De la impotencia a la seguridad. Los irracionales

Fernando Macías Romero
Colegio de Matemáticas
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Puebla
fmacias@fcfm.buap.mx

Resumen

Para los pitagóricos toda la naturaleza estaba determinada por números enteros o fracciones. En el lenguaje moderno, las fracciones de la forma *a/b* con *a* y *b* enteros se llaman *números racionales.* Podemos decir que los pitagóricos pensaban que toda la naturaleza se podía entender por medio de los números racionales. Esto se llamó la "crisis de los irracionales" (acaecida en el siglo V a. de C.): si un número representa el lado de un cuadrado, ningún número podrá representar su diagonal. La confirmación de este hecho, establecida por los mismos pitagóricos, puso en peligro su propia visión del mundo. Aquí exponemos la demostración de que raíz de 2 no es racional (Libro X de *Los Elementos* de Euclides). Probablemente este resultado es uno de los más fundamentales de las matemáticas. Admirablemente, en 1975 el matemático alemán Estermann publicó otra prueba de este hecho, aquí la reproducimos para convencerlos que aún es más sencilla que la escrita por Euclides. También hablamos de la existencia de otros números irracionales importantes, en particular del número π, el número e y el número de oro con quien penetramos en el centro del universo matemático, ese mundo maravilloso en el que la imaginación desempeña el papel más notable.

La filosofía y la ciencia como ocupaciones válidas y trascendentes nacieron en la Grecia antigua. Lo hicieron cuando el hombre comenzó a preguntar por el orden de los sucesos de su entorno. En esta época no había divisiones para las áreas del conocimiento humano, todo formaba parte de una disciplina única: la filosofía.

La escuela Pitagórica dio inicio a la tradición científica y en particular a las matemáticas. Como hemos dicho, para los pitagóricos toda la naturaleza estaba determinada por números enteros o fracciones. En lenguaje moderno, las fracciones de la forma a/b con a y b números enteros se llaman *números racionales*. Pero, por otra parte, tenían el teorema de Pitágoras, que en el caso más simple, nos dice que un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 tiene una hipotenusa de longitud x que satisface $x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Por supuesto, x se denota por $\sqrt{2}$ ¿qué clase de número es $\sqrt{2}$? ¡Sorpresa! Este número no es racional. Es decir, para Pitágoras y su escuela, el número $\sqrt{2}$ no debería existir porque no se puede escribir como el cociente de dos números enteros. Una demostración de este hecho se encuentra en un apéndice del Libro X de los *Elementos* de Euclides, por cierto, dicho apéndice no está incluido en la recomendable traducción de *Los Elementos* hecha por T. L. Heat (vea la referencia [2] al final).

Teorema. El número $\sqrt{2}$ no es racional.

Demostración (la de siempre). Se lleva a cabo por reducción al absurdo, esto es, se comienza suponiendo lo contrario de lo que se quiere demostrar y luego por medio de la lógica se deduce una afirmación absurda, lo que muestra que nuestra suposición es insostenible. Procedemos: supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir, podemos representarlo en la forma $\sqrt{2} = a/b$ siendo a y b números enteros. Simplificando la fracción podemos siempre suponer que a y b no tienen divisores comunes aparte del 1. Escribamos $a = \sqrt{2}\, b$ y elevemos al cuadrado. Obtenemos $a^2 = 2b^2$. Esto quiere decir que 2 divide a a^2. Como el producto de dos números nones es non otra vez, entonces a debe ser par. Es decir, a es divisible por 2 y podemos escribirlo como $a = 2d$, donde d es un número entero. Elevando otra vez al cuadrado tenemos: $4d^2 = a^2 = 2b^2$. Cancelamos un 2 de cada lado: $2d^2 = b^2$. Esto es b^2 es divisible por 2 y como vimos antes, esto implica que b es divisible por 2. Pero habíamos dicho que el único divisor de a y b es 1 y ¡ahora encontramos que 2 es un divisor común! Esta es una contradicción, lo que deseábamos encontrar. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es racional. □

