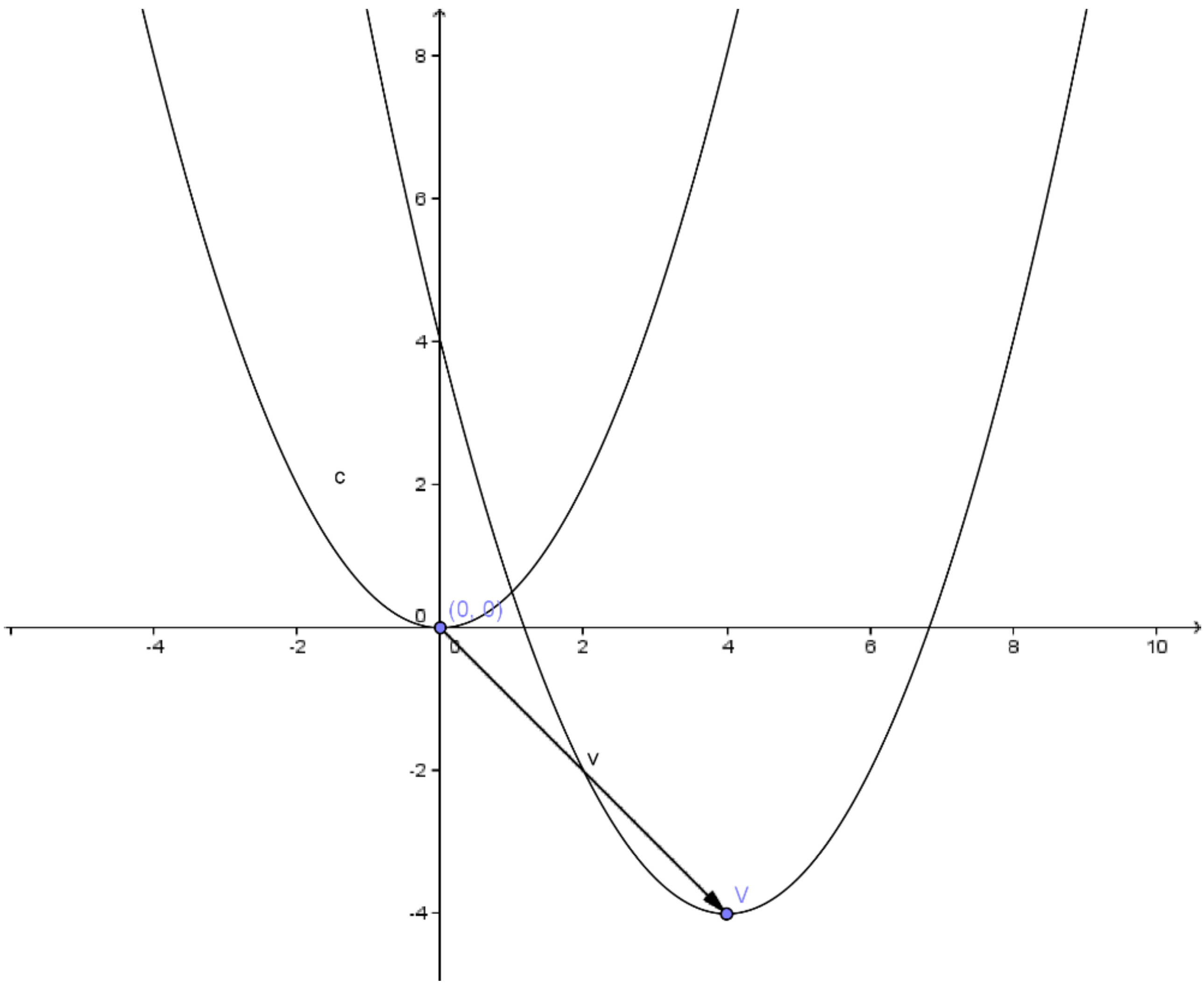
Dimostrazione dell' equazione della parabola $y=ax^2+bx+c$

Vogliamo determinare l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice nel punto $V(x_0, y_0)$.

Per fare questo sia C una parabola con vertice nell'origine O(0,0) e asse di simmetria coincidente con l'asse y, di equazione $y=ax^2$, con $a\neq 0$.



Sottoponiamo i punti di C ad una traslazione di vettore $\vec{v}\,(x_0\ ,y_0)$. La parabola C è trasformata nella parabola C' con vertice V, trasformato di O , ed asse di simmetria parallelo all'asse y di equazione $x=x_0$.

L'equazione della parabola traslata C' si trova effettuando sull'equazione di C la traslazione di equazione : $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - x_0 \\ y = y' - y_0 \end{cases}$ $\rightarrow y=ax^2$ diventa $y'-y_0=a(x'-x_0)^2$.

Se sviluppiamo i calcoli e sostituiamo y' con y e x' con x si avrà $y= ax^2-2axx_0+ax_0^2+y_0$.

Ponendo $b=-2ax_0$ e $c= ax_0^2+y_0$ si ottiene:

$$\boxed{y=ax^2+bx+c}$$ (funzione quadratica) (1)

Dalla (1) possiamo ricavare le coordinate (x_0,y_0) del vertice V di C' in funzione dei parametri a, b, c.

$x_0= -\frac{b}{2a}$, $y_0=c-ax_0^2 \rightarrow y_0=c-a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \rightarrow y_0=c-a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$ semplificando si ottiene $y_0= -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Quindi il vertice è il punto a coordinate

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \text{ ovvero } \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

L'asse di simmetria ha equazione

$$x= -\frac{b}{2a}.$$

Utilizzando le equazioni della traslazione troviamo le coordinate del fuoco che saranno quindi

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}+\frac{1}{4a}\right) \text{ ovvero } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right).$$

La direttrice avrà equazione

$$y= -\frac{b^2-4ac}{4a}-\frac{1}{4a} \text{ ovvero } y=\frac{-1-\Delta}{4a}.$$