Teoria degli insiemi

1 INTRODUZIONE

Teoria degli insiemi Ramo della matematica che riguarda le proprietà astratte degli insiemi, o collezioni, di oggetti. Il concetto di insieme viene considerato primitivo, cioè non è riconducibile a nozioni più semplici, e fa riferimento alla possibilità di creare raggruppamenti di oggetti, detti appunto elementi dell'insieme, aventi, nella maggior parte dei casi, alcune proprietà comuni. Per lo studio delle proprietà matematiche degli insiemi non importa se gli elementi siano concreti o astratti, reali o fittizi, o abbiano effettivamente caratteristiche comuni: ad esempio, si può definire un unico insieme costituito dai numeri pari, da un ornitorinco e da Robinson Crusoe. Le difficoltà piuttosto insorgono in relazione alla questione se gli insiemi possano essere considerati membri di se stessi o meno.

La teoria degli insiemi venne formalizzata per la prima volta dal matematico tedesco Georg Cantor nel XIX secolo e ha trovato ampie applicazioni, implicite o esplicite, in ogni campo della matematica pura e applicata. Esplicitamente, i principi e la terminologia degli insiemi vengono usati ad esempio per rendere il linguaggio della matematica più preciso, e per chiarire concetti come quelli di finito e infinito.

2 DEFINIZIONI

Un insieme è un raggruppamento, una classe o una collezione di oggetti, detti elementi dell'insieme. L'espressione simbolica $a \in S$ indica che l'elemento a appartiene a S, o, equivalentemente, che l'insieme S contiene l'elemento a. Un insieme S è definito se, dato un oggetto a, vale una e una sola delle seguenti affermazioni: $a \in S$ o $a \notin S$ (a non è contenuto in S).

Un insieme si indica spesso con la simbologia $S = \{\ \}$, dove le parentesi graffe definiscono gli elementi di S, o perché ne contengono esplicitamente una lista, o perché in esse è presente una formula, una regola o una definizione che li descrive. Ad esempio, può essere $S_1 = \{2, 4\}$; $S_2 = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ = {tutti gli interi positivi pari}; $S_3 = \{x|\ x^2 - 6x + 11 \geq 3\}$ (tutti gli x che verificano la disuguaglianza, o più precisamente, tutti gli elementi x tali che $x^2 - 6x + 11 \geq 3$); S_4 = {tutti gli individui maschi viventi, di nome Giovanni}.

2.1 Insiemi e sottoinsiemi

Se tutti gli elementi di un insieme R appartengono anche a un insieme S, si dice che R è un sottoinsieme di S, e si scrive $R \subseteq S$, o $S \supseteq R$. Ogni insieme è un sottoinsieme di se stesso e contemporaneamente contiene se stesso. Se $R \subseteq S$, ma esiste almeno un elemento di S che non appartiene a R, allora R si dice un sottoinsieme proprio di S; in simboli, $R \subset S$, $S \supset R$. Se $R \subseteq S$ e $S \supseteq R$, cioè, se ogni elemento di R è anche elemento di S, i due insiemi coincidono, e si scrive $R = S$. Nell'esempio sopra citato, S_1 è un sottoinsieme proprio di S_2.

2.2 Unione e intersezione

Dati due sottoinsiemi A e B di un insieme S, gli elementi che si trovano in A, in B o in entrambi, costituiscono un sottoinsieme di S detto unione di A e B, che si indica con $A \cup B$. Gli elementi comuni ad A e a B formano un sottoinsieme di S detto intersezione di A e B, e indicato con $A \cup B$. Se A e B non hanno alcun elemento in comune, l'intersezione è vuota; anche in questo caso, comunque, conviene pensare all'intersezione come a un insieme, designato con il simbolo ∅, e detto insieme vuoto, o nullo. Così, se $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, e $C = \{10, 14, 16, 26\}$, allora $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A \cup C = \{2, 4, 6, 10, 14, 16, 26\}$, $A \cap B = \{4, 6\}$, $A \cap C = \varnothing$.

