ÉVOLUTION DE LA NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE

Objectif	*Découvrir la formation laborieuse du concept de limite de suite à travers l'histoire, jusqu'à la définition en ε et N_0. Faire sentir l'ancienneté du concept et de la problématique, et la valeur de la formalisation rigoureuse finale.*
Notions utilisées	*D'abord uniquement les limites de suites géométriques et de suites de sommes associées. Mais on arrive progressivement à la définition de la limite de suite en ε et N_0.*

Depuis l'Antiquité, la notion de limite joue un rôle majeur en mathématiques. Mais ce n'est que récemment, au XIX$^{\text{e}}$ siècle, que les mathématiciens parvinrent à en donner une définition précise et rigoureuse. De Zénon d'Élée à Karl Weierstrass, cette séquence retrace succinctement le cheminement de la notion.

Bibliographie : Une histoire des mathématiques - A. Dahan-Dalmedico & Peiffer, Points-Sciences – Seuil - Chap. « La limite : de l'impensé au concept »

A. Zénon d'Élée

On peut faire commencer l'histoire du concept de limite avec Zénon d'Élée, qui vécut autour de 450 avant Jésus-Christ et fut un disciple de Parménide. Il est surtout connu pour ses paradoxes qui prétendent démontrer l'impossibilité du mouvement.

Le premier de ces paradoxes est celui de la **dichotomie**, ou partage en deux : « Un mobile partant de A pour aller en B doit d'abord arriver en M_1, milieu de $[\mathrm{AB}]$. Puis il doit arriver en M_2, milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{B}]$, puis en M_3, milieu de $[\mathrm{M}_2\mathrm{B}]$, et ainsi de suite, à l'infini... Devant parcourir cette infinité d'étapes, le mobile n'arrivera jamais au but. »

La clé de ce paradoxe est que ces déplacements, en nombre infini, seront cependant parcourus en un temps fini.

Exercice A1

On suppose que le segment $[\mathrm{AB}]$ mesure deux mètres et que la vitesse du mobile est de $1\ \mathrm{m/s}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note t_n le temps nécessaire pour aller de A à M_n.

Calculer t_1 et t_2. Exprimer t_n en fonction de n.

Calculer la limite de t_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Le second paradoxe de Zénon d'Élée est celui d'**Achille et de la tortue** : « Le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide, car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti le fuyard, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance. ».

C'est le même problème que celui de la dichotomie et sa solution est identique.

Exercice A2

On suppose qu'Achille court à la vitesse de $10\ \mathrm{m/s}$, que la tortue a une vitesse de $5\ \mathrm{cm/s}$ et que la distance initiale les séparant est de $100\ \mathrm{m}$. On note P_0 la position initiale d'Achille et P_1 la position initiale de la tortue, P_2 la position de la tortue lorsqu'Achille atteint P_1 , P_3 la position de la tortue lorsqu'Achille atteint P_2 et ainsi de suite.

1. Calculer les distances P_1P_2 et P_2P_3. Démontrer que la suite des distances P_nP_{n+1}, pour n entier naturel, est une suite géométrique.
2. Exprimer en fonction de n la distance P_0P_n.
3. On note t_n le temps que met Achille pour parcourir la distance P_0P_n.

   Exprimer t_n en fonction de n, puis démontrer que la suite (t_n) admet une limite finie.
4. Déterminer de façon plus simple le moment où Achille rattrape la tortue (on pourra considérer la vitesse relative d'Achille par rapport à la tortue).

B. Euclide

Les suites géométriques sont sous-jacentes dans les paradoxes cités de Zénon. La limite de telles suites intervient aussi dans la proposition 1 du livre X d'Euclide[1] (Euclide vécut à Alexandrie aux alentours de 300 avant Jésus-Christ) :

« *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.* »

Exercice B

On entreprend ici la démonstration de cette proposition.

On appelle A et ε les grandeurs évoquées dans cette proposition, A étant la plus grande, de sorte que $0 < \varepsilon < A$. On pose $u_0 = A$ et, pour tout entier naturel n, on note u_n la « *grandeur restante* » après n soustractions dont parle Euclide (le terme « grandeur » désigne un réel strictement positif).

a. À chaque étape « *on retranche du reste une grandeur plus grande que sa moitié* ». Traduire cette hypothèse en une inégalité entre u_n et u_{n+1}, pour tout entier naturel n.

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose cette condition vérifiée .

