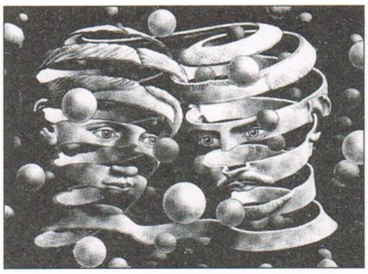
PROGETTO
ALICE ƎƆIJA

Rivista di matematica e didattica

n° 2
Vol. I
Anno 2000 II

PAGINE



Coniche in cielo e in terra

Lina Mancini Proia, Marta Menghini

Riassunto

Il lavoro nasce da una curiosità: perché la forma ellittica compare in architettura - in particolare nelle chiese - solo nel periodo barocco, mentre fino ad allora è stata riservata alle sole arene? Per rispondere alla questione abbiamo considerato lo sviluppo storico delle coniche e poi cercato le interazioni, nel periodo barocco, tra arte, astronomia e matematica. L'articolo descrive un approccio sperimentale all'argomento condotto assieme a studenti dell'ultimo anno di scuola superiore (una versione precedente dell'articolo si trova in "Conic Sections in the Sky and on the Earth", Educational Studies in Mathematics 15 (1984) 191 - 210).

Abstract

This work started from the following question: why do we find the elliptical form in architecture only during the baroque period, particularly in churches, whereas previously the oval form was reserved for arenas? To answer this question we considered the historical development of the conic sections and then looked for the interactions, in the baroque period, among art, astronomy and mathematics. The article describes an experimental approach to the topic carried out with studens in their last year of high school (Reprint of Educational Studies in Mathematics 15 (1984) 191 - 210).

Lina Mancini Proia
Piazza Capri, 5 - 00100 Roma

Marta Menghini
Dip. di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"
e-mail: menghini@mat.uniroma1.it

Le opere di Pietro da Cortona, Borromini e Bernini, che appaiono nelle figure 1-3, rappresentano forme architettoniche del periodo barocco. Il presente lavoro nasce da una curiosità: come mai si sviluppa, in modo tanto clamoroso, la forma ellittica nell'architettura barocca, mentre fino alla fine del Rinascimento essa è riservata alle sole arene?

Vi sono due possibili risposte: o fino a quell'epoca le nozioni matematiche relative alle coniche erano insufficienti, oppure le coniche divennero un argomento di spicco per via delle scoperte in campo astronomico.

Il primo passo è stato di indagare quali nozioni si avessero nell'antichità relativamente alle coniche. A questo scopo abbiamo consultato il trattato di Apollonio di Perga (ca. 247 - 205 a. C.)

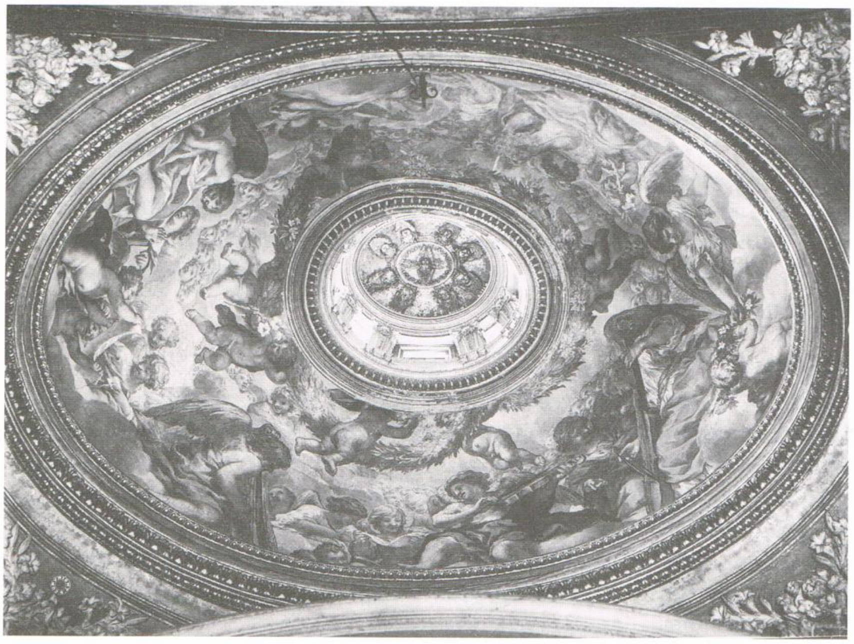


Fig. 1. Pietro da Cortona: la cupola di San Nicola da Tolentino, Roma (Alinari).

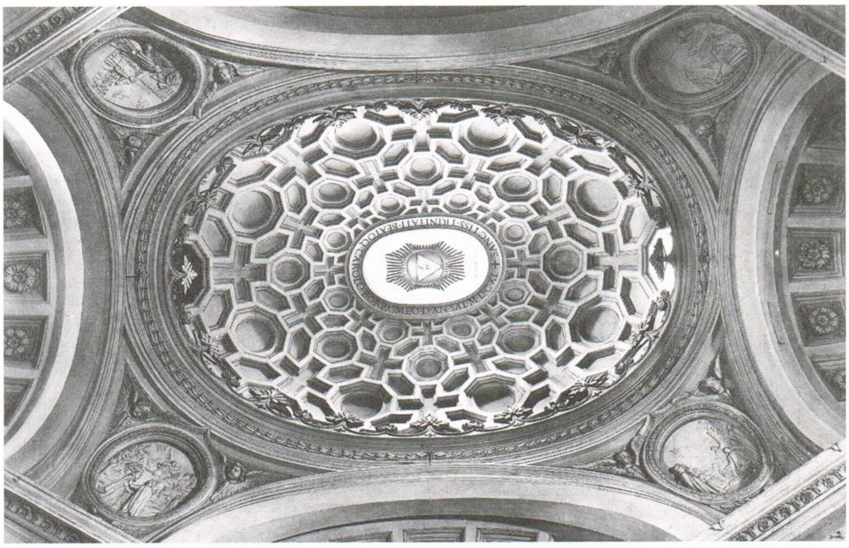


Fig. 2. Borromini: la cupola di San Carlo alle 4 Fontane, Roma (Alinari).