2.3 Insieme differenza e insieme complementare

L'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B si chiama differenza tra A e B, e si scrive $A - B$ (a volte $A \backslash B$); così, nell'esempio sopra proposto, $A - B = \{2\}$, $B - A = \{8, 10\}$. Se A è un sottoinsieme di un insieme I, l'insieme degli elementi di I che non appartengono ad A si dice complementare di A (rispetto a I), e si scrive $I - A = A'$; (o anche $\bar{A}$, $\tilde{A}$, o A^C).

3 ALGEBRA DEGLI INSIEMI

Dalle definizione date sopra segue che, detti A, B, C, ... dei sottoinsiemi di un dato insieme I, sono verificate le seguenti relazioni

1. $A \cup B = B \cup A$.

2. $A \cap B = B \cap A$.

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

5. $A \cup \varnothing = A$.

6. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

7. $A \cup I = I$.

8. $A \cap I = A$.

9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

11. $A \cup A' = I$.

12. $A \cap A' = \varnothing$.

13. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

14. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

15. $A \cup A = A \cap A = A$.

16. $(A')' = A$.

17. $A - B = A \cap B'$.

18. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

19. Se $A \cap B = \emptyset$, allora $(A \cup B) - B = A$.

20. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Queste relazioni definiscono un'algebra degli insiemi; essa è un esempio di algebra di Boole, dal nome del matematico britannico George Boole, che può considerarsi il fondatore dell'algebra della logica.

4 LA MOLTIPLICAZIONE TRA INSIEMI

Dati due insiemi A e B, l'insieme di tutte le coppie ordinate della forma (a, b), con a appartenente ad A e b appartenente a B, si chiama prodotto cartesiano di A per B, e si indica generalmente con $A \times B$. Ad esempio, se $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$, allora $A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$ e $B \times A = \{(x, 1), (y, 1), (z, 1), (x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$. Si può osservare che l'operazione di moltiplicazione tra insiemi non gode della proprietà commutativa, cioè $A \times B \neq B \times A$, poiché la coppia $(1, x)$ è distinta dalla coppia $(x, 1)$.

5 RELAZIONI TRA INSIEMI

Gli elementi dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ possono essere messi in relazione, o accoppiati, con gli elementi dell'insieme $B = \{x, y, z\}$ in sei modi diversi; ad esempio, si possono far corrispondere gli elementi nel seguente modo: $(1, y)$, $(2, z)$, $(3, x)$, oppure $(1, z)$, $(2, y)$, $(3, x)$, e così via. Una relazione in cui a ogni elemento di A corrisponde uno e uno solo degli elementi di B si dice corrispondenza biunivoca, o uno a uno (1-1), tra gli elementi di A e di B. Quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di due insiemi, si dice che questi hanno la stessa cardinalità. Inoltre, si dice che un insieme è finito, o a cardinalità finita, se non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i suoi elementi e gli elementi di uno qualunque dei suoi sottoinsiemi. Ad esempio, gli elementi dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ non possono essere posti in corrispondenza 1-1 con gli elementi di uno qualunque dei sottoinsiemi propri di A, perciò l'insieme A è un insieme finito, o a cardinalità finita. Diversamente, gli elementi dell'insieme $B = \{1, 2, 3, \dots\}$ possono essere messi in corrispondenza 1-1 con gli elementi del sottoinsieme proprio di B, $C = \{3, 4, 5, \dots\}$, mediante la relazione che associa, ad esempio, l'elemento n di B con l'elemento $n + 2$ di C, dove $n = 1, 2, 3, \dots$ Un insieme che goda di questa proprietà è un insieme infinito, o a cardinalità infinita (*vedi* Infinito).

Microsoft ® Encarta ® 2009. © 1993-2008 Microsoft Corporation. Tutti i diritti riservati.