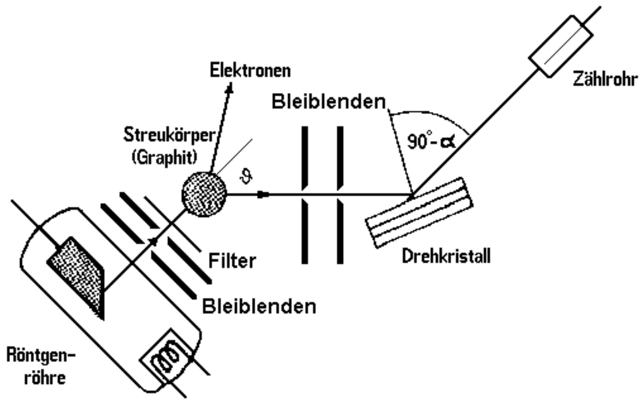
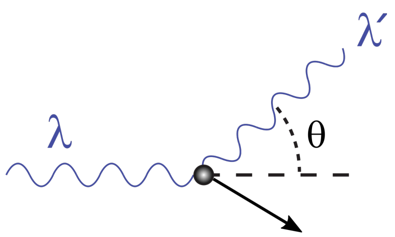
Compton-Effekt

Der **Compton**-Effekt zeigt den Impuls eines Photons.

- ## Durchführung:



- ## Deutung & Erklärung:



Ein Photon führt einen vollständig elastischen Stoß mit einem freien (ruhenden) Teilchen wie z.B. einem Elektron durch. Hierbei gibt es einen Teil seines Impulses an das Teilchen ab, wodurch die Wellenlänge vergrößert wird. Diese Vergrößerung wird mathematische beschrieben durch:

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

Die Vergrößerung hängt nur vom Streuwinkel (Effektwinkel), unter dem das gestreute Photon weiterfliegt, ab und nicht von der ursprünglichen Wellenlänges des Photons.
Den Maximalwert der Vergrößerung stellt die De-Broglie-Wellenlänge des Teilchens dar. Da diese sehr klein ist, fällt der Compton-Effekt nur bei sehr kurzwelligem Licht wie z.B. Röntgenstrahlung auf und nicht bei sichtbarem Licht.
Der Compton-Effekt kann als Beweis für die Existenz des Photons gesehen werden. Er ist mit der klassischen Wellentheorie nicht Erklärbär.

- ## Benötigte Formeln

  - **Energie-Impuls-Beziehung**

    Gesucht ist eine relativistische Beziehung zwischen der Energie und dem Impuls eines Teilchens:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \ \wedge \ p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \Leftrightarrow v = \frac{p \cdot c^2}{E}$$

    Umformen von E:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \Leftrightarrow E \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0 c^2$$

    Einsetzen von v in E:

$$E \cdot \sqrt{1-\frac{\frac{p^2 \cdot c^4}{E^2}}{c^2}} = m_0 c^2$$

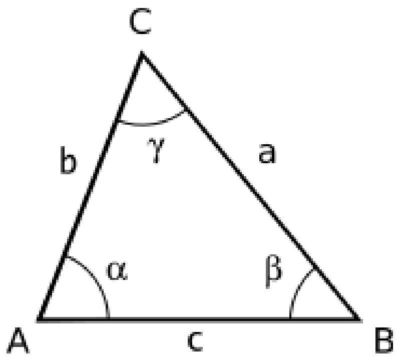
$$\Rightarrow E \cdot \sqrt{1-\frac{p^2 \cdot c^2}{E^2}} = m_0 c^2$$

    Da $E_0 = m_0 c^2$, liefert quardrieren der Gleichung:

$$E^2 - c^2 p^2 = E_0^2 \Leftrightarrow E^2 = E_0^2 + c^2 p^2$$

  - **Kosinus-Satz**

    Der Kosinus-Satz stellt die Beziehung zwischen einem Winkel und den Seitenlängen in einem beliebigen Dreieck dar.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- ## Herleitung

  Da während des Stoßes sowohl Energie als auch Impuls erhalten bleiben, gilt:

$$E + E_0 = E' + E_e \ (1) \ \wedge \ \vec{p} = \vec{p'} + \vec{p_e} \ (2)$$

  Für die Energie-Impuls-Beziehungen des Photons und des Elektrons gilt:

- Photon vor Stoß: $E = p \cdot c$ (3)
- Photon nach Stoß: $E' = p' \cdot c$ (4)
- Elektron vor Stoß: $E_0 = m_0 c^2$ (5)
- Elektron nach Stoß: $E_e^2 = E_0^2 + c^2 p_e^2$ (6)

Aus der Geometrie des Stoßes folgt mithilfe des Kosinussatzes:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta \ (5)$$

Formt man (3),(4) und (6) jeweils nach dem Impuls um und setzt in (5) ein, erhält man:

$$\frac{E_e^2 - E_0^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E'^2}{c^2} - 2\frac{E}{c}\frac{E'}{c} \cdot \cos\theta$$

Mit (1) folgt weiterhin:

$$\frac{(E + E_0 - E')^2 - E_0^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E'^2}{c^2} - 2\frac{E}{c}\frac{E'}{c} \cdot \cos\theta$$

Multiplizieren mit c^2 ergibt:

$$(E + E_0 - E')^2 - E_0^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow E^2 + E_0^2 + E'^2 + 2EE_0 - 2EE' - 2E_0E' - E_0^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos\theta$$

Durch kürzen:

$$2EE_0 - 2EE' - 2E_0E' = -2EE' \cos\theta$$

Multiplizieren mit $\frac{1}{2EE'E_0}$ ergibt:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E} = \frac{-\cos\theta}{E_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} - \frac{\cos\theta}{E_0}$$

Einsetzen der Photon-Energieformel $E = \frac{hc}{\lambda}$:

$$\frac{\lambda'}{hc} - \frac{\lambda}{hc} = \frac{1}{E_0}(1 - \cos\theta)$$

Durch Multiplizieren mit hc und mit (5) folgt:

$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

mit der Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ und der Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.