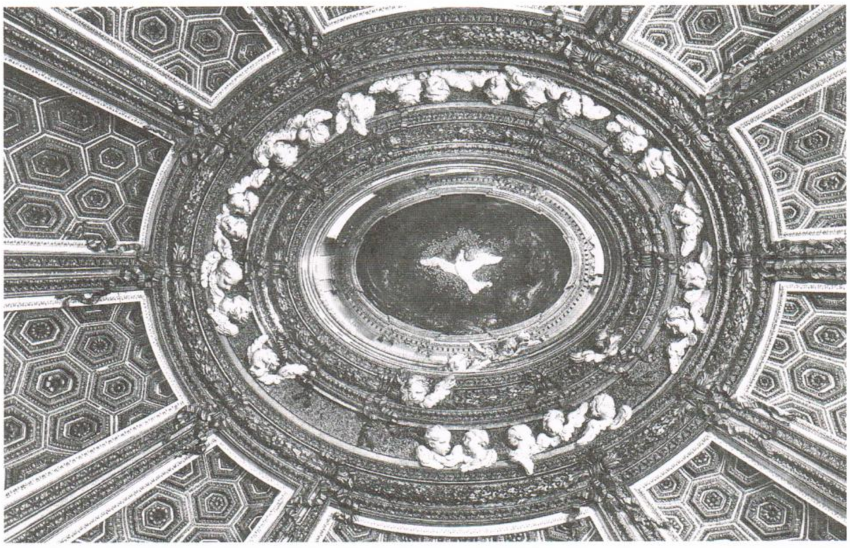


Fig. 3. Bernini: la volta di Sant'Andrea al Quirinale, Roma (Alinari).

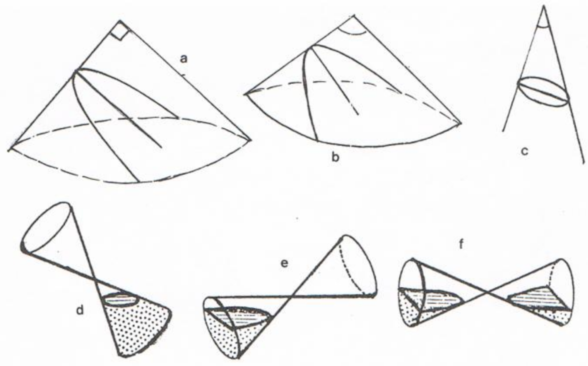


Fig. 4. Le coniche di Archimede - (a) parabola, (b) iperbole, (c) ellisse, e di Apollonio - (d) ellisse, (e) parabola, (f) iperbole.

1. Le coniche nell'era antica

Le coniche di Apollonio, che consistono di otto libri - l'ultimo dei quali è andato perduto - coordinano, unificano e arricchiscono tutto quanto noto all'epoca sulle sezioni coniche. Per la prima volta le coniche vengono presentate come sezioni di uno stesso cono al variare della posizione del piano secante, mentre Archimede le considerava ancora come sezioni di un cono particolare tagliato da un piano perpendicolare ad una generatrice (figura 4).

Nel primo dei quattro libri, di cui sono note le edizioni originali, Apollonio determina le equazioni della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole. Vale la pena descrivere l'interessante metodo con cui egli determina l'equazione della parabola (figura 5):

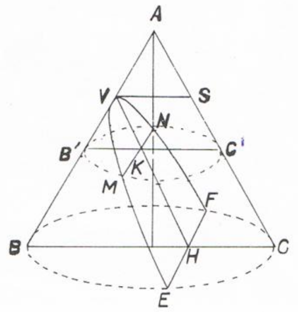


Fig. 5. Apollonio: determinazione dell'equazione della parabola.

Nel cono ABC egli traccia una perpendicolare FE a BC, e considera poi il punto V, intersezione del cono con un piano per FE parallelo ad AC. Seguendo la figura 5, vediamo che, sezionando un cono con un cerchio con diametro $B'C'$ parallelo a BC, a prendendo su questo piano MN parallela a FE, il punto $K = MN \cap B'C'$ diviene il punto medio di MN, così che $MK = KN$. Il triangolo $B'MC'$ è retto (inscritto in una semicirconferenza), e, per il teorema di Euclide, si ha $MK^2 = B'K \otimes K'C'$. $VSCK$ è un parallelogramma, quindi $VS = KC'$. Per la similitudine dei triangoli $VB'K$ e BCA abbiamo:

$$\frac{B'K}{B'V} = \frac{BC}{BA} \quad \text{e così} \quad \overline{B'}\,\overline{K} = \overline{B'}\,\overline{K} \cdot \frac{BC}{BA}$$

Per la similitudine dei triangoli VSA e BCA troviamo poi

$$\frac{VS}{VA} = \frac{BC}{BA} \quad e \quad \overline{VS} = \overline{VA} \cdot \frac{BC}{BA}$$

Infine

$$MK^2 = B'V \cdot VA \cdot \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$$

Possiamo porre $y = MK$ e $x = B'V = VK$. L'ultimo termine è un parametro che dipende da VA, lo chiamiamo p, $(BC/BA)^2$ essendo una costante che dipende dal cono.

Si arriva infine all'equazione $y^2 = xp$, alla quale Apollonio diede il nome di *parabola* (in greco: *para ballein* = uguale al termine di paragone). In modo analogo, egli trova le equazioni dell'*iperbole* (*hyper ballein* = più del termine di paragone): $y^2 = xp + (p/a)x^2$, e dell'*ellisse* (*en leipen* = togliere -dal termine di paragone-): $y^2 = xp - (p/a)x^2$. Il procedimento è interessante perché può essere visto come un primo passo verso il piano cartesiano (è un'ipotesi affascinante che Descartes possa essere stato influenzato da tali procedimenti).

Poi Apollonio usa i *diametri* per creare le sezioni coniche: se una conica ha diametri fra loro paralleli è una parabola, se i diametri si incontrano in un punto dalla parte della concavità della curva, si tratta di un'ellisse; se si incontrano in un punto dalla parte della convessità, si tratta di un'iperbole (vedi sezione 4).

Apollonio introduce anche il centro e gli assi. Poi parla di tangenti e asintoti, e usa i fuochi come qualcosa di noto. Determina le proprietà dell'iperbole e dell'ellisse come luoghi geometrici, per i quali è costante la differenza o la somma delle distanze dai fuochi.

Nei tre libri che seguono, dei quali è nota una versione latina tradotta dall'arabo, Apollonio affronta problemi più raffinati (quale quello delle normali ad una curva) in un modo che non è molto diverso da quello che usiamo oggi. Spiega anche come costruire un cono di cui è data una sezione arbitraria.

Dopo aver realizzato che il problema dal quale siamo partite non dipende da fattori matematici, siamo passate a considerare possibili influenze dal settore astronomico.

