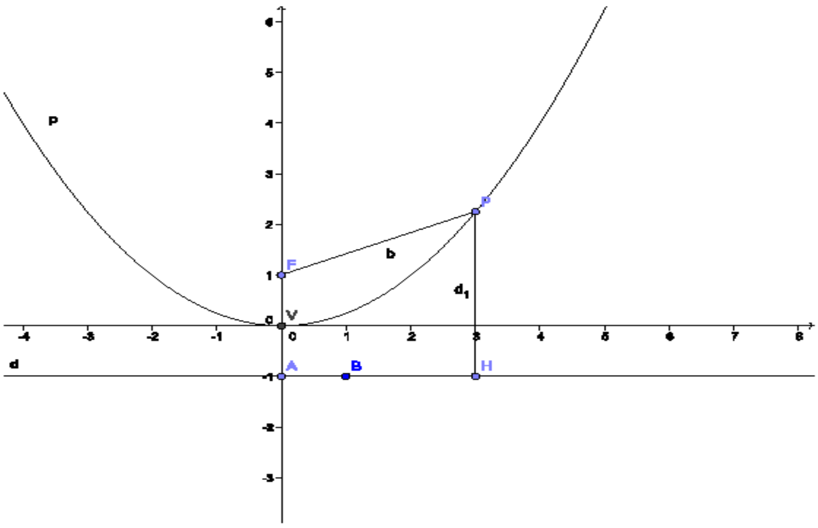
La parabola di equazione $y=ax^2$

Supponiamo che il fuoco sia un punto F appartenente all'asse y di coordinate (0, p) e la retta direttrice sia la retta parallela all'asse x di equazione y=-p.

Preso un generico punto P le cui coordinate sono espresse dalla coppia (x,y), tale punto apparterrà alla parabola se e solo se la sua distanza dal fuoco sarà uguale alla sua distanza dalla direttrice cioè:

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

essendo H il punto a coordinate (x, -p) che rappresenta la proiezione di P sulla direttrice .



Determiniamo $\overline{PF}$ e $\overline{PH}$

$\overline{PF} = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} \rightarrow \overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$

$\overline{PH} = |y_p - y_H| = |y - (-p)| \rightarrow \overline{PH} = |y+p|$

Sostituendo nella relazione $\overline{PF} = \overline{PH}$ le espressioni trovate , otteniamo:

$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \rightarrow$ elevando al quadrato entrambi termini dell'uguaglianza $x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$ $\rightarrow$

$x^2+y^2-2yp+p^2=y^2+2yp+p^2$ semplificando i termini evidenziati si ottiene $x^2=4py$ $\rightarrow$ con $p \neq 0$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \quad (1)$$

Ponendo $\frac{1}{4p} = a$, all' equazione (1) questa diventa:

$$y = ax^2 \quad (2)$$

con $a \neq 0$.

La relazione (2) è **l'equazione di una parabola che ha il vertice nell'origine del sistema cartesiano V(0,0) e l'asse di simmetria coincidente con l'asse y cioè la retta di equazione x=0** .

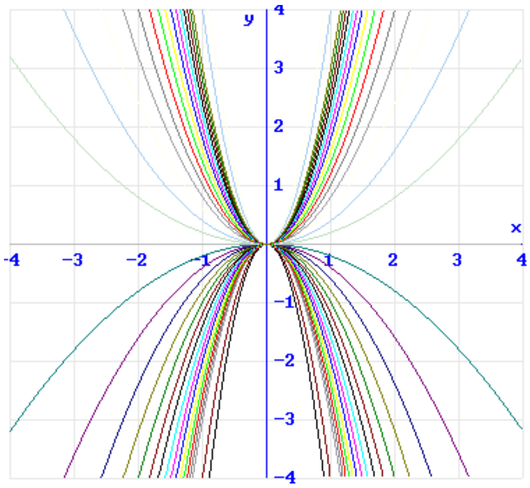
Osservazione: $y=ax^2$ è l'equazione della funzione della proporzionalità quadratica diretta.

Se, conoscendo un'equazione della forma $y=ax^2$, vogliamo determinare le coordinate del fuoco della parabola e l'equazione della direttrice, dobbiamo tenere presente la relazione :

$$\frac{1}{4p} = a \rightarrow p = \frac{1}{4a}$$

Quindi le coordinate di fuoco saranno $F(0, \frac{1}{4a})$ e l'equazione della retta direttrice d sarà $y=-\frac{1}{4a}$.

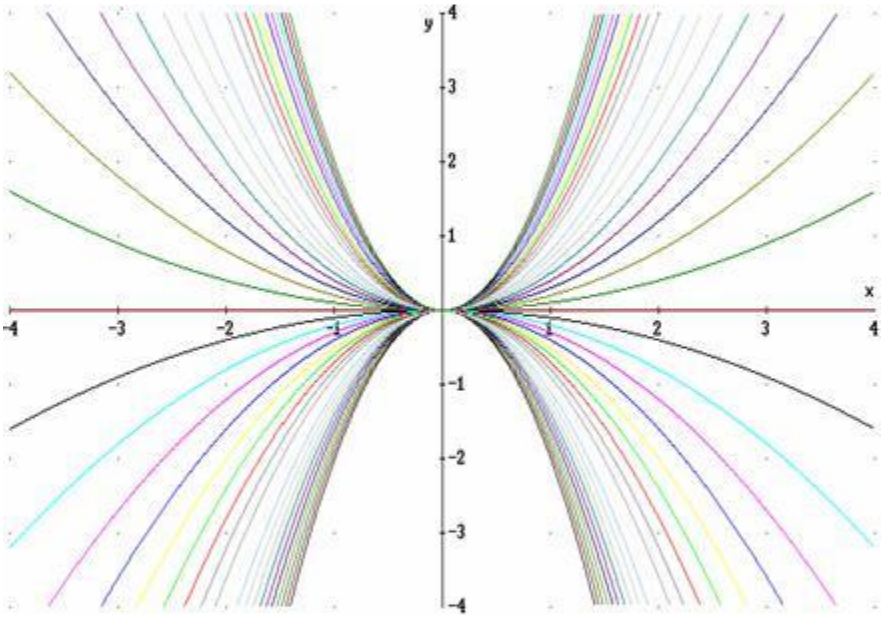
Se nell'equazione $y=ax^2$ è a>0 la parabola volge la concavità verso l'alto



Se nell'equazione $y=ax^2$ è a<0 la parabola volge la concavità verso il basso

Se a=0 si ottiene l'equazione y=0 che rappresenta l'asse delle ascisse. Per tale motivo si può considerare una parabola degenere.

Il valore assoluto del coefficiente a determina *l'apertura della parabola*: quanto più $|a|$è piccolo, tanto più la parabola è "aperta"; quanto più $|a|$ è grande, tanto più la parabola è "chiusa". Per questo motivo a è detto **coefficiente di apertura della parabola .**



Consideriamo un generico punto P, di ascissa x_0, appartenente alla parabola $y=ax^2$, l'ordinata di P è $y=ax_0^2$. D'altra parte anche il punto P' di ascissa $-x_0$ della parabola ha ordinata $y=a(-x_0)^2=ax_0^2$. Pertanto i punti P e P' sono simmetrici rispetto all'asse y. Dunque la parabola di equazione $y=ax^2$ è simmetrica rispetto all'asse y; per questo motivo si dice che l'asse y è l'asse di simmetria della parabola.