3\}, \ldots,\ \{2,3\}, \ldots\}$, tiene infinitos elementos.

Si A es un conjunto finito, digamos de n elementos, entonces el cardinal[2] del conjunto de partes es 2^n. Por ejemplo, para $A = \{1, 2, 3\}$, tenemos que $|A| = 3$ y $|\mathcal{P}(A)| = 8$. Para $B = \{a\}$, tenemos $|B| = 1$ y $|\mathcal{P}(B)| = 2$. También se cumple que $|\emptyset| = 0$, y $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$.

3. Ejercicios

1. Define por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, usando la notación $'\ldots'$ cuando sea necesario:
   a) $\{x \mid x \text{ es entero y } -3 < x < 4\}$
   b) $\{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es múltiplo de } 3\}$
   c) $\{x \mid (3x - 1)(x + 2) = 0\}$
   d) $\{x \mid x \text{ es un entero y } (3x - 1)(x + 2) = 0\}$
   e) $\{x \mid 2x \text{ es entero positivo}\}$

2. Enumera cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $\{n \mid n \text{ es natural y } n \text{ es divisible por } 5\}$
   b) $\{\frac{1}{n} \mid n \text{ es primo }\}$
   c) $\{2^n \mid n \text{ es natural}\}$

[2]Esta propiedad se estudiará en la asignatura Álgebra I y Matemática Discreta I.