Per capire se ci siano state interazioni tra astronomia e architettura abbiamo analizzato alcuni dati relativi ai personaggi che hanno agito in questo settore: i contemporanei di Copernico e quelli di Keplero.

2. L'era di Copernico

(a) Il mondo astronomico prima di Copernico.

Nei tempi antichi, pur esistendo filosofi come Eratostene che credevano nel sistema eliocentrico, la teoria geocentrica sostenuta da Aristotele era quella dominante. Ma quest'ultima ipotesi non spiegava alcuni fenomeni, quali, ad esempio:

(i) il moto retrogrado dei pianeti, che generalmente si muovono in un'unica direzione, ma che ad un dato momento sembrano cambiare percorso e muovere a ritroso formando un cappio, per poi riprendere la direzione originale.

(ii) la differente luminosità dei pianeti in periodi diversi;

(iii) la velocità variabile dei pianeti lungo la loro orbita, al variare della posizione.

Per queste ragioni, Tolemeo cambiò il sistema esistente all'epoca. Egli ipotizzò che i pianeti ruotassero su una circonferenza (epiciclo), il cui centro descriveva un'orbita circolare (deferente) intorno alla terra (figura 6).

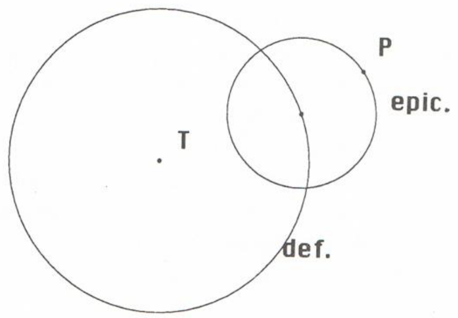


Fig. 6. Il sistema planetario tolemaico.

Ciò gli consentiva di giustificare il moto retrogrado dei pianeti. Inoltre, egli ipotizzò che la terra non fosse il centro dell'orbita, così che un pianeta potesse avere distanze diverse da essa. Anche se un pianeta ruotasse con velocità uniforme, sembrerebbe più lento se più lontano dalla terra e più veloce se più vicino ad essa. Così egli spiegò anche la differente luminosità dei pianeti.

Il sistema tolemaico era più complesso di quanto abbiamo descritto e presentava ancora molti svantaggi, ma poteva essere usato per prevedere in modo approssimato i moti dei pianeti. Uno dei punti più importanti del sistema tolemaico fu l'osservazione di una componente periodica annuale nel moto di ogni pianeta.

(b) Copernico

L'astronomo inglese Dreyer ritiene che è proprio tale osservazione che colpì Copernico come una strana coincidenza: il periodo di rivoluzione del sole intorno allo zodiaco, il periodo di rivoluzione dei centri degli epicicli di Mercurio e Venere, e il periodo dei tre pianeti esterni intorno ai loro epicicli erano sempre gli stessi: un anno. È possibile che gli venisse l'idea che questi movimenti rappresentassero l'orbita coperta in un anno dalla Terra, e non dal sole o dagli altri pianeti; Copernico non spiegò il procedimento seguito nel suo lavoro.

Copernico nacque a Torun nel 1473. Iniziò a studiare astronomia all'Università di Cracovia, e continuò lo studio durante il suo soggiorno in Italia, dal 1496 al 1506. L'astronomo Alexandre Koyré ritiene che probabilmente l'idea fondamentale del suo sistema nacque in Italia, e che quasi sicuramente egli rimase in contatto con i suoi amici italiani quando ritornò a Frauenberg, dove morì nel 1543.

D'altra parte, le sue idee erano note agli studiosi contemporanei, in particolare dopo la pubblicazione (1507) de *N. Copernici de hypothesibus motorum caelestium a se constitutis commentariolus*.

Ciò è provato, ad esempio, dalla lettera con la quale il Cardinale di Capua, Nicolas Schoenberg, esorta Copernico a pubblicare le sue idee (proprio questa lettera costituisce la prefazione al *De Revolutionibus*). Copernico era noto anche per le varie offerte di collaborazione ricevute, come quella del Concilio Ecumenico del Laterano, per la riforma del calendario.

Nel primo libro del *de Revolutionibus* l'autore espone le sue idee. Il lavoro si legge facilmente, ma tutte le sue osservazioni rappresentano ipotesi e non evidenza dell'esistenza di un tale sistema. D'altra parte, all'epoca, gli strumenti disponibili non permettevano osservazioni migliori o dimostrazioni. Nella premessa, diretta a Paolo III, Copernico afferma che egli impiegò "quattro volte nove anni" per finire il suo lavoro, e che temeva il "morso delle calunnie".

Copernico parla della sfericità della terra e nota che l'intera massa della terra ha l'ombra di una sfera, come è dimostrato dalla sua ombra sulla luna durante le eclissi; afferma che il moto retrogrado e la differenza di luminosità e di velocità possono essere facilmente spiegate dall'ipotesi eliocentrica; aggiunge che se la terra facesse parte della sfera celeste, seguendone la natura e il movimento, essa dovrebbe ruotare vicino al centro, perché è un corpo e non un punto. Egli dice "è chiaro che questa [la teoria geocentrica] è sbagliata, perché altrimenti dovrebbe essere sempre mezzanotte in un posto e sempre mezzogiorno in un altro, così che non ci sarebbero ogni giorno l'alba e il tramonto." E conclude: "Non si capisce perché si debba attribuire un movimento al contenente e non al contenuto." Questa è una delle sue frasi giustificative che non giustificano nulla.

Egli costruisce un sistema eliocentrico e mostra come ogni cosa diverrebbe più semplice. Tale teoria giustifica anche il moto retrogrado, che è un effetto ottico che appare ogni volta che la terra, avendo effettuato una rivoluzione completa ritorno al sole ad una velocità superiore a quella di un altro pianeta (o viceversa), è nuovamente allineata con il pianeta ed il sole (figura 7). Essa giustifica anche le differenze di luminosità e di velocità.

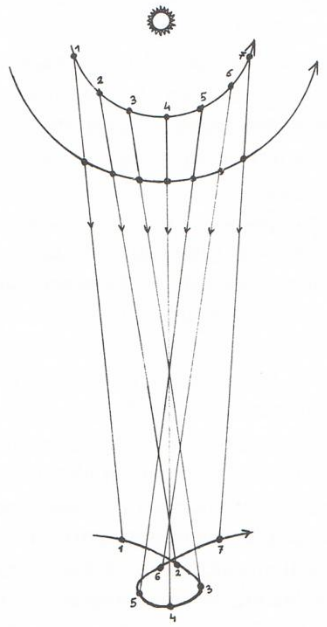


Fig. 7. L'apparente moto retrogrado guardando dalla terra (orbita più piccola) ad un pianeta con tempo di rotazione minore.