No sabemos en qué momento se dieron cuenta los pitagóricos de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, hecho que contradecía sus creencias en las más profundas raíces. En conclusión, existen segmentos de recta que no corresponden a números racionales. Aquellas magnitudes que no son múltiplos racionales de un segmento unitario dado fueron llamadas por los griegos magnitudes inconmensurables. Los pitagóricos trataron de mantener en secreto la existencia de las magnitudes inconmensurables. Se dice que Hipaso de Metaponto [3], el discípulo que descubrió y luego reveló el secreto, murió en circunstancias misteriosas. Los puntos de una recta que no corresponden a números racionales son llamados *números irracionales*. Probablemente este resultado es uno de los más fundamentales de las matemáticas. Es interesante que en 1975 el matemático alemán Estermann haya encontrado la siguiente bella y novedosa demostración [1].

La prueba nueva: para demostrar esto supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional y llegaremos a una contradicción. Como $\sqrt{2}$ es racional, hay un natural mínimo m con la propiedad de que $m\sqrt{2}$ es un número natural. Por otra parte, sabemos que si $1<\sqrt{2}<2$, por lo tanto $m < \sqrt{2}\, m < 2m$ y si $n = \left(\sqrt{2}-1\right)m$, entonces n es un entero positivo (restando m en la primera desigualdad) menor que m (restando m en la segunda desigualdad). Como $n\sqrt{2}$ = $\left(\sqrt{2}-1\right)m\sqrt{2}$ = $2m$-$\sqrt{2}\, m$ es diferencia de dos enteros y positivo, es un número natural. Esto contradice la propiedad que tiene m, de ser el mínimo con dicha propiedad. □

Hay tres números irracionales cuyas aplicaciones, tanto en matemáticas como en otras disciplinas, son tan numerosas e importantes que podríamos denominarlos como los números irracionales más famosos. Son los números π, e y Φ llamados *número pi,* número e y *número de oro*, respectivamente. Dos de ellos, π y Φ, ya eran conocidos por los griegos, varios siglos a. C.; el número e es ampliamente utilizado desde el siglo XVIII. Desde la antigüedad se sabe que en todas las circunferencias la relación entre su longitud y su diámetro da siempre el mismo resultado; ese resultado se ha venido designando con la letra griega π, que es la inicial de la palabra griega periferia ($\pi\varepsilon\rho\iota\phi\varepsilon\rho\iota\alpha$). El valor de π ha sido una preocupación constante entre los matemáticos desde el siglo III a. C.; durante muchos siglos se creyó que π era igual a alguna fracción de dos enteros y hubo muchos intentos por encontrarla, pero sólo se obtuvieron aproximaciones notables, tales como π = 22/7 = 3.1428... (Arquímedes, siglo III a. C.); π = 377/120 = 3.14166..., (Ptolomeo, siglo II d. C.); π = 355/113 = 3.141592.., (Tsu Chung-Chi, siglo V, d. C.). En 1767 el matemático Johann Lambert demostró que π no podía expresarse en forma de fracción, es decir, que π es irracional*,* por lo que todos los esfuerzos se centraron ya en conseguir fórmulas cada vez mejores para dar buenas aproximaciones de π. De hecho algunas fórmulas ya habían sido obtenidas antes de demostrar la irracionalidad de π tales como $\pi = 2\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}...$, realizada por Wallis en el siglo XVII, y la realizada por Euler en el siglo VIII: $\pi^2 = 6\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+...\right)$.

