SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una *ecuación* es un enunciado o proposición que plantea la igualdad de dos expresiones, donde al menos una de ellas contiene cantidades desconocidas llamadas variables o incógnitas.

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto integrado por más de una ecuación. Si un sistema consta de m ecuaciones y n incógnitas, se dice que el sistema es de dimensión “m x n”.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Consideremos la ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{Ecuación de la recta}$$

donde a, b y c son constantes, y x y y son variables.

Ahora consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \text{ con } a_1 \cdot b_1 \neq 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \text{ con } a_2 \cdot b_2 \neq 0$$

x y y representan simultáneamente los mismos valores. Este sistema de ecuaciones lineales se representa mediante dos rectas en dos dimensiones.

Conjuntos solución

Al resolver sistemas de ecuaciones, se busca obtener los valores de las variables que satisfagan simultáneamente las ecuaciones del sistema.
Ejemplo: En el sistema de ecuaciones:

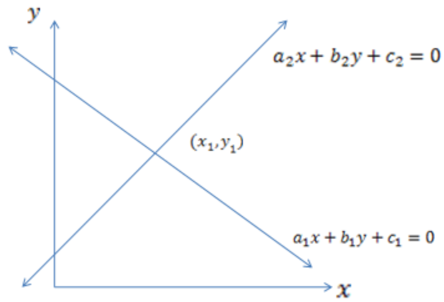
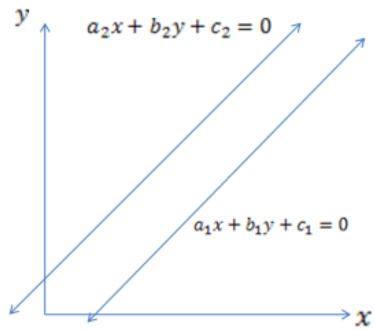
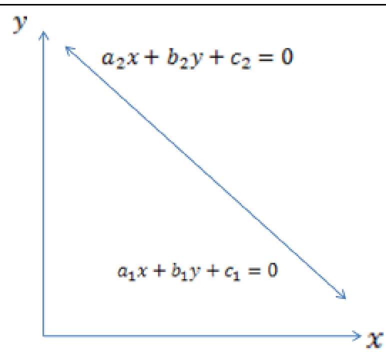
$$2x + 4y = 20$$
$$3x + y = 10$$

Se quiere encontrar los valores de x y y tal que satisfagan ambas ecuaciones al mismo tiempo.

Conjunto solución $S = \{(x, y) | 2x + 4y = 20 \ y \ 3x + y = 10\}$

El conjunto S puede ser un conjunto nulo, un conjunto finito o un conjunto infinito.

Gráficamente, se trata de determinar si las dos rectas que representan las ecuaciones tienen puntos en común. Las posibles soluciones en forma gráfica que puede adoptar el sistema de ecuaciones son:

	*Solución única:* las rectas se interceptan. La solución está dada en el punto (x_1, y_1)
	*Ninguna solución:* Rectas paralelas. No tienen puntos de intersección en común. No hay valores para las variables que satisfagan ambas ecuaciones.
	*Infinidad de soluciones:* Las rectas coinciden. Un número infinito de puntos es común a las dos rectas.

En un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales:

$$y = m_1x + k_1$$
$$y = m_2x + k_2$$

Donde m_1 y m_2 representan las pendientes de cada recta respectivamente y k_1 y k_2 representan las intersecciones respectivas con el eje y.

I. El sistema tiene solución única si $m_1 \neq m_2$
II. El sistema no tiene solución si $m_1 = m_2$ y $k_1 \neq k_2$
III. Hay infinitas soluciones si $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2$

Ejemplo:
Hallar el conjunto solución del sistema:

$$2x + 4y = 20$$
$$3x + y = 10$$

En primer lugar graficamos las dos rectas:

$$y = -{}^{1}\!/_{2}\,x + 5$$
$$y = -3x + 10$$

Un primer análisis índica que el sistema tiene *solución única*, ya que las pendientes de las rectas son diferentes.

Conjunto solución $S = \{(2,4) | 2x + 4y = 20 \ y \ 3x + y = 10\}$

Sistemas de ecuaciones lineales de orden m x n

Definición: Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

donde

1. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, a_{ij} y $b_i$son escalares conocidos.
2. $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las n incógnitas.
3. Se trata de buscar todos los posibles valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisfagan las m ecuaciones simultáneamente.

Un sistema de ecuaciones lineales como el anterior puede escribirse en forma matricial como $AX = B$ donde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots\vdots\vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ es la matriz de coeficientes

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es el vector de incógnitas

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ es el vector de términos independientes

La matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que denotaremos por $[A|B]$ es llamada Matriz Aumentada del sistema $AX = B$, que está compuesta por los coeficientes de las variables del sistema y los términos independientes.

Ejemplo:

Representar en la forma matricial $AX = B$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 - 3x_3 + x_4 = 60 \\ 4x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 125 \end{gathered}$$

Representación Matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 125 \end{bmatrix}$$

Sistemas consistentes e inconsistentes

Si un sistema de ecuaciones tiene solución, se dice que el sistema es consistente, en caso contrario, se dirá que es inconsistente.