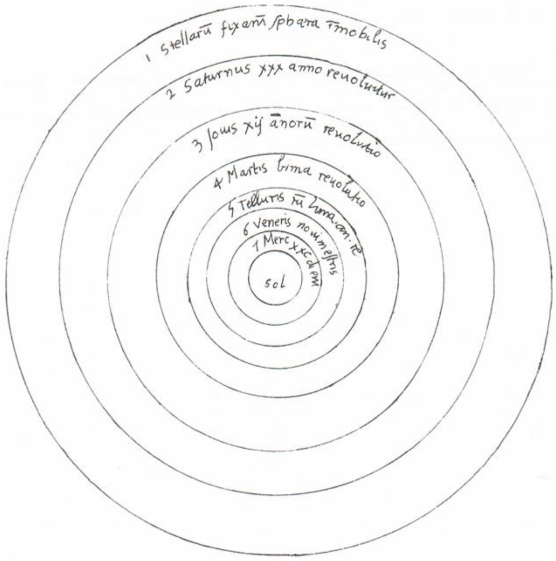


Fig. 8. Il sistema planetario copernicano.

In conclusione, Copernico attribuisce alla terra tre movimenti:

(a) rotazione intorno al suo asse,

(b) rivoluzione intorno al sole,

(c) un terzo movimento che permette all'asse di rimanere parallelo a se stesso, perché egli ancora considerava le orbite solide.

Nel suo lavoro egli afferma anche che le orbite sono *ovali* (questo era stato affermato anche da Peurbach) e che il sole è spostato rispetto al centro dell'orbita (figura 8).

(c) Sebastiano Serlio

Sebastiano Serlio (1475 - 1534), di Bologna, era un contemporaneo di Copernico. Come pittore di prospettive, egli studiò l'ellisse per rappresentare il cerchio in prospettiva. Dedicò parte del suo libro sull'architettura alla geometria, e lì studiò la costruzione dell'ellisse. Quanto segue prova che l'ellisse era ben nota all'epoca. Serlio afferma: "Molti architetti costruiscono l'ellisse con un filo, e poi la tracciano con un compasso, ma questo metodo non funziona [a quell'epoca i geometri avevano ancora l'idea che una costruzione geometrica rigorosa dovesse essere effettuata solo con riga e compasso]; per avere una perfetta ellisse si deve fare la costruzione seguente:" (figura 9)

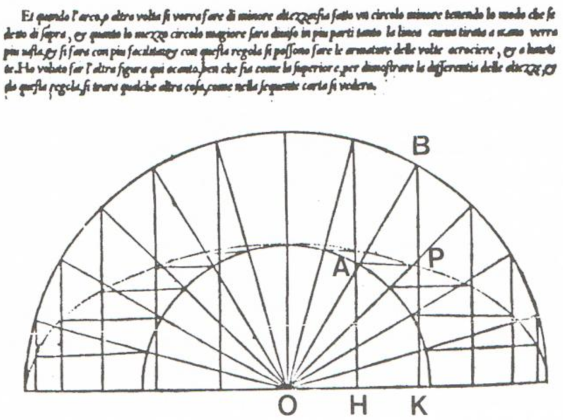


Fig. 9. Serlio: la determinazione dell'equazione dell'ellisse.

Egli traccia due circonferenze concentriche i cui raggi sono i semiassi a e b. Sceglie coordinate perpendicolari e costruisce un raggio, chiamando rispettivamente A e B le due intersezioni con le due circonferenze. Considera le parallele agli assi e deduce dai triangoli OAH e OBK (H e K sono le proiezioni di A e B sull'asse x):

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OH}{OA}$$

Chiamando x, y le coordinate di P, ottiene:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} \quad e \quad \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

Così trova l'equazione dell'ellisse; ma aggiunge che, anche se si costruiscono in tal modo molti punti, alla fine si deve comunque tracciare la curva a mano libera, che non è facile; così egli afferma che è preferibile disegnare ovali: "Si possono costruire forme ovali in diversi modi, ma vi darò le regole per quattro metodi" (figura 10).

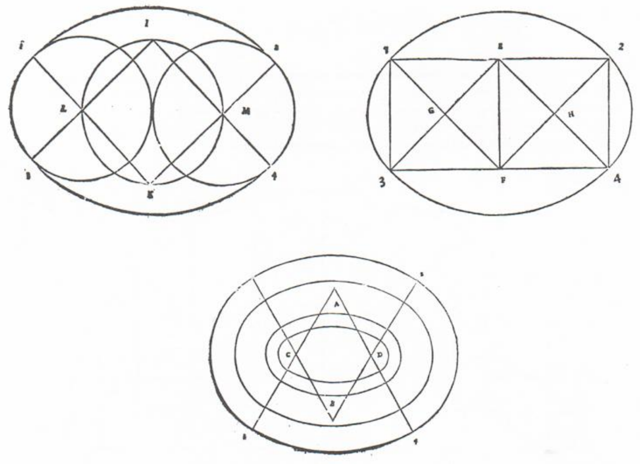


Fig. 10. Tre dei quattro ovali di Serlio.

La grafica del computer ci ha permesso di confrontare le ovali di Serlio con ellissi aventi gli stessi semiassi. Ad esempio, in figura 11 vediamo che il terzo ovale di figura 10 (tracciato con linea continua) non differisce in modo significativo dall'ellisse (punteggiata), soprattutto considerando che, in pratica, è facile deviare dalla curva disegnata quando si costruiscono edifici.

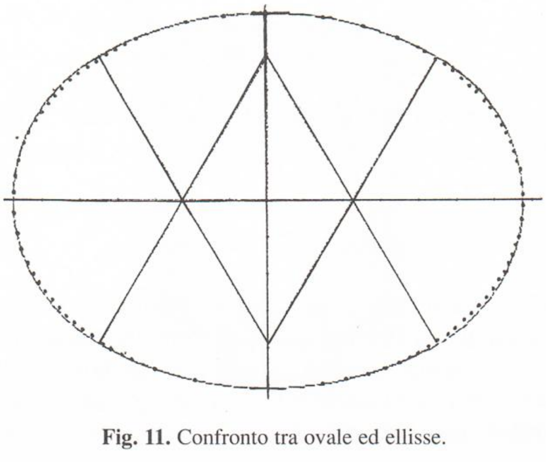


Fig. 11. Confronto tra ovale ed ellisse.