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times A$ et en déduire la limite de u_n.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq 2^n$, et en déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \left(\frac{1}{n}\right) \times A$.

d. Valider alors l'affirmation d'Euclide : « *si l'on fait toujours la même chose, il restera* [à partir d'une certaine étape N à déterminer] *une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées* [c'est-à-dire ε] ».

En fait, la conclusion d'Euclide coïncide exactement avec la définition actuelle du fait que la limite de la suite positive (u_n) est égale à zéro.

[1] Cité par exemple dans Dedron & Itard, mathématiques et mathématiciens, page 79

C. Intuition et manque de rigueur : XVIIe et XVIIIe siècles

L'Analyse fit d'énormes progrès au cours des XVIIe et XVIIIe siècles. Les mathématiciens de cette époque avaient une intuition claire de la notion de limite.

On trouve l'idée par exemple chez Leibniz, dans le premier article qu'il publia, en février 1682[2]. L'objet de cet article est de donner le nombre π comme la somme suivante :

$\pi = 4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\text{ etc.}\right]$. Et Leibniz d'écrire :

« *L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre […] que toute grandeur donnée.* »

Exercice C

On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = \frac{(-1)^n \times 4}{2n+1}$ et $v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

a. Calculer les six premiers termes de la suite v.
Émettre une conjecture sur les positions relatives de v_n et de π suivant l'entier naturel n.

Dans les questions qui suivent, on admettra que cette conjecture est vraie.

b. Pour tout entier naturel n, comparer alors $|v_n - \pi|$ à $|v_n - v_{n-1}|$ et vérifier que ce dernier réel est égal à $\frac{4}{2n+1}$. En déduire la limite de la suite v.

c. Leibniz écrit que « *à mesure qu'on considère la suite de plus en plus loin, l'erreur sera moindre que toute grandeur donnée* ». On note ε cette « *grandeur donnée* » (ε est donc un réel strictement positif). Trouver, en fonction de ε, un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur à N, on soit certain que l'erreur commise, c'est-à-dire $|v_n - \pi|$, soit inférieure à ε.

> On retrouve de nouveau ici, avec une formulation proche de celle d'Euclide, la définition moderne du fait que la limite de la suite (u_n) est égale à π.

d. Programmer le calcul de v_n et donner les valeurs de v_{100} et v_{101}.

Cependant, les mathématiciens de l'époque n'essayèrent pas de définir précisément le concept de limite. Ils se fiaient à leur intuition et menaient souvent des raisonnements peu rigoureux, qui parfois les induisaient en erreur. Mais, parmi tous les nouveaux résultats valables et intéressants découverts à cette époque, les erreurs commises pouvaient apparaître comme des incidents sans importance.

[2] Leibniz, « Naissance du Calcul Différentiel », traduit et présenté par Marc Parmentier, chez Vrin.

D. Le progrès par la recherche de la rigueur : Cauchy[3], Weierstrass[4]

À mesure toutefois que s'étendaient les recherches et les découvertes en Analyse au cours de XIX^e^ siècle, la nécessité de définir clairement les concepts et les termes mis en œuvre se fit sentir.

Cette mise en ordre commence avec Louis-Augustin Cauchy (1789-1857), qui fait de la limite une des notions centrales de l'Analyse. Il en donne la définition suivante dans son *Cours d 'Analyse de l'École Polytechnique* :

« *Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.* »

Cependant c'est à l'allemand Karl Weierstrass (1815-1897) que l'on doit le langage très précis, plus mathématique, qui seul permet de raisonner correctement.

Voici la définition moderne du fait qu'une suite admet une limite finie ℓ :

On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet pour limite le réel ℓ si, pour tout réel strictement positif ε, aussi petit que l'on veut, il est possible de déterminer un entier naturel N, tel qu'au-delà du rang N, tous les termes de la suite u sont éloignés de ℓ d'une distance inférieure ou égale à ε.

Soit encore : $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^{+*},\ \exists N \in \mathbf{N}\ /\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Exercice D

En utilisant cette définition, démontrer les résultats suivants :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+\sin n} = 2 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+7n+13} = 1$$

[3] Mathématicien français (1789 - 1857). Ses travaux se rapportent aux branches les plus diverses des mathématiques, mais on lui doit surtout une rénovation de l'analyse par l 'emploi de méthodes rigoureuses.

[4] Mathématicien allemand (1815 - 1897). Chef de file d'une brillante école d'analystes.