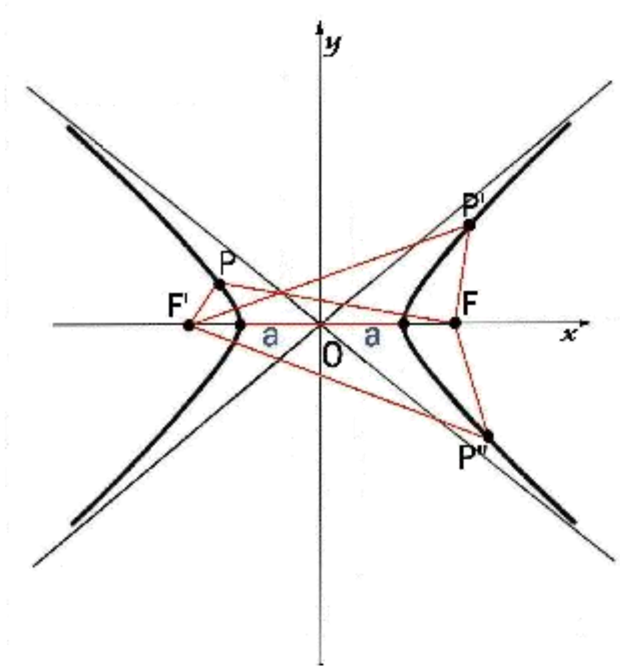
Dimostrazione dell'equazione canonica dell'iperbole con fuochi sull'asse x.



Denotiamo con F ed F' rispettivamente, i due fuochi. Fissiamo un sistema cartesiano (OXY) tale che l'asse x passi per i punti F' ed F e l'origine sia il punto medio del segmento FF'. Allora i due fuochi avranno coordinate (±c,0). Il punto P(x,y) verifica la condizione d(P,F)-d(P,F')=2a se e solo se

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

da cui segue

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

elevando al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

sviluppando i quadrati di binomio e semplificando

$$4xc=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ovvero

$$xc=a^2+a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

isolando ancora la radice

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando di nuovo al quadrato entrambi i membri dell’uguaglianza

$$x^2c^2 + a^4 - 2xca^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

raccogliendo parzialmente

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividendo $a^2(c^2 - a^2)$ si giunge infine all'identità

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1. \qquad (1)$$

Adesso consideriamo il triangolo FF'P (con F ed F' i fuochi e P il punto sull'iperbole). Poiché in un triangolo la differenza, in valore assoluto, tra due lati è minore del terzo abbiamo

$$\overline{FF'} > |\overline{PF} - \overline{PF'}|$$

cioè 2c>2a da cui c>a . Possiamo allora porre $b^2=c^2-a^2$, e la (1) rappresenta l'equazione canonica dell'iperbole.

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$