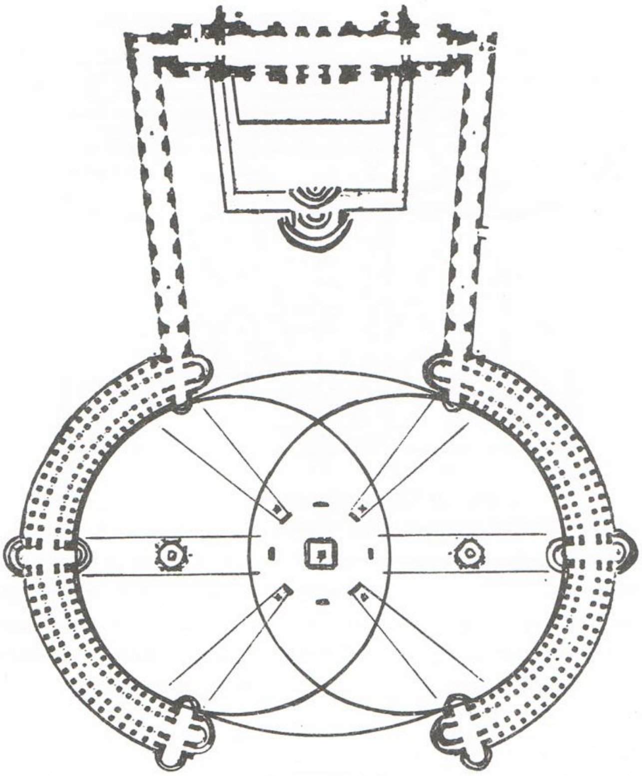


Fig. 12. Pianta di piazza San Pietro, Roma.

Più tardi l'architetto Guarino Guarini (1624 - 1683) dirà "L'ellisse non è, in realtà, la stessa figura che l'ovale, ma vi è molto vicino, e si può *usurpare* l'una per l'altra."

(d) Giacomo Barozio da Vignola (1507 - 1573)

Secondo l'*Enciclopedia Universale dell'Arte*, Vignola fu il primo ad usare l'ellisse per la volta di una chiesa (Sant'Andrea in via Flaminia, Roma, figure 13 e 14). Nel 1534 Vignola lavorava a Roma con l'architetto delle costruzioni papali e nel 1543, l'anno della morte di Copernico, egli era a Bologna. Poi tornò a Roma e, nel 1550, costruì Sant'Andrea.

Fig. 13. Vignola: la chiesa di Sant'Andrea, Via Flaminia, Roma (Alinari).

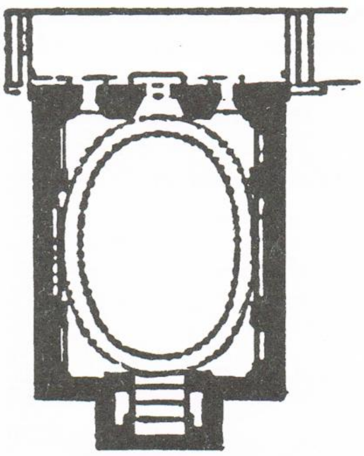


Fig. 14. Pianta della chiesa di Sant'Andrea, via Flaminia, Roma.

Secondo la moda di quel periodo, la piccola chiesa è ispirata ad un monumento antico (il Pantheon). All'esterno è un quadrato, ma all'interno presenta un'originalità: la forma ellittica.

Se, nella chiesa di Sant'Andrea, alziamo gli occhi, vediamo una figura ellittica; non si deve dimenticare che la *volta delle chiese ha sempre, fin dall'antichità più remota, rappresentato il cielo.*

Vignola è stato sicuramente influenzato da Serlio, non sappiamo se fu influenzato da Copernico; ma considerando la fama di quest'ultimo nell'ambiente vaticano, dove lo stesso Vignola lavorava, non possiamo escluderlo.

3. L'era di Keplero

(a) Keplero

Keplero iniziò gli studi di astronomia quando era molto giovane. Aveva già pubblicato un libro (*Prodomus Dissertationum Cosmographicarum continens Mysterium Cosmographicarum*) quando Tycho Brahe lo chiamò a Praga chiedendogli di studiare l'orbita di Marte. Egli pubblicò i risultati del suo lavoro nel 1609 con il nome di *Astronomia Nova*.

Ricostruendo l'orbita di Marte, con l'aiuto delle osservazioni di Tycho, Keplero capì subito che qualcosa non tornava. Infatti se, come in figura 15, l'orbita da Marte occupa uno spazio così grande, come possono il sole, la luna, Mercurio, Venere e la Terra trovarvi posto? Keplero ricominciò dall'inizio. Lavorò ancora sulle osservazioni di Tycho, verificandole sulla base dell'ipotesi tolemaica e di quella eliocentrica. Presto abbandonò il sistema tolemaico e scelse quello eliocentrico.

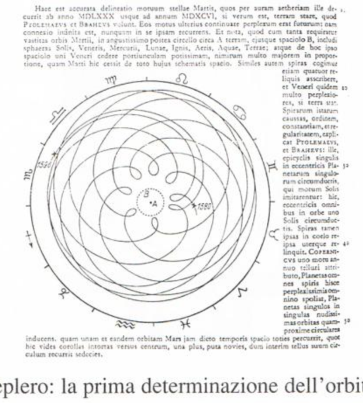
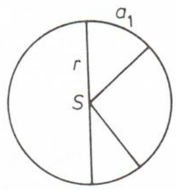


Fig. 15. Keplero: la prima determinazione dell'orbita di Marte.

Il libro di Keplero è piuttosto complesso, ma rivela le vie contorte, dense di ostacoli, che egli seguì sempre con entusiasmo.

Vediamo come Keplero stabilì la sua prima legge, che trovò dopo la "seconda". Infatti, scoprì subito che 'i pianeti coprono aree uguali in tempi uguali', ma la ricerca della forma dell'orbita fu molto ardua.

Egli inizia supponendo che la forma dell'orbita sia circolare, poi, nel capitolo 27, dice che la forma è ovale e, nel capitolo 28, torna al cerchio e ancora, nel capitolo 30, afferma che è ovale. Va avanti oscillando tra cerchi più o meno perfetti; nel capitolo 40 osserva che se l'orbita fosse circolare, sarebbe facile calcolarne la superficie, dividendo il cerchio in settori col vertice nel centro (figura 16).



$$A = \tfrac{1}{2}r(a_1 + a_2 + \ldots) = \tfrac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

Fig. 16. Keplero: l'area del cerchio con il sole nel centro.