Cualquier número obtenido después de un número finito de pasos a partir de números enteros, usando sólo con ellos las operaciones suma, resta, multiplicación, división y radicación, se llama *número algebraico* (dicho de otro modo, los *números algebraicos* son aquellos que son solución de alguna ecuación polinómica de coeficientes que son números enteros). Euler en el siglo XVII, llamó *trascendentes* a los números que no son algebraicos, es decir, trascendentes porque trascienden más allá de las operaciones habituales del álgebra. Todavía en el siglo XIX no se conocía el primer número trascendente*,* y fue a finales de es mismo siglo, en 1882, cuando Lindemann demostró que π es trascendente. Este descubrimiento permitió resolver de paso uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad, el de la cuadratura del círculo; al ser π trascendente, la cuadratura del círculo era imposible.

El número *e*, y su eterna compañera la función *logaritmo neperiano,* tienen numerosas aplicaciones en todas las ramas de la ciencia, la economía, etc. (también irracional y trascendente, como π), cuyo valor aproximadamente es: *e = 2.718…* Se pueden obtener aproximaciones cada vez más precisas, cuando *n* es un número natural, en la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. De hecho, su límite es *e*. También*;* *e* = $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+...$ Los modelos propuestos por economistas, biólogos, etc. para estudiar, por ejemplo, crecimientos de poblaciones suelen basarse en la idea anterior, y acaban en fórmulas que inevitablemente incluyen potencias del número *e* con la variable tiempo en el exponente. Para obtener una fórmula para averiguar la edad de un esqueleto, un fósil, etc., a mediados del siglo XX, el químico *Libby* descubrió el *carbono-14,* el conocimiento del número *e* fue fundamental.

El número Φ, llamado *número de oro,* es una de las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 1-x$. Concretamente, $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618...$ La otra solución es, precisamente, $\frac{1}{\Phi} = 1.618...$ El número Φ aparece en campos tan variados como los reinos vegetal y animal, la poesía, la música, la arquitectura, el arte, etc. y se designa con la letra griega Φ “fi” en honor de *Fidias,* considerado el escultor de las obras más perfectas de la antigua Grecia.

Desde hace cinco siglos, el rectángulo considerado como “el más bello” es aquel en el cual la relación entre la altura y la anchura da resultado igual a Φ. El rectángulo “más bello” tiene la propiedad de que al quitarle el cuadrado más grande posible, o sea, el de lado igual al lado menor, resulta otro rectángulo más pequeño que también es de “máxima belleza”. Así, podríamos continuar el proceso de división con este rectángulo menor e iríamos obteniendo rectángulos cada vez más pequeños, los cuales serían siempre de “máxima belleza”. Luego, uniendo los extremos de esos cuadrados obtendríamos la llamada *espiral áurea*, presente en objetos naturales tales como la concha del Nautilus, la distribución de semillas del girasol, el feto humano, etc. Según las tradiciones que proponen un canon de belleza del cuerpo humano, si tomamos 1 como medida total del cuerpo, entonces la medida de los pies al ombligo debe ser exactamente Φ (vea el diagrama donde Leonardo da Vinci ilustra las correspondencias geométricas que gobernarían la composición del hombre ideal).

Leonardo de Pisa, hoy conocido como *Fibonacci,* planteó en el siglo XIII un problema sobre reproducción de conejos que daba como resultado la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., cada término de la sucesión se obtiene sumando los dos anteriores a él. Curiosamente, si se va dividiendo cada término de la sucesión por su siguiente (1/1, 1/2, 2/3, 3/5,…), vemos que salen aproximaciones cada vez mejores del número de oro. Eso no es extraño, ya que en realidad el límite de tales divisiones es el número de oro (Rafael Alberti tiene escrito un soneto en su libro *El ángel de los números*, llamado “a la divina proporción”).

REFERENCIAS:

[1] Bosch Giral, Carlos, http://laberintos.itam.mx/PDF/num1/13.

[2] Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Elements*, (3 tomos), primera edición, Dover, New York, 1956.

[3] Fritz, Kart von, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, Annals of Mathematics, Vol. 46, No. 2, (1945), pp. 242-264.