Dubium sapientiae initium

Corso di “Fondamenti di Automatica”
A.A. 2008/09

Trasformata di Laplace

Prof. Carlo Cosentino
Dipartimento di Medicina Sperimentale e Clinica
Università degli Studi Magna Graecia di Catanzaro
tel: 0961-3694051
carlo.cosentino@unicz.it
http://bioingegneria.unicz.it/~cosentino

Concetti Principali

- Definizione
- Trasformate fondamentali
- Principali proprietà

- La trasformata di Laplace di una funzione *f(t)* si definisce come

$$f(t) \to F(s) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Si noti che *t* è una variabile reale, mentre *s* è una variabile complessa.

- Viceversa, data la *F(s)*, è possibile ottenere la funzione originaria *f(t)* mediante anti-trasformazione

$$F(s) \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Funzioni di Interesse

- Le funzioni di interesse per le applicazioni nel settore dell'automatica (di cui ci interessa calcolare la trasformata di Laplace) sono
  - Il gradino $1(t)$
  - La rampa $t \cdot 1(t)$
  - L'impulso $\delta(t)$
  - Le funzioni polinomiali in generale
  - Le funzioni esponenziali
  - Le funzioni sinusoidali

Trasformate dei Segnali Fondamentali (Ingressi)

- Queste trasformate rivestono una particolare importanza perché sono quelle legate ai tipici segnali di ingresso di un sistema di controllo

$$L(\delta(t)) = 1 \qquad\qquad L(1(t)) = \frac{1}{s}$$

$$L(t \cdot 1(t)) = \frac{1}{s^2} \qquad\qquad L(t^n \cdot 1(t)) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Trasformate dei Segnali Fondamentali (Modi di Evoluzione)

- Queste trasformate rivestono una particolare importanza perché sono quelle legate all'andamento temporale della risposta dei sistemi lineari (modi di evoluzione)

$$L(e^{\alpha t}1(t)) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$L(\cos(\omega t)\cdot 1(t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$L\left(\sin\left(\omega t\right)\cdot 1\left(t\right)\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Principali proprietà –1

- Linearità

$$L\left(af(t)+bg(t)\right)=aF(s)+bG(s)$$

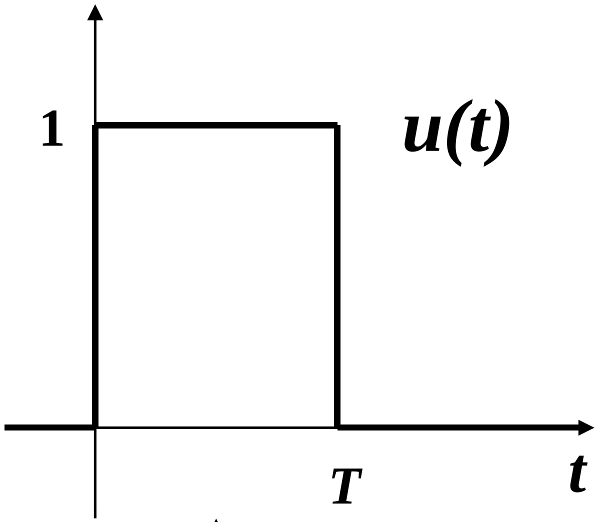
- Traslazione del dominio della s

$$L\left(e^{\alpha t}f(t)\right)=F(s-\alpha)$$

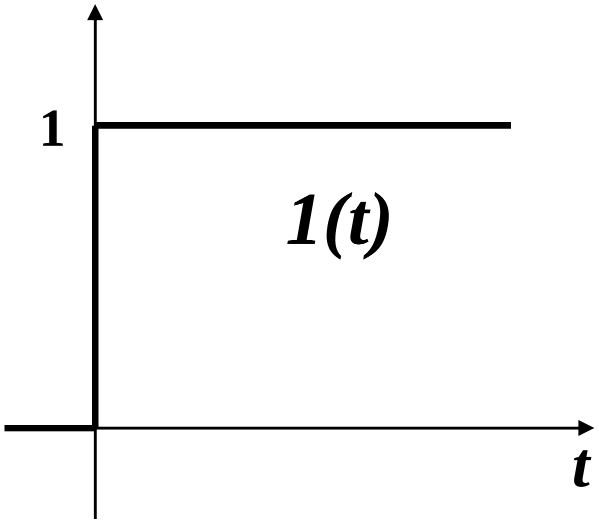
- Traslazione nel dominio della *t*

$$L\left(f(t-T)\right)=F(s)e^{-sT}$$

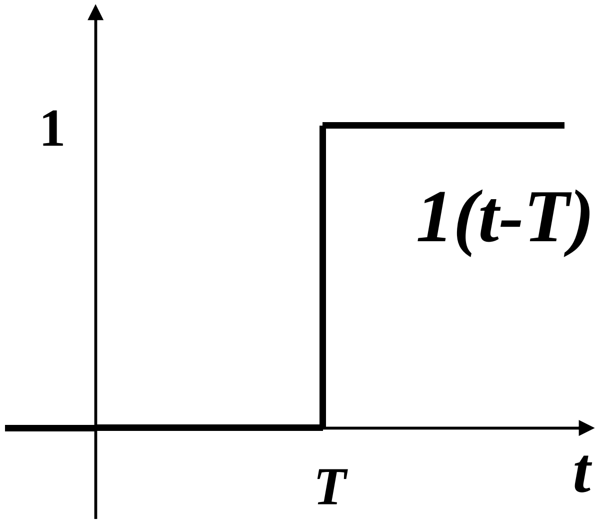
Esempio: Segnale a Finestra



$$=\quad \boxed{u(t)=1(t)-1(t-T)}$$



$-$



Esempio: Segnale a Finestra

- La trasformata della finestra si può quindi calcolare a partire dalle trasformate dei due gradini

$$
\begin{aligned}
L(u(t)) &= L(1(t) - 1(t-T)) \\
&= L(1(t)) - L(1(t-T)) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}
\end{aligned}
$$

Esempi di Trasformate

$$L\left(te^{\alpha t}\cdot 1(t)\right)=\frac{1}{\left(s-\alpha\right)^2}$$

$$L\left(e^{\alpha t}sen\left(\omega t\right)\cdot 1(t)\right)=\frac{\omega}{\left(s-\alpha\right)^2+\omega^2}$$

$$L\left(e^{\alpha t}\cos\left(\omega t\right)\cdot 1(t)\right)=\frac{s-\alpha}{\left(s-\alpha\right)^2+\omega^2}$$

Principali proprietà - 2

- Derivazione nel dominio del tempo

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

- Integrazione nel dominio del tempo

$$L\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

Principali proprietà - 3

- Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- Teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$