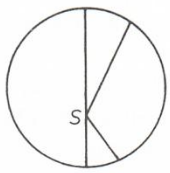
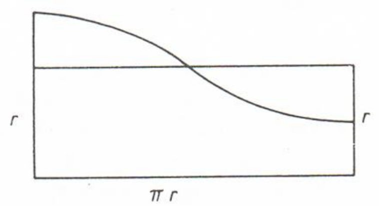


Fig. 17. Keplero: il problema dell'area del cerchio se il sole è decentrato.



$$A = r \cdot \pi r = \pi r^2$$

Fig. 18. Keplero: sviluppo dell'area di figura 17.

Ma aggiunge anche che se il sole fosse spostato rispetto al centro, l'area sarebbe la stessa, e saremmo in grado di calcolarla a partire da settori con vertice traslato (fig. 17). Così sviluppa la superficie del cerchio, costruendo un rettangolo che ha un lato uguale alla metà della lunghezza del cerchio, a l'altro uguale ad un raggio. Poi riporta l'altezza delle distanze successive tra il pianeta e il sole, e descrive una curva (fig. 18).

A questo punto, assumendo di conoscerne l'area, cerca la forma della curva. Trova molte difficoltà e dice: "Dal momento che quest'epoca ha geometri così eminenti che spesso non necessitano di molto tempo per trattare cose che non hanno un'utilizzazione evidente, li chiamo ad aiutarmi per trovare una qualche superficie piana che sia equivalente a tutte le distanze raccolte. Io stesso ho trovato una superficie geometricamente, ma vorrei che mi aiutassero a trovare la forma della figura la cui area ho trovato geometricamente, e non a calcolare l'area di una data figura".

Qui troviamo la base del problema di inversione dell'analisi. Nel capitolo 48 Keplero dice: "Se la nostra figura fosse una perfetta ellisse, il lavoro avrebbe potuto già essere fatto da Archimede, che nel libro degli Sferoidi determina la superficie piana dell'ellisse…Può questa figura essere una perfetta ellisse?" chiede, ma poi continua: "in effetti, ne differisce un poco." Nel capitolo 48 egli afferma anche che l'orbita di Marte è più piccola del cerchio e un po' più larga dell'ovale. Solo dopo aver verificato i calcoli trova un errore e, nel capitolo 58, scopre finalmente che l'orbita non può avere altra forma che l'ellittica. (*O me ridiculum!…nullum planetae relinqui figuram orbitae, praeterquam perfectae ellipticam*).

Se consideriamo che ci sono 70 capitoli in Astronomia Nova, possiamo ben capire quanto spazio Keplero ha riservato alla ricerca della prima legge: "Le orbite dei pianeti sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi."

Keplero, che era un contemporaneo di Galilei, era in contatto con lui e, soprattutto, con i suoi discepoli, in particolare con Cavalieri relativamente ai problemi concernenti gli indivisibili, che aveva spesso incontrato nel determinare l'orbita di Marte.

Egli era ben noto nell'ambiente italiano, sia per i suoi lavori, che per contatti diretti. Quando, nel 1616, le opere di Copernico e di Keplero furono messe all'*indice*, Galilei fu ammonito dall'insegnare della teoria copernicana. L'interesse creato dal processo fece conoscere bene il problema nell'ambiente vaticano, almeno per grandi linee. *Astronomia Nova*, che contiene circa 60 capitoli sulla ricerca della forma dell'orbita, sicuramente fece pensare, a qualcuno in quell'ambiente, a tale scoperta.

(b) gli architetti

In quello stesso periodo i grandi maestri del barocco Romano - Bernini, Borromini e Pietro da Cortona - iniziavano a lavorare. Nel 1616 Gianlorenzo Bernini (1598 - 1680) aveva 18 anni e lavorava a Roma, dove risiedette fino al 1605. La sua prima attività da scultore risale al periodo 1614-1619. Pietro Berrettini da Cortona (1596 - 1669) aveva 20 anni e sappiamo che fu a Roma a partire dal 1612 come tagliapietre in Vaticano. Non abbiamo referenze esatte riguardo a Francesco Castelli Borromini (1599 - 1667). Sappiamo solo che arrivò a Roma molto giovane per lavorare come tagliapietre in Vaticano, prima con Maderno a poi al servizio di Bernini. Questi giovani avevano certo qualità non comuni e probabilmente sentirono qualcosa riguardo alla condanna dei lavori menzionati prima. Ma certamente non poté loro sfuggire nel 1633, quando erano ormai adulti, la condanna definitiva di Galileo. Dopo la condanna cominciano le costruzioni delle chiese con volte ovaloidi. Il primo fu Borromini, che nel 1638 iniziò la costruzione di S. Carlo alle Quattro Fontane (1638 - 1641). Subito dopo Bernini si accinse a costruire S. Andrea al Quirinale e Pietro da Cortona S. Nicola da Tolentino. Successivamente furono costruite altre chiese con la volta ovaloide. In Borromini il problema è dominante e, poco prima di morire (1667), riuscì a dare alla pianta della cappella Falconieri in G. Giovanni dei Fiorentini la forma di una perfetta ellisse (figura 19).

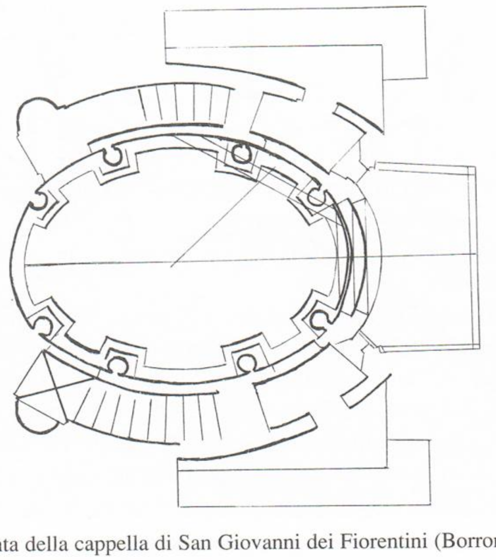


Fig. 19. Pianta della cappella di San Giovanni dei Fiorentini (Borromini), Roma.

