# MATRICES

## CONCEPTOS BÁSICOS

### Definición: Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos. Por ejemplo:

es una matriz de 3 x 2 (que se lee “3 por 2”) pues es un arreglo rectangular de números con tres filas y dos columnas. En este caso los elementos son 2, 3, 4, 0, 7, 1.

En términos más generales,

es una matriz de orden m x n, donde representan los elementos de esta matriz dispuestos en m filas y n columnas (m y n pertenecientes a los enteros positivos)

*Notación:*

1. *,* forma abreviada
2. : elementos de la matriz, para y ,
3. denota la i-ésima fila de A.
4. denota la j-ésima columna de A.

Ejemplo:

Sea



### Igualdad de matrices

Sean y matrices del mismo orden m x n. decimos que A = B si y solo si , para todo y .

Ejemplo:

Sean y

Las matrices A y B tienen orden 2 x 2, y además A = B si se cumple:

, , ,

## TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

*Matriz Cuadrada*: es aquella que tiene el mismo número de filas y columnas. Se dice que tiene orden , pues . La *diagonal principal* está conformada por los elementos ; la suma de estos elementos se llama *Traza de la matriz* y se nota .

Ejemplo:

Sea

A es una matriz de orden 2 x 2, tiene el mismo número de filas y de columnas. Los elementos de la diagonal principal son: y , luego la traza de A es:

*Matriz Identidad*: es una matriz cuadrada en la cual los elementos situados sobre la diagonal principal son iguales a uno y el resto de los elementos son iguales a cero. Para cualquier matriz A, se cumple

Ejemplo:

*Matriz Nula*: es una matriz que tiene cualquier tamaño con todos los elementos iguales a cero. Por lo tanto para cualquier matriz A,

Ejemplo:

*Vector fila*: matriz que tiene una sola fila. Es de orden o dimensión .

Ejemplo:

*Vector Columna*: matriz que tiene una sola columna. Es de orden o dimensión .

Ejemplo:

*Matriz Triangular Superior:* es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son iguales a cero. La matriz es triangular superior si .

Ejemplo:

*Matriz Triangular Inferior:* es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son iguales a cero. La matriz es triangular inferior si .

Ejemplo:

*Matriz diagonal:* una matriz cuadrada es diagonal si los elementos no diagonales son todos nulos.

Ejemplo:

## MATRIZ TRANSPUESTA

Sea una matriz de orden m x n. La matriz transpuesta de A, denotada por , se obtiene al intercambiar las filas por las columnas, donde .

Ejemplo:

Si

Al intercambiar las filas por las columnas se obtiene:

### Propiedades de la matriz Transpuesta

Si A y B son matrices y k un número real, entonces:

## MATRIZ SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Sea A una matriz cuadrada:

1. Decimos que A es simétrica si , entonces
2. Decimos que A es antisimétrica si , entonces

Ejemplo:

Sea ,

La matriz A es simétrica porque

Sea ,

La matriz B es antisimétrica porque

## OPERACIONES CON MATRICES

### Suma de matrices

Sean y matrices del mismo orden m x n. La suma de A y B, denotada A + B es una matriz de orden m x n, cuya componente ij-ésima es .

y

Entonces:

*Propiedades de la adición de matrices*

* *Asociativa*

Dadas las matrices A, B y C de orden m×n:

* *Conmutativa*

Dadas las matrices A y B de orden m×n:

* *Existencia de matriz cero o matriz nula:*

Existe una matriz , tal que para toda matriz A de orden mxn, se satisface:

*= = A*

* *Existencia de matriz opuesta o inverso aditivo:*

Existe una matriz , tal que para toda matriz A de orden mxn, se satisface:

*A + (-A) =*

### Producto por escalar

Si A es una matriz de orden m x n y k es un escalar (número real), podemos obtener otra matriz de orden m x n, multiplicando cada componente de A por el escalar k.

*Propiedades del producto por escalar*

Sean A y B matrices de orden m x n, y *k* y *r* números reales:

### Multiplicación de matrices

1. Producto de vector fila por vector columna

Sea una matriz de orden 1 x m y una matriz de orden mx 1, entonces:

1. Producto de una matriz por un vector columna

Sea una matriz de orden m x n y un vector columna de orden n. El producto AX es un vector columna de orden m.

1. Producto entre matrices

Sea una matriz de orden m x n y una matriz de orden nxr. El producto AB es una matriz de orden m x r, cuya ij-ésima componente es el producto de la matriz fila i de A por el vector columna j de B. Si C denota la matriz producto AB, entonces el elemento ij-ésimo está dado por:

***Nota:***El producto matricial AB se define si y solo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

*Propiedades del producto de matrices*

1. Sean A una matriz de orden m x n, B una matriz de orden n x r y un escalar, entonces:
2. Asociativa: Para cualquier matriz A de orden m x n, B de orden n x r y C de orden r x s, se tiene:

)

1. Distributiva respecto a la suma: Sean A, B, C y D matrices tales que A es de orden m x n, B y C de orden n x r y D de orden r x s, se tiene:

***Nota:*** El producto de matrices no conmuta:

1. y entonces AB existe, pero BA no existe.
2. y , entonces AB existe y es de orden m x m; BA existe y es de orden n x n, por tanto, .
3. y , entonces AB existe y es de orden n x n; BA existe y es de orden n x n, sin embargo, usualmente .

Demostraciones

Propiedad asociativa: Debemos mostrar que la ij-ésima componente de es igual a la ij-ésima componente de ). Luego,

Propiedad distributiva: Debemos demostrar que

Las demás demostraciones se dejan como ejercicio.