Ejemplos: El sistema

$$\begin{gathered} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{gathered}$$

Es consistente, puesto que la 3-upla (1,2,3) correspondiente a $x = 1, y = 2$, $z = 3$ es una solución del sistema. Veamos que al reemplazar las variables x, y y z por sus correspondientes valores en todas las ecuaciones se verifican las igualdades:

$$\begin{gathered} 3(1) + 2(2) - (3) = 4 \\ (1) - 2(2) + (3) = 0 \\ 2(1) + (2) - (3) = 1 \end{gathered}$$

El sistema

$$\begin{gathered} 3x + y = 1 \\ 3x + y = -2 \end{gathered}$$

Es inconsistente, puesto que al reemplazar $3x + y$ por 1 en la segunda ecuación obtenemos $1 = -2$, lo cual es falso.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, cuando toda solución de uno de ellos, lo es también del otro.
Ejemplo:
Los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 6x + 2y = 6 \\ 10x + 6y = 10 \end{cases}$$

son equivalentes, puesto que la solución única de los dos sistemas es $x = 1$ y $y = 0$

Observación: El segundo sistema de ecuaciones se puede obtener del primero, multiplicando la primera ecuación por (2) y la segunda ecuación por (2).

MÉTODOS DE ELIMINACIÓN

El método básico para resolver un sistema de ecuaciones lineales es sustituir el sistemas dado por un nuevo sistema que tenga el mismo conjunto solución, pero a su vez sea más simple. Para esto, se utiliza un algoritmo que consiste en la aplicación de tres tipos de operaciones con el fin de eliminar incógnitas de manera sistemática.

Operaciones elementales fila

Sea A una matriz de orden m x n. Se pueden realizar tres tipos de operaciones con las filas de una matriz A, que llamaremos operaciones elementales de fila.
Para $r, s \in \{1,2, \dots, m\}$:

1. $E_{rs}(c)$: operación elemental que consiste en sustituir la fila r por la resultante de sustraer a la fila r, c veces la fila s.
2. P_{rs}: operación elemental que consiste en intercambiar las filas r y s.
3. $M_r(c)$: operación elemental que consiste en sustituir la fila r por el resultado de multiplicar la fila r por una constante $c \neq 0$.

Ejemplo:

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizar sobre las filas de A la operación elemental indicada en cada caso:

a. $E_{21}(2)$
b. P_{23}
c. $M_3(1/_2)$

Solución

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Otra notación es$f_2 \to f_2 - cf_1$:, que indica la fila 2 se va a sustituir por el resultado de restar de la fila 2, c veces la fila 1.

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_3(1/_2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz Escalonada

Una matriz U de orden m x n, es escalonada si satisface las siguientes condiciones, en las que llamaremos pivote a la primera componente distinta de cero de cada fila no nula.

1. Primero vienen las filas distintas de cero y luego las filas de ceros.
2. Debajo de cada pivote en la columna correspondiente, todas las componentes son ceros.
3. El pivote de cada fila está a la derecha del pivote de la fila anterior.

Ejemplo:

$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ es escalonada, los pivotes están en las columnas 2, 3 y 5

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ no es escalonada

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & -6 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 4f_1]{f_2 \to f_2 - (-3)f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - (-2)f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Matriz Escalonada Reducida

Una matriz m x n tiene la forma escalonada reducida por filas, cuando satisface las siguientes condiciones:

- Tiene la forma escalonada
- El primer elemento no nulo de cad fila es 1 y es el único elemento distinto de cero de la respectiva columna.

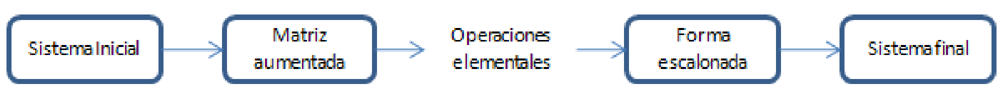
Ejemplo:
Las matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ están en la forma escalonada reducida.

Método de Gauss

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss, se utilizan las operaciones elementales entre filas, para transformar la matriz aumentada del sistema original, en la matriz aumentada en forma escalonada de un sistema equivalente. Los pasos a seguir son:

I. Formar la matriz aumentada $[A|B]$
II. Transformar la matriz aumentada a su forma escalonada mediante operaciones elementales fila.
III. Escribir el sistema correspondiente a la forma escalonada y de este sistema se obtiene la solución.



Método de Gauss - Jordan

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss - Jordan, se utilizan las operaciones elementales entre filas, para transformar la matriz aumentada del sistema original, en la matriz aumentada en forma escalonada reducida de un sistema equivalente. Los pasos a seguir son:

I. Formar la matriz aumentada $[A|B]$
II. Transformar la matriz aumentada a su forma escalonada reducida mediante operaciones elementales fila.
III. Escribir el sistema correspondiente a la forma escalonada y de este sistema se obtiene la solución.