4. Gli aspetti matematici

Le costruzioni che consentono di sottolineare il tipo di curva considerata, che appaiono in molti lavori di architettura (figure 20 - 22), sono state eseguite nel modo utilizzato dai moderni architetti, usando i diametri come insegnato ai suoi tempi da Apollonio (vedi sezione 1). Infatti, Apollonio osservò che ogni diametro biseca un fascio di corde parallele, e che nell'ellisse e nell'iperbole il punto di intersezione di due diametri fornisce il centro; nella parabola i diametri sono paralleli fra loro. È dunque necessario poter parlare di diametri in modo accessibile anche agli studenti.

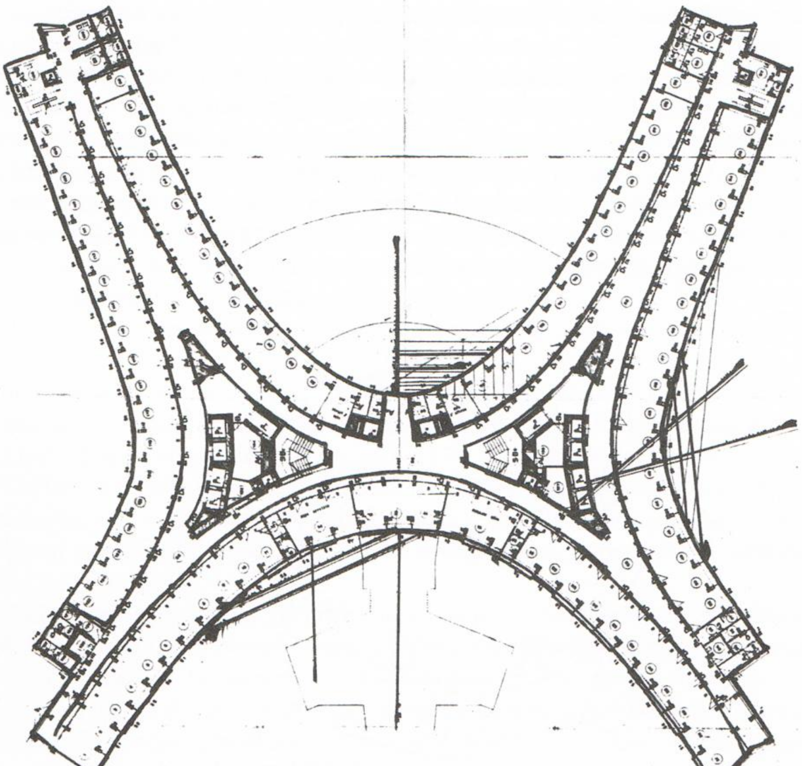


Fig. 20. Pianta del Palazzo della Regione, Roma.

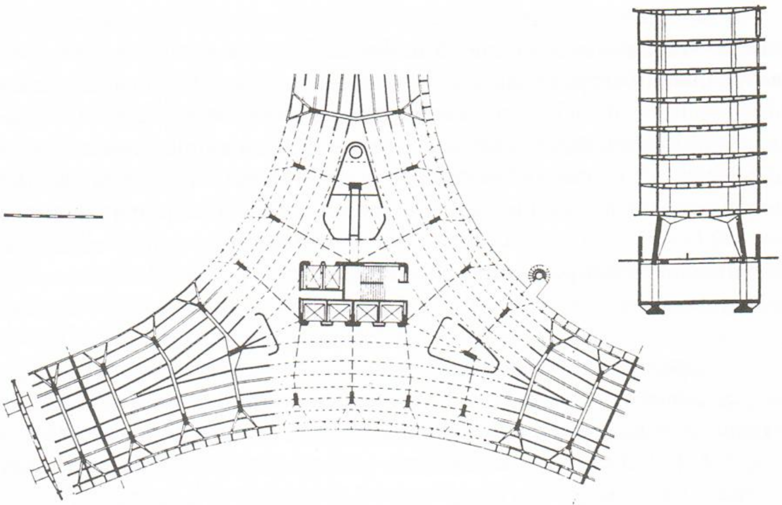


Fig. 21. Pianta del Palazzo dell'UNESCO, Parigi.

Fig. 22. Ponte Duca D'Aosta, Roma (Alinari).

Per fare questo abbiamo cercato un modo semplice di spiegare questa parte della geometria proiettiva, che difficilmente si trova in testi scolastici e che è trattata in modo troppo complicato nei testi universitari. Gli alunni conoscono le corrispondenze affini e sanno che cerchio ed ellisse si corrispondono in una affinità. D'altra parte osservando le sezioni piane di un cono possono capire che anche fra cerchio e parabola e fra cerchio e iperbole c'è una corrispondenza biunivoca puntuale ottenuta tramite le generatrici del cono (quindi con una proiezione dal suo centro); questa trasformazione muta ancora retta in retta. La nuova trasformazione non può essere ancora un'affinità, perché la trasformata affine del cerchio è l'ellisse. Per costruire figure affini ci si serve di un invariante: il rapporto. Si trova che, nel caso che stiamo considerando, l'invariante è un *birapporto* (rapporto di due rapporti). Si introduce quindi il birapporto di quattro punti allineati e si dimostra che esso resta invariato operando con una trasformazione lineare. La nuova trasformazione lineare prende il nome di proiettività ed effettivamente l'iperbole e la parabole sono trasformate proiettive del cerchio. A questo punto l'affinità diventa una caso particolare della proiettività.

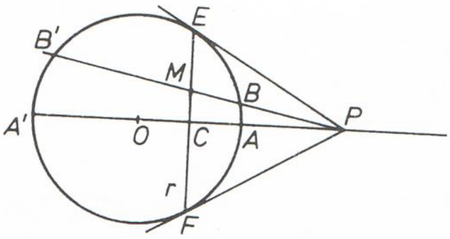


Fig. 23. Polo P, polare p e corde.

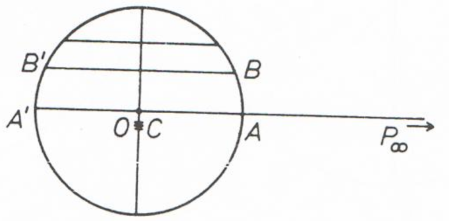


Fig. 24. Il polo va all'infinito, la polare si sposta verso il centro, le corde divengono parallele.

Lo sviluppo che abbiamo scelto può essere seguito nei suoi aspetti più intuitivamente geometrici senza rigorosi calcoli di equazioni.

Si tratta innanzi tutto di parlare di polarità rispetto al cerchio. I teoremi di geometria elementare ci permettono di introdurre i concetti di *polo, polare, coniugato armonico* da un punto di vista metrico.

Si introducono poi i concetti di *diametro* e *centro* (sempre rispetto alla circonferenza) 'mandando' il polo all'infinito, così che le corde che si intersecano nel polo divengano parallele quando il polo vada all'infinito, e la polare p divenga il diametro perpendicolare ad esse (figure 23 e 24).

Dopo aver realizzato che le proprietà coinvolte in questi concetti sono proiettive (dal momento che riguardano solo intersezioni di rette, tangenti e birapporti), esse si possono applicare senza variazioni alle coniche. Infatti

l'*ellisse* si ottiene trasformando la circonferenza con un'affinità; l'*iperbole* si ottiene con una trasformazione proiettiva, mandando all'infinito una secante alla circonferenza; e la *parabola* si ottiene con una trasformazione proiettiva mandando all'infinito una tangente alla circonferenza.

In tutti questi casi il polo e la polare considerati per la circonferenza si trasformano in polo e polare della sezione conica. Nell'ellisse e nell'iperbole, i diametri si intersecano nel centro (che si trova dalla parte della concavità dell'ellisse, e dalla parte della convessità dell'iperbole); nella parabola i diametri sono tra loro paralleli (figure 25-27).

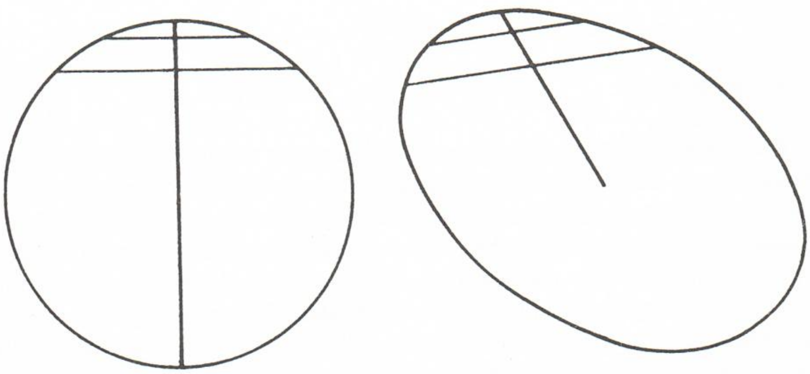


Fig. 25

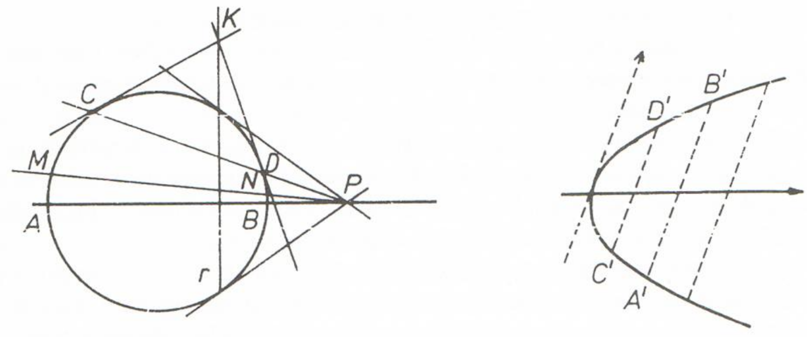


Fig. 26

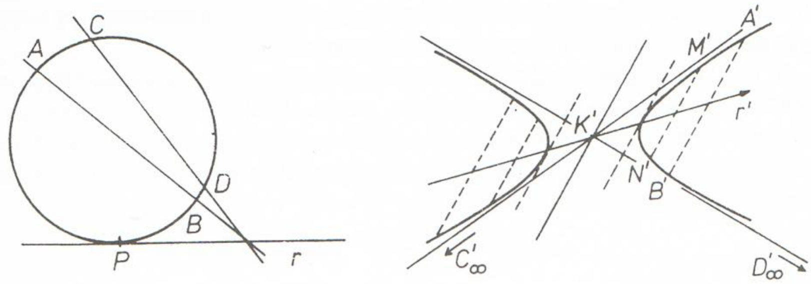


Fig. 27

5. Conclusione

Noi vorremmo che, prendendo spunto da quanto in effetti avviene nelle conquiste intellettuali in cui le idee dei contemporanei si intrecciano, combattono, e influenzano a vicenda, la scuola superasse la rigida distinzione fra discipline allargando la visuale ai possibili apporti dati dalle altre espressioni culturali. Copernico e Keplero erano matematici più che astronomi, ma dobbiamo a loro il punto di svolta determinante verso il sistema eliocentrico. Gli architetti del diciassettesimo secolo si appassionarono alla forma ellittica, ma fu il lavoro del geometra Serlio che facilitò le loro costruzioni. Ma Serlio non avrebbe fatto qualcosa di nuovo se non avesse dovuto risolvere difficoltà provenienti dalla sua attività come pittore di prospettive.

Così troviamo che matematica, astronomia e arte contribuiscono a chiarificare una piccola branca del sapere.

Bibliografia

(a) Testi scolastici

Cremona, L.: 1873, *Geometria proiettiva ad uso degli Istituti Tecnici.*

Lombardo Radice, L. e Mancini Proia, L.: 1978, *Il metodo Matematico*, 3 voll., Principato, Milano.

(b) Geometria

Castelnuovo, G.: 1931, *Geometria Analitica*, S. A. E. Dante Alighieri.

Enriques, F.: 1904, *Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna.

(c) Storia della Matematica e astronomia

Apollonius de Perge: 1923, *Les coniques; Oeuvres traduites pour la première fois du grec en francais avec une introduction et des notes par Paul Ver Ecke*, Desclée de Brouwer, Bruges.

Nicolas Copernicus: 1972, *Complete Works: the Manuscript of Nicholas Copernicus On thr Revolutionibus*, McMillan and Polnish Scientific Publishers.

Joannis Kepler: 1858, *Astronomia, Opera Omnia*, Heyder and Zimmer, Frankfurt a. M. and Erlangen.

Boyer, Carl B.: 1968, History of Mathematics, Wiley, N. Y.

Dreyer, J. L. E.: 1906, *History of the Planetary Systems from Thales to Kepler*, Cambridge Univ. Press.

(d) Architettura

Borromini, F.: 1964, *Opus; a cura di P. Portoghesi*, Elefante, Roma.

Guarini, G.: 1737, *Architettura Civile*, Torino.

Serlio, S.: 1551, *Architettura*, Venezia.